i.r.e.m.
UNIVERSITE PARIS VII

ESQUISSE D'UNE GENESE DES NOTIONS D'ALGEBRE LINEAIRE ENSEIGNEES EN DEUG

PAR JACQUELINE ROBINET

cahier de didactique des mathematiques
numéro 29
mai 1986

I Introduction

Au programme du DEUG scientifique, on trouve quelques notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, sous-espace vectoriel, système libre, système générateur, base, application linéaire, rang, déterminant, matrice, système d'équation linéaire.

Ces notions, qui semblent familières et simples aux spécialistes, posent quelques problèmes d'apprentissage aux étudiants de DEUG.

Beaucoup d'entre eux se plaignent du haut degré "d'abstraction" de ces notions, et il leur est quasiment impossible de traduire les résultats d'algèbre linéaire en termes de propriétés connues de l'espace à trois dimensions ; autrement dit, ils n'arrivent pas à voir l'aspect géométrique de l'algèbre linéaire et il y a pour eux une grande distance entre les propriétés des espaces vectoriels "abstraits" et celles des vecteurs du plan et de l'espace qu'ils connaissent depuis la troisième. Il y a bien sûr un saut entre l'enseignement du calcul vectoriel et celui des concepts d'algèbre linéaire : on fait explicitement intervenir le langage des ensembles, on utilise des quantificateurs, on emploie une écriture très formalisée pour décrire les lois des espaces vectoriels. Mais ce saut dans la généralisation et dans la formalisation ne peut peut-être à lui seul expliquer les difficultés des étudiants. Les enseignants sont assez souvent étonnés de voir leurs étudiants buter sur des notions d'algèbre linéaire (indépendamment des ensembles et du formalisme), les notions en questions étant pour eux complètement "transparentes". Pour savoir s'il ne s'agit pas d'une "illusion de transparence", nous avons essayé de chercher dans l'histoire le cheminement de la science mathématique qui a amené à ces notions "simples" et néanmoins fondamentales d'algèbre linéaire.

Pour cela nous avons utilisé différentes sources : quelques textes historiques, des articles d'Encyclopédies récentes et anciennes, des manuels d'histoire des mathématiques, et les préfaces ou les commentaires de certains manuels d'enseignement (voir annexes et bibliographie).

Notre travail nous permet de faire plusieurs constatations : tout d'abord ces notions sont liées au développement de l'arithmétique, en effet on calcule sur des nombres de plus en plus sophistiqués (ces nouveaux nombres apparaissant comme solutions d'équations).

Ensuite l'extension du calcul à des objets autres que des nombres conduit d'une part à la notion de loi de composition, puis à celle de structure algébrique, et d'autre part à l'invention du calcul vectoriel. Parallèlement, l'étude des systèmes d'équations permet l'émergence des concepts de déterminants et de matrices. C'est finalement la présence de tous ces concepts et le langage des ensembles qui permettront à Peano de donner pour la première fois en 1888 la définition d'un espace vectoriel sur R. Les concepts d'espace vectoriel et d'application linéaire n'ont pas eu un caractère-outil immédiat ; en effet il a fallu attendre les travaux d'analyse de Hilbert pour que ces notions commencent à montrer leur intérêt en permettant de donner une image "géométrique" des concepts d'analyse.*

Nous allons essayer d'esquisser les grandes lignes du développement historique de l'algèbre, en montrant comment naît en une lente évolution, la notion de structure algébrique, nous insisterons tout spécialement (vu notre sujet) sur le développement du calcul vectoriel.

* Cet aspect de caractère-outil du concept visant à permettre d'étudier dans un cadre géométrique un problème d'analyse rend encore plus regrettable le fait que pour les étudiants il n'y ait pas de lien entre la géométrie de l'espace et l'algèbre linéaire.

II Notion d'espace vectoriel

1° Utilisation de nombres et d'inconnues dans le calculs

*Babylone

Dès la plus haute antiquité, calcul sur les nombres et résolution d'équations se développent simultanément. Ainsi vers 1800 avant J.C, on peut trouver chez les Babyloniens la résolution de problèmes à l'aide " d'équations " du premier ou second degré à une ou plusieurs inconnues. Ces Babyloniens sont habiles dans la décomposition en " facteurs " de différentes expressions de degré supérieur à 2, et ils peuvent ainsi résoudre des équations de degré élevé grâce à des équations du second degré. Les Babyloniens n'utilisent pas de notations symboliques mais des mots ou des phrases, et s'ils emploient un langage géométrique pour désigner l'inconnue : "le côté" et son carré : "le carré", ils écrivent des équations où l'homogéinité des dimensions n'est pas forcément respectée, par exemple :

$$X^2 + X = 0 \quad \text{(en langage moderne)}$$

Ils n'utilisent bien sûr pas de nombres négatifs, ni de nombres irrationnels, mais des nombres exprimables en base 60. Leur traitement des "équations" peut être considéré comme le premier pas vers l'algèbre.

*L'Egypte

Vers 1700 avant J.C, on peut trouver dans les papyrus égyptiens des problèmes faisant intervenir des équations du premier degré. Le traitement de ces équations est beaucoup plus sommaire ; mais par contre les Egyptiens utilisent quelques quelques symboles : pour l'addition, la soustraction et la racine carrée.

*La Grèce

Le calcul sur les nombres n'est pas considéré comme une activité mathématique, et seule la géométrie est digne de l'attention des mathématiciens, au moins jusqu'à Diophante (vers 400 ans avant J.C). Les Grecs représentent les nombres par des longueurs et traitent géométriquement les problèmes se ramenant à des équations du premier ou du second degré. Il n'y a pas de manipulations sur l'équation elle-même. Diophante, reprenant, peut-être, les travaux et les résultats hérités des Babyloniens ou des égyptiens ou tout simplement les redécouvrant lui-même, développe des règles de calcul sur nombres et inconnues. Il élabore un système de notations destiné à représenter par des signes abrégés particuliers l'inconnue, les puissances de l'inconnue. C'est un système de notation encore assez sommaire puisque seule la soustraction est pourvue d'un symbole, l'addition et la multiplication se faisant par juxtaposition (ce n'est pas trop ambigu parce qu'il s'agit d'une succession de monômes* et que l'on ne peut nommer qu'une inconnue à la fois). Bien qu'il ait inventé des écritures abrégées, Diophante expose quand même ses résultats dans la forme habituelle du discours (habituelle pour la géométrie et pour les autres algébristes). Les quelques abréviations qui apparaissent dans son discours restent à l'état de sténographie, puisqu'il n'opère pas sur les notations abrégées.

Chez les auteurs d'histoire des mathématiques, cette écriture qui fait la liaison entre le discours et l'écriture algèbrique a été appelée "algèbre syncopée". Les équations de Diophante ont pour champ l'ensemble des rationnels positifs ; le traitement qu'il en fait présente un progrès par rapport au

* En langage moderne

traitement géométrique et pourtant pendant longtemps c'est le traitement géométrique qui aura du succès, l'oeuvre de Diophante ne réapparaîtra en Occident qu'au 16e siècle, sans doute ramenée par les mathématiciens arabes.

*L'Inde

Vers les VI et VIIe siècle, les indiens utilisent dans leurs calculs des nombres négatifs et des irrationnels ; cette tâche leur est sans doute facilitée par le symbolisme qu'ils ont introduit : numération de position, utilisation du zéro, possibilité de représenter en même temps plusieurs inconnues.

*Les Arabes

Pour l'élaboration des calculs arithmétiques et algébriques, et dans le domaine du traitement des équations algébriques, les mathématiciens arabes font faire aux mathématiques d'importants progrès.

Au IXe siècle, Al Khwarizmi introduit le système décimal et les techniques opératoires liées à ce système (on retrouve l'utilisation d'un symbole 0 qui a toutes les caractèristiques du zéro). Il écrit un traité d'algèbre en langue arabe où il enseigne comment résoudre les équations du premier et second degré à coefficients numériques, pour cela il n'utilise pas de symbolisme, mais seulement le discours. Il ramène les équations du second degré à 6 types canoniques qu'il résoud (en utilisant des constructions géométriques pour certaines). C'est la première étude systématique de l'équation du second degré à coefficients numériques, on peut voir là le début de la théorie des équations algébriques. Son disciple, Abu Kamil, élargit le calcul sur des expressions irrationnelles et introduit des équations à plusieurs inconnues. A cette époque, on trouve encore chez les arabes une forte influence de la tradition géométrique grecque.

Du Xe au XIIe siècle, deux courants vont se développer, l'un est plus fortement influencé par les travaux de Diophante (et peut-être des Indiens), l'autre continue la tradition géométrique.

- Courant plus "arithmétique"

Les mathématiciens Arabes développent un certain nombre d'algorithmes de calcul : extraction de racines carrées et cubiques, décomposition décimale d'un nombre, etc... Al Karagi va essayer de dégager des règles de calcul analogues non plus pour des nombres, mais pour des expressions algébriques contenant l'inconnue (en termes modernes sur des monômes). Son principal successeur As-Samawal expose systématiquement des règles de calcul sur des nombres négatifs et sur des exposants.

A la fin du XIIe siècle, les algorithmes de division et d'extraction de racine carrée ont été étendus aux expressions de la forme $\sum_{k=-m}^{k=m} a_k x^k$ (notation moderne où les a_k sont chez les Arabes des nombres explicites).

- Courant plus "géométrique"

De nombreux problèmes de géométrie débouchent sur des équations de degré 3. Dans l'algèbre, Al Kayyam classe systématiquement les équations de degré 2 et 3 d'après le nombre de termes qu'elles contiennent. Les essais de solution qu'il développe sont particulièrement ingénieux et si les solutions négatives et à plus forte raison imaginaires ne s'y trouvent pas, l'auteur obtient les trois racines de l'équation cubique dans certains cas où celles-ci sont toutes les trois positives.

A partir du XIIe siècle, les mathématiciens Arabes s'intéressent aux valeurs approchées des racines d'équations. Sharaf Al Dim Al Tusi utilise une méthode de résolution numérique approchée pour des équations de degré 2 et 3 non binômiales.

Al Kashi expose pour la première fois la théorie des fractions décimales des racines de certaines équations cubiques lorsqu'on sait qu'elles ont une racine positive très petite. Al Qalasadi introduit un certain nombre de symboles pour la racine carrée, pour les puissances 1, 2 et 3 des inconnues et pour l'égalité.En résumé au début du XVe siècle,les règles de calcul numérique sont étendues, par les uns ou les autres, à :

- des nombres négatifs,
- des nombres irrationnels positifs,
- des fractions décimales,
- des expressions irrationnelles,
- des expressions polynômiales.

*L'Occident

A partir du XVe siècle, la Renaissance ramène en Occident, entre autres choses, le goût pour l'étude de la nature et aussi des mathématiques grecques ; de plus, le développement du grand commerce va favoriser la diffusion * des mathématiques Arabes (et par leur intermédiaire, de l'oeuvre de Diophante). C'est sans doute la conjugaison de ces deux phénomènes qui redonne, aux mathématiciens occidentaux, du goût pour l'étude des nombres et des équations. A cette époque, il y a floraison de manuels de calcul tels "La triparty en la science des nombres" de Nicolas Chuquet (1484) et "Summa de Arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita" de Luca Pacioli (1494). Dans "La triparty", on trouve des racines négatives d'équations, et un développement important du symbolisme en particulier en ce qui concerne la notation expotentielle utilisée aussi bien pour les inconnues que pour les racines. "Summa de Arithmetica" constitue une synthèse

*Liber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci présente un tableau complet des connaissances des Arabes à cette époque .

des connaissances mathématiques du Moyen Age, on y retrouve la classification des équations du second degré faite par les Arabes. Ce manuel va constituer le point de départ des travaux des rénovateurs du XVIe siècle.

2° Calculs sur des nombres négatifs, irrationnels, imaginaires et sur des lettres

Deux problèmes vont s'imposer aux mathématiciens occidentaux du XVIe siècle, d'une part il paraît nécessaire pour progresser d'expliciter les règles de calcul et d'élaborer une terminologie cohérente et des notations appropriées, d'autre part il convient, pour développer la théorie des équations algébriques, de s'attaquer à des équations de degrés supérieurs à 2. Ces deux aspects vont être effectivement traités, et si les problèmes posés ne sont pas complètement résolus, de grands progrès vont être faits dans les deux domaines concernés.

L'école Allemande (les chosistes du nom "chose" donné à l'inconnue) s'efforce d'élaborer une notation commode et introduit des abréviations ; mais avec ce travail, le pas décisif n'est pas fait.

En effet les opérations ne sont pas encore dégagées des nombres sur lesquels elles portent et ne sont pas encore considérées comme des objets que l'on peut étudier pour eux-mêmes. Les notations allemandes sont essentiellement celles mises au point par C. Rudolff et M. Stifel (vers 1525).

L'école italienne fait faire de gros progrès à la résolution des équations algébriques et au calcul sur de nouveaux nombres. Il est difficile d'attribuer telle ou telle invention à son véritable auteur. Cependant il semble à peu près certain que c'est Scipione Del Ferro qui à la fin du XVe siècle donna une formule de résolution par radicaux des équations de la forme $x^3+ax=b$ (en notation moderne), formule qui amène Cardan (1501-

1576)et ses élèves à calculer sur des racines carrées des nombres négatifs, alors que les nombre négatifs eux-mêmes étaient encore regardés avec méfiance par beaucoup de mathématiciens.

Ferrari, élève de Cardan donne en 1545 un procédé pour résoudre par radicaux l'équation générale du 4e degré à l'aide d'une équation auxiliaire du 3e degré. Bombelli, lui aussi élève de Cardan, abordant le cas irréductible des équations du 3e degré, décide d'opérer au moyen des racines carrées des nombres négatifs en leur appliquant les mêmes règles qu'aux racines carrées des nombres positifs (Algebra 1572). Il introduit des notations assez performantes ; les racines des équations sont considérées comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés de 4 signes possibles : Piu pour + ; meno pour - ; Piu di meno pour $+\sqrt{-}$; meno di meno pour $-\sqrt{-}$ et Bombelli ènonce les règles pour multiplier et additionner des nombres précédés d'un de ces quatre éléments.

Les algébristes du début du XVIe siècle ont fait accomplir des progrès au concept d'opération, puisque Bombelli de façon consciente ènonce des règles de calcul sur de nouveaux nombres ; mais au niveau des notations, il n'y a pas encore de symbolisme qui permette d'énoncer les résultats sous forme synthétique et il est encore nécessaire d'étudier un grand nombre d'exemples.

Cependant, la manipulation de certaines expressions algébriques à une ou plusieurs inconnues et à coefficients numériques devient de plus en plus courante.

*La fin du XVIe siècle voit avec François Viète (1540-1603) se produire une mutation fondamentale pour les notations. Il a eu en effet l'idée de désigner par des lettres non seulement l'inconnue et les puissances de l'inconnue (ce que faisait déjà Stifel) mais aussi les coefficients indéterminés. L'introduction des lettres n'a rien de révolutionnaire en effet, les Grecs les utilisaient pour désigner des objets géométriques et de nombreux mathématiciens du moyen âge pour désigner des nombres (Manolico,M. Stifel (1544), J. Peletier (1554), J. Bonel (1559) sous le nom de Buteo).

Mais par contre, l'introduction systématique des lettres pour représenter les coefficients dans les équations transforme l'étude des nombreux cas particuliers dans l'étude de types généraux d'expressions et d'équations, puisque ce qui est fait pour le cas général est vrai pour chaque cas particulier. Viète lui-même distingue la "logistica speciosa" qui permet d'opérer sur des espèces, des classes d'objets, de la "logistica numerosa" qui ne permet d'opérer que sur des nombres.

Le travail de symbolisation de Viète va être amélioré quelques années plus tard par Descartes, qui poursuivant l'idée de Viète de liens entre algèbre et géométrie, va de plus créer la géométrie analytique ce qui lui permet de résoudre des problèmes sur les courbes en utilisant leurs équations.

Grâce à ses notations, Viète avait exprimé les relations entre coefficients et racines d'une équation (qui furent d'ailleurs mieux mises en relief par Thomas Harriot qui avait encore simplifié les notations de Viète) et il savait que l'on peut construire une équation du nième degré ayant n racines. Albert Girard (1629) "affirme déjà que, puisque certaines équations algébriques (à coefficients réels rationnels) admettent autant de racines que l'indique leur degré, il est utile, quand on a affaire à une équation algébrique admettant moins de racines que ne l'indique son degré d'introduire autant de solutions impossibles qu'il lui en manque pour que le nombre total des racines et des solutions impossibles soit dans tous les cas précisément égal au degré de l'équation" (ESMPA se référant à "l'invention nouvelle en Algèbre" de Girard publié en 1629 à Amsterdam). Il n'est pas clair que les solutions impossibles" de Girard ou les "racines imaginaires" de Descartes pour les équations de degrés soient de la forme $a + b\sqrt{-1}$ comme pour les équations de degré 2. Le théorème fondamental de l'Algèbre énoncé pour la première fois par Girard est encore très imprécis parce-que ce point n'est pas encore démontré.

3° Explosion de "calculs"

Les essais successifs de démonstration du théorème fondamental de l'algèbre et les essais de résolution par radicaux des équations algébriques vont amener les mathématiciens à élaborer un nouveau calcul :

calcul sur les substitutions

Euler et d'Alembert ont donné des démonstrations du théorème fondamental (nécessairement incomplètes parce que la notion de réel et celle de complexe n'étaient pas encore élaborées) et ont étudié les équations algébriques, mais sur ce fait ils n'ont pas tellement fait progresser les choses.

Lagrange et Vandermonde se livrent à peu près simultanément (1770) à des recherches approfondies sur l'étude et des fonctions rationnelles des racines d'équations algébriques et de leur comportement en cas de permutations sur les racines. Cette théorie ne leur permet pas de résoudre le problème de résolution des équations algébriques, mais elle fait apparaître ces mathématiciens comme les précurseurs de la théorie des substitutions. Lagrange écrit dans la conclusion de son mémoire de 1770-1771 : "Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations et l'analyse la plus propre à y conduire ; tout se réduit, comme on voit, à une espèce de calcul des combinaisons, par lequel on trouve a priori les résultats auxquels on doit s'attendre" (oeuvres tome 3).

Les recherches de Lagrange sont reprises par Ruffini puis par Abel qui démontre l'impossiblité de résoudre par radicaux l'équation générale du 5e degré.

Reprenant l'étude des substitutions, Cauchy montre (1815) que, en termes modernes, si S est une substitution d'ordre n, et si r est premier avec n , S^r engendre "le même groupe cyclique" que S. Cauchy invente la notation en deux lignes des substitutions *, il manipule des produits de substitutions et définit l'ordre d'une substitution. En 1844-46, Cauchy publie un "Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données", il y étudie systématiquement la structure du groupe des substitutions sur les lettres. Cette étude est présentée indépendamment de son lien avec les équations, c'est en quelque sorte, la première étude d'une structure algébrique pour elle-même.

Parallèlement, Galois ramène l'étude d'une équation algébrique à celle du "groupe" fini de permutations de ses racines ; à ce propos, il introduit les notions importantes de sous-groupe distingué et de suite normale (en langage moderne). Les résultats les plus importants obtenus dans le domaine des groupes de permutations au XIXe siècle sont ceux de Jordan (Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870) et ceux de Sylow sur les groupes finis .

Avec Cauchy et Galois, on assiste à l'étude consciente d'une structure algébrique, ce n'est pas encore l'étude de la structure de groupe, mais l'étude de la structure d'un groupe particulier.

Dans le même temps, se sont développés des calculs sur des objets qui ne sont plus du tout des nombres.

*Cauchy décrit une substitution d'abord par $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$ puis par $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

Calcul symbolique

En Angleterre, des mathématiciens de Cambridge se mettent à réfléchir sur le rôle et l'importance des symboles. Peacock (1833) fait une distinction encore plus poussée que celle de Viète entre l'algèbre arithmétique ou calcul sur les nombres et l'algèbre symbolique ou calcul sur les lettres ; ces lettres peuvent représenter n'importe quel objet et toutes les opérations sont jugées possibles pourvu que lorsqu'on remplace ces lettres par des nombres on obtienne encore un nombre. Peacock croit pouvoir énoncer un principe de permanence (fondé sur le fait que lorsqu'on passe de N à Z, à Q, à R et C, les opérations gardent les mêmes propriétés).

Bien que ce principe soit mis en défaut par la découverte d'un produit non commutatif (les quaternions), l'école de Cambridge a ouvert la voie à une pensée plus abstraite et a amené l'idée que l'on pouvait calculer sur n'importe quels objets.

Calcul sur les congruences

Depuis longtemps la notion de congruence est utilisée (pour les preuves par 7, 9, 11 par exemple) et en particulier on peut trouver dans les oeuvres de Lagrange des résultats sur des équations portant sur des nombres congrus modulo p. C'est Gauss qui introduit la notation $\equiv$ (modulo .) Il ne calcule cependant pas directement sur les classes d'équivalence ; mais son étude systématique des congruences fait progresser les notions de classe d'équivalence, d'ensemble quotient, d'anneau et de corps fini.

Calcul sur des formes

Lagrange avait montré que l'on pouvait partager les formes $ax^2 + 2bxy + y^2$ (a,b,c entiers relatifs) de discriminant donné ($b^2 - ac$) en un nombre fini de classes, les formes d'une même classe se déduisant de l'une d'elles par un changement de variables $x = a'x'+b'y'$ et $y = c'x'+d'y'$ avec a', b', c', d' entiers relatifs vérifiant $a'd'-b'c' = 1$. Partant de ces résultats Gauss montre que si une forme F est transformée en F'par un changement de variables du type précédent, alors il existe un changement de variable réciproque de celui-ci toujours du même type qui transforme F' en F. Il dit alors que F et F' sont équivalents (et il s'agit bien d'une relation d'équivalence au sens moderne).Puis il introduit la notion de forme "composé" de deux formes appartenant à la même classe C_1 et si f' et g' sont deux formes appartenant à la même classe C_2 alors le composé de f et f' et celui de g et g' appartiennent à la même classe C_3 et il note $C_3 = C_2 + C_1$. Gauss manipule nettement une loi de composition sur des objets qui ne sont absolument plus des nombres. (Gauss, Les recherches arithmétiques, trad. par A.C.M Poulet-Delisle, Ed. Blanchard, Paris 1953).

Calcul sur des classes

Georges Boole (1815-1864) définit un calcul sur des classes (en langage moderne des ensembles) avec des notations appropriées désignant la réunion, l'intersection et le complémentaire.

Calcul sur des idéaux

En langage moderne, la notion d'idéal d'un anneau, au sens de sous-groupe additif qui est stable par la multiplication par un élément quelconque de l'anneau est introduite en liaison avec les travaux de Kummer par Dedekind dans le cas des anneaux d'entiers algébriques (il ne dit pas "anneau" mais "ordre"). Il montre que les "nombres idéaux" peuvent être représentés par les idéaux de l'anneau, donnant ainsi un exemple de loi de composition entre ensembles d'éléments. Il faut remarquer que c'est grâce à la possession du langage des ensembles qu'il venait d'introduire en collaboration avec G. Cantor qu'il a les moyens de manipuler des ensembles comme des objets.

Calcul dans les corps

Abel et Galois, après Gauss et Cauchy, ont considéré les "corps" engendrés par les racines ou les coefficients d'une équation ; mais en fait s'ils définissent avec précision l'appartenance d'une quantité à un tel corps, il ne considèrent pas explicitement la structure de l'ensemble ainsi constitué.

Avec Dedekind, on trouve la première étude systématique de la structure de certains ensembles : les corps de nombres algébriques. C'est Dedekind qui introduit le mot "corps". Il y aura encore l'étude de nombreux corps particuliers (Z / pZ, corps des classes résiduelles de polynômes à coefficients rationnels, corps de nombres p-adiques, corps des séries formelles) avant que Steinitz développe la théorie axiomatique des corps (1910).

Calcul sur les déterminants et les matrices

La notion de matrice et celle de déterminant ont mis assez longtemps à se différencier. Ils apparaissent au XVIIIe siècle à propos de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Dès 1678, Leibniz utilise une notation à indices pour résoudre un système de 3 équations à 2 inconnues. Par élimination,il montre que le système n'a de solutions que si une certaine quantité (dans laquelle nous reconnaissons un déterminant) est nulle, mais le déterminant n'est pas explicité. Le premier calcul explicite de déterminant pour des systèmes de 2 (resp.3) équations à 2 (resp.3) inconnues est fait par Mac Laurin en 1748. On trouve, en 1750, dans "l'introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques "de Cramer, les formules dites" de Cramer". En fait Cramer se contente de les démontrer dans les cas 2 et 3 et il conclut par induction qu'elles sont encore vraies pour n équations à n inconnues. Il n'étudie pas particulièrement le cas où "le déterminant" est nul, et il ne définit pas explicitement les déterminants qu'il considère comme des quantités associées à un système d'équations. Après 1770, Vandermonde et Laplace ont l'idée de définir un déterminant d'ordre n par récurrence sur n en faisant un développement par rapport à une ligne ou une colonne. Ils démontrent (pour des petites valeurs de n) quelques propriétés des déterminants, en langage moderne ils prouvent que les déterminants sont des formes multilinéaires alternées, et qu'un déterminant ne change pas si on transpose ses éléments (symétrie par rapport aux éléments de la diagonale). C'est Cauchy qui démontre les théorèmes généraux de la théorie des déterminants, en particulier, il définit le produit de deux déterminants. Ce travail paraît relativement déconnecté du problème des systèmes d'équations linéaires, et il semble donc être une étude systématique de nouveaux objets avec définition de lois de composition sur ces objets ("Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment" Cauchy. Oeuvres complètes tome 7, Cauthier-Villars Paris (1882-1974)).

D'autre part, Gauss avait adopté une notation en tableaux pour représenter les substitutions linéaires qui transformaient les formes quadratiques ternaires. Il note d'une lettre le tableau d'une substitution. Il établit donc dans un cas particulier les formules de produits de "matrices" et il est fort probable que Cauchy connaissait ces résultats quand il a établi les formules de produit pour les déterminants. Cependant, à cette époque, la notion de matrice comme objet sur lequel on peut calculer n'est pas encore complètement dégagée. En effet, si le produit des matrices avait été étudié, on trouverait des traces de l'étonnement que la non commutativité du produit aurait dû entraîner, or on ne trouve pas de remarques sur ce point. Il y a dans les travaux de Cauchy une étude du polynôme caractéristique des matrices symétriques d'ordre 3, mais il s'agit d'une étude conjoncturelle motivée par la recherche d'axes principaux de quadriques. C'est en 1853 avec Hamilton que l'on rencontre le premier essai d'étude explicite des règles du calcul sur les matrices, mais il ne s'agit que d'une ébauche dans la ligne du développement du calcul abstrait en Angleterre. A. Cayley, lui, développe de manière systématique le calcul matriciel dans une série d'articles et de mémoires écrits de 1855 à 1858. Il explicite le fait que la théorie des matrices doit précéder celle des déterminants et montre le lien entre matrices et systèmes d'équations linéaires, mais il souligne le fait que les matrices sont des objets sur lesquels on peut développer un calcul autonome. Il écrit dans "A memoir on the theory of matrices" : "It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they must be added , multiplied or compounded together , ... " .

E.Laguerre développe une théorie entièrement équivalente sous le sous le nom de "calcul des systèmes linéaires".

Aussi bien chez Cayley que chez Laguerre, les démonstrations sont faites dans les cas 2 ou 3, et le cas général s'en déduit par induction. Toutes ces études ne règlent pas définitivement les problèmes posés par les systèmes d'équations linéaires ; mais la notion d'équivalence de matrices, introduite par Sylvester vers 1860, permet à Frobenius de dégager la notion de rang (1878) d'où découle finalement la théorie achevée des systèmes d'équations linéaires.

Calcul sur des vecteurs

Nous allons regrouper ici tout ce qui participe à la genèse de ce calcul, car avec la théorie des déterminants et des matrices et les notions d'ensemble, de loi de composition... C'est le calcul vectoriel qui va donner naissance à la notion d'espace vectoriel. Certains des points que nous allons développer auraient pu être intégrés plus tôt dans l'exposé, mais nous les plaçons ici pour mettre en relief leur importance dans la genèse du calcul vectoriel.

L'usage de la géométrie analytique est très répandu au 18e siècle, mais d'une part cela donne des calculs souvent lourds et pénibles, d'autre part la physique a besoin de pouvoir énoncer des résultats indépendants du repère choisi. On ressent à cette époque le besoin d'un "calcul géométrique". Citons sur ce point la préface du "calcolo geometrico (1888)" de Peano qui résume bien le déroulement de la genèse du calcul " géométrique" :

"Le calcul géométrique, en général, consiste en un système d'opérations applicables aux êtres géométriques, analogues à celles que l'algèbre effectue sur les nombres. Il permet d'exprimer par des formules les résultats des constructions géométriques, de représenter par des équations les propositions de la géométrie et de substituer une transformation d'équations à un raisonnement. Le calcul géométrique présente une analogie avec la géométrie analytique ; il n'en diffère qu'en ceci : tandis qu'en géométrie analytique les calculs s'effectuent sur les nombres qui déterminent les êtres géométriques, dans cette nouvelle science, les calculs s'effectuent sur ces êtres eux-mêmes.

Une première tentative de calcul géométrique est due au génie de Leibniz (1679) ; au cours du siècle, on a proposé depuis et développé des techniques variées de calcul, qui se sont avérées utiles dans la pratique, parmi lesquelles il faut mentionner particulièrement le "Calcul Barycentrique" de Moebius (1827), celui des Equipollences de Bellavitis (1832), les quaternions de Hamilton (1843) et les applications à la géométrie de l'Ausdehnungslehre de Herman Grassmann.

Nous allons développer tous les calculs cités par Peano et pour comprendre l'invention des quaternions, nous sommes contraints de revenir à une période antérieure à celle qui voit apparaître la nécessité d'un calcul géométrique.

En effet, un moyen d'éviter l'usage des coordonnées pour calculer sur des éléments géométriques est d'utiliser la représentation géométrique des nombres complexes. Or cette représentation géométrique a eu une naissance longue et difficile. Au début, les mathématiciens ont cherché une représentation géométrique des nombres complexes non pour fonder un calcul géométrique dont ils ne percevaient pas encore la nécessité mais pour légitimer les règles de calcul sur les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$. C'est dans l'"Algebra" de John Wallis publiée en 1673 que l'on trouve la première tentative intéressante de représenter géométriquement les racines imaginaires des équations du second degré. Wallis a l'intuition que si A peut se représenter par l'asbcisse d'un point sur "l'axe des réels" (en langage moderne), il est par contre nécessaire d'utiliser un point du plan non situé sur "l'axe des réels" pour représenter la quantité B $\sqrt{-1}$. (voir annexes). C'est près d'un siècle plus tard, qu'apparaît une représentation analogue à la représentation moderne. En 1798, C. Wessel mathématicien norvégien introduit l'axe des imaginaires avec $\sqrt{-1}$ comme unité (On the analytic representation of direction.Proceedings of the Royal Society of Danmark 1799). Après avoir défini l'addition de segments de droite orientés par une méthode analogue à celle qui était utilisée depuis le XIVe siècle pour la composition des forces ou des vitesses , il définit aussi le produit (selon les règles connues pour les nombres complexes). La méthode de Wessel n'a pas été connue avant qu'elle soit traduite en français en 1897 ; elle avait été redécouverte en partie par Buée en 1805 dans son "Mémoire sur les quantités imaginaires", puis en totalité par J.R. Argand en 1806 dans son "Essais sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques". Ces travaux passent eux-mêmes relativement inaperçus malgré leur publication dans les Annales de Gergonne. En 1828, Warren en Angleterre et Mourey en France redonnent la même construction sans tellement plus de succès. Cette représentation géométrique ne sera définitivement adoptée que lorsque Gauss (en 1831) et Cauchy (en 1847) l'utilisent avec profit et pour des raisons autres que la validation du calcul sur les nombres complexes. C'est plutôt le côté producteur que peut jouer la représentation géométrique dans le domaine de l'analyse qui a amené Cauchy et Gauss à l'utiliser.

D'un autre côté, un mathématicien italien Bellavitis introduit en 1832 la théorie de l'équipollence et définit un calcul sur les vecteurs du plan dont il étudie des applications géométriques et physiques. Il a aussi défini la somme des vecteurs de l'espace.

Les mathématiciens qui on travaillé sur la représentation géométrique des nombres complexes ont pour la plupart essayé d'étendre leur calcul à tout l'espace sans grand succès. Par exemple, Servois, dont les résultats ont été publiés en 1813 dans les Annales de Gergonne, pense avoir trouvé une solution, il définit un vecteur par pcosA + qcosB + rcosC où A , B , C sont les angles faits avec les trois axes et p, q, r, trois nombres de la forme $A + B\sqrt{-1}$; mais il ne sait pas prouver l'adéquation de sa découverte.

Le mathématicien anglais Hamilton (1805-1866) va mettre au point un calcul sur les segments de l'espace dont il démontre qu'il prolonge à l'espace les résultats obtenus dans le plan avec les nombres complexes . Hamilton considère les nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$ comme des couples de réels ordonnés (a,b) sur lesquels il définit une addition et une multiplication de façon à ce qu'elles coïncident avec l'addition et la multiplication usuelles sur les nombres complexes.

Ensuite il cherche à définir une addition et une multiplica tion sur les triplets de nombres réels de façon à conserver les propriétés des opérations sur les nombres complexes. Son but est de construire un ensemble qui joue pour les rotations de l'espace le même rôle que les nombres complexes pour les rotations planes de centre O. Après plusieurs années de recherche, Hamilton est amené en 1843 à utiliser non pas des triplets de nombres réels mais des quadruplets et à abandonner la commutativité de la multiplication. Il appelle ces nouveaux nombres "des quaternions", ce sont les nombres de la forme $w + xi + yj + zk$ où w,x,y et z sont réels et où i, j, k vérifient $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$ $ji = -k$, $ij = k$, $ki = j$, $ik = -j$, $jk = i$, $kj = -i$ Cette découverte fait faire un grand pas à la notion de loi de composi tion ; en effet c'est le premier ensemble de nombres prolongeant $\mathbb{R}$ où la multiplication n'est pas commutative. Hamilton partage le quaternion en deux parties, d'une part le scalaire W et d'autre part le vecteur xi + yj + zk . Dans le produit VV' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - z'x)j + (xy' - yx')k il distingue la partie scalaire S(vv') qui est l'opposé du produit scalaire moderne et la partie vectorielle V(vv') qui est le produit vectoriel moderne.

Un professeur de physique anglais Tait va rendre la théorie des quaternions très populaire parmi les mathématiciens et les physiciens en publiant en 1867 un "traité élémentaire sur les quaternions".

Bien longtemps avant la découverte des quaternions, Möbius (1790-1868) mathématicien allemand, avait publié en 1827 un traité de calcul barycentrique qui lui permettait de définir une addition sur les vecteurs de l'espace indépendamment de tout repère (comme Bellavitis avec ses vecteurs équipollents), mais il ne pouvait pas définir de multiplication comme l'ont fait d'abord Hamilton avec ses quaternions puis Crassmann avec son "calcul d'extension" (Extensive Grösse).

Grassmann a l'idée de développer un calcul géométrique intrinsèque. En 1839, il écrit une thèse "Théorie des flots et marées", il y définit la somme de deux vecteurs de l'espace et leur produit : la surface orientée du parallèlogramme qu'ils définissent. Le produit de 3 vecteurs de l'espace est le volume orienté du parallélipipède qu'ils définissent.

Il introduit aussi un produit scalaire, il en étudie les propriétés et en calcule les composantes. Cette thèse n'est publiée qu'en 1911, c'est donc par d'autres traités que sont diffusées les idées de Grassmann, d'abord "Die lineale aus dehnungslehre, ein neuer Zweig der mathematik" (1844) assez difficile à lire de l'avis général puis surtout "Die lineale Aus dehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet" écrit en 1862. Gaussman introduit dans le traité de 1862 des hypernombres qu'il appelle "extensive Grösse". Un exemple d'hypernombre, appelé hypernombre primaire est fourni par l'expression :

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = \sum_1^n a_n e_n$$

où les a_n sont des nombres réels et les e_n des unités primaires soumises à certaines conditions. Addition et multiplication par un réel sont les opérations habituelles. Deux multiplications sont définies :

$$\sum_r a_r e_r \sum_s b_s e_s = \sum_{r,s} a_r b_s e_r e_s$$

avec $e_r | e_r = 1$ et $e_r | e_s = \emptyset$ ($s \neq r$) qui donne le produit scalaire, et $[e_r \; e_r] = \emptyset$ et $[e_r \; e_s] = -[e_s \; e_r]$ qui donne le produit vectoriel . Grassmann explicite les significations de ces produits en dimension 3 , il donne leurs coordonnées et leur expression en fonction de la longueur des vecteurs et de leur angle . Il définit aussi le produit mixte de 3 vecteurs :

$$Q = [ab]c = (a2b3-a3b2)c1+(a3b1-a1b3)c2+(a1b2-a2b1)c3$$

$$Q = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Il montre que Q peut être interprété géométriquement comme le volume d'un parallélipipède construit sur les segments de droite orientés qui sont les représentations géométriques des hypernombres. Le volume est calculé positivement ou négativement selon que le déterminant est positif ou négatif, ce qui correspond au fait que le repère que l'on a choisi pour représenter les 3 hypernombres est direct ou non. Grassmann remarque que en dimension 3 son produit scalaire est au signe près la partie scalaire d'un produit de quaternions et que son produit vectoriel en est la partie vectorielle.

En conclusion, la nécessité d'un calcul géométrique indépendant des axes de coordonnées a conduit plusieurs mathématiciens à dégager, durant la première moitié du XIXe siècle, les règles du calcul vectoriel et presque simultanément, ils ont généralisé les propriétés des espaces à 2 ou 3 dimensions en introduisant des espaces de dimension supérieure. Les éléments de ces espaces permettent tout d'abord l'utilisation du langage géométrique usuel pour interprèter des résultats algébriques valables sans modification pour un nombre quelconque de variables et susceptibles d'une interprétation géométrique dans le cas de 2 ou 3 variables (par exemple Cayley travaille sur des n-uplets et Grassman sur les hypernombres à n coordonnées).

Malgré cela, les travaux des mathématiciens de l'époque contiennent un grand nombre de calculs inextricables à l'aide de déterminants et le caractère intrinsèque des éléments utilisés est peu mis en relief . Jusqu'en 1930,c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédomine par rapport au point de vue vectoriel géométrique. Et pourtant, la genèse de la notion d'espace vectoriel s'achève en 1888 avec Peano qui donne une définition axiomatique des espaces vectoriels sur R et des applications linéaires dans "calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassman, preceduto dalle operazioni i della logica deduttiva". Il met en valeur le caractère géométrique des notions d'indépendance linéaire, de base et de rang.En 1888, le concept d'espace vectoriel en tant qu'objet est nettement dégagé par Peano, mais en fait les mathématiciens boudent la notion d'espace vectoriel, celui-ci n'a pas son caractère de concept-outil. C'est grâce aux progrès de l'analyse que les mathématiciens vont prendre conscience de la puissance généralisatrice de ces notions d'algèbre linéaire.

Dans son mémoire "Sur une classe d'équations fonctionnelles" (1903) Fredholm dégage clairement l'analogie, après un passage à la limite, entre sa théorie des équations intégrales et les formules de résolution des systèmes d'équations linéaires. Poursuivant ce travail (1904-1910), Hilbert ne fait pas explicitement allusion à la structure linéaire d'un espace de dimension infinie

infinie, mais il développe le concept de continuité d'une fonction d'une infinité de variables et pour cette extension, il construit formellement "l'espace de Hilbert" et utilise systématiquement des techniques linéaires pour étudier les opérateurs pour cet espace ; Toeplitz, élève de Hilbert donne la définition axiomatique d'un espace vectoriel sur un corps quelconque et étend à ces espaces de nombreux résultats d'algèbre linéaire en constatant qu'ils sont indépendants de la théorie des déterminants et subsistent sans supposer que l'espace est de dimension finie.

Vers la même époque Artin, Noether et Krull mettent en évidence, l'utilité des mêmes concepts dans le cadre plus général des modules sur un anneau.

III Notions de systèmes libres et générateurs et de bases.

Pour un mathématicien moderne, ces mots renvoient à l'idée de coordonnées, et c'est dans la géométrie analytique qu'on a l'idée de chercher la naissance du concept.

En fait, si l'on y regarde d'un petit peu plus près, il n'y a aucune de ces notions qui affleure dans la géométrie de Descartes. Il n'y a bien sûr pas de vecteur (donc pas de somme vectorielle, donc pas de décomposition possible sur une base), on ne trouve que le concept de longueur et celui implicite de projection : "Soient deux grandeurs liées l'une à l'autre : en représentant la première par une longueur sur le premier axe, l'autre par une longueur sur le second, on définit, en complétant le parallélogramme dont on vient de construire deux côtés, un point dans le plan : la relation entre les deux grandeurs exprime que le point se déplace sur une courbe". (Descartes La Géométrie (1637) Paris, Christian David, 1704). La préoccupation de Descartes est de décrire des courbes par des équations pour pouvoir résoudre ainsi des problèmes de géométrie ; il est loin du concept de vecteur et de l'idée de décomposition sur une base bien qu'il ait choisi un repère pour "algébriser" les points du plan.

La première fois que l'on peut voir un embryon de base, c'est dans la représentation géométrique de J. Argand où les nombres complexes sont nettement décomposés dans la base $(1,\sqrt{-1})$ mais rien n'est explicite.

On peut aussi reconnaître un problème de dépendance linéaire dans les travaux d'Euler (tome XXVI de opera omnia) à propos d'une question de géométrie : l'équation d'une courbe plane algébrique de degré n contient $(n+1)(n+2)/2$ coefficients, mais cette courbe ne change pas si on multiplie l'équation par un nombre, donc la courbe dépend de $n(n+3)/2$ paramètres et Euler se pose alors le problème de définir la courbe passant par $n(n+3)/2$ points donnés et il montre que pour $n > 3$ les équations linéaires qui déterminent l'équation de la courbe ne sont pas linéairement indépendantes (en langage moderne) lorsque les points choisis appartiennent à un système de n^2 points communs à deux courbes. Certes Euler fait une constatation sur un point particulier, mais il ne conçoit pas quelque chose d'équivalent à l'indépendance linéaire.

Cauchy exprime que la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est obtenue par combinaison linéaire de n solutions particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ si, en langage moderne, le Wronskien des n fonctions n'est pas nul. Donc Cauchy ramène une notion d'indépendance linéaire à un de ses aspects : la non nullité d'un déterminant, mais la notion elle-même n'est toujours pas dégagée.

Avec les travaux de Hamilton, le concept de base fait des progrès ; en effet il montre que pour un couple de réels : (a,b) on a (a,b)= (a,0) +(0,b) et il ajoute:" (1,0) and (0,1), thus used, might be called respectively the primary unit and the secondary unit of number". On voit ainsi (1,0) et (0,1) reconnus comme système générateur. Quand il introduit ses quaternions sous la forme : w + xi + yj + zk, il écrit "i, j, k denote three rectangular unit-lines"... On peut considérer que le "Unit-line" est en quelque sorte l'ancêtre de notre vecteur unitaire.

A peu près à la même époque, Grassmann introduit $a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n$ et il en donne une interprétation géométrique en dimension 3 : e_1, e_2, e_3, ..., e_n sont les unités primaires représentées par des segments orientés ("Strecke" dans le langage de Grassman). Là on voit apparaître la décomposition d'un vecteur et Jean Guérindon et Dieudonné ajoutent dans le précis d'histoire des mathématiques : "Les notions de combinaison linéaire de grandeurs,d'indépendance linéaire, de base d'un "domaine" (Gebiet, qui correspond à notre notion d'espace vectoriel ou de sous-espace vectoriel) de dimension finie, sont fort clairement décrites et c'est là qu'on trouve pour la première fois la relation fondamentale entre les dimensions de deux sous-espaces vectoriels: $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V+W) + \dim(V\cap W)$ (écrite en notation moderne bien entendu) ."

En fait comme je l'ai déjà signalé les travaux de Grassman ont assez peu d'impact ;, il en est de même pour le travail de Peano, qui ayant à sa disposition le langage des ensembles et les résultats de Grassman donne une définition assez moderne des espaces vectoriels sur R (il remarque même en prenant l'exemple des polynômes à coefficients réels que leur dimension peut être infinie).

Les seules notions d'algèbre linéaire qui vont être utilisées dans un premier temps sont le calcul vectoriel et le calcul matriciel, et c'est la notion de décomposition d'un vecteur qui va permettre de faire le lien.

IV Notion d'application linéaire

Les premiers exemples d'objets que l'on peut reconnaître comme des applications linéaires apparaissent à la fin du 17e siècle à l'occasion du calcul sur l'opératevr de dérivation D et sur l'opérateur aux différences finies Δ de Bernoulli.

D'autres exemples sont fournis par la géométrie qui est considérée avant tout comme l'étude des "figures" mais où l'on utilise des transformations comme l'inversion chez Viète et Fermat. En fait les transformations n'agissent presque toujours que sur des figures ou des courbes (affinité chez Euler) ; la notion de transformation n'est pas encore vraiment dégagée, même si elle affleure dans la projection centrale de Desargues et dans la projection cylindrique de Monge (pour l'étude de certaines propriétés géométriques , ils substituent à une figure de l'espace sa transformée plane). Cependant les applications linéaires interviennent implicitement dans divers types de problèmes : projections conçues comme appliquant l'espace tout entier sur un plan ou sur une droite, changements de repères cartésiens, recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables, recherche des axes de symétrie de quadriques et des axes d'inertie de solides. Ce dernier problème est abordé par Euler qui cherche par un changement d'axes rectangulaires à ramener l'équation des quadriques à la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ il montre qu'une telle réduction n'est possible qu'à une certaine condition que nous reconnaissons comme étant la non nullité du déterminant de la matrice de la forme quadratique. Il s'attaque aussi au problème des axes d'inertie d'un ellipsoïde qu'il n'a pas l'air de considérer comme équivalent au précédent et pour ce problème montre que si la condition est remplie, on peut trouver effectivement les axes d'inertie.

Jusqu'au début du 19e siècle, c'est le point de vue analytique qui est adopté, et le fait que cela conduit à des calculs laborieux est un des moteurs qui a fait progresser le développement du calcul vectoriel intrinsèque. De son côté, Cayley dans sa "théorie des matrices" traite aussi les matrices rectangulaires et il introduit leur produit comme composition de transformations et c'est ce point de vue coordonnées et matrices qui va prédominer pour les applications linéaires même après leur introduction intrinsèque par Peano (jusque vers 1930).

V Quelques liens avec l'utilisation de l'algèbre linéaire et son enseignement

* Si la nécessité de calculer sur des objets géométriques de manière intrinsèque a été un des faits qui a amené à la construction de la notion d'espace vectoriel, elle est loin d'être la seule cause. L'étude historique montre que cela a été suffisant à amener le concept-objet, mais qu'il a fallu des développements plus subtils pour le faire passer à l'état de concept-outil.

Ces développements ultérieurs (travaux de Fredholm et Hilbert ou Krull et Noether) sont hors du champ accessible à des élèves de DEUG ; on doit donc introduire à ce niveau des notions alors qu'elles ne sont pas encore complètement nécessaires ni pour les mathématiques où les coordonnées et les matrices permettent de résoudre efficacement les problèmes (les calculs en dimension 2 ou 3 sont encore très faisables), ni en physique où le calcul vectoriel est largement suffisant (la structure d'espace vectoriel dans toute sa complexité n'est pas nécessaire pour la physique de DEUG).

* On peut d'ailleurs constater un indice de cette difficulté dans la façon dont le sujet est traité dans les manuels destinés à l'enseignement à ce niveau des mathématiques et de la physique.

Tout d'abord, on ne trouve plus trace des quaternions sauf dans les livres spécialisés en Algèbre (niveau maîtrise). Or les idées d'Hamilton ont eu beaucoup de succès lors de leur invention, on peut se demander pourquoi elles ont disparu. Il y a au moins deux raisons à cela. En mathématique, la notion la plus générale est celle d'espace vectoriel, et les quaternions ne sont guère qu'un exemple de construction d'une structure algébrique répondant à des conditions particulières et de façon accessoire, les quaternions peuvent représenter les vecteurs de l'espace. Ils ne sont pas enseignés en DEUG parce que c'est une structure qui n' a pas un caractère outil assez large ni assez pratique. En physique, la réponse est moins évidente puisque les quaternions offrent une représentation des vecteurs de l'espace indépendante des repères et c'est ce dont la physique a besoin, mais il se trouve que la notion de vecteur est beaucoup plus pratique d'où son succès par rapport aux quaternions.

En fait si de nos jours il est clair que le bon outil c'est le vecteur et pas le quaternion, cela n'a pas toujours été évident, et il y a eu à la fin du 19e siècle une violente polémique à ce sujet, polémique dans laquelle étaient engagés des mathématiciens et surtout des physiciens.

Tait (1831-1901) professeur de physique et ami d'Hamilton fait beaucoup pour la promotion des quaternions chez les physiciens en publiant en 1867 le "Traité élémentaire sur les quaternions" déjà cité. Maxwell (1831-1879) est un physicien ami de Tait, il a donc connaissance des quaternions. En 1860, il publie un traité d'électricité et de magnétisme où tout est exprimé en coordonnées. En 1873, il introduit dans le même traité une écriture en vecteurs, mais les démonstrations sont toujours fondées sur un calcul des coordonnées. Sa position vis à vis des quaternions est ambigüe. Mac Farlane la décrit ainsi : "The position of Clerk Maxwell was paradoxical : he considered that the notation of quaternionics was good, but the method itself bad ; he made use of the former, but not of the latter". (Article de Mac Farlane à propos du livre d'Heaviside Electrical paper. London Macmillan an Co (1892) paru dans "The physical review" Vol 1 Macmillan and Co New-York - London (1894).

Dans une lettre publiée dans le chapitre IV de "The life and scientific work of P.G. Tait" publié en 1911 dans Cambridge University Press, Maxwell écrit : "Now in a bilingual treatise it is troublesome, to say the least, to find that the square of AB is always positive in cartesians and always negative in 4-nions, and that when the thing is mentioned incidentally you do not know what language is being spoken". Ces propos montrent que les physiciens réclamaient un calcul vectoriel cohérent avec le calcul sur les coordonnées. C'est un tel calcul fondé sur les idées d'Hamilton et de Grassmann qui va être développé par Gibbs aux USA et Heaviside en Angleterre. Gibbs (1839-1903) est professeur de physique à Yale, il y fait un cours d'analyse vectorielle et il écrit dans l'introduction à ce cours : "The fundamental principle of the following analysis are such as are familiar under a slighthy different form to student of quaternions. The manner in which the subject is developped is somewhat different from that followed in treatises on quaternions, being simply to

give a suitable notation for those relations between vectors, or between vectors and scalars, which seem most important and which lend themselves most readily to analytical transformations and to explain some of these transformations. As a precedent for such a departure from quater nionic usage Clifford's Kinematics may be cited . In this connection the name of Grassmann may also be mentioned, to whose system the following method attached itself in some respects more closely than to that of Hamilton". (cité dans l'introduction de "Vector analysis with an introduction to tensor analysis" de Wills (1931) , publié en 1958 par Dover publications , Inc). Le cours de Gibbs est publié en 1901 par le professeur. E.B. Wilson. En Angleterre, c'est Heaviside qui défend l'utilisation des vecteurs et qui participe comme Gibbs à la mise au point du calcul vectoriel. Citons le, il écrit dans "Electrical papers" Vol II London Macmillan and Co (1892) :
"As electromagnetism swarms with vectors, the proper language for its expression and investigation is the algebra of vectors. An account is therefore given of the method employed by the author for some years passed. The quaternionic basis is rejected, and the algebra is based upon a few definitions of notation merely. It may be regarded as quaternions without quaternions, and simplified to the uttermost ; or else as being merely a conveniently condensed expression of the cartesian mathematics, understandable by all who are acquainted with cartesian methods, and with which the vectoriel algebra is made to harmonize. It is confidently recommended as a practical working system." (Annexe). On retrouve les mêmes idées défendues, dans un cours de 1929 "Calcul vectoriel" de Raoul Bricard republié en 1964 chez Armand colin - Paris - (voir en annexe).

Le calcul vectoriel ayant été développé par les physiciens les notions de produit scalaire et de produit vectoriel n'étaient pas forcément rattachées aux notions plus générales de forme quadratique et de produit extérieur. Cela est sensible dans les manuels d'avant 1970, où on trouve un chapitre sur l'étude des vecteurs par exemple dans le "cours de mathématiques spéciales" Cagnac, Ramis , Commeau , Masson et Cie éditeurs - Paris (1961) on trouve "définition. On appelle segment orienté, ou vecteur un segment de droite auquel on associe un sens de parcours", puis un chapitre sur l'étude des espaces vectoriels, où l'on trouve : "La définition suivante généralise les faits précédents à des ensembles quelconques composés d'éléments que l'on peut appeler vecteurs [...] mais ces éléments n'auront rien en commun avec les vecteurs de la géométrie sinon leurs lois de composition". (suit la définition axiomatique d'un espace vectoriel sur un corps).

VI Conclusion

La maturation des concepts d'algèbre linéaire qui nous paraissent tellement simples (tant est grand leur pouvoir de généralisation) a été extrêmement longue.

Tout d'abord, il a fallu les travaux des mathématiciens de la plus haute antiquité jusqu'à Gauss et Cauchy pour que ce qui n'était que calculs séparés s'organise jusqu'à ce que se dégage le concept de loi de composition, puis plus tard celui de structure algébrique. Tout au début l'algèbre n'était que l'étude de quelques équations, avec le progrès des notations l'algèbre s'étend à l'étude de toutes les équations possibles. Cette étude débouche sur l'étude d'un groupe de substitutions et ainsi naît petit à petit la structure de groupe puis celle de corps. L'algèbre consiste donc maintenant à reconnaître la structure d'un ensemble pour pouvoir affirmer que cet ensemble possède toutes les propriétés communes à tous les ensembles ayant la même structure. L'algèbre linéaire est un cas particulier, il est réservé aux structures linéaires. Son invention a demandé en plus de ce qui a amené la création des structures, l'invention du calcul matriciel et du calcul vectoriel.

Son objet est de reconnaître dans des ensembles étudiés la structure d'espace vectoriel (ou de module) de façon d'une part à pouvoir énnoncer des résultats sur ces ensembles, d'autres part à pouvoir traduire certaines propriétés de ces ensembles en langage géométrique, et donc à pouvoir utiliser un autre cadre.

En aucun cas, l'algèbre (resp. l'algèbre linéaire) n'est un catalogue de techniques ou de formalisations ; de même que l'écriture en numération de position participe au concept de nombre et n'est pas seulement source de techniques opératoires, l'écriture algébrique participe à la compréhension des concepts de l'algèbre et n'est pas seulement source de techniques visant à la résolution des équations (resp. des systèmes d'équations linéaires). L'algèbre (resp. l'algèbre linéaire) n'est pas réductible à une écriture, et l'étude de la genèse si laborieuse nous en convainc aisément.

Il est assez naturel dans ces conditions que l'acquisition des concepts de l'algèbre linéaire ne soit pas aisée ; la tradition française de l'enseignement fait que les premières notions rencontrées par les élèves sont celles de calcul vectoriel, même avant tout apprentissage de la géométrie analytique ; le calcul sur les matrices et sur les déterminants est lui nettement plus tardif et dans premier temps aucun lien n'est fait entre l'étude des systèmes d'équations linéaires et le calcul vectoriel.

A la fin de l'enseignement secondaire, les élèves connaissent le calcul vectoriel dans l'espace, et l'étude des systèmes d'équations linéaires à 2 ou 3 équations et à 2 ou 3 inconnues.

L'enseignement de DEUG démarre "en général" par un cours sur l'espace vectoriel, sous-espace etc... et les étudiants ont le plus grand mal à raccrocher ces notions à ce qu'ils connaissent déjà. Le langage des ensembles n'est plus licite dans le secondaire, les quantificateurs ne sont plus utilisés dans leur usage symbolique, et les lois de composition rencontrées sont principalement celles des ensembles de nombres. Il y a donc dans la définition d'un espace vectoriel une masse très importante de connaissances nouvelles dont nous savons que la genèse a été lente et problématique.

Peut-être faut-il voir dans tout cela, l'origine des difficultés des étudiants à propos de l'algèbre linéaire, en tout cas il faudra tenir compte de tous ces points pour échafauder des séquences d'apprentissage sur ces notions.

Bibliographie

Encyclopédies

- Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées - Gauthier-Villars - Paris - Leipzig 1907.
- Encyclopédie internationale des sciences et techniques. Presses de la cité - Paris 1969.
- Encyclopedia Universalis - Paris 1968.

Histoire des mathématiques

- N. Bourbaki - Eléments d'histoire des mathématiques - Hermann - Paris 1969.
- C. Boyer - A history of mathematics, J. Wiley and sons, New-York - 1968.
- J. Dieudonné et Alii - Abrégé d'histoire des mathématiques Hermann - Paris - 1978.
- Groupe Inter-Irem épistémologie et histoire des mathématiques - La rigueur et le calcul - Cedic - Paris - 1982.
- J.L. Ovaert - Calcul numérique, Encyclopedia Universalis, symposium - Paris 1980 .
- D.J. Struik - A source book in mathematics - Harvard University Press 1969 .

Manuels d'enseignement

- R. Bricard - Le calcul vectoriel - Armand Colin 1964.
- Cagnac, Ramis, Commeau - Nouveau cours de mathématiques spéciales Vol1, Algèbre - Masson et Cie - Paris 1961.
- J.L Ovaert et J.L. Verley - Algèbre Vol 1 - Collection Léonhard Epistemon - Cedic - Paris 1983.
- Kostrikin - Introduction à l'algèbre - Traduction française - Editions Mir 1981.
- Kurosh - Cours d'algèbre supérieure - Traduction française Editions Mir 1971.
- A.P. Wills - Vector analysis with an introduction to tensor analysis - Dover Publications - New-York 1931-1958.

Textes historiques

- Argand - Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques - Annales de mathématiques - T. IV p33-147 (1806).
- Cauchy - Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences - Comptes rendus de l'académie des sciences - 1847.
- Diderot et Alembert - Articles : " équation","imaginaires", "racine" de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers, Paris 1751-1772.

- Hamilton - Lecture on quaternions - Cambridge, Macmillan and Co 1853.

- Heaviside - Electrical papers - London, Macmillan and Co 1892.

- Lagrange - Sur la forme des racines imaginaires des équations - Nouveaux mémoires de l'académie des sciences et Belles lettres - Berlin 1772.

- Wallis - Algebra - Oxford 1673 .

ANNEXES

DU MÊME AUTEUR

Cinématique et Mécanismes, 1 vol., Coll. Armand Colin (n° 3). 1921

Leçons de Cinématique, 2 vol., Gauthier-Villars, 1926-1927.

Petit Traité de perspective, 1 vol., Vuibert. 1924.

COLLECTION ARMAND COLIN
N° 112. SECTION DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Le Calcul vectoriel

12e ÉDITION 1964

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103 BOULEVARD SAINT-MICHEL PARIS-Ve

PRÉFACE

La définition traditionnelle d'une grandeur est : ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. *Pour prendre en considération des grandeurs d'une certaine nature, les mathématiques exigent des conditions plus précises : il faut savoir ce qu'on entend par grandeurs égales ou inégales, par grandeur somme de deux autres ; admettre que toute grandeur est divisible en un nombre quelconque de parties égales ; admettre que l'axiome d'Archimède est satisfait* (étant données deux grandeurs quelconques, il existe un multiple de la plus petite qui surpasse l'autre) *et aussi l'axiome de continuité. On peut alors attacher à toute grandeur de la sorte considérée un nombre qui est dit sa* mesure.

Les grandeurs qu'un simple nombre suffit ainsi à déterminer sont dites aujourd'hui grandeurs scalaires. *Telles sont, en géométrie, une longueur, un angle, une aire, un volume ; en mécanique, une masse, une densité, un travail ; en physique, une quantité d'électricité, un potentiel électrique ou magnétique, la résistance d'un conducteur. Mais on est bien vite amené, dans l'étude de ces deux dernières sciences, à considérer des grandeurs d'une autre sorte, dites* grandeurs vectorielles. *Leur définition est celle qui a été rappelée ci-dessus, complétée par les mots :* et de direction. *C'est ainsi qu'on renseignerait incomplètement sur une* force *en se bornant à faire connaître qu'elle est de 5 kilogrammes. Il faut indiquer en plus la direction de cette force, c'est-à-dire la direction vers laquelle elle sollicite son point d'applica-

tion. D'autres exemples de grandeurs vectorielles sont donnés par une vitesse, par le moment d'une force, par un moment magnétique, etc. Certaines grandeurs peuvent être considérées tantôt comme scalaires et tantôt comme vectorielles. Ainsi l'intensité d'un courant électrique est traitée comme grandeur scalaire dans les formules qui expriment les lois d'Ohm, de Kirchhoff et de Joule, mais elle prend un caractère vectoriel quand on étudie la distribution du courant à l'intérieur d'un conducteur à trois dimensions. Maint progrès de la physique mathématique a consisté à « vectorialiser » des grandeurs considérées primitivement comme scalaires.

Toute grandeur vectorielle dépend de deux éléments hétérogènes, l'un de nature arithmétique et l'autre de nature géométrique, qui sont un nombre et une direction. On peut lui attacher un vecteur, *abstraction mathématique qui est à la grandeur vectorielle ce que le nombre est à la grandeur scalaire et, de même que l'étude des grandeurs scalaires se ramène à des raisonnements sur les nombres, celle des grandeurs vectorielles se ramène à des raisonnements sur les vecteurs. Si l'on fait usage du trièdre cartésien classique, un vecteur est représenté par ses trois* coordonnées, *c'est-à-dire par ses projections sur les axes, et l'on est encore conduit à opérer sur des nombres. Or on constate tout de suite que les équations vont le plus souvent par groupes de trois, celles d'un même groupe ne différant entre elles que par des permutations circulaires de lettres. Comme c'est là chose fastidieuse (quand les équations sont compliquées, le calculateur se borne d'ordinaire à écrire la première d'entre elles et remplace les autres par des lignes de points), il est naturel de souhaiter une notation plus concise. On la trouve dans le calcul vectoriel, qui opère directement sur les vecteurs.*

Mais on y trouve mieux qu'une « tachygraphie ». C'est ce que tout le monde ne voit peut-être pas assez nettement, et il est bon de le faire saisir sur un exemple. Quand, en mécanique, on représente une force $\vec{F}$ par ses trois composantes X, Y, Z, *on détruit l'individualité de cette force et on la disperse en quelque sorte. On agit de même à l'égard d'un déplacement infiniment petit de son point d'application, en l'appelant (dx, dy, dz). Si bien que lorsque apparaît comme résultat d'un calcul l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, il faut être prévenu pour y reconnaître le travail élémentaire de la force. En calcul vectoriel, l'expression précédente est remplacée, avec la notation que nous adopterons, par $\vec{F} \,.\, d\mathrm{M}$. Non seulement c'est plus court, mais encore et surtout il y a là un* produit scalaire *dont la signification saute aux yeux. D'une manière générale,* les expressions qui résultent d'un calcul vectoriel sont susceptibles d'une interprétation simple et immédiate, *pour la raison que les vecteurs y restent* intacts. *Le calcul vectoriel se rapproche par là de la méthode purement géométrique, tout en conservant la puissance du calcul algébrique.*

Le calcul vectoriel a pris naissance dans les travaux à peu près simultanés de Hamilton (1843) et de Grassmann (1844), qui se plaçaient à des points de vue différents. C'est l'influence du premier qui a prédominé sur les développements ultérieurs de la théorie. Son algèbre des quaternions *est une extension du calcul des nombres complexes ordinaires à des nombres qui dépendent de quatre unités soumises à des règles de multiplication spéciales. Il eut des disciples fidèles dont Tait est un des plus notables. Mais l'œuvre de Hamilton évolua considérablement entre les mains de Gibbs et de Heaviside qui trouvaient les quaternions assez mal adaptés aux besoins de la physique mathématique. Ils ont donné au calcul vectoriel sa forme à peu près définitive (aux notations près, sur lesquelles l'entente n'existe malheureusement pas encore). Ils se heurtèrent d'ailleurs à une résistance fort vive de la part des « quaternionistes » orthodoxes. Les doctrines scientifiques en formation déchaînent parfois des querelles* *amères. Il se peut qu'en son temps l'invention de la Trigonométrie ait fait scandale.*

Il faut citer encore M. Wilson, à qui Gibbs confia la rédaction de sa Vector Analysis, *MM. Burali-Forti et Marcolongo. Ces deux derniers ont publié en collaboration un excellent ouvrage fort connu qui a été traduit en français (voir la Bibliographie). Je me plais à signaler ici que je me suis inspiré de leurs idées fondamentales*[1] *et que je leur ai emprunté beaucoup de démonstrations particulières.*

Le calcul vectoriel a mis assez longtemps à pénétrer en France, et l'on ne peut dire encore qu'il y soit couramment pratiqué. Il gagne pourtant rapidement du terrain, surtout parmi les Physiciens. M. G. Bruhat, par exemple, en fait largement usage, dans son beau Cours d'Électricité. *C'est aussi un instrument de choix en Géométrie infinitésimale, en Mécanique rationnelle, en Hydrodynamique, dans la Théorie de l'élasticité. Avant deux ou trois lustres, sans doute, il ne sera permis à aucun mathématicien d'en ignorer l'emploi. Mais j'estime excessif de proclamer qu'il doit supplanter la méthode cartésienne dans tous les domaines où régnait celle-ci. En géométrie algébrique notamment, les équations classiques des courbes et des surfaces fourniront toujours, si je ne me trompe, le moyen d'investigation le plus naturel et le plus fécond (je me permets de renvoyer à ce que je dis, au début du chapitre III, sur le rôle du calcul vectoriel en Géométrie analytique). Ajoutons que l'introduction des coordonnées cartésiennes donne souvent la démonstration la plus rapide de certaines formules qui sont pourtant purement vectorielles (voir par exemple le chapitre VI,* passim).

Pour me conformer à l'esprit de cette Collection, je n'ai

1. Toutefois les notations adoptées dans cet ouvrage sont celles de Gibbs, conformément aux règles suivies dans la Collection Armand Colin (voir la note finale).

*mis ici que ce qui m'a paru être indispensable au praticien curieux d'acquérir le plus vite possible le maniement du calcul vectoriel dans ce qu'il a de fondamental. J'ai laissé de côté des notions générales telles que celles d'*axialité, *assurément fort intéressantes, mais dont l'exposition demande un peu trop de discours. On ne trouvera rien non plus de relatif au calcul tensoriel.*

Les règles du calcul vectoriel élémentaire sont contenues dans le Chapitre premier. Les deux suivants en donnent des applications aux torseurs *ou systèmes de vecteurs glissants, à la Géométrie analytique. La dérivation des vecteurs apparaît dans le Chapitre IV, où elle est suivie d'applications diverses à la Géométrie infinitésimale. Le Chapitre V est consacré à la Mécanique (Cinématique, Statique, Dynamique du point et des systèmes matériels), le Chapitre VI aux fonctions de points (gradient, divergence, rotationnel, formules de calcul intégral). Enfin le Chapitre VII contient des applications du Chapitre précédent aux champs newtoniens, à l'Hydrodynamique, au Magnétisme.*

Il va sans dire que je ne prétends pas faire tenir dans ce petit volume des traités complets de Géométrie infinitésimale, de Mécanique et de Physique. Je suppose que le lecteur a quelque teinture de ces divers sujets et cela me permet, une fois rappelés rapidement les définitions et les principes, d'aborder, sans rechercher l'ordonnance qui conviendrait à un exposé didactique, diverses questions où le calcul vectoriel se montre à son avantage. Dans la dernière partie, mon intention primitive était d'aller jusqu'à l'Électrodynamique et aux équations de Maxwell ; mais je me suis aperçu avec regret que les développements d'ordre purement physique auraient pris une importance excessive et que la place me faisait défaut.

Le lecteur jugera s'il aime mieux :

(1) $$mM'' = \vec{F}$$

que

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

ou

$$(3) \qquad \int_0 \vec{u} \,.\, dM = \int\int_S \left(\vec{n} \,.\, \mathrm{rot}\, \vec{u}\right) d\sigma$$

que

$$(4) \int_0 P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right] d\sigma$$

(formule de Stokes). Il se peut qu'à la notation condensée mais symbolique, on préfère tout d'abord la formule prolixe, parce qu'elle ne parle que d'opérations effectuées sur des nombres réels. C'est une question d'habitude. Quand on s'est familiarisé avec (1) et (3), il devient pénible d'écrire (2) et surtout (4). N'oublions pas que les anciens hésitaient à considérer un produit de plus de trois facteurs, pour la raison qu'il n'a pas de signification géométrique immédiate, et que les premiers algébristes se méfiaient des nombres négatifs. Il faut aussi compter sur le temps pour dissiper le sentiment d'artifice qu'éveillent souvent, à la première lecture, certaines démonstrations vectorielles.

R. B.

NOTE. — Dans le courant de l'ouvrage, les formules sont désignées par deux nombres entre parenthèses. (35, 4) par exemple, désigne la formule n° 4 du § 35.

LE CALCUL VECTORIEL

CHAPITRE PREMIER

VECTEURS LIBRES

A. — *GÉNÉRALITÉS*

1. Axe. — Une droite donnée X'X peut être parcourue dans deux sens opposés, le sens X'X et le sens XX'. On appellera l'un de ces sens, le premier par exemple, *sens positif*, et l'autre, *sens négatif*. Une droite à laquelle on attache ainsi deux sens est dite *droite orientée* ou *axe*. Sur une figure, on peut distinguer un axe d'une droite non orientée au moyen d'une flèche tracée suivant cet axe, ou parallèlement à lui.

Si, dans une figure, on considère simultanément plusieurs droites parallèles, la convention par laquelle on oriente une de ces droites peut servir à orienter toutes les autres. Mais étant données des droites non parallèles, chacune d'elles doit être orientée par une convention spéciale.

2. Sens positif et sens négatif de rotation. — Soit X'X un axe. Supposons qu'un corps solide A tourne autour de l'axe X'X. Imaginons un observateur couché le long de X'X, ayant les pieds du côté de X' et la tête du côté de X. Pour cet observateur, les points que la rotation fait passer devant lui paraissent se diriger, soit de sa droite vers sa gauche, soit de sa gauche vers sa droite. Nous dirons, dans le premier cas, que la rotation s'effectue

John WALLIS ALGEBRA (1685)

Chapitre 66 Des carrés négatifs et de leurs racines dites imaginaires.

Nous avons déjà eu l'occasion (dans la résolution de certaines équations quadratiques et cubiques) de mentionner les carrés négatifs et leurs racines imaginaires, ainsi qu'on les nomme habituellement, pour autant qu'on les distingue des racines réelles, qui peuvent être positives ou négatives. L'étude plus complète de ces [choses] avait été différée, et trouve sa place ici.

On prétend que ces quantités imaginaires (provenant de la racine supposée d'un carré négatif) serviraient à montrer (chaque fois qu'elles adviennent) que le cas proposé est impossible.

Et cela est bien vrai, selon la notion première et stricte de la chose en question. Car il est impossible qu'un nombre quelconque (soit affirmatif soit négatif) multiplié par lui-même [= in se ductus] produise par exemple – 4. En effet des signes semblables (qu'ils soient + ou –) produisent toujours + , donc jamais – 4 .

Mais pareillement il est tout à fait impossible qu'une quantité n'importe la quelle (même si ce n'est pas un carré négatif) soit négative. Car il est impossible qu'une grandeur quelconque soit plus petite que rien [= minus quam nihil] , ou qu'un nombre quelconque soit moins nombreux que zéro [= paucior quam 0].

Cependant cette supposition (d'une quantité négative) n'est ni inutile ni absurde, à condition de la comprendre correctement. Quoique, si l'on s'en tient à la pure notation algébrique, le signe – paraisse indiquer une grandeur qui serait plus petite que **rien**, pourtant, lorsqu'on le considère d'un point de vue physique, il désigne une grandeur non moins réelle que le + , mais c'est une grandeur qu'il faut interpréter dans un sens contraire à ce qui a été supposé.

Par exemple, si l'on suppose qu'un homme s'avance de 5 pas (mettons de A vers B), puis recule de 2 pas (de B vers C) , et que quelqu'un pose alors la question: de combien cet homme est-il plus avancé en C qu'il n'était en A ? On dira qu'il est plus avancé de 3 pas. Parce que 5-2=3 .

Si par contre, ayant avancé de 5 pas (de A vers B), il recule de 8 pas (de B vers D), et qu'on demande de combien il est plus avancé en D qu'en A ? On répondra; de – 3 pas (car 5-8=-3). C'est à dire, il est **moins avancé** de 3 pas , car c'est cela que l'on veut dire lorsque l'on dit qu'il s'est avancé de – 3 pas.

En effet, bien qu'au sens strict, il ne puisse y avoir un espace qui soit de 3 pas moindre que rien, et que de ce fait le cas soit impossible quant à la droite AB vers l'avant, si en revanche on comprend (à l'inverse de ce qui a été supposé) que cette droite se prolonge à partir de A **vers l'arrière** , alors on trouvera, à 3 pas **en arrière** de A, le point D que l'on cherchait comme s'il était **devant**. Par conséquent, **s'être avancé de – 3 pas** , est la même chose que **s'être reculé de 3 pas** .

Par conséquent on doit certes répondre négativement à la question posée plus haut: l'homme n'est pas du tout plus avancé (comme cela était supposé [d'après les termes du problème) ; d'autre part il est moins avancé de 3 pas (à l'inverse de ce qui était supposé). Aussi, le point D n'est-il pas moins déterminé desigmaturj dans le cas présent, par la réponse - 3 , qu'il l'était, dans le cas précédent, par la réponse + 3 . Non plus vers l'avant, bien sûr, mais vers l'arrière . De ces deux façons, on détermine sur la droite infinie un point fixé et unique. La même chose a lieu dans toutes les équations latérales = à une dimension , dans la mesure où elles admettent une racine unique. D'habitude on admet cela communément et sans y trouver d'absurdité.

Ce que l'on admet pour les lignes droites doit aussi, pour la même raison, être admis pour les surfaces planes.

Par exemple, si l'on suppose qu'en un lieu nous ayons gagné 30 acres sur la mer, et qu'en un autre lieu la mer nous en ait emporté 20 acres, et que nous cherchions alors à faire le dénombrement exact de ce que nous pouvons prétendre avoir gagné ? La réponse sera 10 acres, c'est à dire + 10 acres (car 30 - 20 = 10) ou, ce qui revient au même, 1600 perches carrées (en effet, ce que les Anglais appellent un acre de terre, est un rectangle de 40 perches de long et 4 de large, ce qui fait 160 perches carrées, et donc 10 acres font 1600 perches carrées). Alors cet espace, si la forme de son étendue est carrée, aura un côté de 40 perches de longueur, ou encore (si l'on admet la racine négative) - 40.

Si maintenant, en un troisième endroit, la mer enlève encore 20 acres, et que l'on pose la même question que tout à l'heure. On répondra que nous avons gagné - 10 acres (car 30 - 20 - 20 = -10), c'est à dire 10 acres de moins que rien, ou - 1600 perches carrées.

Et jusqu'ici il ne s'est élevé aucune difficulté nouvelle, à part celle que nous avions déjà rencontrée (en supposant une quantité négative, c'est à dire plus petite que rien) , si ce n'est que V1600 est ambigu et peut être posé égal à + 40 ou à - 40, puisque le carré de l'un ou l'autre fait 1600.

Et maintenant, si l'on suppose que cet espace est - 1600 perches, c'est à dire 1600 perches perdues, et que la forme de son étendue est carrée, n'y aura-t-il pas de côté pour ce carré ? Et, s'il y en a, quel sera-t-il? Certainement, ce ne sera ni + 40 ni - 40 , car le carré de l'un ou l'autre produira + 1600 et non - 1600 . Ce sera plutôt V - 1600 (la racine fictive [= supposititia] d'un carré négatif), ou ce qui revient au même 10 V - 16, ou 20 V -4, ou 40 V -1 .

Pareillement, la racine carrée d'un plan négatif, mettons - bc, est V -bc. [...]

Dans ce cas, V désignera la moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative. Car de même que V bc signifie la moyenne proportionnelle entre + b et + c, ou encore entre - b et - c (l'un ou l'autre , en multipliant, fait + bc), de même V-bc signifiera la moyenne proportionnelle entre + b et - c, ou entre - b et + c, qui des deux côtés font - bc en multipliant. Voilà donc comment, du point de vue purement algébrique, on fait apparaître la notion véritable de la racine imaginaire V - bc .

Chapitre 67: EXEMPLIFICATION DES MEMES CHOSES EN GEOMETRIE.

Ce que nous avons dit de $\sqrt{-bc}$ en algèbre (comme une moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative) peut aussi être adapté [= accommodari] aux géomètres.

Par exemple, si l'on prend $AB = +b$ vers l'avant, et $AC = +c$ vers le haut, dans un plan, le carré ou rectangle contenu entre ces côtés sera $BC = +bc$, à cause des signes + multipliant +. Et semblablement, si l'on prend (dans les régions opposées [= sitibus contrariis]) $A\beta = -b$ vers l'arrière, et $A\gamma = -c$ vers le bas, le carré ou rectangle sera $\beta\gamma = +bc$ (à cause des signes semblables ici aussi, − multipliant −) mais dans la région diamétralement opposée.

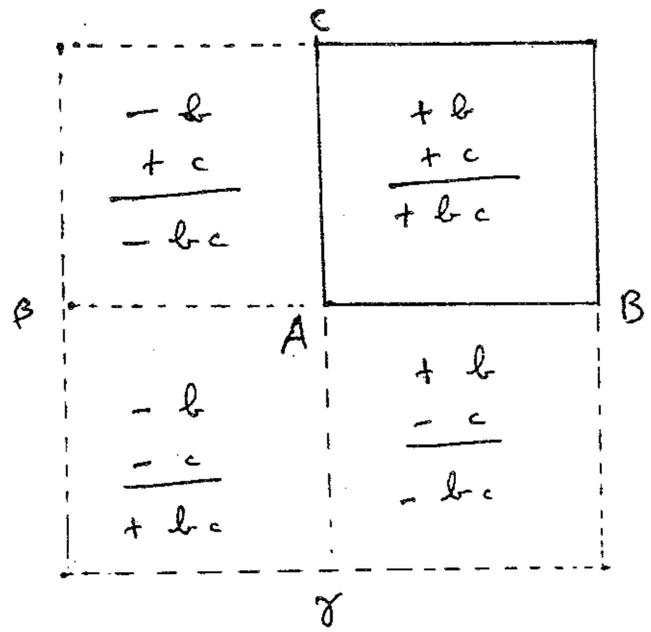
Par contre, si l'on prend $AB = +b$ (comme auparavant) vers l'avant, mais $A\gamma = -c$ vers le bas, $B\gamma$ sera $-bc$ (à cause des signes contraires, + multipliant −) et cette fois dans une région non pas diamétralement opposée, mais sous-contraire. [...]

On a par conséquent (de quelque manière qu'on prenne a et b), un carré, ou un rectangle (dans un même plan) qui est réel: affirmatif si les signes sont semblables, mais dans la région diamétralement opposée, si de part et d'autre il y a − , par rapport à la région où l'on se trouve si c'est + de part et d'autre ; négatif par contre si les signes sont dissemblables, et dans une région sous-contraire, à savoir soit en avant mais en bas, soit en haut mais en arrière.

On constatera presque la même chose, si au lieu de carrés ou de triangles rectangles, on prend les moyennes proportionnelles qui sont les racines de ces quantités planes. On trouvera alors pour elles une région différente [= novus orietur situs], selon que les signes sont semblables ou dissemblables.

Par exemple, si en avant de A on prend AB= +b, et encore en avant, sur la même droite, BC = + c, et que AC soit le diamètre d'un cercle, on trouvera le sinus droit, c'est à dire la moyenne proportionnelle BP = V +bc.

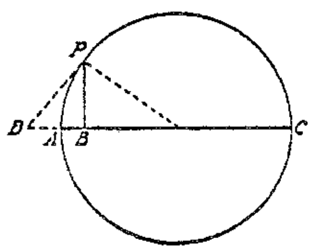
Si au contraire, en arrière à partir de A, et donc avec le signe contraire, on prend - AB = - b, et à partir de B vers l'avant, BC = + c, AC restant toujours le diamètre du cercle, et se trouvant égal à - AB + BC = -b + c, on aura la tangente, c'est à dire la moyenne proportionnelle, BP = V - bc.

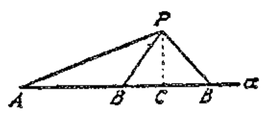


Supposez maintenant (pour une interprétation plus complète) un triangle dont la base (de longueur quelconque) se trouve sur la droite AC et qui a pour côté AP = 20 ; et en même temps on connaît la hauteur PC (et l'angle PAB par conséquent) telle que PC = 12, ainsi que la longueur de l'autre côté PB = 15.

Il faut tirer de ces données la longueur de la base AB.

Ces données impliquent que le carré de AP est 400 et celui de PC 144 ; leur différence 256 est le carré de AC, soit 400 - 144. Et donc $AC = \sqrt{256} = +16$ ou -16 ; en avant ou en arrière selon que l'on prend la racine négative ou positive ; mais nous prendrons ici la racine carrée positive.





Alors, puisque le carré de PB = 225 et celui de PC 144; la différence $81 = CB^2$. Et donc $CB=\sqrt{81}$ ce qui vaut indifféremment +9 ou -9. B peut donc être pris en avant ou en arrière de C. Ce qui donne deux valeurs pour la longueur de AB ; c'est à dire $AB = 16+9=25$ ou $AB = 16-9=7$; ces deux valeurs étant positives (mais si nous prenions, en arrière de A, AC=16, alors nous aurions $AB = -16+9=-7$ ou $AB = -16-9 =-25$; ces deux valeurs étant négatives).

Supposez à nouveau AP=15, PC=12 (et donc $AC = \sqrt{225}-144=\sqrt{81}=9$; PB=20 (et donc $BC = \sqrt{400}-144 = \sqrt{256}= +16$ ou -16) ; alors $AB = 9+16$ ou $AB = 9-16 =-7$; l'une positive, l'autre négative (on aurait la même chose, avec des signes contraires, si nous prenions $AC = \sqrt{81}=-9$, ce qui voudrait dire $AB =-9+16=7$ ou $AB = -9-16 =-25$) ; dans chacun de ces cas on trouve le point B sur la droite AC (si ce n'est en avant, c'est en arrière) comme la question le supposait.

Et celles des équations du 2^{e} degré, dont les racines sont réelles (qu'elles soient positives ou négatives, ou bien l'une positive, l'autre négative) sont de la même nature : c'est à dire sans autre impossibilité que les racines (l'une ou les deux) peuvent être des quantités négatives (ce qui arrive également aux équations du 1^{e} degré).

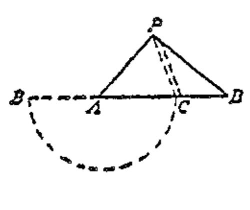
Mais si nous supposons AP = 20, PB = 12, PC = 15 (et donc AC $=\sqrt{175}$) quand nous sommes amenés à soustraire comme auparavant le carré de PC (225) du carré de PB (144) pour trouver le carré de BC, nous trouvons que cela ne peut être sans trouver une différence négative : (c'est à dire PC étant le plus grand, alors qu'il était supposé être le plus petit ; et que le triangle n'est pas rectangle en C comme supposé, mais en B). Et donc BC = $\sqrt{-81}$.

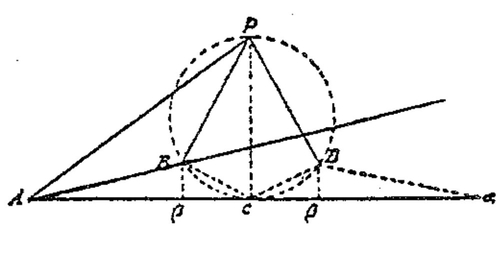
Ce qui donne en effet comme avant une double valeur à AB : $\sqrt{175}+\sqrt{-81}$ et $\sqrt{175}-\sqrt{-81}$. Mais cela implique ainsi une nouvelle impossibilité en algèbre (ce qui ne doit pas arriver dans les équations du premier degré) : non pas d'avoir une racine négative ou une grandeur plus petite que rien (comme auparavant), mais la racine carrée d'un carré négatif. Ce qui au sens littéral ne peut être, car aucune racine réelle (positive ou négative) multipliée par elle-même, ne fera un carré négatif.

Cette impossibilité algébrique, implique une impossibilité du cas proposé en géométrie : que le point B ne peut être (comme on l'avait supposé sur la droite AC tracée à partir de A (en avant ou en arrière)

Cependant il y a 2 points dans le même plan qui conviennent (en dehors de la droite). Si je trace les droites AB et BP, de chacun de ces points, nous avons un triangle dont les côtés AP et PB sont tels que nous le demandons. Et l'angle PAC et la hauteur PC (par rapport à AC, et non pas par rapport à AB) tels que proposés. Et la différence des carrés PB et PC est le carré de CB.

Et ainsi que dans le premier cas, la somme des deux valeurs de AB (qui étaient toutes deux positives) vaut le double de AC (16+9+16-9 = 16+16) Donc ici ($\sqrt{175}+\sqrt{-81}+\sqrt{175}-\sqrt{-81}=2\sqrt{175}$)





Et sur la figure : la somme des deux segments AB est égale au double de AC non pas pour les deux segments AB eux-mêmes (comme dans le premier cas, lorsqu'ils étaient sur le segment de base) mais pour les segments de base (AB) sur lesquels "ils reposent" (on les projette)

Donc si nous remplaçons l'un de ces segments AB par le segment de même longueur et même pente joignant l'autre point B à un point α, AC α formera une ligne droite et la longueur A α sera double de AC de même que dans le 1er cas.

La plus grande différence est ceci : dans le premier cas, les points B appartenant au segment AC, les droites AB sont confondues avec leur base (AC), mais il n'en est pas ainsi dans le dernier cas là où les points B sont placés au-dessus des β, β(points respectifs des bases au - dessus desquelles ils se dressent) comme on l'a fait pour rendre le cas possible (c'est-à-dire le sinus-verse de l'arc C B ~~le sinus de BC par rapport à PG~~), mais dans les deux cas, ACα (la base de ABα) est égale au double de AC.

C'est-à-dire que dans le cas de racines négatives, nous devons dire : le point B ne peut être placé ainsi qu'on le pensait, en avant de A sur AC, mais en arrière de A et il faut être sur la même droite. Nous devons dire qu'en cas de carrés négatifs, le point B, ainsi qu'on l'avait supposé, ne pouvait être trouvé sur la droite AC, mais au-dessus de cette droite, il pouvait être dans le plan.

C'est pourquoi j'ai largement insisté là-dessus, car la notion est nouvelle - du moins je le pense - et c'est pourquoi je déclare qu'à présent, je pense pouvoir expliquer ce qu'on appelle communément les racines imaginaires des équations du 2° degré.

Par exemple : les deux racines de l'équation $a^2 - 2a\sqrt{175}+256=0$, sont les deux nombres $a = \sqrt{175}+\sqrt{-81}$ et $a=\sqrt{175}-\sqrt{-81}$, (qui sont les valeurs de AB dans le cas précédent). Car si, de 175 (carré de la moitié du coefficient) nous retirons la valeur absolue 256 la différence est - 81, valeur dont la racine, ajoutée ou soustraite à la moitié du coefficient fait $\sqrt{175}\pm\sqrt{-81}$, lesquels sont donc les deux racines de l'équation.

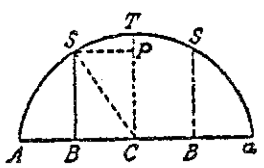
De la même manière, dans l'équation $a^2-3a+175=0$, si de 256 (le carré de la moitié de 32) nous obtenons 175, la différence est 81 dont la racine est 9, laquelle retirée ou ajoutée à 16 (la moitié du coefficient) fait 16 ± 9, qui sont les valeurs de AB dans le premier cas.

Construction géométrique tirée du cas précédent.

Dans le précédent chapitre, nous avons montré ce qui en géométrie répond au problème des racines négatives en algèbre.

.Je vais maintenant montrer quelques constructions géométriques, qui correspondent à la résolution des équations du 2° degré dont les racines peuvent avoir des valeurs imaginaires, valeurs provenant des carrés négatifs.

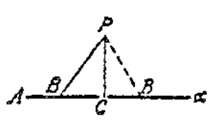
La construction normale pour l'équation $a^2 \mp ba + \alpha = 0$; est la suivante : le coefficient b étant la somme de deux quantités, dont le produit est α (en valeur absolue), cela ne peut être plus normalement exprimé, en grandeurs, qu'en faisant de b (=Aα) le diamètre d'un cercle, et de $\sqrt{\alpha}$ (=BS) un vrai sinus ou ordonnée (car c'est une des propriétés bien connues d'un cercle que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les deux segments "du" diamètre). Et puisqu'un segment de longueur BS peut être construit indifféremment de chaque côté de CT, nous avons donc sur le diamètre deux points B, B (correspondant aux 2 points SS de la demi-circonférence) qui divisent chacun le diamètre en deux parties

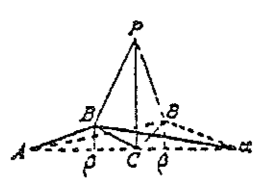


AB, Bα qui donnent les deux racines désirées (tous deux négatifs, ou tous deux positifs suivant que dans l'équation il y a -ba ou + ba). Et lorsque BS augmente, B approche (de chaque côté) de C et CB qui est le cosinus ou demi-différence des racines diminué.

Mais comme le sinus BS ne peut jamais être supérieur au rayon CT lorsque $\sqrt{\alpha}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$ b la construction est impossible.

La construction géométrique correspondant à l'équation $a^2 \mp ba + \alpha = 0$ (écrite ainsi pour faire apparaître en une seule fois les cas : possible , impossible c'est-à-dire tels que $\frac{1}{2}$bb est ou n'est pas inférieur à α) peut être la suivante :





Sur AC_α = b"bissectée" en C on élève une perpendiculaire CP = $\sqrt{\alpha}$; et prenant PB = $\frac{1}{2}$ b on trace un triangle rectangle PBC DE n'importe quel côté de CP). L'angle droit de ce triangle sera en C ou en B selon que PB ou PC est le plus grand et de même BC est un sinus ou une tangente (par rapport au rayon PB). Les segments AB, B_α sont les deux valeurs de a, toutes deux positives s'il y a -ba dans l'équation et toutes deux négatives s'il y a +ba. Ces valeurs sont appelées <u>réelles</u> si l'angle droit est en C et <u>imaginaires</u> s'il est en B.

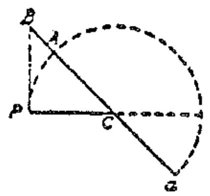
Dans tous les cas (que l'angle droit soit en B ou en C) le point B peut être pris de l'autre côté de PC dans une même "position", les deux points B,B étant ceux que l'équation définit.

Dans le premier cas AB_α est une ligne droite ainsi que AC_α. Dans l'autre cas AB_α fait un angle en B. AC_α étant (à la fois) la distance A_α et la droite de base sur laquelle on projette AB_α, β tombe en β, le point juste en dessous de lui. Et alors, si dans le problème qui a donné lieu à l'équation on suppose que AB_α est une ligne droite, ou que B est sur la droite AC_α ou que B est confondu avec β ou que AC_α est la somme de AB et B_α ou tout autre chose qui implique l'une des précédentes, la construction montre que si ce cas, ainsi compris est impossible on peut l'interpréter pour le rendre pour le rendre possible.

La différence entre cette impossibilité et celle qui provient d'une équation du premier degré est la suivante : quand, dans une équation du premier degré on obtient une valeur négative il suffit de dire que le point B demandé ne peut être sur la ligne AC donnée au-delà de A, mais qu'il est en deçà à la même distance. Mais <u>quand, dans une équation quadratique nous obtenons</u> (non une valeur négative ce qui ramènerait au cas des équations du premier degré) <u>une valeur imaginaire on peut dire que le point B n'est pas sur la droite AC comme prévu mais en dehors de cette droite (dans le même plan)</u> au dessus ou en dessous de la ligne.

L'autre forme d'équation quadratique $a^2 \mp ba - \alpha = 0$ s'effectue ainsi :

prenons CA ou CP = $\frac{1}{2}$b et PB = $\sqrt{\alpha}$ en faisant



un angle droit en P. L'hypoténuse BC prolongée coupe le cercle PA_α en A_α et les deux racines cherchées sont AB, B_α pour lesquelles la tangente PB est une moyenne proportionnelle et A_α la différence. Mais l'une d'elles doit être considérée comme positive et l'autre comme négative (parce que si AB est en deçà B_α est au-delà), à savoir : + AB, $-B_\alpha$ s'il y a + b_α dans l'équation, ou -AB, $+B_\alpha$ s'il y a $-b_\alpha$.

Mais cette construction n'est pas ici à sa place : puisque dans cette forme d'équation nous ne sommes jamais confrontés aux valeurs imaginaires car PB de quelque longueur qu'il soit peut toujours être une tangente au cercle.

1806

II.

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques; par M. ARGAND (*).

Au Rédacteur des *Annales*.

Monsieur,

Le Mémoire de M. J.-F. Français, qui a paru à la page 61 du IVe volume des *Annales*, a pour objet d'exposer quelques nouveaux principes de Géométrie de position, dont les conséquences tendent particulièrement à modifier les notions admises jusqu'ici sur la nature des quantités imaginaires.

En terminant son Mémoire, M. Français annonce qu'il a trouvé le fond de ces nouvelles idées dans une lettre de M. Legendre, qui en parlait comme d'une chose qui lui avait été communiquée, et il témoigne le désir que le premier auteur de ces idées mette

(*) *Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 133-147.

au jour son travail sur ce sujet. Il y a tout lieu de croire que le vœu de M. Français est depuis longtemps rempli. J'ai publié en 1806 un opuscule sous le titre d'*Essai sur une manièr. de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*, dont les principes sont entièrement analogues à ceux de M. Français, ainsi que vous pourrez en juger par l'exemplaire que j'ai l'honneur de vous adresser (*). M. Legendre a eu, dans le temps, la bonté d'examiner mon manuscrit et de me donner ses avis, et ce doit être là, si je ne m'abuse, la source de la communication dont parle M. Français.

L'écrit dont il s'agit n'ayant été répandu qu'à très-petit nombre, il est extrêmement probable qu'aucun de vos lecteurs n'en a connaissance; et je crois pouvoir prendre cette occasion de leur en présenter un extrait, présumant que cette matière pourra les intéresser, au moins par sa nouveauté, et faire naître chez quelques-uns d'entre eux des réflexions propres à perfectionner et à étendre une théorie dont mon Ouvrage ne présente encore que les premières bases.

1. Si nous considérons la suite des grandeurs

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\quad 4a,\ldots,$$

nous pouvons concevoir chacun de ses termes comme naissant de celui qui le précède, en vertu d'une opération la même pour tous, et qui *peut être répétée indéfiniment*.

Dans la suite inverse

$$\ldots,\quad 4a,\quad 3a,\quad 2a,\quad a,\quad 0,$$

on peut également concevoir chaque terme comme provenant du précédent; mais la suite ne peut être prolongée au delà de zéro, qu'autant qu'il sera possible d'opérer sur ce dernier terme comme sur les précédents.

(*) L'Ouvrage se trouve à Paris, chez l'auteur, faubourg Saint-Marceau, rue du chemin de Gentilly, n° 12 [1].

[1] C'est d'après cet exemplaire, appartenant aujourd'hui à M. Chasles, qu'a été faite la présente édition. (Note de l'Éditeur.)

Or, si a désigne, par exemple, un objet matériel, comme *un franc, un gramme,* les termes qui, dans la seconde suite, devraient suivre zéro, ne peuvent rien représenter de réel. On doit donc les qualifier d'*imaginaires*.

Si a, au contraire, désigne un certain degré de pesanteur, agissant sur le bassin A d'une balance contenant des poids dans ses deux bassins, comme il est possible de diminuer a soit en enlevant des poids au bassin A, soit en en ajoutant au bassin B, la suite en question pourra être prolongée au delà de zéro, et $-a$, $-2a$, $-3a, \ldots$ seront des quantités aussi réelles que $+a$, $+2a$, $+3a, \ldots$.

Cette distinction des grandeurs en *réelles* et *imaginaires* est plutôt physique qu'analytique; elle n'est pas d'ailleurs tout à fait insolite dans le langage de la Science. Le nom de *foyer imaginaire* est usité en optique, pour désigner le point de concours des rayons qui, analytiquement parlant, sont négatifs.

2. Lorsque nous comparons entre elles, sous le point de vue appelé *rapport géométrique,* deux quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives, l'idée de ce rapport est évidemment complexe. Elle se compose : 1° de l'idée du rapport numérique, dépendant de leurs grandeurs respectives, considérées *absolument;* 2° de l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'*identité* ou l'*opposition*. Ainsi, quand nous disons $+a : -b :: -ma : +mb$, nous énonçons non-seulement que $a : b :: ma : mb$, mais nous affirmons de plus que la direction de la quantité $+a$ est, relativement à la direction de la quantité $-b$, ce que la direction de $-ma$ est relativement à la direction de $+mb$; et nous pouvons même exprimer cette dernière conception d'une manière absolue, en écrivant

(A) $$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

3. Soit proposé maintenant de déterminer la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1, c'est-à-dire d'assigner la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : x :: x : -1.$$

On ne pourra égaler x à aucun nombre positif ou négatif, d'où

il semble qu'on doit conclure que la quantité cherchée est imaginaire.

Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de la *grandeur absolue* avec celle de la *direction*, l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée.

Or, s'il existe une direction d, telle que la direction positive soit à d ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par 1_d l'unité prise dans la direction d, la proportion

(B) $$+1 : 1_d :: 1_d : -1$$

présentera : 1° une proportion purement mécanique $1 : 1 :: 1 : 1$; 2° une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A); et, puisqu'on admet la vérité de cette dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B).

4. Nous allons encore établir ici une distinction physique entre les quantités réelles et imaginaires. Que l'unité dont il s'agit soit, comme plus haut, un certain degré de pesanteur, agissant sur un des bras d'une balance. Nous avons trouvé que ce genre de grandeur peut réellement être positif ou négatif; mais on ne saurait aller plus loin, et on ne peut en aucune manière concevoir un genre de poids tel que 1_d qui représente quelque chose de réel. Donc, dans ce cas, 1_d est une quantité imaginaire.

Prenons maintenant pour unité positive une ligne KA (*fig.* 1), considérée comme ayant sa direction de K à A. Suivant les notions universellement reçues, l'unité négative sera KI, égale à KA, mais prise dans un sens opposé.

Tirons KE perpendiculaire à IKA; nous aurons la relation suivante :

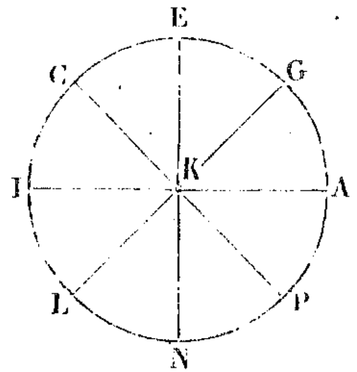
La direction de KA est à la direction de KE comme celle-ci est à la direction de KI.

La condition nécessaire pour réaliser la proportion (B) se trouvera donc complétement satisfaite, en prenant pour d la direction de KE, et on aura

$$1_{\omega} = KE,$$

quantité tout aussi réelle que KA et KI. On voit aussi que la même condition est également remplie par KN, opposée à KE,

Fig. 1.



ces deux dernières quantités étant entre elles :: $+1 : -1$, ainsi que cela doit être.

De même qu'on a assigné une moyenne proportionnelle réelle KE entre $+1$ et -1, ou entre KA et KI, on pourra construire les moyennes KC, KG,..., entre KA et KE, KE et KI,....

De là, et par une suite de raisonnements que nous supprimons, on arrivera à cette conséquence générale, que, si (*fig.* 2)

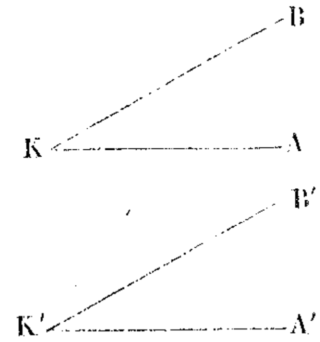
$$\text{ang. } AKB = \text{ang. } A'K'B',$$

on a, abstraction faite des grandeurs absolues,

$$KA : KB :: K'A' : K'B'.$$

C'est là le principe fondamental de la théorie dont nous avons essayé de poser les premières bases, dans l'écrit dont nous donnons ici un extrait. Ce principe n'a rien au fond de plus étrange que celui sur lequel est fondée la conception du rapport géométrique entre deux lignes de signes différents, et il n'en est proprement qu'une généralisation.

Fig. 2.



5. Comme, dans ce qui suivra, nous aurions à répéter fréquemment la phrase : *lignes considérées comme tirées dans une certaine direction*, nous emploierons l'expression abrégée : *lignes en direction* ou *lignes dirigées ;* et nous dénoterons par $\overline{AB}$ la ligne AB dirigée de A en B, et par AB simplement cette même ligne considérée dans sa grandeur absolue. Nous préférons le mot de *direction* à celui de *position*, parce que le premier indique, entre les deux extrémités de la ligne, une différence, essentielle dans notre théorie, que ne marque pas le dernier. Nous pourrons réserver celui-ci pour désigner collectivement deux directions opposées, et nous dirons que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ont la même position.

6. Nous allons maintenant examiner comment les lignes dirigées se combinent entre elles par addition et multiplication, et en construire les sommes et les produits.

La multiplication ne présente aucune difficulté. Un produit $A \times B$ n'étant autre chose que le quatrième terme de la proportion $1 : A :: B : x$, il ne s'agit que d'appliquer aux lignes données le principe du n° 4.

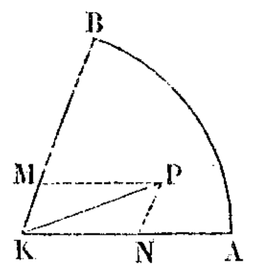
Quant à l'addition, la règle que nous allons donner peut se démontrer facilement par les théorèmes qui donnent les sinus et cosinus de la somme de deux arcs; mais il semble qu'il serait plus élégant de la tirer *a priori* des principes de la chose. En raisonnant par analogie, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'ajouter deux lignes, positives ou négatives, a, b, on a pour règle générale, quels que soient les signes, de tirer d'abord $\overline{AB} =$ l'une des lignes, a par exemple; de prendre le point d'arrivée B de cette ligne pour point de départ de la ligne b, de tirer ensuite $\overline{BC} = b$; et la ligne $\overline{AC}$, dont les points de départ et d'arrivée A, C sont respectivement le point de départ de la première ligne a et le point d'arrivée de la seconde ligne b, sera $= a + b$.

Généralisons ce principe, et nous conclurons que, A, B, C,..., F, G, H étant des points quelconques, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C\ldots} + \ldots + \overline{\ldots F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}.$$

7. On peut décomposer une ligne en direction donnée $\overline{KP}$ (*fig.* 3) en deux parties appartenant à des *positions* données KA

Fig. 3.



et KB. Il suffit pour cela de tirer, sur KB, KA, les lignes PM, PN, parallèles à KA, KB; et on aura

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KN} + \overline{NP};$$

mais, comme on a

$$\overline{KM} = \overline{NP} \quad \text{et} \quad \overline{KN} = \overline{MP},$$

et comme d'ailleurs il n'y a que ces deux manières d'opérer la

décomposition proposée, il faut en conclure, en général, que si, ayant

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A'} + \overline{B'},$$

A, A' ont la même direction a, et B, B' la même direction b, a et b n'appartenant pas à la même position, on doit avoir aussi

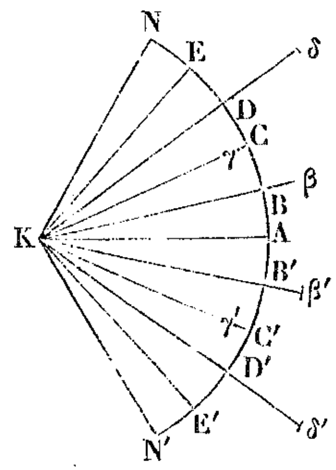
$$\overline{A} = \overline{A'} \quad \text{et} \quad \overline{B} = \overline{B'}.$$

Cette partition a fréquemment lieu, lorsque l'une des positions est celle de ± 1 et l'autre la position perpendiculaire; ce qui revient à la séparation du réel et de l'imaginaire.

8. Passons aux applications, et établissons d'abord quelques conséquences dont l'emploi est le plus fréquent.

Soient (*fig.* 4) AB, BC,..., EN, AB', B'C',..., E'N' des arcs

Fig. 4.



égaux, au nombre de n, de chaque côté du point A; $\overline{KA}$ étant prise pour unité; et soit $\overline{KB} = u$; on aura

$$\overline{KA} = 1,\quad \overline{KB} = u,\quad \overline{KC} = u^2,\quad \overline{KD} = u^3,\ldots,\quad \overline{KN} = u^n,$$

$$\overline{KA} = 1,\quad \overline{KB'} = \frac{1}{u},\quad \overline{KC'} = \frac{1}{u^2},\quad \overline{KD'} = \frac{1}{u^3},\ldots,\quad \overline{KN'} = \frac{1}{u^n},$$

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} = 1,\quad \frac{\overline{KB}}{\overline{KB'}} = u^2,\quad \frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} = u^4,\quad \frac{\overline{KD}}{\overline{KD'}} = u^6,\ldots,\quad \frac{\overline{KN}}{\overline{KN'}} = u^{2n}.$$

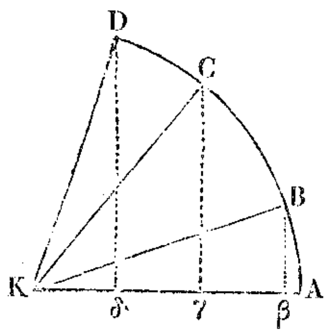
Et, si l'on prend, sur les rayons correspondants $K\beta' = K\beta$, $K\gamma' = K\gamma$, $K\delta' = K\delta, \ldots$, les longueurs $K\beta, K\gamma, K\delta, \ldots$ étant à volonté, on aura encore

$$\frac{\overline{K\beta}}{\overline{K\beta'}} = u^2,\quad \frac{\overline{K\gamma}}{\overline{K\gamma'}} = u^4,\quad \frac{\overline{K\delta}}{\overline{K\delta'}} = u^6,\ldots.$$

Si sur des rayons $\overline{KA}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}, \ldots$, pris pour bases, on construit des figures semblables, et que $\bar{a}$, $\bar{m}$, $\bar{n}, \ldots$ soient des lignes homologues de ces figures, on aura

(C) $$\bar{m} = \bar{a} \times \overline{KM},\quad \bar{n} = \bar{a} \times \overline{KN},\ldots.$$

Fig. 5.



9. Soient (*fig.* 5) $\text{arc}\,AB = CD = a$, $\text{arc}\,AC = b$; on aura

(5, 6, 7)

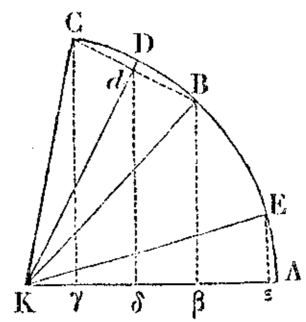
$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b) = \overline{K\delta} + \overline{\delta D} = \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC}$$
$$= (\overline{K\beta} + \overline{\beta B}) \times (\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C})$$
$$= \left(\cos a + \sqrt{-1}\sin a\right)\left(\cos b + \sqrt{-1}\sin b\right)$$
$$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + \sqrt{-1}(\sin a \cos b + \cos a \sin b);$$

donc, en séparant,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Soient (*fig.* 6) $AC = a$, $AB = b$, $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{a-b}{2}$; prenons

Fig. 6



$AE = BD$, et tirons KD et BC se coupant en d; nous aurons

$$(\cos a - \cos b) + \sqrt{-1}(\sin a - \sin b)$$
$$= \left(\cos a + \sqrt{-1}\sin a\right) - \left(\cos b + \sqrt{-1}\sin b\right)$$
$$= \left(\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}\right) - \left(\overline{K\beta} + \overline{\beta B}\right) = \overline{KC} - \overline{KB}$$
$$= \overline{KC} + \overline{BK} = \overline{BC} = 2\overline{dC} = (\text{n}^\text{o}\ 8,\ C)\ 2\overline{\varepsilon E} \times \overline{KD}$$
$$= 2\overline{\varepsilon E} \times (\overline{K\delta} + \overline{\delta D})$$
$$= 2\sqrt{-1}\sin\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} + 2\sqrt{-1}\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

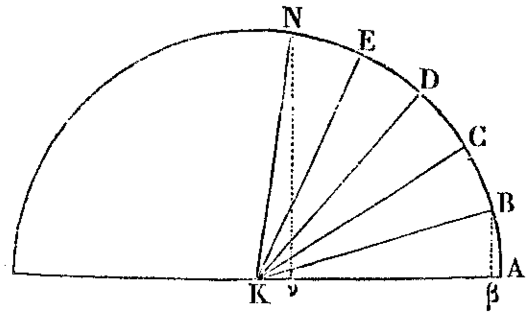
Donc, en séparant,

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = +2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

Soient (*fig.* 7) AB, BC,..., EN des arcs égaux, au nombre de n,

Fig. 7.



et faisons AB $= a$. Nous aurons

$$\begin{aligned}\cos na + \sqrt{-1}\sin na &= \cos \mathrm{AN} + \sqrt{-1}\sin \mathrm{AN}\\ &= \overline{\mathrm{K}\nu} + \overline{\nu\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{KN}} = \overline{\mathrm{KB}}^n = (\overline{\mathrm{K}\beta} + \overline{\beta\mathrm{B}})^n\\ &= (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^n.\end{aligned}$$

On aura encore

$$\cos a + \sqrt{-1}\sin a = \overline{\mathrm{K}\beta} + \overline{\beta\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{KB}} = \overline{\mathrm{KN}}^{\frac{1}{n}} = (\overline{\mathrm{K}\nu} + \overline{\nu\mathrm{N}})^{\frac{1}{n}}$$

$$= \overline{\mathrm{K}\nu}^{\frac{1}{n}}\left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\overline{\nu\mathrm{N}}}{\overline{\mathrm{K}\nu}}\right) + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\left(\frac{\overline{\nu\mathrm{N}}}{\overline{\mathrm{K}\nu}}\right)^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.2.3}\left(\frac{\overline{\nu\mathrm{N}}}{\overline{\mathrm{K}\nu}}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= (\cos na)^{\frac{1}{n}}\left[1 + \frac{1}{n}\frac{\sqrt{-1}\sin na}{\cos na} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\frac{(-1)\sin^2 na}{\cos^2 na} + \ldots\right].$$

Faisant $na = x$ et ensuite $n = \infty$, on obtient, par les termes affectés de $\sqrt{-1}$,

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \ldots.$$

Soit l'arc AN (*fig.* 7) divisé en n parties égales. Les rayons $\overline{\mathrm{KA}}$, $\overline{\mathrm{KB}}$, $\overline{\mathrm{KC}}$,... forment une progression géométrique, et les arcs correspondants, ou certains multiples de ces arcs, peuvent être pris pour les logarithmes de ces rayons.

Posons $\log\overline{\mathrm{KN}} = m.\mathrm{AN} = mn.\mathrm{AB}$, m étant le module indéterminé. Si l'on fait $n = \infty$, l'arc AB pourra être considéré comme une droite perpendiculaire sur $\overline{\mathrm{KA}}$; on aura donc

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{-1}\,\mathrm{AB}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{AB} = -\sqrt{-1}\,\overline{\mathrm{AB}};$$

ainsi

$$\begin{aligned}\log\overline{\mathrm{KN}} = mn.\mathrm{AB} &= -mn\sqrt{-1}\,\overline{\mathrm{AB}} = -mn\sqrt{-1}\,(\overline{\mathrm{AK}} + \overline{\mathrm{KB}})\\ &= -mn\sqrt{-1}\left(-1 + \overline{\mathrm{KN}}^{\frac{1}{n}}\right).\end{aligned}$$

Faisant $\overline{\mathrm{KN}} = 1 + x$, il vient

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= -mn\sqrt{-1}\left[-1 + (1+x)^{\frac{1}{n}}\right]\\ &= -mn\sqrt{-1}\left[-1 + 1 + \frac{1}{n}x - \frac{1}{2n}x^2 + \ldots\right]\\ &= -m\sqrt{-1}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right),\end{aligned}$$

ou encore, parce que m est indéterminé,

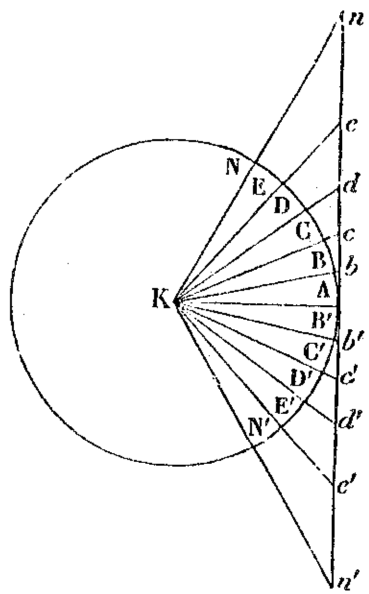
$$\log(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Divisons les deux arcs égaux AN, AN′ (*fig.* 8) en n parties égales; tirons la double tangente nn', et les sécantes Kb, Kc,...; nous aurons (8)

$$\because \frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} : \frac{\overline{Kb}}{\overline{Kb'}} : \frac{\overline{Kc}}{\overline{Kc'}} : \ldots : \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}};$$

donc les arcs correspondants, ou certains multiples de ces arcs,

Fig. 8.



peuvent être pris pour les logarithmes de ces mêmes quantités, savoir :

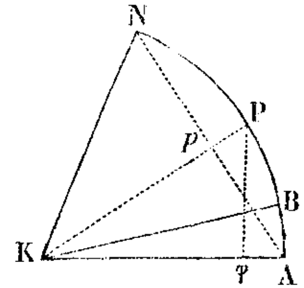
$$m.\mathrm{AN} = \log \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}}.$$

Soit $\mathrm{AN} = x$, on a

$$mx = \log \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}} = \log \frac{\overline{KA} + \overline{An}}{\overline{KA} + \overline{An'}} = \log \frac{1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}{1 - \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}.$$

Soit encore (*fig.* 9) l'arc $\mathrm{AN} = 2a$ divisé en un nombre infini

Fig. 9.



de parties égales, dont AB soit la première; prenons $\mathrm{AP} = \frac{\mathrm{AN}}{2} = a$, et tirons AN, KP et Pφ; nous aurons

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} 2a\sqrt{-1} &= 2\,\mathrm{AN}\sqrt{-1} = 2n.\mathrm{AB}\sqrt{-1} = 2n.\overline{\mathrm{AB}} \\ &= 2n\left(\overline{\mathrm{AK}} + \overline{\mathrm{KB}}\right) = 2n\left(-1 + \overline{\mathrm{KN}}^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= 2n\left[-1 + \left(\overline{\mathrm{KA}} + \overline{\mathrm{AN}}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = 2n\left[-1 + \left(1 + \overline{\mathrm{AN}}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \\ &= 2n\left[-1 + 1 + \frac{1}{n}\overline{\mathrm{AN}} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2}\overline{\mathrm{AN}}^2 + \ldots\right] \\ &= 2\left(\overline{\mathrm{AN}} - \frac{\overline{\mathrm{AN}}^2}{2} + \frac{\overline{\mathrm{AN}}^3}{3} - \ldots\right); \end{aligned}\right.$$

mais (8)

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{AN}} &= 2\overline{p\mathrm{N}} = 2\overline{\varphi\mathrm{P}} \times \overline{\mathrm{KP}} = 2\overline{\varphi\mathrm{P}}\left(\overline{\mathrm{K}\varphi} + \overline{\varphi\mathrm{P}}\right) \\ &= 2\sqrt{-1}\sin a\left(\cos a + \sqrt{-1}\sin a\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{AN}}^2 &= -(2\sin a)^2\left(\cos 2a + \sqrt{-1}\sin 2a\right), \\ \overline{\mathrm{AN}}^3 &= -\sqrt{-1}\,(2\sin a)^3\left(\cos 3a + \sqrt{-1}\sin 3a\right), \end{aligned}$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans la série (D), et séparant, il vient

$$2a = +\frac{2\sin a}{1}\cos a + \frac{(2\sin a)^2}{2}\sin 2a - \frac{(2\sin a)^3}{3}\cos 3a - \ldots,$$

$$0 = -\frac{2\sin a}{1}\sin a + \frac{(2\sin a)^2}{2}\cos 2a + \frac{(2\sin a)^3}{3}\sin 3a - \ldots.$$

10. Nous bornerons ici ces applications. On peut, ainsi que nous l'avons fait dans notre *Essai*, obtenir, d'une manière analogue, les principaux théorèmes de la Trigonométrie, comme les développements de $\sin na$, $\cos na$, $(\sin a)^n$, $(\cos a)^n$, les sommes de séries

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots,$$
$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots,$$

et la décomposition de $x^{2n} - 2x^n \cos na + 1$ en facteurs du second degré.

Comme application à l'Algèbre, nous démontrerons que tout polynôme

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + fx + g$$

est décomposable en facteurs du premier degré, ou, ce qui revient au même, qu'on peut toujours trouver une quantité qui, prise pour x, rende égal à zéro le polynôme proposé, que nous désignerons par y, les lettres $a, b, \ldots, f, g$ n'étant point d'ailleurs restreintes ici à n'exprimer que des nombres réels

Soient y_p, $y_{p+\rho i}$ les valeurs de y résultant des suppositions $x = p$, $x = p + \rho i$, p et i étant des nombres pris à volonté, et ρ désignant un rayon en direction; on aura

$$y_p = p^n + ap^{n-1} + bp^{n-2} + \ldots + fp + g,$$
$$y_{p+\rho i} = (p+\rho i)^n + a(p+\rho i)^{n-1} + b(p+\rho i)^{n-2} + \ldots$$
$$+ f(p+\rho i) + g$$
$$= y_p + i\rho Q + i^2\rho^2 R + i^3\rho^3 S + \ldots + i^n\rho^n,$$

Q, R, S,... étant des quantités connues, dépendantes de p, n, $a, b, c, \ldots, f, g$, qui s'obtiennent en développant les puissances

de $p + \rho i$. Si l'on suppose i infiniment petit, les termes affectés de i^2, i^3, .., i^n disparaissent, et l'on a simplement

$$y_{p+\rho i} = y_p + i\rho Q.$$

Construisons le second membre de cette équation suivant les règles précédentes. Soit α l'angle que fait y_p avec la ligne prise pour origine des angles; on peut prendre ρ de manière que $i\rho Q$ fasse avec cette même ligne un angle $-\alpha$, c'est-à-dire que la direction de $\overline{i\rho Q}$ soit opposée à celle de $\overline{y_p}$. La grandeur de $y_{p+\rho i}$ sera ainsi plus petite que celle de y_p. On obtiendra, de la même manière, une nouvelle valeur de y, plus petite que $y_{p+\rho i}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que y soit nul; donc, etc.

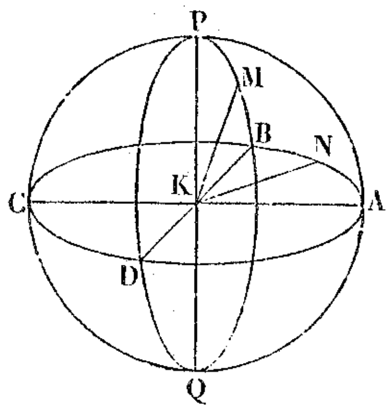
Cette démonstration est cependant sujette à une difficulté dont nous devons la remarque à M. Legendre. La quantité Q peut être nulle, et alors la construction prescrite n'est plus praticable; mais nous observerons que cette objection n'anéantit pas notre démonstration; car le terme $i^2\rho^2 R$, ou le terme $i^3\rho^3 S$, si R est nulle, et ainsi de suite, peut remplacer le terme $i\rho Q$, puisque $\rho^2, \rho^3, \ldots$ sont des quantités de la même nature que ρ. Or, quand même on voudrait supposer tous ces termes nuls, le dernier au moins $i^n\rho^n$ ne le serait pas.

11. La théorie dont nous venons de donner un aperçu peut être considérée sous un point de vue propre à écarter ce qu'elle peut présenter d'obscur, et qui semble en être le but principal, savoir: d'établir des notions nouvelles sur les quantités imaginaires. En effet, mettant de côté la question si ces notions sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme *signes* des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que le *simple emploi d'une notation particulière*. Il suffit, pour cela, de commencer par démontrer, au moyen des premiers théorèmes de la Trigonométrie, les règles de multiplication et d'addition données plus haut; les applications iront de suite, et il ne restera plus à examiner que la question de didactique : « si l'emploi de cette notation peut être avantageux;

» s'il peut ouvrir des chemins plus courts et plus faciles pour démontrer certaines vérités ». C'est ce que le fait seul peut décider.

12. Nous ne croyons pas devoir omettre quelques aperçus sur une extension dont nos principes paraissent susceptibles. Soient, comme plus haut (*fig.* 10), $\overline{KA} = +1$, $\overline{KC} = -1$, $\overline{KB} = +\sqrt{-1}$, $\overline{KD} = -\sqrt{-1}$; tout autre rayon $\overline{KN}$, mené dans le plan de ceux-là, sera de la forme $p + q\sqrt{-1}$; et réciproquement, toute expres-

Fig. 10.



sion de cette forme sera celle d'une ligne dirigée dans ce plan. Tirons maintenant, du centre K, une perpendiculaire $KP = KA$ à ce plan. Que sera cette ligne dirigée $\overline{KP}$ relativement aux précédentes? Leur sera-t-elle tout à fait hétérogène, ou bien peut-on la rapporter analytiquement à l'unité primitive $\overline{KA}$, et assigner son expression algébrique, comme celle de $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ...?

Si nous nous laissons guider par l'analogie, voici ce qu'elle nous suggère sur ces questions.

En prenant pour unité des angles la circonférence entière, il suit des principes ci-dessus qu'un rayon en direction, faisant un angle α avec $\overline{KA}$, peut être exprimé par 1^{α}; mais, d'après la nature des exposants, cette expression a des valeurs multiples, lorsque α est fractionnaire, ce qui peut amener quelques difficultés. On

évitera cet inconvénient, en employant la notation de M. Français (Mémoire cité), et en écrivant 1_{α}; on aura ainsi

$$\overline{KA} = 1_0,\quad \overline{KB} = 1_{\frac{1}{4}},\quad \overline{KC} = 1_{\frac{1}{2}},\quad \overline{KD} = 1_{\frac{3}{4}}.$$

Nous avons pris, de part et d'autre du point A, sur la circonférence ABCD, deux directions opposées, affectées l'une aux angles positifs, l'autre aux angles négatifs. Or, si nous appliquons aux mêmes angles les mêmes considérations qu'aux lignes, nous serons conduit à prendre les angles imaginaires dans une direction perpendiculaire à celle qui appartient aux angles réels.

Supposons que le demi-cercle ABC tourne autour de AC, le point B décrivant le cercle BPDQ; puisqu'on a déjà

$$\text{angle } \overline{AKB} = +\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot(+1),$$

$$\text{angle } \overline{AKD} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot(-1),$$

on pourra dire que

$$\text{angle } \overline{AKP} = \frac{1}{4}\sqrt{-1} = \frac{1}{4}\cdot 1_{\frac{1}{4}};$$

d'où l'on conclura

$$\overline{KP} = 1_{\frac{1}{4}\cdot 1_{\frac{1}{4}}} = 1_{\frac{1}{4}\sqrt{-1}} = 1^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}} = \left(1^{\frac{1}{4}}\right)^{\sqrt{-1}} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}.$$

Telle paraît devoir être l'expression analytique demandée.

Si l'on prend un point M sur le cercle BPD, tel qu'on ait angle $BKM = \mu$, on aura pareillement

$$\text{angle } \overline{AKM} = \frac{1}{4}\left(\cos\mu + \sqrt{-1}\sin\mu\right);$$

et en faisant, pour abréger, $\cos\mu + \sqrt{-1}\sin\mu = \rho$,

$$\overline{KM} = 1_{\frac{1}{4}\rho} = 1^{\frac{1}{4}\rho} = \left(1^{\frac{1}{4}}\right)^{\rho} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\cos\mu + \sqrt{-1}\sin\mu}.$$

C'est l'expression générale de tous les rayons perpendiculaires au rayon primitif $\overline{KA}$.

Cherchons maintenant l'expression de l'angle $\overline{BKP}$.

De part et d'autre du point B, sur la circonférence ABC, les angles sont positifs et négatifs réels, et le plan BKP est perpendiculaire à leur direction; il semblerait donc que l'angle $\overline{BKP}$ est, ainsi que l'angle $\overline{AKP}$, $= \frac{1}{4}\sqrt{-1}$, et qu'il en doit être de même de tout angle $\overline{NKP}$, N étant pris sur la circonférence ABCD; mais on s'aperçoit bientôt de la fausseté de cette conclusion, en faisant coïncider N avec le point C, ce qui donnerait $\overline{CKP} = \frac{1}{4}\sqrt{-1}$, tandis que cet angle est évidemment $-\overline{AKP} = -\frac{1}{4}\sqrt{-1}$.

Pour éclaircir cette difficulté, observons que, une direction étant adoptée pour celle de $+1$, il y a une infinité de directions qui lui sont perpendiculaires, parmi lesquelles on en prend arbitrairement une, pour l'affecter à l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$. L'expression générale de toute unité prise dans l'une de ces directions est, comme nous venons de le voir,

$$1_{\frac{1}{4}\rho} = 1^{\frac{1}{4}\rho} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\rho} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\cos\mu + \sqrt{-1}\sin\mu}.$$

Imaginons au point A une infinité de directions perpendiculaires à la circonférence en ce point; une de ces directions sera parallèle à $\overline{KP}$. C'est celle que nous avons prise pour construire les angles imaginaires positifs $+\alpha\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que nous avons choisi, pour ce cas, $\rho = 1 = \overline{KA}$. Pareillement, au point C, la direction parallèle à $\overline{KP}$ nous a donné les angles imaginaires négatifs $-\alpha\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que nous avons fait $\rho = -1 = \overline{KC}$.

Donc l'analogie nous conduit à faire $\rho = \sqrt{-1} = \overline{KB}$, lorsqu'il s'agit de la direction parallèle à $\overline{KP}$, à partir du point B.

L'angle $\overline{BKP}$ aura donc pour expression

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}.$$

13. Nous ne pousserons pas plus loin ces aperçus, et nous observerons, en terminant, que les expressions a, a_b, a_{b_c}, qui désignent des lignes considérées par rapport à une, à deux, à trois dimensions, ne sont que les premiers termes d'une suite qui peut être prolongée indéfiniment.

Si les notions exposées dans l'article précédent étaient admises, la question, souvent agitée, de savoir si toute fonction peut être ramenée à la forme $p+q\sqrt{-1}$ se trouverait résolue négativement; et $\overline{KP} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ offrirait l'exemple le plus simple d'une quantité non réductible à cette forme, et aussi hétérogène par rapport à $\sqrt{-1}$ que l'est celle-ci par rapport à $+1$.

Il existe, à la vérité, des démonstrations tendant à établir que la fonction $\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{m+n\sqrt{-1}}$ peut toujours être réduite à la forme $p+q\sqrt{-1}$; mais qu'il nous soit permis de remarquer sur ces démonstrations que celles qui emploient le développement en séries ne sauraient être concluantes qu'autant qu'on prouverait que p et q ont des valeurs finies. Il arrive souvent, en effet, dans l'Analyse, qu'une série qui, par sa nature, ne peut exprimer que des quantités réelles, prend une valeur, ou plutôt une forme infinie, lorsqu'elle doit représenter une quantité imaginaire; et l'on peut présumer pareillement qu'une série composée de termes de la forme $p+q\sqrt{-1}$ ou a_b peut devenir infinie, si elle doit exprimer une quantité de l'ordre a_{b_c}.

Quant aux démonstrations qui emploient les logarithmes, elles laissent aussi, ce nous semble, quelques nuages dans l'esprit, en ce qu'on n'a pas encore des notions bien précises sur les logarithmes imaginaires. Il faudrait d'ailleurs s'assurer si un même logarithme ne pourrait pas appartenir à la fois à plusieurs quantités d'ordres différents a, a_b, a_{b_c}. En outre, la multiplicité des valeurs dues aux radicaux de l'expression proposée est une autre source d'incertitude, de telle sorte qu'on pourrait parvenir, de la manière la plus rigoureuse, à réduire $\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{m+n\sqrt{-1}}$ à la forme $p+q\sqrt{-1}$, sans qu'il s'ensuivît nécessairement que cette fonction n'a pas encore d'autres valeurs de l'ordre a_{b_c}, non réductibles à cette forme (*).

NEW BOOKS.

Electrical Papers. By OLIVER HEAVISIDE. 2 vols. London, Macmillan & Co., 1892.

The two volumes before us contain a reprint of fifty articles on electrical subjects, which appeared originally in *The English Mechanic*, *The Philosophical Magazine*, *The Journal of the Society of Telegraph Engineers*, *The Electrician*, *The Philosophical Transactions*, and *Nature* during the interval from July, 1872, to July, 1892. They contain in addition three papers which were written within that interval, but are now published for the first time. The first twelve articles are on matters dealing principally with telegraphy, and are but loosely connected. The next eight articles deal mainly with the theory of the propagation of variations of current along wires, beginning with applications of the simple electrostatic theory of Sir William Thomson to cables under different circumstances, and followed by extensions to include self-induction, or the influence of the inertia of the magnetic medium, and the mutual influence both electrostatic and magnetic of parallel wires. We next come to a series of papers relating to electrical theory in general, first published in *The Electrician* between 1882 and 1887; then to a study of the theory of the propagation of induction and electric current in round wires; and lastly to a more comprehensive treatment of electromagnetism, based upon Maxwell's theory in a long series of papers entitled "Electromagnetic Induction and its Propagation." The remaining articles consist of applications growing out of the preceding theory, namely, the self-induction of wires, resistance and conductance operators, electromagnetic waves, the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field, etc.

Thus it will be seen that the work, though a reprint of papers, has a continuity of treatment, and is suitable for the electrician or the advanced student, though not adapted for use as a manual. Mr. Heaviside is, I believe, now engaged putting the electromagnetic theory in a form suitable for a student.

One who reads these papers cannot fail to be impressed with the philosophic earnestness and philanthropic motive of the author. He is a lover of wisdom and a searcher after truth. In this connection it is interesting to read how some of his most important papers, namely, those on the self-induction of wires, were first received. Because his views were contradictory of those then accepted by the post-office officials, an attempt was made to prevent their discussion and publication. These are the papers, which are now published for the first time. We cannot but agree with the author when he says "there seemed to be an idea that official views, in virtue of their official nature, should not be controverted or criticized. But there seems something wrong here, as the later evidence in support of my views has shown. For what other object have scientific men than to get at the truth, and how is it to be done without free discussion?"

The articles on electric and electromagnetic theory form the best commentary that has been written on Maxwell's "Electricity and Magnetism." The fundamental ideas are explained and elucidated, and the author is not content unless he places before the reader the true inwardness of the analytical expressions and equations. But they are more than a commentary; they constitute a development of Maxwell's theory.

In these volumes we have a full account of the author's system of rational electric units. In many cases the true relation between electric quantities is clouded by the appearance of an extraneous 4π; for example, the resultant force outwards at a charged surface is not equal to the density, but to 4π times the density. This is due to the manner in which the unit of electricity or the unit magnetic pole is defined. If the unit pole were defined as that from which unit amount of force emanated, the force at distance r would be $\frac{1}{4\pi r^2}$ instead of $\frac{1}{r^2}$. The advantage would be that 4π would appear only where its appearance is rational; all the equations would then be seen to be truths instead of appearing as mere formulæ. It is likely, therefore, that the use of rational units would be beneficial in theoretical investigations; but whether the practical units already defined should be made to change with every improvement in the theory of units is a different question.

The author makes (Vol. II., p. 201) some highly important observations on the relation of physical science to mathematical analysis. It will be, perhaps, in the recollection of some readers that Professor Sylvester, a few years since, in the course of his learned paper on Bipotential, poked fun at Professor Maxwell for having, in his investigation of the conjugate properties possessed by complete spherical-surface harmonics, made use of Green's theorem concerning the mutual energy of two electrified systems. He said (in effect, for the quotation is from memory) that one might as well prove the rule of three by the laws of hydrostatics, or something similar to that. In the second edition of his treatise, Professor Maxwell made some remarks that appear to be meant for a reply to this; to the effect that although names involving physical ideas are given to certain quantities, yet, as the reasoning is purely mathematical, the physicist has a right to assist himself by the physical ideas. Certainly; but there is much more in it than that. For not only the conjugate properties of spherical harmonics, but those of all other functions of the fluctuating character which present themselves in physical problems, including the infinitely undiscoverable, are involved in the principle of energy, and are most simply and immediately proved by it, and predicted beforehand. We may indeed get rid of the principle of energy, and treat the matter as a question of the properties of quadratic functions; a method which may commend itself to the pure mathematician. But by the use of the principle of energy, and assisted by the physical ideas involved, we are enabled to go straight to the mark at once and avoid the unnecessary complexities connected with the use of the special functions in question, which may be so great as to wholly prevent the recognition of the properties which, through the principle of energy, are necessitated. It seems to me that we may go even further, and hold that mathematical analysis should be based not on arbitrary laws, but on physical principles. Certain it is that the great developments of analysis have been due to an infusion of physical ideas and principles.

The author goes much further than Clerk Maxwell in the use of space-analysis. The position of Clerk Maxwell was paradoxical; he considered that the notation of quaternions was good, but the method itself bad; he made use of the former, but not of the latter. Mr. Heaviside uses a method which he thus describes (Vol. II., p. 521): "As electromagnetism swarms with vectors, the proper language for its expression and investigation is the Algebra of Vectors. An account is therefore given of the method employed by the author for some years past. The quaternionic basis is rejected, and the algebra is based upon a few definitions of notation merely. It may be regarded as quaternions without quaternions, and simplified to the uttermost; or else as being merely a conveniently condensed expression of the Cartesian mathematics, understandable by all who are acquainted with Cartesian methods, and with which the vectorial algebra is made to harmonize. It is confidently recommended as a practical working system."

It strikes me that to base a method upon a few definitions of notation is a highly illogical procedure, and indeed cannot be done. Let us see how it is attempted. A vector is denoted by a Clarendon letter as **A**, its magnitude by the corresponding Italic capital as A, and the magnitudes of its three rectangular components by A_1, A_2, A_3. This is a matter of notation, and the notation is real, in the sense of corresponding to something in nature. But observe the next step. "The scalar product of a pair of vectors **A** and **B** is denoted by **AB**, and is defined to be

$$\mathbf{AB} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = AB\cos\widehat{\mathbf{AB}} = \mathbf{BA}''.$$

This is not a definition merely. If we define $AB\cos\widehat{\mathbf{AB}}$ as the scalar product of **A** and **B**, and denote it by the simple juxtaposition of its factors,

then A_1B_1 is the scalar product of A_1i and B_1i; A_2B_2 is the scalar product of A_2j and B_2j, and A_3B_3 is the scalar product of A_3K and B_3K. That $AB\cos\widehat{\mathbf{AB}}$ is equal to $A_1B_1\cos ii + A_2B_2\cos jj + A_3B_3\cos kk$ is not a matter of definition, but is a geometrical truth which may be demonstrated. It is a principle, not a definition. The author's introduction of the vector product contains a similar confusion of definition and principles. He says, "The vector product of a pair of vectors is denoted by V**AB**, and is defined to be the vector whose tensor is $AB\sin\widehat{\mathbf{AB}}$, and whose direction is perpendicular to the plane of **A** and **B**, thus

$$\mathbf{VAB} = i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + k(A_1B_2 - A_2B_1)$$

where i, j, k are any three mutually rectangular unit vectors." Now the definition refers merely to the meaning of **V**, and applies to all the terms of the above equation; while the equation itself asserts the geometrical truth, that the directed area formed by **A** and **B** is equal to the geometrical sum of the three areas specified, Mr. Heaviside, in avoiding the Scylla of metaphysics, has been drawn into the Charybdis of definition. It seems to me that the true basis for the principles of space-analysis is to be found in geometry, and more generally in physical science.

Mr. Heaviside opposes the quaternionic practice of introducing a minus before the scalar product; he holds that

$$\mathbf{SAB} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

while according to Hamilton

$$\mathbf{SAB} = -(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3).$$

The quaternionic practice is a consequence of making Nature more simple than she really is, namely, the identifying of vectors and versors. This principle logically carried out would land us in believing that there is no difference between direction and change of direction, or between a translation and a rotation.

The square of a vector being positive, it follows that the reciprocal of a vector has the same direction as the vector but the reciprocal magnitude. This also agrees much better with the principles of analysis than does the quarternionic doctrine that the direction of the reciprocal is the opposite of that of the vector. The author is fully impressed with the importance of preserving harmony with the Cartesian analysis—logical harmony, so that we may pass from the one to the other with as much ease as we pass from algebra to arithmetic.

Mr. Heaviside in these volumes displays some wit, and that may be the reason why he describes his practical working system as "Quaternions without quarternions." The phrase is suggestive of the play of Hamlet with the character of Hamlet left out. To keep the quarternion out of the play he certainly resorts to extreme measures. For instance, in an early paper (Vol. I., p. 271) he gets a product which is the sum of a scalar product and a vector product; namely, if

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dr} \text{ and } \mathrm{R} = Xi + Yj + Zk,$$

then

$$\nabla \mathrm{R} = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right).$$

In a foot-note now added he says: "As the above is the only paper in which I have used the quaternionic ideas and notation, it is perhaps desirable to emphasize the fact that the use was parenthetical. There is great advantage in most practical work in ignoring the quarternion altogether, and also the double signification of a vector above referred to, and in abolishing the quaternionic minus signs." But in the same paper (p. 269) we find the following admission: "Now it appears that when ∇ is applied to a vector, it gives its curl and its convergence respectively. This extraordinary effect of ∇ is not easily to be understood — although symbolically it works out very well, for there is undeniably a certain amount of mystery about the rules for vector multiplication."

The explanation which I have published of this mystery is, that the products of vectors and the products of versors are distinct, forming parts of analysis complementary to one another; that the *complete* product of two vectors consists of two partial products, the one scalar and the other vector; and that this complete product is a quaternion in the sense of being such a sum, but not in the original and proper sense of the word "the ratio of two vectors."

Physical analysis is not all a play of vectors, nor is it all a play of quarternions; there are many actors beside. Our author in revolting from the one extreme has gone to the other; but in securing fair play for the vectors he has furthered the development of that space-analysis which at the present time is the greatest want of the physicist and especially of the electrician.

ALEXANDER MACFARLANE.

Handbuch der Physiologischen Optik. H. VON HELMHOLTZ. 2d edition.

Since the appearance of the first edition of Helmholtz's classic work on physiological optics, investigation in this subject has brought out many new truths, and hence physicists will give a hearty reception to this new edition by the recognized authority on the subject. About two-thirds of the entire work has already appeared. The general arrangement of the book is about

the same as in the original edition; but several improvements are noticeable. All new paragraphs are distinguished by an *n* in the margin, and the double page numbering allows easy reference to be made to the original edition. The bibliography is very full, and the references are at the bottom of the page instead of at the end of the section, as was the case in the original.

The anatomical description of the eye is very complete, and exhibits the professor's early surgical training. The description of the retina is especially full, and includes an account of the recent work of Max Schultz and others. New paragraphs are also added under Dioptrics of the Eye, Accommodation, and Astigmatism. The most important additions, however, are on The Intensity of the Sensation of Light and Color-Blindness. Under the former heading there are fully seventy pages of new matter. It is principally devoted to luminosity (Helligkeit) in its various relations to color, retinal sensitiveness, persistence of vision, etc.

Much space is devoted to the subject of color-sensation and color-blindness. The author reviews the Young hypothesis of color-sensation as given in the first edition, points out the inconsistencies in it, and proposes a new modification. The new hypothesis postulates three primary color-sensations, as did the original Young-Helmholtz theory, but these elements are very different. They are carmine red, green of wave length about 560, and blue of wave length about 482, — and all much more highly saturated than any spectral colors. The author's new hypothesis to explain color-blindness supposes the two primary sensations of the dichroic eye to be produced by two colors derived from the three normal fundamental colors, but not necessarily identical with them. The method of the derivation of the dichroic colors from the normal fundamental is not indicated, and there seems no necessary manner of derivation. This new view accords better with the recent work of Koenig and Dieterici than the original Young-Helmholtz theory, from the fact that it requires no distinction of dichromatism into red-blindness and green-blindness.

The Hering theory is very clearly enunciated and compared with that of the author. This theory he considers as simply a modification of the Young theory, which explains the facts of color mixtures as well as, but not better than, the original. It differs principally in the choice of the elementary sensations. In the Hering theory there are three fundamental color-sensations of which at least two exhibit both positive and negative characteristics. One of them gives white under excitation, and black when at rest; another gives blue and yellow, and the third gives green and its complementary red. White light excites only the white-black visual component; yellow excites this and also the blue-yellow component. Blue does the same, but in the opposite sense. When the blue and the green

LECTURES

ON

QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

OF

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT OF SUCCESSIVE COURSES OF LECTURES, DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS,

IN

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES;
OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;
CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN;
OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY;
THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;
ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN;
AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.

DUBLIN:
HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,
BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.
LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.
1853.

1853

PREFACE.

[1.] The volume now offered to the public is designed as an assistance to those persons who may be disposed to study and to employ a certain new mathematical method, which has, for some years past, occupied much of my own attention, and for which I have ventured to propose the name of the Method or Calculus of Quaternions. Although a copious analytical index, under the form of a Table of Contents, will be found to have been prefixed to the work, yet it seems proper to offer here some general and preliminary* remarks: especially as regards that conception from which the whole has been gradually evolved, and the motives for giving to the resulting method an appellation not previously in use.

[2.] The difficulties which so many have felt in the doctrine of Negative and Imaginary Quantities in Algebra forced themselves long ago on my attention; and although I early formed some acquaintance with various views or suggestions that had been proposed by eminent writers, for the purpose of removing

* Some readers may find it convenient to pass over for the present these prefatory remarks, and to proceed at once to the Volume, of which a large part has been drawn up so as to suppose less of previous and technical preparation than some of the paragraphs of this Preface. Indeed, great pains have been taken to render the early Lectures as elementary as the subject would allow; and it is hoped that they will be found perfectly and even easily intelligible by persons of moderate scientific attainments. It is true that some of the subsequent portions of the Course (especially parts of the concluding Lecture) may possibly appear difficult, from the novel nature of the calculations employed: but perhaps on that very account those later portions may repay the attention of more advanced mathematical students.

or eluding those difficulties (such as the theory of direct and inverse quantities, and of indirectly correlative figures, the method of constructing imaginaries by lines drawn from one point with various directions in one plane, and the view which refers all to the mere play of algebraical operations, and to the properties of symbolical language), yet the whole subject still appeared to me to deserve additional inquiry, and to be susceptible of a more complete elucidation. And while agreeing with those who had contended that negatives and imaginaries were not properly *quantities* at all, I still felt dissatisfied with any view which should not give to them, from the outset, a clear interpretation and *meaning;* and wished that this should be done, for the square roots of negatives, without introducing considerations *so expressly geometrical,* as those which involve the conception of an *angle.*

[3.] It early appeared to me that these ends might be attained by our consenting to regard ALGEBRA as being no mere Art, nor Language, nor *primarily* a Science of Quantity; but rather as the Science of Order in Progression. It was, however, a part of this conception, that the *progression* here spoken of was understood to be *continuous* and *unidimensional:* extending indefinitely *forward* and *backward,* but not in any *lateral* direction. And although the successive *states* of such a progression might (no doubt) be represented by *points upon a line,* yet I thought that their simple *successiveness* was better conceived by comparing them with *moments of time,* divested, however, of all reference to *cause* and *effect;* so that the "time" here considered might be said to be abstract, ideal, or *pure,* like that "space" which is the object of geometry. In this manner I was led, many years ago, to regard Algebra as the SCIENCE OF PURE TIME: and an Essay,* containing my views respecting it as such, was published† in 1835. If I now reproduce a few of the opinions put

* Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. (Read November 4th, 1833, and June 1st, 1835).—Transactions of the Royal Irish Academy, Vol. XVII., Part II. (Dublin, 1835), pages 293 to 422.

† I was encouraged to entertain and publish this view, by remembering some passages in Kant's Criticism of the Pure Reason, which appeared to justify the expectation that it should be *possible* to construct, *à priori,* a Science of Time,

forward in that early Essay, it will be simply because they may assist the reader to place himself in that *point of view,* as regards the first elements of *algebra,* from which a passage was gradually made by me to that comparatively *geometrical* conception which it is the aim of this volume to unfold. And with respect to anything unusual in the *interpretations* thus proposed, for some simple and elementary notations, it is my wish to be understood as not at all insisting on them as *necessary,** but merely proposing them as consistent among themselves, and preparatory to the study of the quaternions, in at least one aspect of the latter.

[4.] In the view thus recently referred to, if the letters A and B were employed as *dates,* to denote any two *moments* of time, which might or might not be distinct, the case of the coincidence or *identity* of these two moments, or of *equivalence* of these two dates, was denoted by the equation,

$$B = A;$$

which symbolic assertion was thus interpreted as not involving any *original* reference to *quantity,* nor as expressing the result

as well as a Science of Space. For example, in his Transcendental Æsthetic, Kant observes:—"Zeit und Raum sind demnach zwey Erkenntnissquellen, aus denen *à priori* verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können, wie vornehmlich die reine Mathematik in Ansehung der Erkenntnisse vom Raume und dessen Verhältnissen ein glänzendes Beyspiel gibt. Sie sind nämlich beide zusammengenommen reine Formen aller sinnlichen Anschauung, und machen dadurch synthetische Sätze *a priori* möglich." Which may be rudely rendered thus:—"Time and Space are therefore two knowledge-sources, from which different synthetic knowledges can be *à priori* derived, as eminently in reference to the knowledge of space and of its relations a brilliant example is given by the pure mathematics. For they are, both together [space and time], pure forms of all sensuous intuition, and make thereby synthetic positions *à priori* possible." (Critik der reinen Vernunft, p. 41. Seventh Edition. Leipzig: 1828).

* For example, the usual identity $(B - A) + A = B$, which in the older Essay was interpreted with reference to *time,* as in paragraph [8] of this Preface, the letters A and B denoting *moments,* is in the present work (Lecture I., article 25) interpreted, on an analogous plan indeed, but with a reference to *space,* the letters denoting *points.* Still it will be perceived that there exists a close connexion between the two views; a *step,* in each, being conceived to be applied to a *state* of a progression, so as to generate (or conduct to) another state. And generally I think that it may be found useful to compare the interpretations of which a sketch is given in the present Preface, with those proposed in the body of the work.

of any comparison between two *durations* as *measured*. It corresponded to the conception of simultaneity or *synchronism*; or, in simpler words, it represented the thought of the *present* in time. Of all possible answers to the general question, "*When*," the *simplest* is the answer, "Now:" and it was the *attitude of mind*, assumed in the making of this answer, which (in the system here described) might be said to be originally symbolized by the *equation* above written. And, in like manner, the two formulæ of *non*-equivalence,

$$B > A, \quad B < A,$$

were interpreted, without any *primary* reference to quantity, as denoting the two contrasted relations of *subsequence* and of *precedence*, which answer to the thoughts of the *future* and the *past* in time; or as expressing, simply, the one that the moment B is conceived to be *later* than A, and the other that B is *earlier* than A: without *yet* introducing even the *conception* of a *measure*, to determine *how much later*, or how much earlier, one moment is than the other.

[5.] Such having been proposed as the *first* meanings to be assigned to the three elementary marks = > <, it was next suggested that the *first* use of the mark −, in constructing a *science of pure time*, might be conceived to be the forming of a complex symbol $B - A$, to denote the *difference between two moments*, or the *ordinal relation* of the moment B to the moment A, whether that relation were one of identity or of diversity; and if the latter, then whether it were one of subsequence or of precedence, and in whatever degree. And *here*, no doubt, in attending to the *degree* of such diversity between two moments, the conception of *duration*, as *quantity* in time, was introduced: the *full* meaning of the symbol $B - A$, in any particular application, being (on this plan) not known, until we know *how long after*, or how long before, if at all, B is than A. But it is evident that the notion of a certain *quality* (or *kind*) of this diversity, or interval, enters into this conception of a *difference* between moments, at least as fully and as soon as the notion of *quantity*, amount, or duration. The contrast between the Future and the Past appears to be even earlier and more fundamental, in human thought, than that between the Great and the Little.

[6.] After *comparing moments*, it was easy to proceed to *compare relations*; and in this view, by an *extension* of the recent signification [4] of the sign =, it was used to denote *analogy* in time; or, more precisely, to express the *equivalence of two marks of one common ordinal relation*, between *two pairs* of moments. Thus the formula,

$$D - C = B - A,$$

came to be interpreted as denoting an *equality between two intervals in time*; or to express that the moment D is *related* to the moment C, *exactly as* B *is to* A, with respect to identity or diversity: the *quantity and quality* of such diversity (when it exists) being here *both* taken into account. A formula of this sort was shewn to admit of *inversion* and *alternation* ($C - D = A - B$, $D - B = C - A$); and generally there could be performed a number of *transformations* and *combinations* of equations such as these, which all admitted of being *interpreted* and *justified* by this mode of viewing the subject, but which *agreed* in all respects with the received *rules* of algebra. On the same plan, the two contrasted formulæ of inequalities of differences,

$$D - C > B - A, \quad D - C < B - A,$$

were interpreted as signifying, the one that D was *later*, *relatively* to C, than B to A; and the other that D was *relatively earlier*.

[7.] Proceeding to the mark +, I used this sign *primarily* as a mark of combination between a symbol, such as the smaller Roman letter a, of a *step in time*, and the symbol, such as A, of the moment *from* which this *step* was conceived to be made, in order to form a complex symbol, $a + A$, *recording this conception of transition*, and denoting the moment (suppose B) *to* which the step was supposed to conduct. The step or transition here spoken of was regarded as a *mental act*, which might as easily be supposed to conduct *backwards* as *forwards* in the progression of time; or even to be a *null step*, denoted by 0, and producing *no effect* ($0 + A = A$). Thus, with these meanings of the signs, the notation

$$B = a + A,$$

denoted the conception that the moment B might be *attained*, or mentally *generated*, by making (in thought) the step a from the moment A. And it appeared to me that without ceasing to regard the symbol B − A as denoting, in one view [5], an *ordinal relation* between two moments, we might *also* use it in the *connected sense* of denoting this *step from one to another*: which would allow us (as in ordinary algebra) to write, with the recent suppositions,

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = \mathrm{a};$$

the two members of this new equation being here symbols for one common step.

[8.] The usual identity,

$$(\mathrm{B} - \mathrm{A}) + \mathrm{A} = \mathrm{B},$$

came thus to be interpreted as signifying *primarily* (in the Science of Pure Time) a certain conceived *connexion* between the operations, of *determining* the difference between two moments as a *relation*, and of *applying* that difference as a *step*. And the two other familiar and connected identities,

$$\mathrm{C} - \mathrm{A} = (\mathrm{C} - \mathrm{B}) + (\mathrm{B} - \mathrm{A}), \quad \mathrm{C} - \mathrm{B} = (\mathrm{C} - \mathrm{A}) - (\mathrm{B} - \mathrm{A}),$$

were treated, on the same plan, as originally signifying certain *compositions* and *decompositions* of ordinal relations or of steps in time. A special symbol for *opposition* between any two such relations or steps was proposed; but it was remarked that the more usual notations, + a and − a, for the step (a) itself, and for the opposite of that step, might, in full consistency with the same general view, be employed, if treated as abridgments for the more complex symbols 0 + a, 0 − a: the latter notation presenting *here* no difficulty of interpretation, nor requiring any attempt to conceive the *subtraction* of a *quantity* from *nothing*, but merely the *decomposition* of a *null step* into *two opposite steps*. But *operations on steps*, conducted on this plan, were shewn to agree in all respects with the usual *rules* of algebra, as regarded Addition and Subtraction.

[9.] One *time-step* (b) was next compared with another (a), in the way of algebraic *ratio*, so as to conduct to the conception of a certain complex *relation* (or *quotient*), determined partly by their *relative largeness*, but partly also by their *relative direction*,

as similar or opposite; and to the closely connected conception of an algebraic *number* (or *multiplier*), which *operates* at once on the quantity and on the direction of the one step (a), so as to *produce* (or mentally *generate*) the quantity and direction of the other step (b). By a combination of these two conceptions, the usual identity,

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \times \mathrm{a} = \mathrm{b}, \text{ or } \mathrm{b} = a \times \mathrm{a}, \text{ if } \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = a,$$

received an interpretation; the factor a being a *positive* or a *contra-positive* (more commonly called *negative*) *number*, according as it *preserved* or *reversed* the *direction* of the step on which it operated. The four primary operations, for combining any two such ratios or numbers or factors, a and b, among themselves, were *defined* by four equations which may be written thus, and which were indeed *selected* from the usual formulæ of algebra, but were employed with new *interpretations*:

$$(b + a) \times \mathrm{a} = (b \times \mathrm{a}) + (a \times \mathrm{a}); \quad (b - a) \times \mathrm{a} = (b \times \mathrm{a}) - (a \times \mathrm{a});$$
$$(b \times a) \times \mathrm{a} = b \times (a \times \mathrm{a}); \quad b \div a = (b \times \mathrm{a}) \div (a \times \mathrm{a}).$$

[10.] *Operations* on algebraic *numbers* (positive or contra-positive) were thus made to depend (in thought) on operations of the same names on *steps*; which were again conceived to involve, in their ultimate analysis, a reference to comparison of *moments*. These conceptions were found to conduct to results agreeing with those usually received in algebra; at least when 0 was treated as a symbol of a *null number*, as well as of a null step [7], and when the symbols, $0 + a$, $0 - a$, were abridged to $+ a$ and $- a$. In this view, there was no difficulty whatever, in interpreting the *product* of *two negative numbers*, as being equal to a *positive* number: the result expressing simply, in this view of it, that *two successive reversals restore* the direction of a step. And other difficulties respecting the *rule of the signs* appeared in like manner to fall away, more perfectly than had seemed to me to take place in any view of algebra, which made the thought of quantity (or of magnitude) the *primary* or *fundamental* conception.

[11.] This theory of algebraic numbers, as ratios of steps in time, was applied so as to include results respecting powers and roots and logarithms: but what it is at present chiefly important to observe is, that because, for the reason just assigned, the *square* of *every* number is *positive*, therefore *no number*, whether positive or negative, could be a *square root of a negative* number, in *this* any more than in *other* views of algebra. At least it was certain that no *single* number, of the kinds above considered, could possibly be such a root: but I thought that without going out of the same *general class* of interpretations, and especially without ceasing to refer all to the notion of *time*, explained and guarded as above, we might conceive and compare *couples of moments;* and so derive a conception of *couples of steps* (in time), on which might be founded a theory of *couples of numbers*, wherein no such difficulty should present itself.

[12.] In this extended view, the symbols A_1 and A_2 being employed to denote the two moments of one such pair or couple, and B_1, B_2 the two moments of another pair, I was led to write the formula,

$$(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) - (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) = (\mathrm{B}_1 - \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_2);$$

and to explain it as expressing that the *complex ordinal relation* of one *moment-couple* $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$ to another moment-couple $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ might be regarded as a *relation-couple;* that is to say, as a *system of two ordinal relations*, $\mathrm{B}_1 - \mathrm{A}_1$ and $\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_2$, between the *corresponding moments* of those two moment-couples: the *primary moment* B_1 of the one pair being compared with the primary moment A_1 of the other; and, in like manner, the *secondary moment* B_2 being compared with the secondary moment A_2. But, instead of this (analytical) *comparison* of moments with moments, and thereby of *pair with pair*, I thought that we might also conceive a (synthetical) *generation* [7] of one pair of moments from another, by the *application* of a *pair of steps* [11], or by what might be called the *addition* (see again [7]), of a *step-couple* to a *moment-couple;* and that an *interpretation* might thus be given to the following *identity*, in the theory of couples here referred to:

$$(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) = \{(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) - (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)\} + (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2).$$

And other results, respecting the compositions and decompositions of *single ordinal relations*, or of *single steps in time*, such

as those referred to in paragraph [8] of this Preface, were easily extended, in like manner, to the corresponding treatment of *complex relations*, and of *complex steps*, of the kinds above described.

[13.] There was no difficulty in interpreting, on this plan, such formulæ of *multiplication* and *division*, as

$$a \times (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2); \ (a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2) \div (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = a;$$

where the symbols a_1, a_2 denote any two steps in time, and a any number, positive or negative. But the question became less easy, when it was required to interpret a symbol of the form

$$(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) \div (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2),$$

where b_1, b_2 denoted two steps which could not be derived from the two steps a_1, a_2, through multiplication by *any single number*, such as a. To meet this case, which is indeed the general one in this theory, I was led to introduce the conception [11] of *number-couples*, or of *pairs of numbers*, such as (a_1, a_2); and to regard every *single* number (a) as being a *degenerate form* of such a number-couple, namely of $(a, 0)$; so that the recent formula, for the *multiplication of a step-couple by a number*, might be thus written:

$$(a_1, 0)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a_1 \mathrm{a}_1, a_1 \mathrm{a}_2).$$

It appeared proper to establish also the following formula, for the *multiplication of a primary step*, by an arbitrary number-couple:

$$(a_1, a_2)\ (\mathrm{a}_1, 0) = (a_1 \mathrm{a}_1, a_2 \mathrm{a}_1);$$

and to regard every such number-couple as being the *sum* of two others, namely, of a *pure primary* and a *pure secondary*, as follows:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2):$$

the analogous decomposition of a step-couple having been already established.

[14.] The difficulty of the *general* multiplication of a step-couple by a number-couple came thus to be reduced to that of assigning the product of one pure secondary by another: and the spirit of this whole theory of couples led me to conceive that, for such a product, we ought to have an expression of the form,

$$(0, a_2)\ (0, \mathrm{a}_2) = (\gamma_1 a_2 \mathrm{a}_2,\ \gamma_2 a_2 \mathrm{a}_2);$$

the coefficients γ_1 and γ_2 being some two constant numbers, independent of the *step* a_2, and of the *number* a_2: which two coefficients I proposed to call the *constants of multiplication*. These constants might be variously assumed: but reasons were given for adopting the following *selection** of values, as the basis of all subsequent operations:

$$\gamma_1 = -1;\ \gamma_2 = 0.$$

In this way, the required *law of operation*, of a general number-couple on a general step-couple, as multiplier on multiplicand, was found, with this choice of the *constants*, to be expressed by the formula:

$$(a_1, a_2)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a_1 \mathrm{a}_1 - a_2 \mathrm{a}_2,\ a_2 \mathrm{a}_1 + a_1 \mathrm{a}_2).$$

And in fact it was easy, with the assistance of this formula, to *interpret the quotient* [13] *of two step-pairs*, as being always equal to a *number-pair*, which could be definitely assigned, when the ratios of the four single steps were given.

[15.] With these conceptions and notations, it was allowed to write the two following equations:

$$(1, 0)\ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (\mathrm{a}, \mathrm{b});\ \ (0, 1)\ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (-\mathrm{b}, \mathrm{a});$$

and I thought that these two factors, (1, 0) and (0, 1), thus used, might be called respectively the *primary unit*, and the *secondary unit*, of number. It was proposed to establish, by definition, for the chief *operations on number-pairs*, a few rules which seemed to be natural extensions of those already established for the corresponding operations [9] on *single numbers*: and it was seen that because

$$(0, 1)\ (-\mathrm{b}, \mathrm{a}) = (-\mathrm{a}, -\mathrm{b}) = (-1, 0)\ (\mathrm{a}, \mathrm{b}),$$

we were allowed, as a consequence of those rules, or of the conception which had suggested them, namely, (compare [33]), by a certain *abstraction* of operators from operand, to establish the formula,

$$(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1.$$

* In some of my unprinted investigations, other selections of these constants were employed.

A new and (as I thought) clear *interpretation* was thus assigned, for that well-known expression in algebra, *the square root of negative unity*: for it was found that we might consistently write, on the foregoing plan,

$$(0, 1) = (-1, 0)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1};$$

without anything obscure, impossible, or *imaginary*, being in any way involved in the conception.

[16.] In words, if after *reversing* the direction of the *second* of any two steps, we then *transpose* them, as to order; thus making the old but reversed second step the *first* of the *new* arrangement, or of the new step-couple; and making, at the same time, the old and unreversed first step the *second* of the same new couple; and if we then *repeat* this complex process of reversal and transposition, we shall, upon the whole, have *restored* the *order* of the two steps, but shall have *reversed* the *direction* of *each*. Now, it is the *conceived operator*, in this process of *passing from one pair of steps to another*, which, in the system here under consideration, was denoted by the celebrated symbol $\sqrt{-1}$, so often called IMAGINARY. And it is evident that the process, thus described, has no special reference whatever to the notion of *space*, although it has a reference to the conception of PROGRESSION. The symbol -1 denoted that NEGATIVE UNIT of number, of which the effect, as a *factor*, was to change a *single step* $(+\mathrm{a})$ to its own *opposite step* $(-\mathrm{a})$; and because *two* such reversals *restore*, therefore (see [10]) the usual algebraic equation,

$$(-1)^2 = +1,$$

continued to subsist, in *this* as in other systems. But the symbol $\sqrt{-1}$ was regarded as *not at all less real* than those other symbols -1 or $+1$, although *operating on a different subject*, namely, *on a pair of steps* (a, b), and changing them to a *new pair*, namely, the pair $(-\mathrm{b}, +\mathrm{a})$. And the *form* of this well-known symbol, $\sqrt{-1}$, as an *expression* (in the system here described) for what I had previously written as (0, 1), and had called (see [15]) the SECONDARY UNIT of number, was justified by shewing that the effect of its *operation*, when *twice* performed, *reversed each step* of the pair.

[17.] The more general expression of algebra, $a_1 + \sqrt{-1}\, a_2$, for any (so called) *imaginary root* of a quadratic or other equation, was, on this plan, interpreted as being a symbol of the *number-couple* which I had otherwise denoted by (a_1, a_2); and of which the law of *operation on a step-couple* had already [14] been assigned: as also the analogous law, thence derived,* of its *multiplication by another number-couple*, namely, that which is expressed by the formula,

$$(b_1, b_2)\,(a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2,\ b_2 a_1 + b_1 a_2).$$

In this view, instead of saying that the usual quadratic equation,

$$x^2 + ax + b = 0,$$

where a and b are supposed to denote two positive or negative numbers, has generally two roots, *real or imaginary*, it would be said that this *other form* of the same equation,

$$(x, y)^2 + (a, 0)\,(x, y) + (b, 0) = (0, 0),$$

is generally satisfied by *two* (real) *number-couples;* in which, according to the values of a and b, the *secondary number* (y) might or might not be zero. An equation of this sort was called a *couple-equation*, and was regarded as equivalent to a *system of two equations*† *between numbers:* for example, the recent *quadratic couple-equation* breaks itself up into the two following separate equations,

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0,\ \ 2xy + ay = 0,$$

which always admit of real and numerical solutions, whether $\frac{1}{4}a^2 - b$ be a positive or a negative number; the difference being only that in the former case we are to take the factor $y = 0$, of the second equation of the pair, whereas in the latter case we are to take the *other factor* of that equation, and to suppose $2x + a = 0$. And similar remarks might be made on equations of higher orders: all notion of anything *imaginary*, *unreal*, or *impossible*, being quite excluded from the view.

* The principles of such derivation were only hinted at in the Essay of 1835 (see page 403 of the Volume above cited): but it was perhaps sufficiently obvious that they depended on the "separation of symbols," or on the abstraction of a common operand. (Compare paragraphs [15], [33], of the present Preface.)

† M. Cauchy, in his Cours d' Analyse (Paris, 1821, page 170), has the remark :—"Toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles." That valuable work of M. Cauchy was early known to me: but it will have been perceived that I was induced to look at the whole subject of algebra from a somewhat different point of view, at least on the metaphysical side. As to the word "numbers," see a note to [33].

[18.] The same view was extended, so as to include a theory of powers, roots, and logarithms of number-couples; and especially to confirm a remarkable conclusion which my friend John T. Graves, Esq., had communicated to me (and I believe to others) in 1826, and had published in the Philosophical Transactions for the year 1829: namely, that *the general symbolical expression for a logarithm is to be considered as involving two arbitrary and independent integers;** the *general logarithm of unity*, to the Napierian base, being, for example, susceptible of the form,

$$\log 1 = \frac{2\omega' \pi}{2\omega\pi - \sqrt{-1}},$$

where ω, ω' denote *any two whole numbers*, positive or negative or null. In fact, I arrived at an equivalent expression, in my own theory of number-couples, under the form,

$$\mathop{\log}_{\omega\ (e,\,0)}^{\omega'}\,(1, 0) = \frac{(0,\ 2\omega'\pi)}{(1,\ 2\omega\pi)};$$

and generally an expression for the *logarithm-couple*, with the *order* ω, and *rank* ω', of any proposed *number-couple* (y_1, y_2), to any proposed *base-couple* (b_1, b_2), was investigated in such a way as to confirm† the results of Mr. Graves.

* It is proper to mention, that results substantially the same, respecting the entrance of two arbitrary whole numbers into the general form of a logarithm, are given by Ohm, in the second volume of his valuable work, entitled : "Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, vom Professor Dr. Martin Ohm" (Berlin, 1829, Second Edition, page 440. I have not seen the first Edition). For other particulars respecting the history of such investigations, on the subject of *general logarithms*, I must here be content to refer to Mr. Graves's subsequent Paper, printed in the Proceedings of the Sections of the British Association for the year 1834 (Fourth Report, pp. 523 to 531. London, 1835).

† Another confirmation of the same results, derived from a peculiar theory of conjugate functions, had been communicated by me to the British Association

[19.] After remarking that it was he who had proposed those names, of *orders and ranks of logarithms*, that early Essay of my own, of which a very abridged (although perhaps tedious) account has thus been given, continued and concluded as follows:— "But because Mr. Graves employed, in his reasoning, the usual "principles respecting *Imaginary Quantities*, and was content "to prove the symbolical necessity without shewing the interpre-"tation, or inner meaning, of his formulæ, the present *Theory of* "*Couples* is published to make manifest that hidden meaning: "and to shew, by this remarkable instance, that expressions "which seem, according to common views, to be merely symbo-"lical, and quite incapable of being interpreted, may pass into "the world of thoughts, and acquire reality and significance, if "Algebra be viewed as not a mere Art or Language, but as the "Science of Pure Time.* The author hopes to publish hereafter

at Edinburgh in 1834, and may be found reported among the Proceedings of the Sections for that year, at pp. 519 to 523 of the Volume lately cited. The partial differential "equations of conjugation," there given, had, as I afterwards learned, presented themselves to other writers: and the Essay on "Conjugate Functions, or Algebraic Couples," there mentioned, was considerably modified, in many respects, before its publication in 1835, in the Transactions of the Royal Irish Academy.

* Perhaps I ought to apologize for having thus ventured here to reproduce (although only historically, and as marking the progress of my own thoughts) a view so little supported by scientific authority. I am very willing to believe that (though not unused to calculation) I may have habitually attended too little to the *symbolical* character of Algebra, as a Language, or organized system of *signs*: and too much (in proportion) to what I have been accustomed to consider its *scientific* character, as a Doctrine analogous to Geometry, through the Kantian parallelism between the *intuitions* of Time and Space. This is not a proper opportunity for seeking to do justice to the views of others, or to my own, on a subject of so great subtlety: especially since, in the *present* work, I have thought it convenient to adopt throughout a *geometrical basis*, for the exposition of the theory and calculus of the Quaternions. Yet I wish to state, that I do not despair of being able hereafter to shew that my own old views respecting Algebra, perhaps modified in some respects by subsequent thought and reading, are not fundamentally and irreconcileably opposed to the teaching of writers whom I so much respect as Drs. Ohm and Peacock. The "Versuch," &c., of the former I have cited (the date of the first Volume of the Second Edition is Berlin, 1828): and it need scarcely be said (at least to readers in those countries) that my other reference is to the *Algebra* (Cambridge, 1830); the *Report on Certain Branches of Analysis*, printed in the Third Report of the British Association for the Advancement of Science (London, 1834); the *Arithmetical Algebra* (Cambridge, 1842); and the *Symbolical Algebra* (Cambridge, 1845): all by the Rev. George Peacock. I by no means dispute the possibility of constructing a consistent and useful system of algebraical calculations, by starting with the notion of *integer number*; unfolding that notion into its necessary consequences; expressing those consequences with the help of *symbols*, which are already general in *form*, although supposed at first to be limited in their signification, or *value*: and then, by *definition*, for the sake of *symbolic generality*, *removing* the *restrictions* which the original notion had imposed; and so resolving to *adopt*, as perfectly *general* in *calculation*, what had been only *proved* to be *true* for a certain subordinate and limited extent of *meaning*. Such seems to be, at least in part, the view taken by each of the two original and thoughtful writers who have been referred to in the present Note: although Ohm appears to dwell more on the study of the *relations* between the fundamental *operations*, and Peacock more on the *permanence* of equivalent *forms*. But I confess that I do not find myself able to frame a distinct *conception* of *number*, without *some* reference to the thought of *time*, although this reference may be of a somewhat abstract and transcendental kind. I cannot fancy myself as *counting* any set of things, without first *ordering* them, and treating them as *successive*: however *arbitrary* and *mental* (or *subjective*) this assumed succession may be. And by consenting to *begin* with the abstract notion (or pure intuition) of TIME, as the *basis* of the exposition of those axioms and inferences which are to be expressed by the symbols of algebra, (although I grant that the commencing with the more familiar conception of *whole number* may be more convenient for purposes of elementary instruction,) it still appears to me that an advantage would be gained: because the necessity for any merely *symbolical extension* of formulæ would be at least considerably *postponed* thereby. In fact (as has been partly shewn above), *negatives* would then present themselves as easily and naturally as positives, through the fundamental contrast between the thoughts of *past* and *future*, used *here* as no mere *illustration* of a result otherwise and symbolically deduced, without any clear comprehension of its meaning, but as the very *ground* of the reasoning. The ordinary *imaginaries* of algebra could be *explained* (as above) by *couples*; but might *then*, for convenience of calculation, be *denoted* by *single letters*, subject to all the ordinary *rules*, which rules would *follow* (on this plan) from the combination of *distinct conceptions* with *definitions*, and would offer no result which was not perfectly and easily *intelligible*, in strict consistency with that *original* thought (or intuition) of time, from which the whole theory should (on this supposition) be evolved. The doctrine of the n roots of an equation of the n^{th} degree (for example) would thus suffer no attaint as to *form*, but would acquire (I think) new clearness as to *meaning*, without any assistance from geometry. The *quaternions*, as I have elsewhere shewn (in Vol. XXI., Part II., of the Transactions of the Royal Irish Academy), and even the *biquaternions* (as I hope to shew hereafter), might have their laws explained, and their symbolical results interpreted, by comparisons of *sets of moments*, and by operations on *sets*

"many other applications of this view; especially to Equations "and Integrals, and to a Theory of Triplets and Sets of Mo-

"ments, Steps, and Numbers, which includes this Theory of "Couples."*

[20.] The theory of *triplets* and *sets*, thus spoken of at the close of the Essay of 1835, had in fact formed the subject of various unpublished investigations, of which some have been preserved: and a brief notice of them here (especially as relates to triplets†) may perhaps be useful, by assisting to throw light on the nature of the passage, which I gradually came to make, from *couples* to *quaternions*.

Without departing from the same general view of algebra, as the science of pure time, it was obvious that no necessity existed for any limitation to *pairs*, of moments, steps, and numbers. Thus, instead of comparing, as in [12], *two moments*, B_1 and B_2, with two other moments, A_1 and A_2, it was possible to compare *three* moments, B_1, B_2, B_3, with three *other* moments, A_1, A_2, A_3; that is, more fully, to compare (or to conceive as compared) the

of steps in time. Thus, in the phraseology of Dr. Peacock, we should have a very wide "science of suggestion" (or rather, suggestive science) as our *basis*, on which to build up afterwards a new structure of purely *symbolical generalization*, if the *science of time* were adopted, instead of merely Arithmetic, or (primarily) the doctrine of *integer number*. Still I admit fully that the actual *calculations* suggested by this, or by any other view, must be performed according to some fixed *laws of combination of symbols*, such as Professor De Morgan has sought to reduce, for ordinary algebra, to the smallest possible compass, in his Second Paper on the Foundation of Algebra (Camb. Phil. Trans., Vol. VII., Part III.), and in his work entitled "Trigonometry and Double Algebra" (London, 1849): and that in following out such *laws* to their symbolical consequences, uninterpretable (or at least uninterpreted) *results* may be expected to arise. In the present Volume (as has been already observed), I have thought it expedient to present the quaternions under a *geometrical aspect*, as one which it may be perhaps more easy and interesting to contemplate, and more immediately adapted to the subsequent applications, of geometrical and physical kinds. And in the passage which I have made (in the Seventh Lecture), from *quaternions* considered as *real* (or as geometrically *interpreted*), to *biquaternions* considered as *imaginary* (or as geometrically *uninterpreted*), but as symbolically *suggested* by the generalization of quaternion formulæ, it will be perceived, by those who shall do me the honour to read this work with attention, that I have employed a *method of transition*, from *theorems proved* for the *particular* to *expressions assumed* for the *general*, which bears a very close *analogy* to the methods of Ohm and Peacock: although I have *since* thought of a way of *geometrically interpreting the biquaternions* also.

* Trans. R. I. A., Vol. XVII., Part II., page 422.

† These remarks on *triplets* are now for the first time published.

homologous moments of these two *triads*, primary with primary, secondary with secondary, and tertiary with tertiary; and so to obtain a certain system or *triad of ordinal relations*, or a *triad of steps* in time, which might be denoted (compare [5], [7], [12]) by either member of the following equation:

$$(B_1, B_2, B_3) - (A_1, A_2, A_3) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3).$$

And on the same plan (compare [7], [8], [12]), if we denote the three *constituent steps* of such a triad as follows,

$$B_1 - A_1 = a_1, \quad B_2 - A_2 = a_2, \quad B_3 - A_3 = a_3,$$

it was allowed to write,

$$(B_1, B_2, B_3) = (a_1, a_2, a_3) + (A_1, A_2, A_3);$$

a triad of steps being thus (symbolically) *added* (or applied) to a triad of moments, so as to conduct (in thought) to another triad of moments. It appeared also convenient to establish the following formula, for the *addition of step-triads*,

$$(b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3),$$

as denoting a certain *composition* of two such triads of steps, answering to that *successive application* of them to any given triad of moments (A_1, A_2, A_3), which conducts ultimately to a *third triad* of moments, namely, to the triad (C_1, C_2, C_3), if

$$C_1 - B_1 = b_1, \quad C_2 - B_2 = b_2, \quad C_3 - B_3 = b_3.$$

Subtraction of one step-triad from another was explained (see again [8]) as answering to the analogous decomposition of a given step-triad into others; or to a system of *three distinct decompositions* of so many single steps, each into two others, of which one was given; and it was expressed by the formula,

$$(c_1, c_2, c_3) - (a_1, a_2, a_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3):$$

while the usual rules of algebra were found to hold good, respecting *such* additions and subtractions of triads.

[21.] *Multiplication* of a step-triad by a positive or negative *number* (a) was easy, consisting simply in the multiplication of *each constituent step* by that number; so that I had the equation,

$$a\,(a_1, a_2, a_3) = (aa_1, aa_2, aa_3);$$

and conversely it was natural (compare [13]) to establish the following formula for a certain *case of division of step-triads*,

$$(a\mathrm{a}_1,\ a\mathrm{a}_2,\ a\mathrm{a}_3) \div (\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \mathrm{a}_3) = a.$$

But in the more general case (compare again [13]), where the steps $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3$ of one triad were *not proportional* to the steps $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$, it seemed to me that the *quotient* of these two step-triads was to be interpreted, on the same general plan, as being equal to a certain triad or *triplet of numbers*, a_1, a_2, a_3; so that there should be conceived to exist generally two equations of the forms,

$$(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3) \div (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3) = (a_1, a_2, a_3);$$
$$(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3) = (a_1, a_2, a_3)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3):$$

the *three* (positive or negative) *constituents* of this *numerical triplet* (a_1, a_2, a_3) depending, according to some definite laws, on the *ratios* of the *six steps*, $\mathrm{a}_1\, \mathrm{a}_2\, \mathrm{a}_3\, \mathrm{b}_1\, \mathrm{b}_2\, \mathrm{b}_3$.

[22.] In this way there came to be conceived *three distinct and independent unit-steps*, a primary, a secondary, and a tertiary, which I denoted by the symbols,

$$1_1, \quad 1_2, \quad 1_3;$$

and also *three unit-numbers*, primary, secondary, and tertiary, each of which might *operate*, as a species of *factor*, or multiplier, on each of these three steps, or on their system, and which I denoted by these other symbols,

$$\times_1, \quad \times_2, \quad \times_3:$$

or sometimes more fully thus,

$$(1, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 0, 1).$$

A *triad of steps* took thus the form,

$$r1_1 + s1_2 + t1_3,$$

where r, s, t were *three numerical coefficients* (positive or negative), although $1_1\, 1_2\, 1_3$ were still supposed to denote *three steps in time*; and any *triplet factor*, such as (m, n, p), by which this *step-triplet* was to be multiplied, or *operated* upon, might be put under the analogous form,

$$m\times_1 + n\times_2 + p\times_3.$$

Continuing then to admit the *distributive* property of multiplication, it was only necessary to fix the significations of the *nine products*, or combinations, obtained by operating separately with *each* of the three units of number on *each* of the three units of step: every such product, or result, being conceived, in this theory, to be *itself*, in general, a *step-triad*, of which, however, some of the component steps might vanish. Hence, after writing

$$\times_1 1_1 = 1_{1,1};\ \times_1 1_2 = 1_{2,1};\ \ldots\ldots \times_3 1_2 = 1_{2,3};\ \times_3 1_3 = 1_{3,3},$$

I proceeded to develope these *nine step-triplets* into *nine trinomial expressions* of the forms,

$$1_{f,g} = 1_{f,g,1}\, 1_1 + 1_{f,g,2}\, 1_2 + 1_{f,g,3}\, 1_3,$$

where the *twenty-seven* symbols of the form $1_{f,g,h}$ represented certain *fixed numerical coefficients*, or *constants of multiplication*, analogous to those denoted by γ_1 and γ_2 in [14], and like them requiring to have their values *previously assigned*, before proceeding to multiplication, if it were demanded that the operation of a given triplet of numbers on a given triplet of steps should produce a perfectly *definite step-triad* as its result.

[23.] Conversely, when once these numerical *constants* had been assigned, I saw that the equation of multiplication,

$$(m\times_1 + n\times_2 + p\times_3)\ (r1_1 + s1_2 + t1_3) = x1_1 + y1_2 + z1_3,$$

was to be regarded as breaking itself up, on account of the supposed *mutual independence* of the three unit-steps, into *three ordinary algebraical equations, between the nine numbers, $m, n, p, r, s, t, x, y, z$;* namely, between the *coefficients* of the multiplier, multiplicand, and product. These three equations were *linear*, relatively to m, n, p (as also with respect to r, s, t, and x, y, z); and therefore while they gave, *immediately*, expressions for the coefficients xyz of the *product*, and so resolved *expressly* the problem of *multiplication*, they enabled me, through a simple system of three linear and ordinary equations, to resolve also the *converse* problem [21] of the *division* of one triad of steps by another; or to determine the coefficients mnp of the following *quotient* of two such triads,

$$m\times_1 + n\times_2 + p\times_3 = (x1_1 + y1_2 + z1_3) \div (r1_1 + s1_2 + t1_3).$$

[24.] Such were the most essential elements of that *general* theory of triplets, which occurred to me in 1834 and 1835: but it is clear that, in its *applications*, everything depended on the *choice of the twenty-seven constants of multiplication*, which might *all be arbitrarily assumed, before* proceeding to *operate*, but were *then* to be regarded as *fixed*. It was *natural*, indeed, to consider the *primary number-unit* $\varkappa_1$ as producing *no change* in the step or triad on which it operates; and it was *desirable* to determine the constants so as to satisfy the condition,

$$\varkappa_3 \varkappa_2 = \varkappa_2 \varkappa_3,$$

for the sake of conforming to analogies of algebra. Accordingly, in one of several triplet-systems which I tried, the constants were so chosen as to satisfy these conditions, by the assumptions,

$$\varkappa_1 \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_1,\ \varkappa_1 \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_2,\ \varkappa_1 \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3,$$
$$\varkappa_2 \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2,\ \varkappa_2 \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1 + (b - b^{-1})\,\mathrm{I}_2,\ \varkappa_2 \mathrm{I}_3 = b\mathrm{I}_3,$$
$$\varkappa_3 \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_3,\ \varkappa_3 \mathrm{I}_2 = b\mathrm{I}_3,\ \varkappa_3 \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1 + b\mathrm{I}_2 + c\mathrm{I}_3;$$

which still involved two arbitrary numerical constants, b and c, and gave, by a combination of *successive operations*, on any arbitrary *step-triad* (such as $r\mathrm{I}_1 + s\mathrm{I}_2 + t\mathrm{I}_3$, whatever the *coefficients* r, s, t of this *operand triad* might be), the following *symbolic equations*,* expressing the *properties of the assumed operators*, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, and the laws of their mutual combinations:

$$\varkappa_2^2 = (b - b^{-1})\,\varkappa_2 + 1;$$
$$\varkappa_2 \varkappa_3 = \varkappa_3 \varkappa_2 = b \varkappa_3;$$
$$\varkappa_3^2 = c \varkappa_3 + b \varkappa_2 + 1;$$

while the factor $\varkappa_1$ was suppressed, as being simply equivalent, in this system, to the factor 1, or to the ordinary unit of number. But although the symbol $\varkappa_2$ appeared thus to be given by a *quadratic* equation, with the *two real roots* b and $-b^{-1}$, I saw that it would be improper to *confound* the *operation* of this *peculiar* symbol $\varkappa_2$ with that of *either* of these two *numerical roots*, of that quadratic but *symbolical equation*, regarded as an *ordinary* multiplier. It was not *either, separately*, of the two ope-

* These symbolic equations are copied from a manuscript of February, 1835.

rations $\varkappa_2 - b$ and $\varkappa_2 + b^{-1}$, which, when performed on a *general step-triad*, reduced that triad to another with every step a *null* one: but the *combination* of these two operations, successively (and in either order) performed.

[25.] In the same particular triplet system, the three general equations [23] between the nine numerical coefficients, of multiplier, multiplicand, and product, became the following:

$$x = mr + ns + pt;$$
$$y = ms + nr + (b - b^{-1})\,ns + bpt;$$
$$z = mt + pr + b\,(nt + ps) + cpt;$$

whence it was possible, *in general*, to determine the coefficients m, n, p, of the quotient of any two proposed step-triads. The same three equations were found to hold good also, when the *number-triplet* (x, y, z) was considered as the *symbolical product of the two number-triplets*, (m, n, p) and (r, s, t); *this* product being obtained by a certain *detachment* (or separation) of the symbols of the *operators* from that of a common *operand*, namely here an arbitrary *step-triad*. In other words, the *same algebraical equations* between the nine numerical coefficients, xyz, mnp, rst, expressed *also* the conditions involved in the formula of symbolical multiplication,

$$(x, y, z) = (m, n, p)\ (r, s, t),$$

regarded as an *abridgment* of the following *fuller* formula:

$$(x, y, z)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3) = (m, n, p)\ (r, s, t)\ (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3);$$

where a_1, a_2, a_3 might denote *any three steps* in time. Or they might be said to be the conditions for the correctness of this other *symbolical equation*,

$$x\varkappa_1 + y\varkappa_2 + z\varkappa_3 = (m\varkappa_1 + n\varkappa_2 + p\varkappa_3)\ (r\varkappa_1 + s\varkappa_2 + t\varkappa_3),$$

interpreted on the same plan as the symbols $\varkappa_2^2$, $\varkappa_2\varkappa_3$, $\varkappa_3\varkappa_2$, $\varkappa_3^2$, in [24].

[26.] All the peculiar properties of the lately mentioned triplet system might be considered to be contained in the three ordinary and algebraical equations, [25], which connected the nine coefficients with each other (and in this case with two arbitrary constants). And I saw that these equations admitted of the three following combinations, by the ordinary processes of algebra:

$$x - b^{-1}y = (m - b^{-1}n)\,(r - b^{-1}s);$$
$$x + by + az = (m + bn + ap)\,(r + bs + at);$$
$$x + by + a'z = (m + bn + a'p)\,(r + bs + a't);$$

where a, a' were the two real and unequal roots of the ordinary quadratic equation,

$$a^2 = ca + b^2 + 1.$$

Here, then, was an *instance* of what occurred in *every other triplet system* that I tried, and seemed indeed to be a general and necessary consequence of the *cubic form* of a certain function, obtained by elimination between the three equations mentioned in [23], at least if we still (as is natural) suppose that $\varkappa_1 = 1$: namely, that *the product of two triplets may vanish, without either factor vanishing*. For if (as *one* of the ways of exhibiting this result), we assume

$$n = bm, \quad r = -bs, \quad t = 0,$$

the recent relations will then give

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

so that, whatever values may be assigned to m, p, s, we have, in this system, the formula:

$$(m, bm, p)\,(-bs, s, 0) = (0, 0, 0).$$

For the same reason, there were *indeterminate cases*, in the operation of *division of triplets*: for example, if it were required to find the coefficients mnp of a quotient, from the equation

$$(m, n, p)\,(-bs, s, 0) = (x, y, z),$$

we should only be able to determine the function $m - b^{-1}n$, but not the numbers m and n themselves; while p would be entirely undetermined: at least if $x + by$ and z were each $= 0$, for otherwise there might come *infinite* values into play.

[27.] The foregoing reasonings respecting triplet systems were quite independent of any sort of *geometrical interpretation*. Yet it was natural to interpret the results, and I did so, by conceiving the three sets of coefficients, (m, n, p), (r, s, t), (x, y, z),

which belonged to the three triplets in the multiplication, to be the *co-ordinate projections*, on three rectangular axes, of *three right lines* drawn from a common origin; which *lines* might (I thought) be said to be, respectively, in this system of interpretation, the multiplier line, the multiplicand line, and the product line. And then, in the particular triplet system recently described, the formulæ of [26] gave easily a simple rule, for *constructing* (on this plan) the *product of two lines in space*. For I saw that if *three fixed and rectangular lines*, A, B, C, distinct from the original axes, were determined by the three following pairs of ordinary equations in co-ordinates:

$$x + by = 0, \quad z = 0, \quad \text{for line } A;$$
$$y - bx = 0, \quad z - ax = 0, \quad \ldots\ B;$$
$$y - bx = 0, \quad z - a'x = 0, \quad \ldots\ C;$$

we might then enunciate this *theorem*:*

"If a line L'' be the product of two other lines, L, L', then on whichever of the three rectangular lines A, B, C we project the two factors L, L', the product (in the ordinary meaning) of their two projections is equal to the product of the projections (on the same) of L'' and U, U being the primary unit-line $(1, 0, 0)$."

[28.] I saw also that it followed from this theorem, or more immediately from the equations lately cited [26], from which the theorem itself had been obtained, that if we considered *three rectangular planes*, A', B', C', perpendicular respectively to the three lines A, B, C, or having for their equations,

$$y - bx = 0,\ (A'); \quad x + by + az = 0,\ (B'); \quad x + by + a'z = 0,\ (C');$$

then *every line* in *any one* of these three fixed planes gave a *null product line*, when it was multiplied by a line *perpendicular* to that fixed plane: the line A, for example, as a factor, giving a null line as the product, when combined with any factor line in the plane A'. For the same reason (compare [26]), although the *division* of one line by another gave *generally* a determinate

* This theorem is here copied, without any modification, from the manuscript investigation of February, 1835, which was mentioned in a former note.

quotient-line, yet if the *divisor-line* were situated in any one of the three planes A', B', C', this quotient-line became then *infinite*, or *indeterminate*. And results of the same general character, although not all so simple as the foregoing, presented themselves in my examinations of various *other* triplet systems: there being, in all those which I tried, at least *one* system of line and plane, analogous to (A) and (A'), but not always *three* such (real) systems, not always at *right angles* to each other.

[29.] These speculations interested me at the time, and some of the results appeared to be not altogether inelegant. But I was dissatisfied with the departure from ordinary analogies of algebra, contained in the *evanescence* [26] [28] of a *product* of two triplets (or of two lines), in certain cases when neither *factor* was null; and in the connected *indeterminateness* (in the same cases) of a *quotient*, while the *divisor* was different from zero. There seemed also to be too much room for *arbitrary choice of constants*, and not any sufficiently decided reasons for finally preferring *one* triplet system to another. Indeed the assumption of the symbolic equation [24], $\times_1 = 1$, which it appeared to be convenient and *natural* to make, although *not essential* to the theory, determined immediately the values of *nine* out of the twenty-seven constants of multiplication; and *six* others were obtained from the assumptions, which also seemed to be *convenient* (although in *some* of my investigations the latter was not made),

$$\times_2 1_1 = 1_2, \ \times_3 1_1 = 1_3.$$

The supposed *convertibility* (see again [24]), of the *order* of the two operations $\times_2$ and $\times_3$, gave then the three following conditions,

$$\times_3 \times_2 1_1 = \times_2 \times_3 1_1, \ \times_3 \times_2 1_2 = \times_2 \times_3 1_2, \ \times_3 \times_2 1_3 = \times_2 \times_3 1_3,$$

of which the first was seen at once to establish *three* relations between six of the twelve remaining coefficients of multiplication, namely (if the subscript commas be here for conciseness omitted),

$$1_{231} = 1_{321}, \ 1_{232} = 1_{322}, \ 1_{233} = 1_{323}.$$

The two other equations between step-triads, given by the recent conditions of convertibility, resolved themselves into six equations between coefficients, which were, however, perceived to be not all independent of each other, being in fact all satisfied by satisfying the *three* following:

$$1_{321} = 1_{223}\, 1_{332} - 1_{233}\, 1_{322};$$
$$1_{221} = 1_{233}\,(1_{233} - 1_{222}) + 1_{223}\,(1_{322} - 1_{333});$$
$$1_{331} = 1_{332}\,(1_{233} - 1_{222}) + 1_{322}\,(1_{322} - 1_{333});$$

of which the two former presented themselves to me under forms a little simpler, because, for the sake of preserving a *gradual ascent* from couples to triplets, or for preventing a *tertiary term* from appearing in the product, when no such term occurred in either factor, I assumed the value,

$$1_{223} = 0.$$

There still remained *five* arbitrary coefficients,

$$1_{222}, \ 1_{322}, \ 1_{323}, \ 1_{332}, \ 1_{333},$$

which it seemed to be permitted to choose at pleasure: but the decomposition of a certain *cubic function* [26] of r, s, t into *factors*, combined with *geometrical considerations*, led me, for the sake of securing the *reality* and *rectangularity* of a certain system of *lines* and *planes*, to assume the three following relations between those coefficients:

$$1_{222} = 1_{323} - 1_{323}^{-1}, \ 1_{322} = 0, \ 1_{332} = 1_{323};$$

which gave also the values,

$$1_{221} = 1, \ 1_{321} = 0, \ 1_{331} = 1.$$

But the two constant coefficients 1_{323} and 1_{333} still seemed to remain wholly arbitrary,* and were those undetermined elements, denoted by b and c, which entered into the formulæ of triplet multiplication [25], already cited in this Preface.

[30.] I saw, however, as has been already hinted [19] [20], that the same general *view* of algebra, as the science of pure time, admitted easily, at least in thought, of an *extension* of this

* The system of constants $b = 1$, $c = 1$, might have deserved attention, but I do not find that it occurred to me to consider it. In some of those old investigations respecting triplets, the symbol $\sqrt{-1}$ presented itself as a coefficient: but this at the time appeared to me unsatisfactory, nor did I see how to interpret it in such a connexion.

whole theory, not only from couples to triplets, but also from triplets to *sets*, of moments, steps, and numbers. Instead of *two* or even *three* moments (as in [12] or [20]), there was no difficulty in conceiving a system or *set* of n such moments, $A_1, A_2, \ldots A_n$, and in supposing it to be compared with another *equinumerous momental set*, $B_1, B_2, \ldots B_n$, in such a manner as to conduct to a new complex ordinal relation, or *step-set*, denoted by the formula,

$$(B_1, B_2, \ldots B_n) - (A_1, A_2, \ldots A_n) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, \ldots B_n - A_n).$$

Such step-sets could be *added* or *subtracted* (compare [20]), by adding or subtracting their *component steps*, each to or from its own corresponding step, as indicated by the double formula,

$$(b_1, b_2, \ldots b_n) \pm (a_1, a_2, \ldots a_n) = (b_1 \pm a_1, b_2 \pm a_2, \ldots b_n \pm a_n);$$

and a step-set could be *multiplied* by a *number* (a), or *divided* by *another step-set*, provided that the component steps of the one were *proportional* to those of the other (compare [13] [21]), by the formulæ:

$$a\,(a_1, a_2, \ldots a_n) = (aa_1, aa_2, \ldots aa_n);$$
$$(aa_1, aa_2, \ldots aa_n) \div (a_1, a_2, \ldots a_n) = a.$$

[31.] But when it was required to divide one step-set by another, in the more general case (compare [13] [14] [21]), where the components or *constituent steps* $a_1, a_2, \ldots a_n$ of the one set were *not* proportional to the corresponding components $b_1, b_2, \ldots b_n$ of the other set, a difficulty again arose, which I proposed still to meet on the same general plan as before, by conceiving that a *numeral set*, or set or *system of numbers*, $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, might *operate* on the *one* set of steps, $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, in a way *analogous to multiplication*, so as to *produce* or generate the *other* given step-set, as a result which should be *analogous to a product*. Instead of *three* distinct and independent unit-steps, as in [22], I now conceived the existence of n such *unit-steps*, which might be denoted by the symbols,

$$1_1, 1_2, \ldots 1_n;$$

and instead of *three unit-numbers* (see again [22]), I conceived n such *unit-operators*, which in those early investigations I denoted

$$\times_1, \times_2, \ldots \times_n,$$

and of which I conceived that *each* might operate on *each* unit-step, as a species of *multiplier*, or *factor*, so as to produce (generally) a *new step-set* as the result. There came thus to be conceived a number, $= n^2$, of such resultant step-sets, denoted, on the plan of [22], by symbols of the forms:

$$\times_g 1_f = 1_{f,g,1} 1_1 + 1_{f,g,2} 1_2 + \ldots + 1_{f,g,n} 1_n;$$

where the n^3 symbols of the form $1_{f,g,h}$ denoted so many *numerical coefficients*, or *constants of multiplication*, of the kind previously considered in the theories of couples [14], and of triplets [22], which *all* required to have their values *previously assumed*, or assigned, *before* proceeding to *multiply* a step-set by a number-set, in order that this operation might give generally a *definite step-set* as the result.

[32.] Conversely, on the plan of [23], when the n^3 numerical *values* of these coefficients or constants $1_{f,g,h}$ had been once fixed, I saw that we could then definitely interpret a *product* of the form,

$$(m_1 \times_1 + \ldots + m_g \times_g + \ldots m_n \times_n)\ (r_1 1_1 + \ldots + r_f 1_f + \ldots + r_n 1_n),$$

where $m_1, \ldots m_g, \ldots m_n$ and $r_1, \ldots r_f, \ldots r_n$ were any $2n$ given numbers, as being equivalent to a certain new or *derived* step-set of the form,

$$x_1 1_1 + \ldots + x_h 1_h + \ldots + x_n 1_n;$$

where $x_1, \ldots x_h, \ldots x_n$ were n new or *derived numbers*, determined by n expressions such as the following:

$$x_h = \Sigma\, m_g r_f 1_{f,g,h};$$

the summation extending to all the n^2 combinations of values of the indices f and g. And because these expressions might in general be treated as a system of n *linear equations* between the n coefficients m_g of the multiplier set, I thought that the *division of one step-set by another* (compare [14] [23]), might thus in general be accomplished, or at least conceived and interpreted, as being the process of *returning to that multiplier*, or of *determining the numeral set* which would *produce the dividend step-set*, by *operating on the divisor step-set*, and which might therefore be denoted as follows:

$$m_1 \times_1 + \ldots + m_g \times_g + \ldots m_n \times_n = (x_1 1_1 + \ldots + x_h 1_h + \ldots + x_n 1_n) \div (r_1 1_1 + \ldots r_f 1_f + \ldots + r_n 1_n);$$

or more concisely thus,

$$\Sigma m_g \times_g = \Sigma x_h 1_h \div \Sigma r_f 1_f:$$

while the numeral set thus found might be called the *quotient* of the two step-sets.

[33.] It may be remembered that even at so early a stage as the interpretation of the symbol $b \times a$, for the algebraic product of two positive or negative *numbers*,* it had been proposed to conceive a reference to a *step* (a), which should be first *operated on* by those two numbers *successively*, and then *abstracted from*, as was expressed by the elementary formula [9],

$$(b \times a) \times \mathrm{a} = b \times (a \times \mathrm{a}).$$

Thus to interpret the product -2×-3 as $= +6$, I conceived that some time-step (a) was first tripled in length and reversed in direction; then that the new step (-3a) was doubled and reversed; and finally that the last resultant step ($+6$a) was *compared* with the original step (a), in the way of algebraic *ratio* [9], thereby conducting to a result which was *independent* of that original step. All this, so far, was no doubt extremely easy; nor was it difficult to extend the same mode of interpretation to the case [17] of the multiplication of two *number couples*, and to interpret the product of two such couples as satisfying the condition,

$$(b_1, b_2)\,(a_1, a_2) \times (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2)\,(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2);$$

the arbitrary *step-couple* (a_1, a_2) being first operated on, and afterwards abstracted from. In like manner, in the theory of *triplets*, it was found possible [24] [25] to *abstract from an operand step-triad*, and thereby to obtain formulæ for the symbolic

* This word "number," whether with perfect propriety or not, is used throughout the present Preface and work, not as contrasted with *fractions* (except when accompanied by the word *whole* or *integer*), nor with incommensurables, but rather with those *steps* (in time, or on one axis), of some *two* of which it represents or denotes the *ratio*. In short, the *numbers* here spoken of, and elsewhere denominated "*scalars*" in this work, are simply those *positives* or *negatives*, on the *scale* of progression from $-\infty$ to $+\infty$, which are commonly called *reals* (or real quantities) in algebra.

multiplication of the *secondary* and *tertiary number-units*, $\times_2, \times_3$, and more generally of any two *numerical* triplets among themselves. But when it was sought to extend the same view to the still more general *multiplication of numeral sets*, new difficulties were introduced by the essential complexity of the subject, on which I can only touch in the briefest manner here.*

[34.] After operating on an arbitrary step-set $\Sigma r_f 1_f$ by a number-set $\Sigma m_g \times_g$, and so obtaining [32] another step-set, $\Sigma x_h 1_h$, we may conceive ourselves to operate on the same general plan, and with the same particular constants of multiplication, on this new step-set, by a *new number-set*, such as $\Sigma m'_{g'} \times_{g'}$, and so to obtain a *third step-set*, such as $\Sigma x'_{h'} 1_{h'}$: which may then be supposed to be *divided* (see again [32]) *by the original step-set* $\Sigma r_f 1_f$, so as to conduct to a *quotient*, which shall be *another numeral set*, of the form $\Sigma m''_{g''} \times_{g''}$. Under these conditions, we may certainly write,

$$\Sigma m'_{g'} \times_{g'} (\Sigma m_g \times_g \,.\, \Sigma r_f 1_f) = \Sigma m''_{g''} \times_{g''} \,.\, \Sigma r_f 1_f;$$

but in order to justify the subsequent *abstraction of the operand step-set*, or the *abridgment* (compare [25]) of this formula of *successive operation* to the following,

$$\Sigma m'_{g'} \times_{g'} \,.\, \Sigma m_g \times_g = \Sigma m''_{g''} \times_{g''},$$

which may be called a formula for the (symbolic) *multiplication of two number-sets*, certain *conditions of detachment* are to be satisfied, which may be investigated as follows.

[35.] Conceive that the required *separation of symbols* has been found possible, and that it has given, by a generalization of

* A fuller account of this theory of *sets*, with a somewhat different notation (the symbols $e_{r,s,t}$ and $n_{r,r',r''}$ being employed, for example, to denote the coefficients which would here be written as $1_{r,s,t}$ and $1'_{r,r',r''}$), and with a special application to the theory of *quaternions*, will be found in an Essay entitled: "Researches respecting Quaternions. First Series." Trans. R. I. A. Vol. XXI., Part II. Dublin: 1848. Pages 199 to 296. (Read November 13th, 1843.) This Essay was not fully printed till 1847, but several copies of it were distributed in that year, especially during the second Oxford Meeting of the British Association. The discussion of that portion of the subject which is here considered is contained chiefly in pages 225 to 231 of the volume above cited.

the process for triplets in [24], a system of n^2 symbolic equations of the form,

$$\varkappa_{g'} \varkappa_g = \Sigma 1'_{g,g',g''} \varkappa_{g''};$$

where $1'_{g,g',g''}$ is one of a *new system of* n^3 *numerical coefficients*, and the sum involves n terms, answering to n different values of the index g''. Under the same conditions, the recent formula for the multiplication of numeral sets breaks itself up into n equations, of the form,

$$m''_{g''} = \Sigma m_g m'_{g'} 1'_{g,g',g''};$$

the summation here extending to n^2 terms arising from the combinations of the values of the indices g and g'. For all such combinations, and for each of the n values of f, we are to have (if the required detachment be possible) the following equation between step-sets:

$$\varkappa_{g'} . \varkappa_g 1_f = \varkappa_{g'} \varkappa_g . 1_f;$$

and conversely, if we can satisfy these n^3 equations between step-sets, we shall thereby satisfy the *conditions of detachment* [34], which we have at present in view. But *each* of these n^3 equations between *sets* resolves itself generally into n equations between *numbers*: and thus there arise in general no fewer than n^4 *numerical equations*, as expressive of the conditions in question, which may all be represented by the formula,*

$$\Sigma 1_{f,g,h} 1_{h,g',h'} = \Sigma 1'_{g,g',h} 1_{f,h,h'};$$

all combinations of values of the indices f, g, g', h' (from 1 to n for each) being permitted, and the summation in each member being performed with respect to h. Now to satisfy these n^4 equations of condition, there were only $2n^3$ coefficients, or rather their ratios, disposable: and although the theories of couples and triplets already served to exemplify the *possibility* of effecting the desired *detachment*, at least in certain *cases*, yet it was by no means *obvious* that any *such extensive reductions*† were likely

* A formula equivalent to this, but with a somewhat different notation, will be found at page 231 of the Essay and Volume referred to in a recent Note.

† On the subject of such general reductions, some remarks will be found at page 251 of the Essay and Volume lately cited.

to present themselves, as were required for the accomplishment of the same object, in the more general theory of SETS. And I believe that the compass and difficulty, which I thus perceived to exist, in that very *general* theory, deterred me from pursuing it farther at the time above referred to.

[36.] There was, however, a motive which induced me then to attach a special importance to the consideration of *triplets*, as distinguished from those more general *sets*, of which some account has been given. This was the desire to connect, in some new and useful (or at least interesting) way, *calculation* with *geometry*, through some undiscovered *extension*, to *space of three dimensions*, of a method of *construction* or representation [2], which had been employed with success by Mr. Warren* (and indeed also by other authors,† of whose writings I had not then

* "Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities. By the Rev. John Warren, A. M., Fellow and Tutor of Jesus College, Cambridge." (Cambridge, 1828.) To suggestions from that Treatise I gladly acknowledge myself to have been indebted, although the interpretation of the symbol $\sqrt{-1}$, employed in it, is entirely distinct from that which I have since come to adopt in the geometrical applications of the quaternions.

† Several important particulars respecting such authors have been collected in the already cited "Report on certain Branches of Analysis" (see especially pp. 228 to 235), by Dr. Peacock, whose remarks upon their writings, and whose own investigations on the subject, are well entitled to attention. As relates to the method described above (in paragraph [30] of this Preface), if *multiplication* (as well as *addition*) *of directed lines* in one plane be regarded (as I think it ought to be) as an *essential element* thereof, I venture here to state the impression on my own mind, that the true inventor, or at least the *first definite promulgator* of that method, will be found to have been Argand, in 1806: although his "Essai sur une Manière de représenter les Quantités Imaginaires," which was published at Paris in that year, is known to me only by Dr. Peacock's mention of it in his Report, and by the account of the same Essay given in the course of a subsequent correspondence, or series of communications (which also has been noticed in that Report, and was in consequence consulted a few years ago by me), carried on between Français, Servois, Gergonne, and Argand himself; which series of papers was published in Gergonne's Annales des Mathématiques, in or about the year 1813. My recollection of that correspondence is, that it was admitted to establish fully the priority of Argand to Français, as regarded the method [36] of (not merely *adding*, but) *multiplying* together directed lines in one plane, which is briefly described above: and which was afterwards independently reproduced, by Warren in 1828, and in the same year by Mourey, in a work entitled: "La Vraie Théorie des Quantités Négatives, et des Quantités prétendues

heard), for *operations on right lines in one plane:* which method had given a species of *geometrical interpretation* to the usual and well-known *imaginary symbol* of algebra. In the method thus referred to, *addition of lines* was performed according to the same rules as *composition of motions*, or of forces, by drawing

Imaginaires" (Paris, 1828). If the list of such independent re-inventors of this important and modern method of constructing by a *line* the *product of two directed lines in one fixed plane* (from which it is to be remarked, in passing, that my own mode of representing by a *quaternion* the product of two directed lines *in space* is altogether different) were to be continued, it would include, as I have lately learned, the illustrious name of Gauss, in connexion with his Theory of Biquadratic Residues (Göttingen, 1832). On the other hand, I cannot perceive that *any distinct anticipation* of this method of *multiplication of directed lines* is contained in Buée's vague but original and often cited Paper, entitled "Mémoire sur les Quantités Imaginaires," which appeared in the Philosophical Transactions (of London) for 1806, having been read in June, 1805. The ingenious author of that Paper had undoubtedly formed the notion of *representing the directions of lines* by algebraical symbols; he even uses (in No. 35 of his Memoir) such expressions as $\sqrt{2}\,(\cos 45° \pm \sin 45°\sqrt{-1})$ to denote two different and *directed diagonals* of a square: and there is the high authority of Peacock (Report, p. 228), for considering that the geometrical interpretation of the symbol $\sqrt{-1}$, as denoting *perpendicularity*, was "first formally maintained by Buée, though more than once suggested by other authors." In No. 43 of the Paper referred to, Buée constructs with much elegance, by a *bent line* AKE, or by an *inclined* line AE (where KE is a perpendicular, $= \frac{1}{2}a$, erected at the middle point K of a given line AB, or a), an *imaginary root* (x) of the quadratic equation, $x(a-x) = \frac{1}{2}a^2$, which had been proposed by Carnot (in p. 54 of the Géometrie de Position, Paris, 1804). But when he proceeds to explain (in No. 46 of his Paper) *in what sense* he regards the *two lines* AE and EB (or the two constructed *roots* of the quadratic) as having their *product* equal to the given value $\frac{1}{2}a^2$ or $\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}^2$, Buée *expressly limits* the signification of *such* a product to the result obtained by *multiplying the arithmetical values*, and *expressly excludes* the consideration of the *positions of the factor-lines* from his conception of their *multiplication:* whereas it seems to me to belong to the very *essence* of the method [36] of Argand and others, and generally to that system of geometrical interpretation whereon is based what Professor De Morgan has happily named *Double Algebra*, to *take account of those positions* (or directions), when *lines* are to be *multiplied* together. My *own* conception (as has been already hinted, and as will appear fully in the course of this work), of the *product of two directed lines in space* as a QUATERNION, is *altogether distinct*, both from the purely *arithmetical product* of numerical values of Buée, and from the *linear product* (or third coplanar line), in the method of Argand: yet I have thought it proper to submit the foregoing remarks, on the invention of this latter method, to the judgment of persons better versed than myself in scientific history. A few additional remarks and references on the subject will be found in a subsequent Note.

the diagonal of a parallelogram; and the *multiplication* of two lines, in a given plane, corresponded to the construction of a species of *fourth proportional*, to an assumed line in the same plane, selected as the representative of *positive unity*, and to the two proposed *factor-lines:* such fourth proportional, or *product-line*, being *inclined* to *one* factor-line at the *same angle*, measured in the *same sense*, as that at which the *other* factor-line was inclined to the assumed *unit-line;* while its *length* was, in the old and usual signification of the words, a fourth proportional to the lengths of the unit-line and the two factor-lines. Subtraction, division, elevation to powers, and extraction of roots, were explained and constructed on the same general principles, and by processes of the same general character, which may easily be conceived from the slight sketch just given, and indeed are by this time known to a pretty wide circle of readers: and thus, no doubt, by operations on right lines *in one plane*, the symbol $\sqrt{-1}$ received a perfectly clear interpretation, as denoting a *second unit-line, at right angles** to that line which had been selected to re-

* Besides what has been already referred to, as having been done on this subject of the interpretation of the symbol $\sqrt{-1}$ by the Abbé Buée, it has been well remarked by Mr. Benjamin Gompertz, at page vi. of his very ingenious Tract on "The Principles and Applications of Imaginary Quantities, Book II., derived from a particular case of Functional Projections" (London, 1818), that the celebrated Dr. Wallis of Oxford, in his "Treatise of Algebra" (London, 1685), proposed to interpret the imaginary roots of a quadratic equation, by *going out of the line*, on which if real they should be measured. Thus Wallis (in his chapter lxvii.) observes:—"So that whereas in case of Negative Roots we "are to say, the point B cannot be found, so as is supposed in AC Forward, but "Backward it may in the same Line: we must here say, in case of a Negative "Square, the point B cannot be found so as was supposed, in the Line AC; but "Above that Line it may in the same Plain. This I have the more largely in-"sisted on, because the Notion (I think) is new; and this, the plainest Declara-"tion that at present I can think of, to explicate what we commonly call the "*Imaginary Roots* of Quadratick Equations. For such are these." And again (in his following chapter lxviii., at page 269), Wallis proposes to construct thus the roots of the equation $aa \mp ba + c = 0$:—"On AC$a = b$, bisected in C, erect a "perpendicular CP $= \sqrt{c}$. And taking PB $= \frac{1}{2}b$, make (on whether side you please "of CP), PBC, a rectangled triangle. Whose right angle will therefore be at C "or B, according as PB or PC is bigger; and accordingly, BC a sine or a tangent, "(to the radius PB,) terminated in PC. The streight lines AB, Ba, are the two "values of a. Both affirmative if (in the equation,) it be $-ba$. Both negative, "if $+ba$. Which values be (what we call) *Real*, if the right angle be at C. But

present positive unity. But when it was proposed to *leave the plane*, and to construct a system which should have *some general analogy* to the known system thus described, but should *extend to space*,* then difficulties of a new character arose, in the endea-

"*Imaginary* if at B." These passages must always (I think) possess an historical interest, as exemplifying the manner in which, in the seventeenth century, one so eminent for his powers of *interpretation* of analytical expressions, as Dr. Wallis was, sought to apply those powers to the *geometrical construction* of the *imaginary roots* of an equation: and for the decision with which he held that such roots were quite *as clearly interpretable*, as "*what we call real*" values. His particular interpretation of those imaginary roots of a quadratic appears indeed to me to be inferior in elegance to that which was long afterwards proposed by Buée. But it may be noticed that, whether his point B were *on* or *off* the line ACα, Wallis seems (like Buée, and many other and more modern writers) to have regarded *that right line*, as being *in some sense a sum*, or at least *analogous to a sum*, of the *two successive lines* AB, Bα; which latter lines conduct, upon the whole, from the initial point A to the final point α; and construct according to him the two roots of the quadratic, whose algebraic sum is $= b$. Indeed, Wallis remarks (in the same page 269) that when those two roots are algebraically *imaginary*, or are geometrically constructed (according to him) by the help of a point B which is *above the line* ACα, then that straight line is *not equal to the aggregate* of AB + Bα; but this seems to be no more than guarding himself against being supposed to assert, that two sides of a triangle can be equal *in length* to the third. In chap. lxix., p. 272, he thus sums up:—"We find therefore, that in "Equations, whether Lateral or Quadratick, which in the strict Sense, and first "Prospect, appear Impossible; some mitigation may be allowed to make them "Possible; and in such a mitigated interpretation they may yet be useful." For *lateral* equations (equations of the first degree), the *mitigation* here spoken of consists simply in the usual representation of *negative roots*, by lines drawn *backward* from a point, whereas they had been at first supposed to be drawn *forward*. For quadratic equations with *imaginary roots*, Wallis *mitigates* the problem, by substituting a *bent line* ABα for that *straight line* ACα, which *constructs the given algebraical sum* (*b*) of the two roots of the equation, or *parts of the bent line*, AB, Bα. It is also to be noticed that he appears to have regarded the *algebraical semi-difference* of those two roots, AB, Bα, as being in all cases constructed by the *line* BC, drawn to the middle point C of the line Aα: which would again agree with many modern systems. Thus Wallis seems to have possessed, in 1685, *at least in germ* (for I do not pretend that he fully and consciously possessed them), some elements of the modern methods of *Addition* and *Subtraction* of directed lines. But on the equally essential point of *Multiplication* of directed lines in one plane, it does not appear that Wallis, any more than Buée (see the foregoing Note), had anticipated the method of Argand.

* At a much later period I learned that others had sought to accomplish some such extension to space, but in ways different from mine.

vour at surmounting which I was encouraged by the friend already mentioned (Mr. John T. Graves), who felt the wish, and formed the project, to surmount them in *some* way or other, as early, or perhaps earlier than myself.

[37.] A conjecture respecting such extension of the rule of multiplication of lines, from the plane to space, which long ago occurred to me (in 1831), may be stated briefly here, as an illustration of the general character of those old speculations. Let A denote a point assumed on the surface of a fixed sphere, described about the origin O of co-ordinates, with a radius equal to the unit of length; and let this point A be called the *unit-point*. Let also B and C be supposed to be two *factor-points*, on the same surface, representing the *directions* OA, OB, of the two *factor-lines* in space, of which lines it is required to perform, or to interpret, the multiplication; and so to determine, by some fixed rule to be assigned, the *product-point* D, or the direction of the *product-line*, OD. Then it appeared that the analogy to operations in the plane might be not ill observed, by conceiving D to be taken on the *circle* ABC; the *arcs*, AB, CD, of that (generally) *small circle* of the sphere being *equally long*, and *similarly measured*; so that the two *chords* AD, BC should be *parallel*: while the old rule of *multiplication of lengths* should be retained: and *addition of lines* be still interpreted as before. But in this system there were found to enter *radicals* and *fractions* into the expressions for the co-ordinates* of a product; and although the case of *squares of lines*, or products of equal factors, might be rendered *determinate* by agreeing to take the *great* circle AB, when the point C coincided with B, yet there seemed to be an essential *indetermination* in the construction of the *reciprocal* of a line: it being sufficient, according to the definition here consi-

* The rectangular co-ordinates (or projections) of the two factor-lines and of the product-line being denoted by xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$, if we also write, for conciseness,

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},\quad r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},\quad p = xx' + yy' + zz',$$

then the expressions which I found for $x''y''z''$ may be included briefly in the equations:

$$\frac{x'' - rr'}{rx' - r'x} = \frac{y''}{ry' - r'y} = \frac{z''}{rz' - r'z} = \frac{rr' - r'x}{p - rr'}.$$

dered, to take the chord BC parallel to the tangent plane to the sphere at the unit-point, in order to make the product point D coincide with that point A. There was also the great and (as I thought) fatal objection to this method of construction, that it did not preserve the *distributive principle* of multiplication; a *product of sums* not being equal, in it, to the *sum of the products:* and on the whole, I abandoned the conjecture.

[38.] Another construction, of a somewhat similar character, and liable to similar objections, for the product of two lines in space, occurred to me in 1835, and also independently to Mr. J. T. Graves in 1836, in which year he wrote to me on the subject. It may be briefly stated, by saying that instead of considering, as in the last-mentioned system, the *small* circle ABC, and drawing the *chord* AD, from unit-point to product-point, so as to be *parallel* to the chord DC from one factor-point to the other, it was now the *arc* AD of a *great* circle on the sphere, which was to be drawn so as to *bisect the arc* BC, of another great circle, and *be bisected* thereby. Or as Mr. Graves afterwards expressed to me the rule in question:—"Bisect the inclination of the factor-lines, and then double forward the angle between the linear unit and the bisecting line:" the rule of multiplying *lengths* being understood to be still observed. Mr. Graves made several acute remarks on the consequences of this construction, and proposed a few supplementary *rules* to remove the *porismatic* character of some of them: but observed that, with these interpretations, the *square-root of the negative unit-line*, or the triplet $(-1, 0, 0)^{\frac{1}{2}}$, would still be indeterminate, and of the form $(0, \cos\theta, \sin\theta)$, where θ remained arbitrary: while cases might arise, in which the "minutest alteration" of a factor-line would make a "considerable change" in the position of the product-line: and this result he conceived to be, or to lead to, "a breach of the grand property of multiplication," respecting its operation on a *sum*. He left to me the investigation of the general expressions for the "constituent co-ordinates" of the resultant "triplet," or product-line, in terms of the constituents of the factors: and in fact I had already obtained such expressions, and had found them to involve radicals and fractions, and to violate the distributive principle, as in the system recently described [37]; with which indeed the one

here mentioned had been perceived by me to have a very close analytical connexion.*

[39.] Mr. J. T. Graves, however, communicated to me at the same time another method, which he said that he *preferred*, among all the modes that he had tried, "of representing lines in space, and of multiplying such lines together." This method consisted in considering such a line as a species of "compound couple," or as determined by *two couples*, one in the plane of xy, and the other perpendicular to that plane: it having been easily perceived that the rules proposed by me for the addition and multiplication [17] of *couples*, agreed in all respects with the previously known method [36], of representing the operations of the same names on *lines in one plane*. From this conception of *compound couples* Mr. Graves derived a "general rule for the multiplication of triplets," which I shall here transcribe,† only abridging the notation by writing ρ and ρ_1 to represent the radicals $\surd(x^2+y^2)$ and $\surd(x_1^2+y_1^2)$, or the projections of the factor-lines on the plane of xy: "$(x, y, z)\,(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$, where

$$x_2 = (\rho\rho_1 - zz_1)\left(\frac{xx_1 - yy_1}{\rho\rho_1}\right),\ y_2 = (\rho\rho_1 - zz_1)\frac{xy_1 + yx_1}{\rho\rho_1},\ z_2 = z_1\rho + z\rho_1."$$

This particular system of expressions he does not seem to have developed farther, nor did it at the time attract much of my own

* With the notations recently employed, the expressions which I had found for the co-ordinates of the product, in the case or system [38], are included in the equations,

$$\frac{x''+rr'}{rx'+r'x} = \frac{y''}{ry'+r'y} = \frac{z''}{rz'+r'z} = \frac{rx'+r'x}{p+rr'};$$

which only differ from those for the former case [37], by a change of sign in the radical r' (or r), which represents the length of a factor-line. The conditions for both systems are contained in these other equations,

$$xx''+yy''+zz''=r^2x',\ x'x''+y'y''+z'z''=r'^2x,\ x''^2+y''^2+z''^2=r^2r'^2;$$

and the quadratic equation in x'', obtained by elimination of y'' and z'', resolves itself into two separate factors, each linear relatively to x'', namely,

$$(p-rr')(x''-rr')-(rx'-r'x)^2=0,$$
$$(p+rr')(x''+rr')-(rx'+r'x)^2=0.$$

The first corresponds to the system [37]; the second to the system [38].

† From Mr. Graves's Letter of August 8th, 1836.

attention: but I have thought it deserving of being put on record here, especially as, by a remarkable coincidence, it came to be independently and otherwise arrived at by another member of the same family, at a date later by ten years, and to be again communicated to me.* And perhaps I may be excused if I here leave the order of time, to give some short account of the train of thought by which his brother, the Rev. Charles Graves, appears to have been conducted, in 1846, to precisely the *same relations* between the constituents of three triplets.

[40.] Professor Graves employed a system of *two new imaginaries*, i and j, of which he conceived that i had the effect of causing a rotation (generally conical) through 90° round the axis of z, while j caused a line to revolve through an equal angle in its own vertical plane (that is, in the plane of the line and of z); and then he proceeded to *multiply* together the two triplets $x + iy + jz$, $x' + iy' + jz'$, by a peculiar process, and so to obtain a third triplet $x'' + iy'' + jz''$: the relations thus resulting, between the co-ordinates or constituents, being (as it turned out) identical with those which his brother had formerly found. These symbols i and j were *each a sort of fourth root of unity*: and the first, but *not* the second, had the property of operating on a *sum* by operating on each of its *parts* separately. Thus, as Professor Graves remarked, multiplication of triplets, on this plan, would *not* be a *distributive* operation, although it would be a *commutative* one. The method conducted him to an elegant exponential expression for a line in space, namely, $r\epsilon^{il}\epsilon^{j\lambda}$, where r was the *radius vector*, and l, λ might be called the *longitude* and *latitude* of the line, so that the co-ordinate projections were (some peculiar considerations being employed in order to justify these expressions of them, as connected with that of the line):

$$x = r \cos l \cos \lambda,\ y = r \sin l \cos \lambda,\ z = r \sin \lambda.$$

And then the rule for the *multiplication of two lines* came to be expressed by the very simple formula:

$$r\epsilon^{il}\epsilon^{j\lambda} \cdot r'\epsilon^{il'}\epsilon^{j\lambda'} = rr'\epsilon^{i(l+l')}\epsilon^{j(\lambda+\lambda')};$$

* By the Rev. Charles Graves, Professor of Mathematics in the University of Dublin, in a letter of November 14th, 1846.

the *lengths* being thus *multiplied* (as in the other systems above mentioned), but the *longitudes* and *latitudes* of the one line being respectively *added* to those of the other: which was in fact the rule expressed by Mr. J. T. Graves's co-ordinate formulæ [39].

[41.] It will not (I hope) be considered as claiming any merit to myself in this matter, but merely as recording an unpursued *guess*, which may assist to *illustrate* this whole inquiry, if I venture to mention here that the *first conjecture* respecting *geometrical triplets*, which I find noted among my papers (so long ago as 1830), was, that while *lines in space* might be *added* according to the same rule as in the plane, they might be *multiplied* by multiplying their lengths, and *adding* their polar angles. In the method [36], known to me then as that of Mr. Warren, if we write $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, we have, for multiplication *within* the plane, equations which may be written thus, $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$. It hence occurred to me, that if we employed for space these other known transformations of rectangular to polar co-ordinates,

$$x = r \cos \theta,\ y = r \sin \theta \cos \phi,\ z = r \sin \theta \sin \phi,$$

it might be natural to *define* multiplication of lines in space by the slightly extended but analogous formulæ,

$$r'' = rr',\ \theta'' = \theta + \theta',\ \phi'' = \phi + \phi':$$

which, however, conducted to *radicals*, as in the expression,

$$x'' = xx' - (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} (y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}},$$

whereas within the plane there were *rational* values for the rectangular co-ordinates of the product, namely (compare [17]),

$$x'' = xx' - yy',\ y'' = xy' + yx'.$$

But this old (and uncommunicated) conjecture of mine, which was inconsistent with the distributive principle, though possessing some general *resemblance* to the lately mentioned results [39] [40] of Messrs. John and Charles Graves, cannot be considered to have been an *anticipation* of them. For while we all *agreed* in *adding* the *longitudes* of the two factors (in the sense lately mentioned), *they added latitudes* also; while I, less happily, had thought of *adding the colatitudes*, or the angular distances from a *line* (x), instead of those from a *plane* (xy). And this difference of plan produced a very important difference of results. Indeed the two systems are totally distinct, although there exists some sort of analogy between them.

[42.] I shall here mention one more system, which was communicated to me* in 1840, by the elder of those two brothers, and which involved a method of representing the usual imaginary quantities of algebra, *each by a corresponding unique point on the surface of a sphere*, described (as in [37]) about the origin with a radius = 1: whence it appeared that the ordinary imaginary expression $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ might be denoted by a *triplet* (x, y, z), under the *condition*, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: and that the *rules* thus obtained, for the multiplication of *such* triplets, might perhaps afford some *analogy*, suggesting rules† for the more *general* case, where the constituents x, y, z are wholly *independent* of each other. Mr. J. T. Graves's "mode of representing quantity spherically" was stated by him to me as follows:—"All positive quantities r may be represented by points on an assumed "semicircle, by taking the extremity of the arc $2\tan^{-1}r$ (counted "from one end (A) of the semicircle) to represent r. Next let us "consider our sphere as generated by the revolution of the semicircle‡ ABC round the axis AC (forwards or backwards, according "to arbitrary convention). When the semicircle has moved "through an angle θ, let the position of a point on its circumference denote $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, if the same point in its original position denoted r." I make a very easy transformation of this statement, when I present it thus:—Construct all quantities (so called), real and imaginary, according to the known method already described in [36], by drawing right lines from the assumed point (A) of the unit-sphere, in the tangent plane at that point; double all the lines so drawn, and treat the ends of

* In a letter of October 17th, 1840, from J. T. Graves, Esq.

† Mr. Graves appears not to have actually worked out such rules, at least I do not find that he communicated them to me. They would probably have been, on the plan described in [42], to have *multiplied* (as before) the *lengths*, and (as before) *added* the *longitudes*: but to have then *multiplied the tangents of the halves of the colatitudes* of the factors, in order to obtain the tangent of the half of the colatitude of the product.

‡ A figure, which it seems unnecessary here to reproduce, accompanied Mr. Graves's Letter.

the doubled lines as the stereographic projections of points upon the sphere. Infinity was thus represented, in the particular system of Mr. Graves here described, by the point diametrically opposite to A. And in this endeavour of mine, to furnish faithfully a record of every circumstance, which, even as remotely *suggesting* to a *friend* a train of thought, may have *indirectly* stimulated *myself*, I must not suppress the following acknowledgment of Mr. J. T. Graves:—"What led me to this was a passage in "a letter from De Morgan,* in which he expressed a wish to be "able to represent quantity *circularly*, in order to explain the "passage from positive to negative through infinity."

[43.] The foregoing specimens may suffice to exemplify the attempts which were made, a considerable number of years ago, by Mr. Graves and by myself: on the one hand, to *extend* to space that geometrical construction for the multiplication of *lines*, which was known to us from the work of Mr. Warren; and on the other hand, to render more entirely *definite* my conception of algebraical *triplets*. I will not here trouble my readers with any further account of the conjectures on those subjects which at various times occurred to him or me, before I was led to the quaternions, in a way which I shall presently explain. But I wish to mention first, that among the circumstances which assisted to prevent me from losing sight of the general subject, and from wholly abandoning the attempt to turn to some useful account those early speculations of mine, on triplets and on sets, was probably the publication of Professor De Morgan's first Paper on the Foundation of Algebra,† of which he sent me a copy in 1841. In that Paper, besides the discussion of other and more important topics, my Essay on Pure Time was noticed, in a free but friendly spirit; and the subject of triplets was alluded to, in such passages, for instance, as the following:—"But in this branch of logical algebra" (that referred to in paragraph [36] of the present Preface), "the lines must be all in one plane, or at least affected by only one modification of direction: the branch which shall apply to a line drawn in any direction from a point, or mo-

* Augustus De Morgan, Esq., Professor of Mathematics in University College, London.

† In Vol. VII., Part II., of the Cambridge Philosophical Transactions.

f

dified by two distinct directions, is yet to be found." . . "An extension to geometry of three* dimensions is not practicable until we can assign two symbols, Ω and ω, such that $a+b\Omega+c\omega = a_1+b_1\Omega+c_1\omega$ gives $a=a_1$, $b=b_1$, and $c=c_1$: and no *definite* symbol of ordinary algebra will fulfil this condition." My symbols $\times_2$, $\times_3$ (of 1834–5) had not then been published, nor otherwise exhibited to him; they were designed to fulfil precisely the foregoing conditions: but I was not myself satisfied with them, as not considering them "*definite*" enough (compare [29]).

[44.] In the early numbers of the Cambridge Mathematical Journal, there appeared some ingenious and original Papers, by the late Mr. Gregory and by other able analysts, on the signs + and −, on the powers of +, on branches of curves in different planes, and on other connected subjects: but I hope that it will not be thought disrespectful if I confess that I do not remember their having had much influence on my own trains of thought. Perhaps I was not sufficiently prepared, or disposed, to look at algebra generally, and its applications to geometry, from the same point of view, and was thereby prevented from studying those Papers with the requisite attention. At least, if anything in my own views shall be found to be inconsistent with those put forward in the Papers thus alluded to, I wish it to be considered as offered with every deference, and not in a controversial spirit. And if for the present I omit all further mention of them, it is partly because, without a closer study, I should fear to do them injustice: and partly because I make no pretensions to be here

* Professor De Morgan proposed at the same time a remarkable conjecture, which he may be considered to have afterwards illustrated and systematised, by his theory of *cube-roots* of negative unity, employed as *geometrical operators*, in his Paper on *Triple Algebra* (Camb. Phil. Trans., Vol. VIII., Part. iii.); namely, that "an extension to three dimensions" might "require a solution of the equation $\phi^3 x = -x$." I much regret that my plan will not allow me to attempt the giving any further account, in this Preface, of that very original Paper of Professor De Morgan, the first suggestion of which he was pleased to attribute to the publication of my own remarks on Quaternions, in the Philosophical Magazine for July, 1844: and a similar expression of regret applies to the independent but somewhat later researches of Messrs. John and Charles Graves, in the same year, respecting other Triplet Systems, which involved cube-roots of *positive* unity, and of which some account has been preserved in the Proceedings of the Royal Irish Academy.

an *historian of science*, even in *one* department of mathematical speculation, or to give anything more than an account of the *progress of* my *own thoughts*, upon one class of subjects. For the same reasons, I pass over some other investigations having reference to the imaginary* symbol of algebra, which were not used as suggestions by myself, and proceed at once to the quaternions.

[45.] With such preparations as I have described, I resumed (in 1843) the endeavour to adapt the general conception of triplets to the multiplication of lines in space, resolving to *retain* the *distributive* principle, with which some formerly conjectured systems had been inconsistent, and at first supposing that I *could* preserve the *commutative* principle *also*, or the convertibility [24] [29] of the factors as to their *order*. Instead of my old symbols $\times_1$, $\times_2$, $\times_3$ (see [22]), I wrote more shortly 1, i, j; so that a numerical triplet took the form $x+iy+jz$, where I proposed to interpret x, y, z as three rectangular co-ordinates, and the triplet itself as denoting a line in space. From the analogy of cou-

* I am unwilling, however, to leave unmentioned here (although it did not happen to supply me with any suggestion), a remarkable use of the symbol $\sqrt{-1}$, which was made by the late Professor Mac Cullagh, of Dublin, whose great and original powers in mathematical and physical science must ever be remembered with admiration, and which he seems to have connected (in 1843) with investigations respecting the total reflexion of light. (See Proceedings of the R. I. A. for the date of January 13, 1845.) This use of imaginaries was founded on a theorem relative to the ellipse, which was expressed by him as follows, in a question proposed at the Examination for the Election of Junior Fellows in 1842 (see Dublin University Examination Papers for that year, published in 1843, p. lxxxiv.):—"Detur in spatio ellipsis, cujus centrum est origo co-ordinatarum. Puncta xyz, $x'y'z'$ in ellipsi sint termini diametrorum conjugatarum. Ostendendum est quantitates imaginarias

$$\frac{y+y'\sqrt{-1}}{x+x'\sqrt{-1}},\quad \frac{z+z'\sqrt{-1}}{x+x'\sqrt{-1}},$$

constantes esse pro quolibet systemate diametrorum conjugatarum." This elegant theorem of Professor Mac Cullagh may easily be proved, without employing any but the usual principles respecting the symbol $\sqrt{-1}$, by observing that the following expressions, for the six co-ordinates in question,

$$x = a\cos v + a'\sin v,\ y = b\cos v + b'\sin v,\ z = c\cos v + c'\sin v,$$
$$x' = a'\cos v - a\sin v,\ y' = b'\cos v - b\sin v,\ z' = c'\cos v - c\sin v,$$

give

$$\frac{x+x'\sqrt{-1}}{a+a'\sqrt{-1}} = \frac{y+y'\sqrt{-1}}{b+b'\sqrt{-1}} = \frac{z+z'\sqrt{-1}}{c+c'\sqrt{-1}} = \cos v - \sin v\sqrt{-1}.$$

ples, I assumed $i^2 = -1$; and tried the effect of assuming also $j^2 = -1$, which I interpreted as answering to a rotation through two right angles in the plane of xz, as $i^2 = -1$ had corresponded to such a rotation in the plane of xy. And because I at first supposed that ij and ji were to be *equal*, as in the ordinary calculations of algebra, the product of two triplets appeared to take the form,

$$(a + ib + jc)\,(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i\,(ay + bx) \\ + j\,(az + cx) + ij\,(bz \cancel{+} cy): \quad /-$$

but I did not at once see what to do with the *product* ij. The theory of triplets seemed to require that it should be *itself* a triplet, of the form,

$$ij = \alpha + i\beta + j\gamma,$$

the coefficients α, β, γ being some three constant numbers: but the question arose, how were those numbers to be determined, so as to adapt in the best way the resulting formula of multiplication to some *guiding geometrical analogies*.

[46.] To assist myself in applying such analogies, I considered the case where the co-ordinates b, c were *proportional* to y, z, so that the two factor-lines were in one common *plane*, containing the unit-line, or the axis of x. In that particular *case*, there was ready a *known* signification [36] for the product line, considered as the fourth proportional to the unit-line (assumed here on the last-mentioned axis), and to the two coplanar factor-lines. And I found, without difficulty, that the co-ordinate projections of such a fourth proportional were here,

$$ax - by - cz, \quad ay + bx, \quad az + cx,$$

that is to say, the coefficients of $1, i, j$, in the recently written expression for the product of the two triplets, which had been supposed to represent the factor-lines. In fact, if we assume $y = \lambda b$, $z = \lambda c$, where λ is any coefficient, we have the two identical equations,

$$(ax - \lambda b^2 - \lambda c^2)^2 + (\lambda a + x)^2 (b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)\,(x^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2),$$

$$\tan^{-1} \frac{(\lambda a + x)\,(b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{ax - \lambda\,(b^2 + c^2)} = \tan^{-1} \frac{(b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{a} + \tan^{-1} \frac{\lambda\,(b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

which express that the required geometrical conditions are satisfied. It was allowed then, in this *case of coplanarity*, or under the particular *condition*,

$$bz - cy = 0,$$

to treat the triplet,

$$(ax - by - cz) + i\,(ay + bx) + j\,(az + cx),$$

as denoting a *line* which might, consistently with known analogies, be regarded as the *product* of the two lines denoted by the two proposed triplets,

$$a + ib + jc, \quad \text{and} \quad x + iy + jz.$$

And here the *fourth term*,

$$ij\,(bz + cy),$$

appeared to be simply *superfluous*: which induced me for a moment to fancy that perhaps the *product* ij was to be regarded as $= 0$. But I saw that this fourth term (or part) of the product was more immediately given, in the calculation, as the sum of the two following,

$$ib\,.\,jz, \quad jc\,.\,iy;$$

and that this *sum* would vanish, under the present *condition* $bz = cy$, if we made what appeared to me a *less harsh* supposition, namely, the supposition (for which my old speculations on *sets* had prepared me) that

$$ij = -ji:$$

or that

$$ij = +k, \quad ji = -k,$$

the value of the product k being still left undetermined.

[47.] In this manner, *without* now assuming $bz - cy = 0$, I had generally for the *product of two triplets*, the expression of *quadrinomial form*,

$$(a + ib + jc)\,(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i\,(ay + bx) \\ + j\,(az + cx) + k\,(bz - cy);$$

and I saw that although the product of the sums of squares of the constituents of the two factors could not in general be decomposed into *three* squares of rational functions of them, yet it *could* be generally presented as the sum of *four* such squares, namely, the squares of the four coefficients of 1, i, j, k, in the expression just deduced: for, without any relation being assumed between a, b, c, x, y, z, there was the identity,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax-by-cz)^2 + (ay+bx)^2 \\ + (az+cx)^2 + (bz-cy)^2.$$

This led me to conceive that perhaps instead of seeking to *confine* ourselves to *triplets*, such as $a+ib+jc$ or (a, b, c), we ought to regard these as only *imperfect forms of* QUATERNIONS, such as $a+ib+jc+kd$, or (a, b, c, d), the symbol k denoting *some new sort of unit operator*: and that thus my old conception of *sets* [30] might receive a new and useful application. But it was necessary, for operating *definitely* with such quaternions, to fix the value of the *square* k^2, of this new symbol k, and also the values of the *products*, ik, jk, ki, kj. It seemed natural, after assuming as above that $i^2=j^2=-1$, and that $ij=k, ji=-k$, to assume also that $ki=-ik=-i^2j=+j$, and $kj=-jk=j^2i=-i$. The assumption to be made respecting k^2 was less obvious; and I was for a while disposed to consider this square as equal to *positive* unity, because $i^2j^2=+1$: but it appeared more convenient to suppose, in consistency with the foregoing expressions for the products of i, j, k, that

$$k^2 = ijij = -iijj = -i^2j^2 = -(-1)(-1) = -1.$$

[48.] Thus all the fundamental assumptions for the *multiplication of two quaternions* were completed, and were included in the formulæ,

$$i^2=j^2=k^2=-1;\ ij=-ji=k;\ jk=-kj=i;\ ki=-ik=j:$$

which gave me the equation,

$$(a, b, c, d)(a', b', c', d') = (a'', b'', c'', d''),$$

or

$$(a+ib+jc+kd)(a'+ib'+jc'+kd') = a''+ib''+jc''+kd'',$$

when and only when the following *four separate equations* were satisfied by the *constituents* of these three quaternions:

$$\begin{aligned} a'' &= aa'-bb'-cc'-dd', \\ b'' &= (ab'+ba')+(cd'-dc'), \\ c'' &= (ac'+ca')+(db'-bd'), \\ d'' &= (ad'+da')+(bc'-cb'), \end{aligned}$$

And I perceived on trial, for I was not acquainted with a theorem of Euler respecting *sums of four squares*, which might have enabled me to anticipate the result, that these expressions for a'', b'', c'', d'' had the following *modular property*:

$$a''^2+b''^2+c''^2+d''^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2).$$

I saw also that if, instead of representing a line by a triplet of the form $x+iy+jz$, we should agree to represent it by this *other trinomial form*,

$$ix+jy+kz,$$

we should then be able to express the desired *product of two lines in space* by a QUATERNION, of which the constituents have very *simple geometrical significations*, namely, by the following,

$$(ix+jy+kz)(ix'+jy'+kz') = w''+ix''+jy''+kz'',$$

where

$$\begin{aligned} w'' &= -xx'-yy'-zz', \\ x'' &= yz'-zy',\ y'' = zx'-xz',\ z'' = xy'-yx'; \end{aligned}$$

so that the part w'', independent of ijk, in this expression for the product, represents the *product of the lengths of the two factor-lines, multiplied by the cosine of the supplement of their inclination* to each other; and the remaining part $ix''+jy''+kz''$ of the same product of the two trinomials represents a *line*, which is in *length the product of the same two lengths, multiplied by the sine of the same inclination*, while in *direction* it is *perpendicular to the plane of the factor-lines*, and is such that the *rotation round the multiplier-line*, from the multiplicand-line towards the product-line (or towards the *line-part* of the whole quaternion product), has the *same right-handed* (or left-handed) *character*, as the rotation round the positive semiaxis of k (or of z), from the positive semiaxis of i (or of x), towards that of j (or of y).

[49.] When the conception, above described, had been so far unfolded and fixed in my mind, I felt that the *new instrument* for applying *calculation to geometry*, for which I had so long sought, was now, at least in part, attained. And although I had left several former conjectures respecting *triplets* for many years uncommunicated, except by name, even to friends, yet I at once proceeded to lay these results respecting *quaternions* before the

Royal Irish Academy (at a Meeting of Council* in October, 1843, and at a General Meeting† shortly subsequent): introducing also a theory of their connexion with spherical trigonometry, some sketch of which appeared a few months later in London (in the Phi- losophical Magazine for July, 1844). On that *connexion of quater- nions with spherical trigonometry*, and generally with *spherical geometry*, I need not at present dwell, since it is sufficiently ex- plained in the concluding Lectures of this Volume: but it may be not improper that a brief account should here be given, of a not much later but hitherto unpublished speculation, of a character partly geometrical, but partly also metaphysical (or *à priori*), by which I sought to explain and confirm some results that might at first seem strange, among those to which my analysis had con- ducted me, respecting the *quadrinomial form*, and *non-commuta- tive property*, of the *product* of two directed lines in space.

[50.] Let, then, the PRODUCT of two co-initial lines, or of two vectors from a common origin, be conceived to be *something* which has QUANTITY, in the sense that it is doubled, tripled, &c., by dou- bling, tripling, &c., either factor; let it also be conceived to have in some sense, QUALITY, *analogous to direction*, which is in some way *definitely connected* with the directions of the two factor lines. In particular let us conceive, in order to preserve so far an ana- logy to *algebraic multiplication*, that its direction is in all re- spects *reversed*, when *either* of those directions is reversed; and therefore that it is *restored*, when *both* of them are reversed. On

* The Minutes of Council of the R. I. A., for October 16th, 1843, record "Leave given to the President to read a paper on a new species of imaginary quantities, connected with a theory of quaternions." It may be necessary to state, in explanation, that the Chair of the Academy, which has since been so well filled by my friends, Drs. Lloyd and Robinson, was at that time occupied by me.

† At the Meeting of November 13th, 1843, as recorded in the "*Proceedings*" of that date, in which the fundamental formulæ and interpretations respecting the symbols *ijk* are given. Two letters on the subject, which have since been printed, were also written in October, 1843, to the friend so often mentioned in this Preface, Mr. J. T. Graves: and the chief results were also exhibited to his brother, the Rev. C. Graves, before the public communication of November, 1843. These circumstances (or some of them) have been stated elsewhere: but it seemed proper not to pass them over without some short notice here, as con- nected with the date of the invention and publication of the quaternions.

the other hand, for the sake of recognising what may be called the *symmetry of space*, let this *direction of the product*, so far as it can be constructed or represented by that of any *line in space*, be conceived as *not changing its relation to the system of those two factor directions*, when that system is in any manner *turned in space*: its own direction, *as a line*, being at the same time *turned with them*, as if it formed a part of one common and rigid system; and the *numerical element* of the same product (if it have any such) undergoing *no change* by such rotation. Let the product in question be conceived to be entirely *determined*, when the fac- tors are determined; let it be made, if other conditions will allow, for the sake of general analogies, a *distributive function* of those two factors, summation of lines being performed by the same rules as composition of motions; and finally, if these various conditions can all be satisfied, and still leave anything undetermined, in the rules for *multiplication of lines*, let the indeterminateness be re- moved in such a way as to make these rules approach as much as possible to the other usual rules for the *multiplication of num- bers* in algebra.

[51.] The *square of a given line* must *not* be *any line* in- clined to that given line; for, even if we chose any particular *angle* of inclination, there would be nothing to determine the *plane*, and thus the square would be *indeterminate*, unless we selected some one direction in space as *eminent*, which selection we are endeavouring to *avoid*. Nor can the square of a given line be a line in the *same* direction, nor in the direction *opposite*; for if *either* of these directions were selected, by a definition, then this definition would oblige us to consider the square as *reversed* in direction, when the line of which it is the square is reversed; whereas if the two factors of a product *both* change sign, the di- rection of the product is always (by what has been above agreed on) preserved, or rather *restored*. We must, therefore, consider the SQUARE OF A LINE as having *no direction in space*, and there- fore us being *not* (properly) *itself a line*; but nothing hitherto prevents us from regarding the *square* as a NUMBER, which has always one determined *sign* (as yet unknown), and varies in the duplicate ratio of the length of the line to be squared. If, then, the length of a line a contain a times the unit of length, we are led to consider aa or a^2 as a symbol equivalent to la^2, in which l is some numerical coefficient, positive or negative, as yet unknown, but constant for all lines in space, or having *one common value* for all. And, consequently, if α, β be *any two lines* in any *one common direction*, and having their *lengths* denoted by the *numbers* a and b, we are led to regard the product $\alpha\beta$ as equal to the number lab, l being the same *coefficient* as before. But if the direction of β be exactly *opposite* to that of α, their lengths being still a and b, their product is then equal to the opposite number, $-lab$. The same general conclusions might perhaps have been more easily arrived at, if we had *begun* by considering the product of two equally long but *opposite* lines; for it might perhaps then have been even easier to see that, consistently with the *symmetry of space*, no *one* line rather than another could represent, even in part, the direction of the product.

[52.] Next, let us consider the product $\alpha\beta$ of *two mutually perpendicular lines*, α and β, of which each has its length equal to 1. Let α', β' be lines respectively equal in length to these, but respectively opposite in direction. Then $\alpha'\beta = -\alpha\beta = \alpha\beta'$; $\alpha'\beta' = \alpha\beta$. If the sought product $\alpha\beta$ were equal to any *number*, or even if it contained a number as a *part* of its expression, then, on our changing the multiplier α to its own opposite line α', this product or part ought *for one reason* (the symmetry of space) to remain *constant* (because the system of the factors would have been merely *turned in space*); and for another reason ($\alpha'\beta = -\alpha\beta$) the same product or part ought to *change sign* (because *one* factor would have been *reversed*): but this co-existence of opposite results would be absurd. We are led therefore to try whether the present condition (of *rectangularity of the two factors*) allows us to suppose the product $\alpha\beta$ to be a LINE.

[53.] Let γ be a third line, of which the length is unity, and which is at the positive side of β, with reference to α as an axis of rotation; right-handed (or left-handed) rotation having been previously selected as *positive*; let also γ' be the line opposite to γ. Then *any line* in space may be denoted by $m\alpha + n\beta + p\gamma$; we are therefore to try whether we can consistently suppose $\alpha\beta = m\alpha + n\beta + p\gamma$, m, n, p being some three numerical constants. If so, we should have (by the principle of the symmetry of space)

$\alpha'\beta = m\alpha' + n\beta + p\gamma'$; and therefore (by a change of all the signs) $\alpha\beta = m\alpha + n\beta' + p\gamma$; therefore $n\beta' = n\beta$, and consequently $-n = n$, or finally $n = 0$. In like manner, since $\alpha\beta = -\alpha\beta' = -(m\alpha + n\beta' + p\gamma') = m\alpha' + n\beta + p\gamma$, we should have $m\alpha' = m\alpha$, and therefore $m = 0$. But there is no objection of *this* kind against supposing $\alpha\beta = p\gamma$, p being some numerical coefficient, constant for all pairs of rectangular lines in space: for the reversal of the direction of a factor has the effect of turning the system through two right angles round the other factor as an axis, and so reverses the direction of the product. And then if the lengths of these two lines α, β, instead of being each $= 1$, are respectively a and b, their product $\alpha\beta$ will be $= pab\gamma$; that is, it will be a line perpendicular to both factors, with a length denoted by pab, and situated always to the positive or always to the negative side of the multiplicand line β, with respect to the multiplier line α as an axis of rotation, according as the constant number p is positive or negative.

[54.] So far, then, without having yet used any property of multiplication, algebraical or geometrical, beyond the three principles: 1st, that *no one direction in space is to be regarded as eminent above another*; 2nd, that *to multiply either factor by any number, positive or negative, multiplies the product by the same*; and 3rd, that *the product of two determined factors is itself determined*; we are led to assign interpretations: 1st, to the product of two *co-axal* vectors, or of two lines parallel to each other, or to one common axis; and 2nd, to the product of two *rectangular* vectors; which interpretations introduce only *two constant*, but as yet unknown, *numerical coefficients*, l and p, depending, however, partly on the assumed unit of length. And we see that for any two co-axal vectors, α, β, the equation $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$ holds good; but that for any two rectangular vectors, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. *A product of two rectangular lines* is, therefore, so far as the foregoing investigation leads us to conclude, *not a commutative function of them.*

[55.] Since then we are compelled, by considerations which appear more primary, to *give up the commutative property* of multiplication, as not holding *generally* for *lines*, let us at least try (as was proposed) whether we can retain the *distributive* property. If so, and if the multiplicand line β be the sum of two others, β_1 and β_2, of which one (β_1) is co-axal with the multiplier line α, while the other (β_2) is perpendicular thereto, we must interpret the product $\alpha\beta$ as equal to the *sum of the two partial products*, $\alpha\beta_1$ and $\alpha\beta_2$. But one of these is a number, and the other is a line; we are, therefore, led to consider a number as being under these circumstances *added* to a line, and as forming with it a certain *sum*, or *system*, denoted by $\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$, or more shortly by $\alpha\beta$. And such a *sum of line and number* may perhaps be called a GRAMMARITHM,* from the two Greek words, γραμμή, a line, and ἀριθμός, a number. A grammarithm is thus to be conceived as being entirely *determined*, when its *two parts* or elements are so; that is, when its *grammic* part is a known line, and its *arithmic* part is a known number. A change in *either* part is to be conceived as changing the grammarithm: thus, *an equation between two grammarithms includes generally two other equations*, one between two numbers, and another between two lines. Adopting this view of a grammarithm, and *defining* that $\alpha\beta = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$, when $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1 \parallel \alpha$, $\beta_2 \perp \alpha$, the product of any determined multiplier line and any determined multiplicand line will be itself entirely determined, as soon as the unit of length and the numbers l and p shall have been chosen; and it remains to consider whether these numbers can now be so selected, as to make the rules of multiplication of *lines* approach more closely still to the rules of multiplication of *numbers*.

[56.] The *general distributive* principle will be found to give *no new condition;* and we have seen cause to *reject* the *commutative* principle or property, as *not generally* holding good in the present inquiry. It remains, then, to try whether we can determine or *connect* the two coefficients, l and p, so as to satisfy the *associative* principle, or to verify the formula,

$$\alpha \cdot \beta\gamma = \alpha\beta \cdot \gamma.$$

* The word "grammarithm" was subsequently proposed in a communication to the Royal Irish Academy (see the Proceedings of July, 1846), as one which *might* replace the word "quaternion," at least in the geometrical view of the subject: but it did not appear that there would be anything gained by the systematic adoption of this change of expression, although the mere *suggestion* of another *name*, as not inapplicable, seemed to throw a little additional light on the whole theory.

For this purpose we may first *distribute* the factors β, γ into others, $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, which shall be parallel or perpendicular to α and to each other; and then shall have to satisfy, if possible, the conditions, which may be reduced to the six following:

$$\alpha \cdot \alpha\alpha = \alpha\alpha \cdot \alpha;\ \ \alpha \cdot \alpha\alpha' = \alpha\alpha \cdot \alpha';\ \ \alpha \cdot \alpha\alpha'' = \alpha\alpha \cdot \alpha'';$$
$$\alpha \cdot \alpha'\alpha = \alpha\alpha' \cdot \alpha;\ \ \alpha \cdot \alpha'\alpha' = \alpha\alpha' \cdot \alpha';\ \ \alpha \cdot \alpha'\alpha'' = \alpha\alpha' \cdot \alpha'';$$

α, α', α'' being three rectangular unit-lines, so placed that the rotation round α from α' to α'' is positive. Then, by what has been already found, the following relations will hold good:

$$\alpha\alpha = \alpha'\alpha' = \alpha''\alpha'' = l;\ \ \alpha\alpha' = -\alpha'\alpha = p\alpha'';$$
$$\alpha\alpha'' = -\alpha''\alpha = -p\alpha';\ \ \alpha'\alpha'' = -\alpha''\alpha' = +p\alpha;$$

and the six conditions to be satisfied become,

$$\alpha \cdot l = l \cdot \alpha;\ \ \alpha \cdot p\alpha'' = l \cdot \alpha';\ \ \alpha \cdot -p\alpha' = l \cdot \alpha'';$$
$$\alpha \cdot -p\alpha'' = p\alpha'' \cdot \alpha;\ \ \alpha \cdot l = p\alpha'' \cdot \alpha';\ \ \alpha \cdot p\alpha = p\alpha'' \cdot \alpha''.$$

Of these the first suggests to us to treat an arithmic factor as *commutative* (as regards *order*) with a grammic one, or to treat the product "line into number" as equivalent to "number into line;" the fourth and sixth conditions afford no new information; and the second, third, and fifth become,

$$-p^2\alpha' = l\alpha';\ \ -p^2\alpha'' = l\alpha'';\ \ -p^2\alpha = l\alpha.$$

The *conditions of association* are therefore all satisfied by our assuming, with the present signification of the symbols,

$$\alpha l = l\alpha, \text{ and } l = -p^2;$$

and they cannot be satisfied otherwise. The constant l is, therefore, by those conditions, necessarily *negative;* and EVERY LINE in tridimensional space has its SQUARE (on this plan) equal to a NEGATIVE NUMBER: which is one of the most novel but essential elements of the whole quaternion theory. (Compare the recent paragraph [48]; also art. 85, pages 81, 82, of the Lectures.) And that a *grammarithm* [55] may properly be called a *quaternion*, appears from the consideration that the *line*, which in it is *added to a number*, depends itself upon a *system of three numbers*, or may be represented by a *trinomial expression*, because it is always the *sum of three lines* (actual or null), which are parallel to three fixed directions (compare Lecture III.). The coefficient p remains still undetermined, and may be made equal to positive one, by a suitable choice of the unit of length, and the direction of positive rotation. In this way we shall have finally the very simple values,

$$p = +1, \quad l = -1;$$

and the *rules* for the *multiplication of lines in space* will then become entirely *definite*, and will *agree* in all respects with the relations [48], between the symbols *ijk*.

[57.] Another train of *à priori* reasoning, by which I early sought to confirm, or (if it had been necessary) to correct, the results expressed by those new symbols, was stated to the R. I. Academy* in (substantially) the following way. Admitting, for directed and *coplanar* lines, the conception [36] of *proportion;* and retaining the symbols *ijk*, or more fully, $+i$, $+j$, $+k$, to denote three rectangular unit-lines as above, while the three respectively opposite lines may be denoted by $-i$, $-j$, $-k$; but *not assuming* the knowledge of any laws respecting their *multiplication*, I sought to determine *what ought to be considered as the* FOURTH PROPORTIONAL, u, *to the three rectangular directions*† j, i, k, *consistently with that known conception* [36] *for directions within the plane*, and with some *general and guiding principles*, respecting *ratios* and *proportions*. These latter assumed principles (of a *regulative* rather than a *constitutive* kind) were simply the following: 1st, that ratios similar to the *same* ratio must be regarded as similar to *each other;* 2nd, that the respectively *inverse* ratios are also mutually similar; and 3rd, that ratios are similar, if they be *similarly compounded* of similar ratios: this similarity of *composition* being understood to include generally a sameness of *order*. It seemed to me that any proposed definitional‡ use of the word RATIO, which should be inconsistent with these principles, would depart thereby *too widely from known analogies*, mathematical and metaphysical, and would involve an impropriety of *language:* while, on the other hand, it appeared that if these principles were attended to, and other analogies observed, it was permitted to extend the use of that word *ratio*, and

* See the Proceedings of November 11th, 1844.

† In the abstract published in the Proceedings, the words "South, West, Up" were used at first instead of the symbols i, j, k; and the sought fourth proportional to jik, which is here denoted by u, was called, provisionally, "Forward."

‡ As an example of the use of the first of these very simple principles, in serving to *exclude a definition* which might for a moment appear plausible, let us take the construction [38], and inquire whether (as that construction would suggest) we can *properly say* that *four directions* (or four diverging unit-lines), $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, form generally a *proportion in space*, when the angles $\hat{\alpha\delta}$, $\hat{\beta\gamma}$, between the extremes and means have one *common bisector* (ϵ). If so, when the three directions α, β, γ become *rectangular*, we should have $\alpha : \beta :: \gamma : -\alpha$, and $\gamma : -\alpha :: \beta : -\gamma$; but we should have also, $\alpha : \beta :: \beta : -\alpha$, and *not* $\alpha : \beta :: \beta : -\gamma$; so that the two ratios, $\alpha : \beta$ and $\beta : -\gamma$, would be said to be similar to one *common* ratio ($\gamma : -\alpha$), without being similar to *each other*, if the foregoing construction for a *fourth proportional* were to be, by definition, adopted: and this objection *alone* would be held by me to be *decisive* against the introduction of such a *definition;* and therefore also against the adoption of the connected *rule* mentioned in [38], as having at one time occurred to a friend (J. T. G.) and to myself, for the multiplication of lines in space, even if there were *no other reasons* (as in fact there are), for the rejection of that rule. A similar objection applies, with equal decisiveness, against the rule mentioned in [37], as an earlier conjecture of my own. On the other hand, an analogous and equally simple argument may serve to *justify* the notation $D - C = B - A$, employed by me in the following Lectures, and elsewhere, to express that the two right lines AB and CD are *equally long* and *similarly directed*, against an objection made some years ago, in a perfectly candid spirit, by an able writer in the Philosophical Magazine (for June, 1849, p. 410); who thought that interpretation *more arbitrary* than it had appeared to me to be; and suggested that the *same notation* might as well have been employed to signify this *other conception:*—that the two equally long lines AB, CD *met somewhere*, at a finite or infinite distance. I could not admit this extension; for it would lead to the conclusion that two lines AB, EF might be *equal* to the same *third* line CD, without being equal to *each other:* which would (in my opinion) be so great a violation of analogy, as to render the use of the *word* "EQUAL," or of the *sign* =, with the interpretation referred to, an embarrassment instead of an assistance. But I do not feel that analogies are thus violated, by the simultaneous admission of the *two contrasted proportions* (see (3) (4) (5) of [57]),

$$u : i :: j : k, \quad u : j :: i : -k;$$

for the elementary theorem called often "alternando," (ἐναλλὰξ λόγος, Euc. V. Def. 12, and Prop. 16) is by its nature limited (in its original meaning) to the CASE where the *means* which change places are *homogeneous* with each other: whereas two *rectangular directions*, as here i and j, are in this whole theory regarded as being in some sense *heterogeneous*. They have at least no relation to each other, which can be represented by any *ratio*, such as EUCLID considers, of *magnitude* to *magnitude;* and therefore we have no right to *expect*, from analogy to old results, that *alternation* shall *generally* be allowed in a *proportion* involving such directions: although, *within* the plane, alternation is *found* to be admissible.

the connected phrase *proportion*, not only from *quantity* to *direction, within one plane*, as had been done [36] by other writers,*

* Since the note to paragraph [36], pp. (31) (32), was in type, I have had an opportunity of re-consulting the fourth volume of the Annales de Mathématiques, and have found my recollections (agreeing indeed in the main with the formerly cited page 228 of Dr. Peacock's admirable *Report*), respecting the admitted priority of Argand, confirmed. Français, indeed (in 1813), published in those Annales (Tome IV., pp. 61, .. 71) a paper which contained a theory of "proportion de grandeur et de position," with a connected theory of multiplication (and also of addition) of lines in a given plane; but he expressly and honourably stated at the same time (p. 70), that he owed the substance of those new ideas to another person ("le fond de ces idées nouvelles ne m' appartient pas"): and on being soon afterwards shewn, through Gergonne, whose conduct in the whole matter deserves praise, a copy of Argand's earlier and printed Essay (Paris, 1806), Français most fully and distinctly recognised (p. 225) that the true author of the method was Argand ("il n'y a pas le moindre doute qu'on ne doive à M. Argand la premiere idée de représenter géométriquement les quantités imaginaires"). Nothing more lucid than Argand's own statements (see the same volume, pp. 136, 137, 138), as regards the *fundamental principles* of the theory of the *addition* and *multiplication* of coplanar lines, has since (so far as I know) appeared; not even in the writings of Professor De Morgan on Double Algebra, referred to in former notes. But Argand had not anticipated De Morgan's theory of Logometers; and was on the contrary disposed (pp. 144, .. 146) to regard the symbol $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, notwithstanding Euler's well-known result, as denoting a *line* (KP), *perpendicular to the plane* of the lines 1 and $\sqrt{-1}$: and to consider it as offering an example of a quantity which was *irreducible to the form* $p + q\sqrt{-1}$, and was (according to him) *as heterogeneous* with respect to $\sqrt{-1}$, as the latter with respect to + 1 ("aussi hétérogène" &c.). The word modulus ("module"), so well known by the important writings of M. Cauchy, occurs in a later paper by Argand, in the following volume of the Annales, as denoting the real quantity $\sqrt{p^2+q^2}$. If I have seemed to dwell too much on the speculations of Argand (not all adopted by myself), it has been partly because (so far as I have observed) his merits as an original inventor have not yet been sufficiently recognised by mathematicians in these countries: and partly because *one of the two most essential links* (the other being *addition*) between Double Algebra and Quaternions, is ARGAND's main and *fundamental principle* respecting COPLANAR PROPORTION, expressed by him as follows (Annales, T. IV., pp. 136, 137):— "Si (fig. 2) *Ang.* AKB = *Ang.* A'K'B', on a, abstraction faite des grandeurs absolues, KA : KB :: K'A' : K'B'. C'est là le principe fondamental de la theorie dont nous avons essayé de poser les premières bases, dans l' écrit dont nous donnons ici un extrait" (namely, Argand's printed Essay of 1806, exhibited by Gergonne to Français, after the appearance of the first paper of the latter author on the subject in 1813). Argand continued thus (in p. 137): "Ce principe n'a rien au fond de plus étrange que celui sur lequel est fondée la conception du rapport géometrique entre deux lignes de signes differens, et il n' en est proprement qu' une généralisation:" a remark in which I perfectly concur.

but also from the *plane* to *space*.* The supposed proportion,

$$j : i :: k : u, \qquad (1)$$

gave thus, by inversion,

$$u : k :: i : j; \qquad (2)$$

but also, in the planes of *ij*, *ik*, there were the two proportions,

$$i : j :: j : -i, \text{ and } k : i :: -i : k; \qquad (3)$$

compounding therefore, on the one hand, the two ratios, $u : k$ and $k : i$, and, on the other hand, the two respectively similar ratios, $j : -i$, and $-i : k$, there resulted the new proportion,

$$u : i :: j : k; \qquad (4)$$

which differed from the proportion (2) only by a *cyclical trans-*

* Although the observations in par. [57] relate rather to *proportions* than to imaginaries, yet the present may be a convenient occasion for remarking that Buée, and even Wallis, had speculated, before Argand and Français, on interpretations of the symbol $\sqrt{-1}$, which should extend to *space*: but that the *nearest approach to an anticipation of the quaternions*, or at least to an *anticipation of triplets*, seems to me to have been made by Servois, in a passage of the lately cited volume of Gergonne's Annales, which appears curious and appropriate enough to be extracted here. Servois had been following up a hint of Gergonne, respecting the representation of ordinary imaginaries of the form $x + y\sqrt{-1}$ (x and y being whole numbers), by a *table of double argument* (p. 71); and thought (p. 235) that *such* a table might be regarded as only a *slice* (une tranche) of a table of TRIPLE argument, for representing *points* (*or lines*) *in* SPACE. He then continued:—"Vous donneriez sans doute à chacune terme la forme *trino-* "*mial*; mais quel coefficient aurait le troisième terme? Je ne le vois pas trop. "L'analogie semblerait exiger que le trinôme fût de la forme, $p\cos\alpha + q\cos\beta$ "$+ r\cos\gamma$, α, β, γ étant les angles d'une droite avec trois axes rectangulaires; "et qu'on eût

"$(p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma)(p'\cos\alpha + q'\cos\beta + r'\cos\gamma) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

"Les valeurs de p, q, r, p', q', r' qui satisferaient à cette condition seraient *ab-* "*surdes*" ("quantités non-réelles," as he shortly afterwards calls them): "mais "seraient-elles *imaginaires* réductibles à la forme génerale $A + B\sqrt{-1}$? Voila "une question d' analise fort singulière, que je soumets à vos lumières." The six non-reals which Servois thus with remarkable sagacity *foresaw*, without being able to *determine* them, may now be identified with the then unknown symbols $+i$, $+j$, $+k$, $-i$, $-j$, $-k$, of the quaternion theory: at least, these latter symbols fulfil precisely the *condition* proposed by him, and furnish an *answer* to his "singular question." It may be proper to state that my own theory had been constructed and published for a long time, before the lately cited passage happened to meet my eye.

position of the three directions ijk. For the same reason, we may make another cyclical change of the same sort, and may write

$$u : j :: k : i; \tag{5}$$

while, in this *cycle* of three rectangular directions, ijk, the *right-handed* (or left-handed) *character* of the *rotation*, round the first from the second to the third, is easily seen to be unaffected by such a transposition. Again compounding the two similar ratios (1) with these two others, which are evidently similar, whatever the unknown direction u may be,

$$i : -i :: u : -u, \tag{6}$$

we find this other proportion,

$$j : -i :: k : -u; \tag{7}$$

and therefore, by (2) and (3),

$$u : k :: k : -u. \tag{8}$$

In like manner,

$$u : i :: i : -u, \text{ and } u : j :: j : -u; \tag{9}$$

and in any one of these proportions, any two terms, whether belonging to the same or to different ratios, may have their *signs* changed together. All these proportions, (2) .. (9), follow from the original supposition (1), by the general principles above stated, without the direction u being as yet any otherwise determined.

[58.] Suppose now that the two rectangular directions j and k are made to *turn together*, in their own plane, round i as an axis, till they take two new positions j_1 and k_1, which will therefore satisfy the proportion,

$$j : k :: j_1 : k_1. \tag{10}$$

We shall then have, by (4),

$$u : i :: j_1 : k_1; \tag{11}$$

and therefore, by a cyclical change of these three new rectangular directions,

$$u : j_1 :: k_1 : i :: l : i_1, \tag{12}$$

if l and i_1 be obtained from k_1 and i by any common rotation round j_1. Another cyclical change, combined with a rotation round the new line l, gives finally,

$$u : l :: i_1 : j_1 :: m : n; \tag{13}$$

where l, m, n may represent *any three rectangular directions whatever*, subject only to the condition that the *rotation* round l from m to n shall be of the *same character* as that round i from j to k. With this *condition*, therefore, the first assumed proportion (1) may be replaced by this *more general* one:

$$n : m :: l : u; \tag{14}$$

while for (8) and (9) may now be written, with the same signification of the symbols,

$$u : l :: l : -u; \; u : m :: m : -u; \; u : n :: n : -u; \tag{15}$$

and because $n : m :: m : -n$, we have these other and not less general proportions,

$$m : -n :: l : u; \; m : n :: l : -u. \tag{16}$$

If, then, there be *any* such fourth proportional, u, as has been above supposed, to the three *given* rectangular directions j, i, k, the *same* direction u, or the *opposite* direction $-u$, will also be, in the same sense, the fourth proportional to *any other three* rectangular directions, n, m, l, or m, n, l, according as the character of a certain rotation is *preserved* or *reversed*.

[59.] This remarkable result appeared to me to justify the regarding the directions here called $+u$ and $-u$ rather as *numerical* (or algebraical) than as *linear* (or geometrical) *units*; and to make it proper to denote them simply by the symbols $+1$ and -1; because their directions were seen to admit only of a certain *contrast* between themselves, but not of any *other* change: all that *geometrical variety*, which results from the conception of *tridimensional space*, having been found to *disappear*, as regarded them, in an investigation conducted as above. And in fact it is *not permitted*, on the foregoing principles, to *identify* the direction u with that of *any line* (l) *whatever*: for in that case the proportion (13) would give the result $l : l :: m : n$, which must be regarded in this theory as an *absurd* one, the two terms of one ratio being *coincident* directions, while those of the other ratio are *rectangular*. But there is no objection of *this* sort against our supposing, as above, that

$$+u = +1, \; -u = -1; \tag{17}$$

and *then* the *proportions*, derived from (13), (15),

$$1 : l :: m : n :: n : -m; \; 1 : l :: l : -1, \qquad (18)$$

may be conveniently and concisely *expressed* by formulæ of *multiplication*, as follows:

$$lm = n; \; ln = -m; \; l^2 = -1. \qquad (19)$$

[60.] In this way, then, or in one not essentially different, the fundamental formulæ [48] of the calculus of quaternions, as first exhibited to the R. I. A. in 1843, namely, the equations,

$$i^2 = -1, \; j^2 = -1, \; k^2 = -1, \qquad (\text{A})$$
$$ij = +k, \; jk = +i, \; ki = +j, \qquad (\text{B})$$
$$ji = -k, \; kj = -i, \; ik = -j, \qquad (\text{C})$$

were shewn (in 1844) to be consistent with *à priori* principles, and with considerations of a general nature; a *product* being *here* regarded as a FOURTH PROPORTIONAL, to a certain *extra-spatial** *unit*, and to *two directed factor-lines* in space: whereas, in the investigation of paragraphs [50] to [56], it was viewed rather as a certain FUNCTION of those two factors, the *form* of which function was to be determined in the manner most consistent with some general and guiding analogies, and with the conception of the *symmetry of space*. But there was still *another view* of the whole subject, sketched not long afterwards in another communication to the R. I. Academy,† on which it is unnecessary to say more than a few words in this place, because it is, in substance, the view adopted in the following Lectures, and developed with some fulness in them: namely, that view according to which a QUATERNION is considered as the QUOTIENT of two directed lines in tridimensional space.

* It seemed (and still seems) to me natural to connect this *extra-spatial unit* with the conception [3] of TIME, regarded here merely as an *axis of continuous and uni-dimensional progression*. But whether we thus *consider jointly time and space*, or conceive generally *any system of four independent axes*, or scales of progression (u, i, j, k), I am disposed to infer from the above investigation the following LAW OF THE FOUR SCALES, as one which is at least consistent with analogy, and admissible as a *definitional extension* of the fundamental equations of quaternions:—" A formula of *proportion between four independent and directed units* is to be considered as remaining true, when *any two* of them *change places* with each other (in the formula), provided that the *direction* (or *sign*) of *one* be *reversed*." Whatever may be thought of these abstract and semi-metaphysical *views*, the *formula* (A) (B) (C) of par. [60] are in any event a sufficient *basis* for the erection of a CALCULUS of quaternions.

† See the Proceedings of Feb. 10th, 1845.

[61.] Of such a *geometrical quotient*,* b ÷ a, the fundamental property is in this theory conceived to be, that by *operating*, as a *multiplier* (or at least in a way *analogous* to multiplication), on the *divisor-line*, a, it *produces* (or generates) the *dividend-line*, b; and that thus it may be interpreted as satisfying the general and identical formula (compare [9]):

$$(\mathrm{b} \div \mathrm{a}) \times \mathrm{a} = \mathrm{b}.$$

The *analogy to multiplication* consists partly in the operation being one which is performed at once on *length* and on *direction*, as in the ordinary multiplication of a line by a positive or negative number; or as is done in that known *generalization* [36] of such multiplication, for lines within one plane, which (for reasons assigned in notes to former paragraphs) ought (I think) to be called the *Method of Argand*: and partly in the circumstance that the new operation possesses, like that older one (from which, however, it is entirely *distinct*,† in many other and important respects), the *distributive* and *associative*,‡ though *not* like it (generally) the *commutative* properties, of what is called *multipli-*

* This view of a *geometrical quotient* was also developed to a certain extent, in an unfinished series of papers, which appeared a few years ago in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, under the head of *Symbolical Geometry*; a title adopted to mark that I had attempted, in the composition of that particular series, to allow a more prominent influence to the general *laws of symbolical language* than in some former papers of mine; and that to this extent I had on that occasion sought to imitate the *Symbolical Algebra* of Dr. Peacock, and to profit also by some of the remarks of Gregory and Ohm.

† Among these *distinctions* of method, it is important to bear in mind that *no one line* is taken, in my system, as representing the *direction of positive unity*: and that, on the contrary, *every vector-unit* is regarded as *one of the square roots of negative unity*. It is to be remarked, also, that the *product* of two inclined but non-rectangular vectors is considered in this theory as *not a line*, but a *quaternion*: all which will be found fully illustrated in the Lectures.

‡ To this *associative* principle, or property of multiplication, I attach much importance, and have taken pains to show, in the Fifth and Sixth Lectures, that it can be *geometrically proved* for quaternions, *independently* of the *distributive* principle, which may, however, in a different arrangement of the subject, be made to *precede* and *assist* the proof of the associative property, as shown in the Seventh Lecture, and elsewhere. The *absence* of the associative principle appears to me to be an *inconvenience* in the *octaves* or octonomials of Messrs. J. T. Graves and Arthur Cayley (see Appendix B, p. 730): thus in the notation of the former we should indeed have, as in quaternions, $ij = k$, but *not generally* $i.jo = ij.o$, if o represent an octave; for $i.jl = in = -o = -kl = -ij.l$.

*cation in algebra;** at least when a few definitional formulæ (resembling those in par. [9]) are established. And the *motive* (in this view) for calling such a *quotient* a QUATERNION, or the ground for connecting its conception with the NUMBER FOUR, is derived from the consideration that while the RELATIVE LENGTH of the two lines compared depends only on *one number*, expressing their RATIO (of the ordinary kind), their RELATIVE DIRECTION depends on a *system of three numbers: one* denoting the ANGLE (a ^ b) between the two lines, and the *two others* serving to determine the *aspect* of the PLANE of that angle, or the *direction* of the AXIS of the positive *rotation* in that plane, *from* the divisor-line (a) *to* the dividend-line (b).

* The expression "algebra," or "ordinary algebra," occurs several times in these Lectures, as denoting merely *that usual species of algebra*, in which the equation $ab = ba$ is treated as universally true, and not (of course) as implying any degree of disrespect to those many and eminent writers, who have not hitherto chosen to admit into their calculations such equations as $\alpha\beta = -\beta\alpha$, for the multiplication of two rectangular lines, or for other and more abstract purposes. It is proper to state here, that a species of *non-commutative multiplication* for inclined lines (äussere Multiplikation) occurs in a very original and remarkable work by Prof. H. Grassmann (Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844), which I did not meet with till after years had elapsed from the invention and communication of the quaternions: in which work I have also noticed (when too late to acknowledge it elsewhere) an employment of the symbol $\beta - \alpha$, to denote the *directed line* (Strecke), drawn from the point α to the point β. Nothwithstanding these, and perhaps some other coincidences of view, Prof. Grassmann's system and mine appear to be perfectly distinct and independent of each other, in their conceptions, methods, and results. At least, that the profound and philosophical author of the Ausdehnungslehre was not, at the time of its publication, in possession of the theory of the *quaternions*, which had in the preceding year (1843) been applied by me as a sort of organ or *calculus for spherical trigonometry*, seems clear from a passage of his Preface (Vorrede, p. xiv.), in which he states (under date of June 28th, 1844), that he had not then succeeded in *extending the use of imaginaries from the plane to space;* and generally that unsurmounted difficulties had opposed themselves to his attempts to construct, on his principles, a theory of *angles in space* (hingegen ist es nicht mehr möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten. Auch stellen sich überhaupt der Betrachtung der Winkel im Raume Schwierigkeiten entgegen, zu deren allseitiger Lösung mir noch nicht hinreichende Musse geworden ist). The earlier treatise by Prof. A. F. Möbius (der barycentrische Calcul, Leipzig, 1827), referred to in the same Preface by Grassmann, appears to be a work which likewise well deserves attention, for its conceptions, notations, and results; as does also another work of Möbius (Mechanik des Himmels, Leipzig, 1843), elsewhere referred to in these Lectures (page 614).

[62.] For the unfolding of this general view,* and the deduction from it of many geometrical† and of some physical‡ consequences, I must refer to the following *Lectures;* of which a considerable part has been drawn up in a more popular§ style than this Preface: while the whole has been composed under the influence of a sincere desire to render the exposition of the subject as clear and elementary as possible. The prefixed *Table of Contents* (pp. ix. to lxxii.), though somewhat fuller than usual, will be found useful (it is hoped) not merely as an analytical *Index*, assisting a reader to *refer* easily to any part of the volume which he has once carefully read, but also as a general *abridgment* of the work, and in some places as a *commentary*.‖ The

* I may just hint here that the BIQUATERNIONS of Lect. VII. admit of being *geometrically interpreted* (comp. note to [19]), by considering each as a *couple of quotients* $\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, *constructed* by a TRIRADIAL (α, β, γ), and *multiplied* by a *commutative* factor of the form $\sqrt{-1}$ (compare [16]), when the *line-couple* (β, γ) is changed to $(-\gamma, \beta)$, or when the *angle* $\hat{\beta\gamma}$ is changed to an *adjacent angle*.

† Notwithstanding some references to works of M. Chasles, and other eminent foreign geometers, my acquaintance with their writings is far too imperfect to give me any confidence in the *novelty* of various theorems in the VIIth Lecture and Appendix (such as those respecting generations of the ellipsoid, and inscriptions of gauche polygons in surfaces of the second order), beyond what is derived from the opinion of a few geometrical friends.

‡ Some such *physical* applications were early suggested by Sir J. Herschel.

§ It had been designed that these Lectures should not go much more into detail than those which have been actually delivered on the subject by me, in successive years, in the Halls of this University; and the First Lecture, printed in 1848 (as the astronomical allusions at its commencement may indicate), was in fact delivered in that year, in very nearly the form in which it now appears. But it was soon found necessary to extend the plan of the composition: and it is evident that the subsequent Lectures, as printed, are too long, and that the last of them involves too much calculation, to have been delivered in their present form: though something of the style of actual lecturing has been here and there retained. The *real divisions* of the work are not so much the *Lectures* themselves, as the shorter and more numerous *Articles*, to which accordingly the *references* have been chiefly made. An intermediate form of subdivision into *Sections* has however been used in drawing up the *Contents*, which the reader may adopt or not at his discretion, marking or leaving unmarked the margin of the Lectures accordingly. Some new terms and symbols have been unavoidably introduced into the work, but it is hoped that they will not be found embarrassing, or difficult to remember and apply.

‖ For instance, as regards the formation of the Adeuteric Function (p. xliii.)

Diagrams are numerous, and have been engraved* with care from my drawings: some of them may perhaps be thought to have been unnecessary, but it appeared better to err, if at all, on the side of clearness and fulness of illustration, especially in the early parts of a work based on a new mathematical conception, and designed to furnish, to those who may be disposed to employ it, a new mathematical organ. Whatever may be thought of the degree of success with which my exertions in this matter have been attended, it will be felt, at least, that they must have been arduous and persevering. My thanks are due, at this last stage, to the friends who have cheered me throughout by their continued sympathy; to the scientific contemporaries† who have at moments turned aside from their own original researches, to notice, and in some instances to extend, results or speculations of mine; to my academical superiors who have sanctioned, as a subject of public and repeated examination in this University, the theory to which this Volume relates, and have contributed to lighten, to an important extent, the pecuniary risk of its publication: but, above all, to that Great Being, who has graciously spared to me such a measure of health and energy as was required for bringing to a close this long and laborious undertaking.

WILLIAM ROWAN HAMILTON.

Observatory of T. C. D., June, 1853.

* By Mr. W. Oldham, whose fidelity and diligence are hereby acknowledged.

† In these countries, Messrs. Boole, Carmichael, Cayley, Cockle, De Morgan, Donkin, Charles and John Graves, Kirkman, O'Brien, Spottiswoode, Young, and perhaps others: some of whose researches or remarks on subjects connected with quaternions (such as the *triplets*, *tessarines*, *octaves*, and *pluquaternions*) have been elsewhere alluded to, but of which I much regret the impossibility of giving here a fuller account. As regards the theory of *algebraic keys* (clefs algébriques), lately proposed by one of the most eminent of continental analysts, as one that *includes* the quaternions (Comptes Rendus for Jan. 10, 1853, p. 75), it appears to me to be virtually *included* in that theory of SETS in algebra (explained in the present Preface), which was announced by me in 1835, and published in 1848 (Trans. R. I. A., Vol. XXI., Part II., p. 229, &c., the symbols $\times_r$ being in fact what M. Cauchy calls KEYS), as an *extension* of the theory of *couples* (and therefore also of imaginaries): of which SETS I have always considered the QUATERNIONS (in their *symbolical* aspect) to be merely a *particular* CASE. Before the publication of those *sets*, the closely connected conception of an "*algebra of the* n^{th} *character*" had occurred to Prof. De Morgan in 1844, avowedly as a suggestion from the quaternions. (Trans. Camb. Phil. Soc., Vol. VIII., Part III.)