

i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

UTILISATION DE L'ORDINATEUR
POUR L'APPRENTISSAGE
D'UN ALGORITHME DE CALCUL DES PRODUITS

PAR D. BUTLEN
C. LETHIELLEUX

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
25₁

UTILISATION DE L'ORDINATEUR
POUR L'APPRENTISSAGE
D'UN ALGORITHME DE CALCUL DES PRODUITS

I CADRE DE CETTE ETUDE

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche effectuée par l'équipe élémentaire /informatique de l'IREM de Paris-sud. Cette équipe essaie de construire et d'expérimenter plusieurs séquences utilisant des logiciels et visant à l'apprentissage des nombres et des opérations à l'école élémentaire.

En particulier, plusieurs logiciels portant sur l'introduction des écritures multiplicatives ont été réalisés et expérimentés par D. Butlen (cf "L'apport de l'outil ordinateur à l'introduction des écritures multiplicatives", thèse soutenue en juin 85). En 84-85, notre travail a porté sur la construction de l'algorithme de la multiplication (D. Butlen et C. Lethielleux).

Nous nous sommes inspirés, pour construire nos didacticiels, de situations d'apprentissage construites et expérimentées par différents IREM. Ces situations s'inscrivent dans une progression visant sur deux ans l'apprentissage d'une ou plusieurs techniques opératoires . Nous reprenons l'analyse de cette progression faite par D. Butlen (Cahier de didactique numéro 19) :

Les recherches effectuées à Bordeaux conduisant les auteurs de l'ensemble des travaux étudiés à proposer une progression basée sur

- des découpages de grilles en petits pavés dont on peut calculer le nombre d'éléments, soit directement, soit à l'aide d'un répertoire multiplicatif,

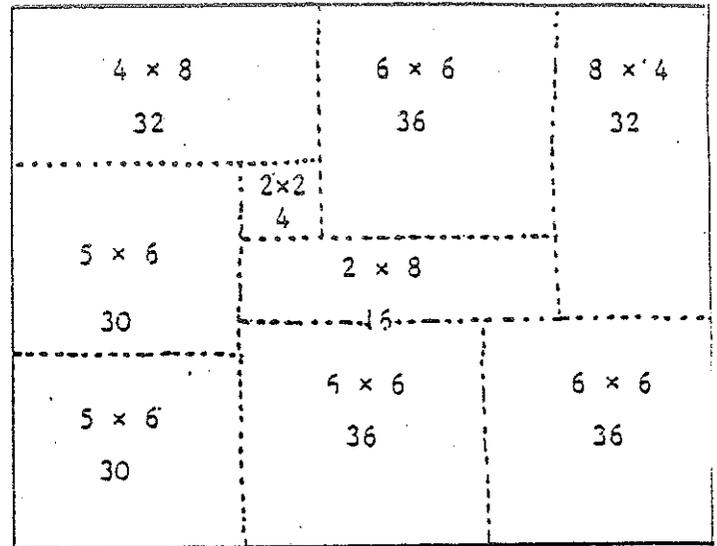
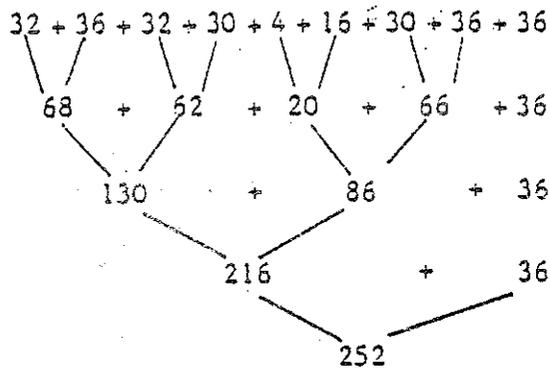
- la construction, l'enrichissement et l'organisation d'un répertoire multiplicatif non standard, l'organisation de ce dernier en table de multiplication se faisant progressivement et étant motivé par les calculs de produits.

Cette progression prend en compte, de façon très nette, le souci d'économie, manifesté par les élèves dans les calculs.

Elle s'articule de la façon suivante (avec des variantes suivant les équipes)

- à partir de la comparaison de grilles (de faibles dimensions), début de construction d'un répertoire multiplicatif, puis organisation partielle de ce dernier à partir de la comparaison des écritures (avec retour éventuel aux collections);

- réduction d'écritures multiplicatives, dans un premier temps, "sauvage", à partir du découpage d'une grille, en grilles plus petites dont on sait calculer le cardinal (directement ou à l'aide de produits connus), puis calcul de cette écriture par addition, écriture canonique correspondantes :



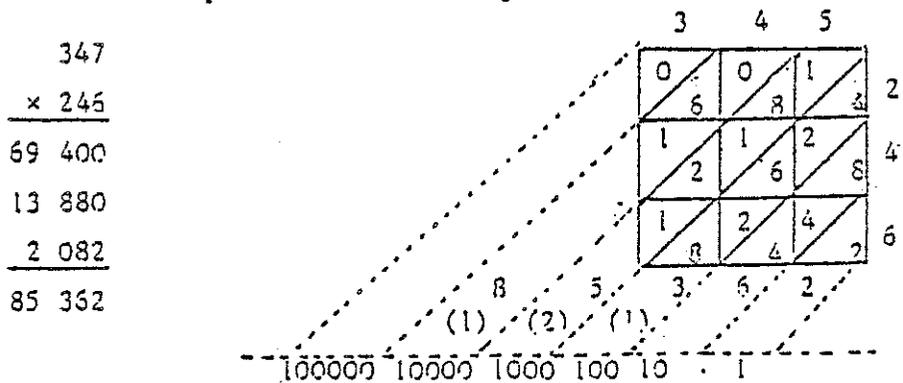
- utilisation du souci d'économie des élèves et d'un répertoire imposé (ainsi que d'une compétition inter-élèves) pour réduire ce découpage;
- découverte de la règle des zéros (multiplication par 10, 100, 1000 ...) et réinvestissement de cette découverte dans les découpages pré-cités;
- passage d'un découpage effectif à la représentation de ce découpage sous forme de schéma;
- étude et/ou réinvestissement de l'étude des puissances de 10 dans la réduction des écritures multiplicatives.

A cette étape, deux choix sont possibles :

construction de l'algorithme traditionnel de la multiplication, en passant éventuellement, par l'algorithme à l'italienne "de Fibonacci" (*)

construction de l'algorithme à la grecque ou "Per Gelosia" (**) puis, construction de l'algorithme traditionnel et comparaison des deux.

(*) L'algorithme de Fibonacci est proche de l'algorithme français, il revient à poser la multiplication de la façon suivante :



(**) L'algorithme dit "Per Gelosia" revient à poser la multiplication sous forme de grille rectangulaire (cf. ci-dessus) et "de sommer suivant les diagonales", en reportant les retenues éventuelles.

G. Deramécourt signale dans son film [6] l'importance de la construction d'un répertoire multiplicatif. D. Delor [1] montre de même la construction d'une technique opératoire.

J. Lécocq [1] et G. Brousseau [11] exposent d'autres techniques opératoires et d'autres méthodes pour introduire la multiplication (en tant que technique) à savoir : règlettes de Neper, Technique russe, égyptienne...

Les progressions proposées se terminent toutes par l'apprentissage de la multiplication à la française, compte tenu du rôle social joué par cette dernière en France.

G. Demécourt [8], souligne l'importance du calcul mental et prévoit un certain nombre d'activités tout au long de la progression, sur ce thème.

Nous voyons que le statut pris par la notation $a \times b$, le sens donné et pris par le produit de deux naturels se construit, s'affirme et se stabilise non seulement lors de l'introduction de cette écriture et du produit, mais aussi tout au long du travail effectué sur les écritures multiplicatives, sur leur manipulation, et lors de la construction des techniques opératoires.

On trouve le descriptif détaillé des situations dans les cahiers de l'Irem de Bordeaux, dans l'ouvrage collectif ERMEL "apprentissages mathématiques à l'école élémentaire"-CE.

(1) J.LECOQ - La multiplication des naturels à l'école élémentaire -brochure de l'APMEP -ELEM Maths II .

(6) G.DERAMECOURT - film RTS -Répertoire multiplicatif - Atelier de pédagogie -

(8) G.DERAMECOURT - La multiplication au CE . IREM de Bordeaux .

(11) N.BROUSSEAU- VILLEDIEU - FAUCON -G.BROUSSEAU - R.BANNE - MAYSONNAVE -Opérations au CM1 - Cahiers n°12 sur l'enseignement des mathématiques - IREM de Bordeaux .

II PRESENTATION DE L'ETUDE

les situations : premiers calculs de produits

Rappelons brièvement la situation que nous avons utilisée pour le début de la construction d'un algorithme de multiplication.

Les élèves savent associer à une collection organisée en grille rectangulaire l'écriture de son cardinal sous deux formes: une écriture multiplicative du type $a \times b$ et une écriture additive du type $a + a + \dots + a$, b termes,

Afin de pouvoir donner la "forme canonique" de ce nombre, les élèves découpent la grille en rectangles plus petits dont les cardinaux sont fournis ou sont connus puis font la somme de ces produits intermédiaires.

Cette technique est optimisée de deux points de vue:

- nombre de découpages restreint (4, par exemple)
- calcul des produits intermédiaires plus aisé (emploi du facteur 10)

Cette situation utilise deux cadres:

- les rectangles, la mesure de l'aire de ces rectangles font fonctionner cadre géométrique avec et sans mesure.
- le calcul de produits, de sommes, l'utilisation d'écritures additives et multiplicatives font fonctionner le cadre numérique.

Le problème se formule donc dans deux cadres différents; les élèves vont s'appuyer sur le cadre géométrique, plus perceptif et donc en principe mieux maîtrisé ici pour acquérir de nouvelles connaissances dans le cadre numérique, en particulier une technique de calculs de produits.

Cependant, ce type d'activité soulève de nombreuses difficultés de mise en oeuvre dans une classe:

- des difficultés manipulatoires liées au découpage
- la conservation des aires par découpage n'est pas acquise pour tous les enfants de cet âge.
- il n'est guère facile de demander aux élèves "d'optimiser" leur découpage
- il s'agit d'une tâche très complexe.

Nous avons constaté qu'en général la reproductibilité de ces situations s'avère difficile pour les maîtres. Ce point de vue nous est inspiré par des observations nombreuses notamment d'instituteurs débutants. (cf annexe 1)

Ces difficultés sont liées à des problèmes de type matériel, de complexité de la tâche proposée aux élèves, de contrat didactique et de gestion par le maître du jeu de cadre. Nous avons donc essayé d'améliorer ces activités en utilisant l'ordinateur.

Hypothèses de travail

Nos hypothèses de travail sont les suivantes :

- (1) L'ordinateur allège la tâche de l'élève en ce qui concerne :
 - la mise en place du cadre géométrique ,
 - la familiarisation avec le problème de découpage d'une grille et le contrôle de celui-ci ,
 - la gestion du cadre numérique ; dans nos logiciels , l'ordinateur effectuera les calculs intermédiaires et finaux et affichera les résultats .
- (2) L'ordinateur permettra de travailler plus facilement et simultanément dans le cadre géométrique (avec et sans mesure) et dans le cadre numérique .
- (3) L'ordinateur permet de proposer plusieurs problèmes ce qui aide l'élève à mettre en oeuvre une stratégie efficace pour optimiser le découpage.
- (4) L'utilisation préalable des logiciels facilite la reprise des mêmes activités dans une situation de classe traditionnelle .

Déroulement des activités

Précisons que nos didacticiels ne se substituent pas à l'enseignant. Ils sont un outil supplémentaire mis à la disposition du maître. Il est donc nécessaire que s'établissent des interactions entre les phases de travail individuel (ou par petits groupes) sur les logiciels et les phases de travail collectif où sont mis en commun et discutés les méthodes et les résultats des recherches effectuées à l'aide des logiciels. Cela suppose également que puisse s'instaurer un "dialogue argumenté" entre l'élève et l'ordinateur.

Pour tester nos hypothèses , nous avons organisé le travail de la façon suivante :

- passation sur le logiciel n°1 : découpage d'une grille
- reprise de cette même activité en classe , les calculs et les désignations des nombres étant traités par les élèves
- passation du logiciel n°2 : tentative d'optimisation du découpage
- reprise de l'activité en classe et explicitation de la stratégie

L'expérimentation a eu lieu dans une classe de CE1 à Paris dans le XX^e arrondissement en mai 85 ; Le compte-rendu de ce travail et les conclusions de cette étude sont exposés dans le cahier de didactique n° 25-2

III PRESENTATION DES LOGICIELS

1-INFORMATIONS GENERALES

NOM DES LOGICIELS : décou
multi

AUTEURS scénario et programmation : D. Butten et C. Lethielleux

NIVEAU cours élémentaire

matériel ordinateur T0770 ou M05

description sommaire : les logiciels décou et multi ont pour but de faire calculer des produits non élémentaires en s'appuyant :

- sur le découpage d'une grille rectangulaire
- sur la manipulation de répertoires multiplicatifs

connaissances visées : écritures multiplicatives
élaboration d'une technique opératoire "rudimentaire"

utilisation : individuelle
par groupe

connaissances préalables : addition
introduction aux écritures multiplicatives

2 - PRESENTATION DU PREMIER LOGICIEL

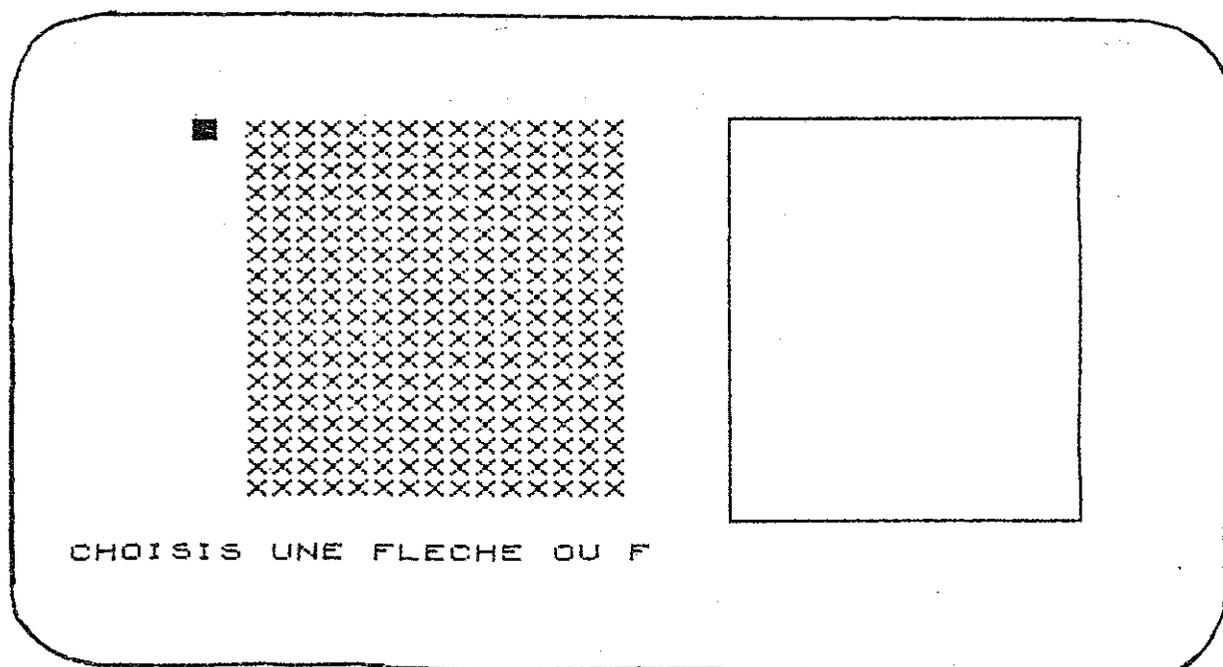
Description

L'objectif de ce logiciel est de permettre à l'élève de se familiariser avec l'action de découpage d'une grille de croix en rectangles plus petits et de manipuler des écritures multiplicatives .

Les grilles rectangulaires utilisées sont des grilles de croix rouges dont les dimensions sont successivement : 15 X 18 ; 19 X 13 ; 17 X 17 .

A l'écran s'affichent : -une grille de croix rouges
-un cadre violet destiné au répertoire.
-un petit carré jaune en haut et à gauche de la grille

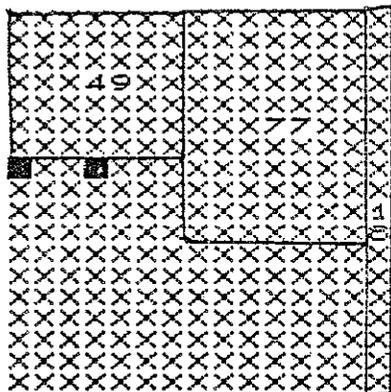
En bas, apparaitront les ordres, les messages d'erreurs et la somme partielle (en violet).



L'élève découpe un rectangle en choisissant les quatre sommets. Pour cela, il déplace sur la grille le petit carré jaune à l'aide des flèches du clavier →, ←, ↓, ↑. Lorsque le petit carré jaune est à une place choisie pour être sommet, il tape sur la lettre "F" (comme fixe), le petit carré jaune devient rouge.

Quand les quatre sommets du rectangle à découper sont fixés, il y a donc quatre carrés rouges sur la grille, les croix du rectangle changent de couleur, le produit partiel s'affiche sur le rectangle découpé et dans le répertoire sous la forme $a \times b = \dots$, le nombre de croix découpées est affiché en bas sous la forme d'une écriture additive.

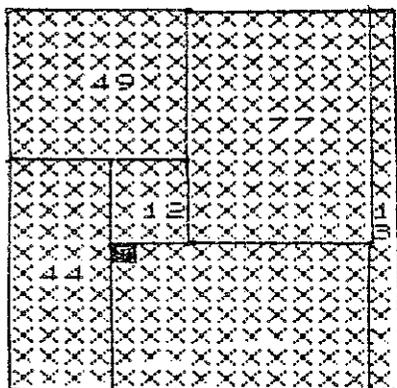
Le petit carré jaune réapparaît en haut, à gauche, pour le découpage d'un nouveau rectangle. A chaque découpage, la couleur du rectangle découpé change, le produit inscrit dans le répertoire est de la même couleur.



V	X	7	49
V	X	11	77
1	X	10	18

CHOISIS UNE FLECHE OU F

$$49 + 77 + 18$$



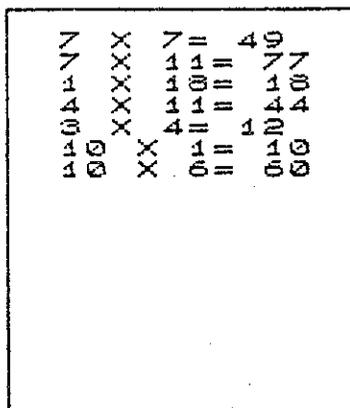
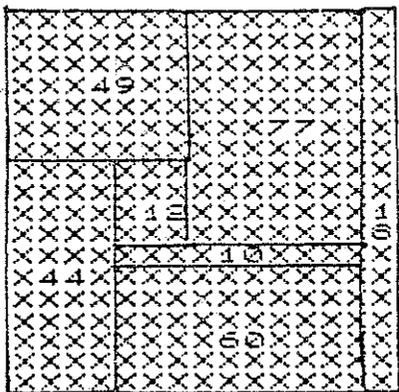
V	X	7	49
V	X	11	77
V	X	10	18
V	X	11	44
1	X	10	12

VEUX-TU FAIRE UNE BANDE?

$$49 + 77 + 18 + 44 + 12$$

Lorsque toute la grille est découpée, les résultats sont affichés sous la grille, sous la forme suivante:

TU AS FAIS ... DECOUPAGES
 .. + .. + .. + .. = 270
 15 X 18 = 18 X 15 = 270



TU AS FAIT 7 DECOUPAGES
 40 + 77 + 18 + 44 + 12 + 10 + 60 = 270
 40 X 18 = 18 X 40 = 270

Il est conseillé de permettre aux enfants de recopier les résultats sur une feuille de papier ou de tirer sur imprimante la dernière page écran. Le maître pourra l'utiliser lors d'une séquence en classe.

le contrôle informatique de l'activité de l'élève

Les erreurs lors du déplacement du petit carré jaune:

- respect de la commande "CHOISIS UNE FLECHE OU F"
- ER0 : Si la flèche choisie par l'élève a pour effet de faire sortir le carré jaune de l'écran ou de l'éloigner trop de la grille (une fenêtre a été déterminée), le déplacement n'est pas effectué et il y a un message d'erreur : " IMPOSSIBLE ? RECOMMENCE "

Les erreurs lors de la détermination du rectangle à découper:

- ER1 : l'élève veut taper "F" hors de la grille;
- ER2 : l'élève veut taper "F" sur une croix déjà découpée;
- ER3 : Après le choix de deux sommets, il faut déplacer le carré jaune dans une autre direction ; une paire de flèches est donc

bloquée ($\{\leftarrow, \rightarrow\}$ ou $\{\uparrow, \downarrow\}$) ;

- ER4 : le deuxième sommet n'est pas aligné avec le premier;
- ER5 : le quatrième sommet est entièrement déterminé par le choix des trois précédents . L'ordinateur contrôle le choix du dernier sommet .

Pour toutes ces erreurs, un message d'erreur s'affiche : "IMPOSSIBLE, RECOMMENCE".

- ER6 : Si le rectangle proposé est non disjoint d'un autre déjà découpé, le message d'erreur est "IMPOSSIBLE, UNE PARTIE EST DEJA DECOUPEE" .

Le logiciel laisse à l'élève la possibilité de découper des rectangles-bandes ou des rectangles faits d'une seule croix appelés "isolés". Pour cela, il est nécessaire de fixer au moins deux sommets à la même place et donc d'appuyer au moins deux fois de suite sur la lettre "F". Nous nous assurons donc, en ce cas, que l'élève veut bien faire une "bande" ou un "isolé" et qu'il ne s'agit pas d'une erreur de manipulation.

La question posée est: VEUX-TU FAIRE UNE BANDE?
ou: VEUX-TU FAIRE UN ISOLE?

3 PRESENTATION DU DEUXIEME LOGICIEL

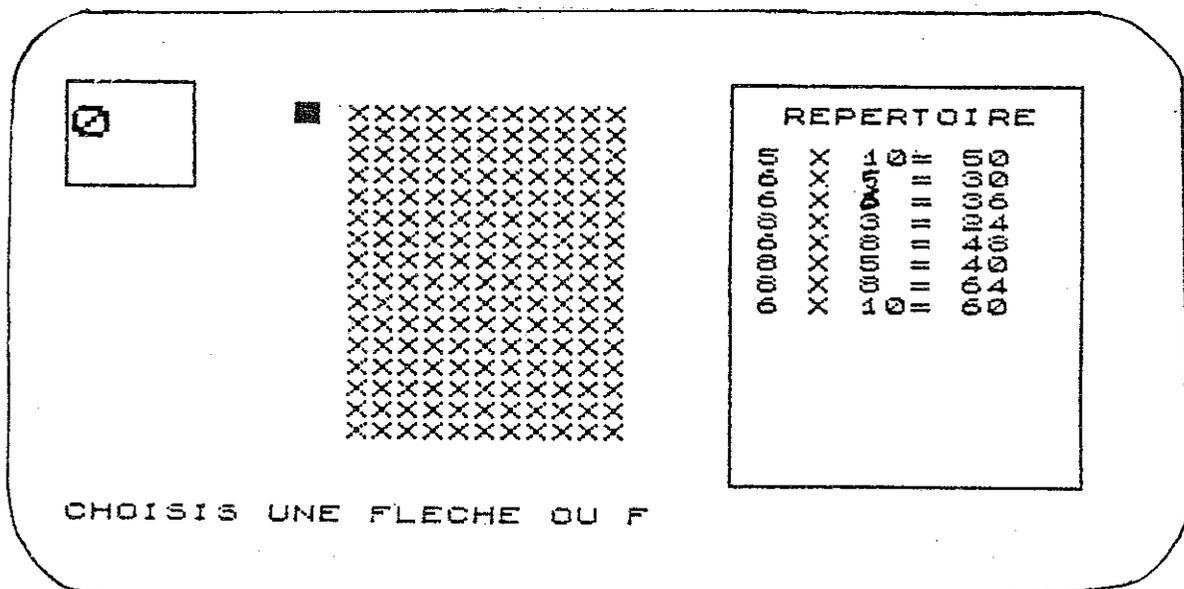
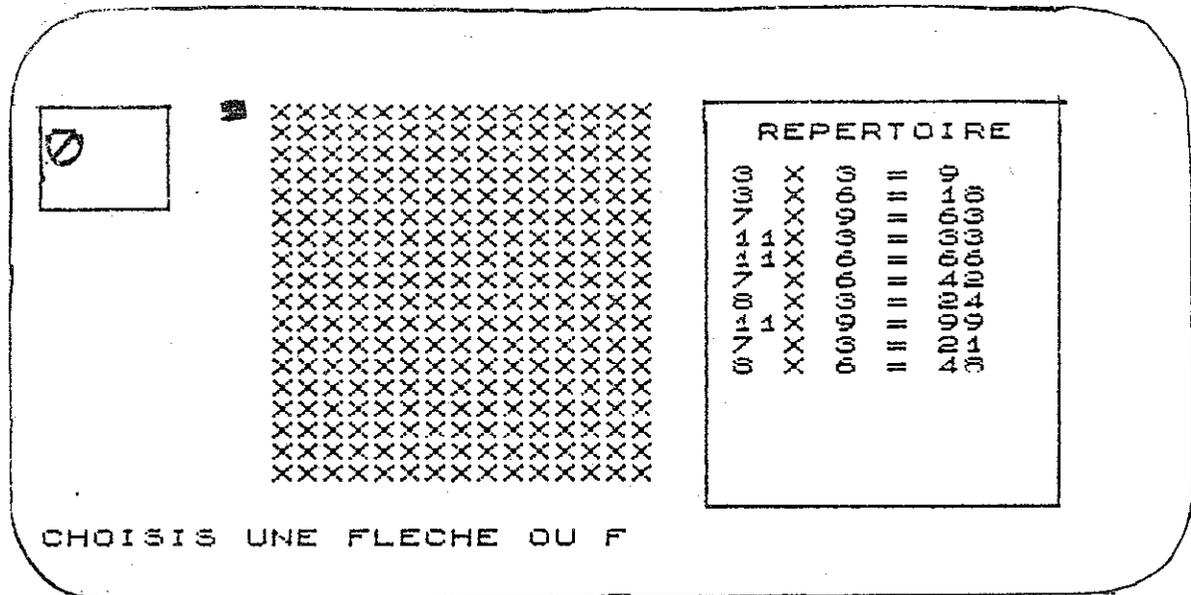
description

Il s'agit d'une situation problème dont le but est d'optimiser le découpage d'une grille rectangulaire du point de vue du nombre de découpages utilisés.

Le logiciel propose une grille de croix rouges et un répertoire de produits qui permet, lorsqu'il est bien utilisé, de faire un découpage de la grille en quatre rectangles.

Cinq grilles de croix sont proposées successivement ; elles ont pour dimensions : 15 X 18 , 11 X 16 , 17 X 17 , 14 X 14 , 16 X 11 .

Voici, par exemple, les pages-écrans du début de l'activité pour les grilles n°1 et 2



Cela permet ,par exemple pour la grille n°1, de faire les découpages correspondants aux calcul suivant :

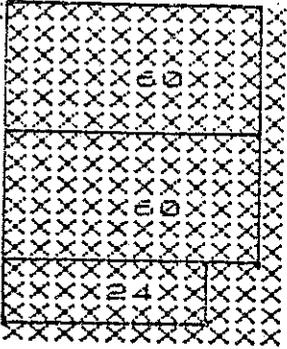
$$15 \times 18 = (9 + 6) \times (11 + 7) = (11 \times 9) + (11 \times 6) + (7 \times 9) + (7 \times 6)$$

(découpage en quatre coups)

$$15 \times 18 = (8 + 7) \times (6 + 6 + 6) \quad (\text{découpage en six coups}).$$

Lorsque l'élève répond non, sa réponse est contrôlée et il a alors la possibilité de compléter le répertoire. Les nombres proposés sont alors inscrits dans le répertoire ; rappelons que son score augmente de 2 points à chaque complétion.

6



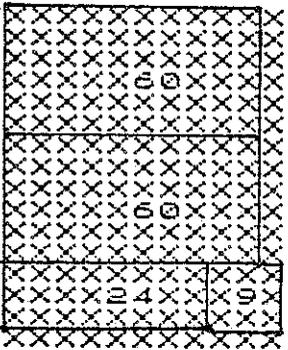
REPertoire

00000000	XXXX	40	0		00
XXXXXX	000000	0			0000
00000000	XXXXXX	000000			400040
XXXXXX	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400

TU AS RAISON

60 + 60 + 24

5



REPertoire

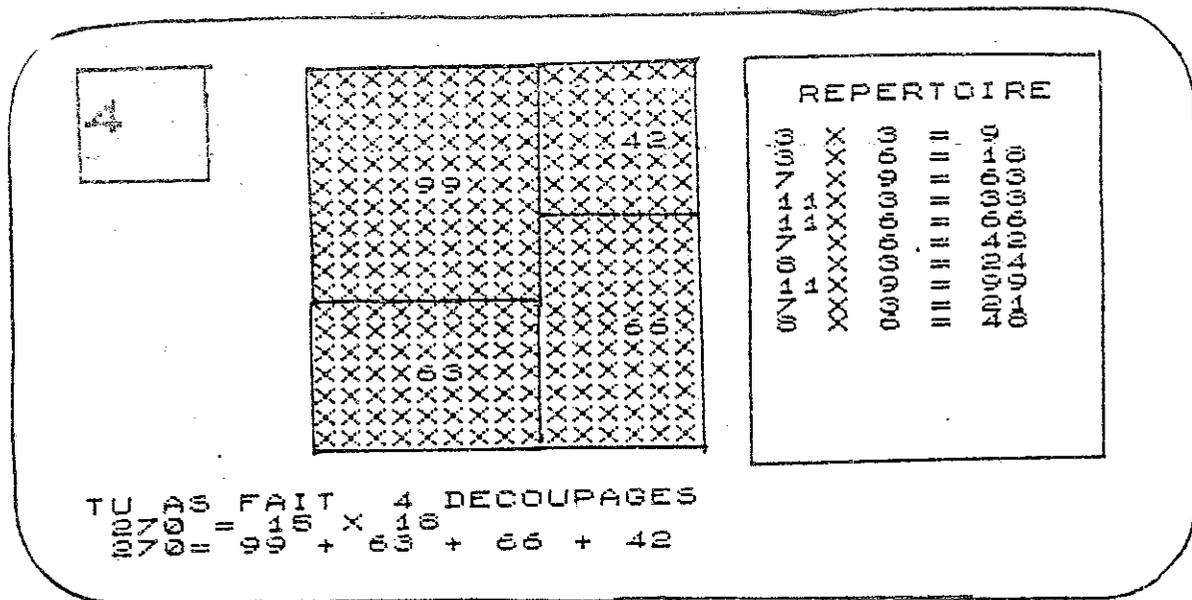
00000000	XX	40	0		00
XXXXXX	000000	0			0000
00000000	XXXXXX	000000			400040
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400
00000000	0				00400

VEUX-TU COMPLETER LE REPertoire?

60 + 60 + 24 + 9

La fin de chaque découpage est identique à celle du premier logiciel: les croix du rectangle découpé changent de couleur, le nombre de croix découpées est inscrit sur le rectangle, le nombre total de croix déjà découpées est écrit en bas de l'écran sous la forme d'une écriture additive.

Lorsque le découpage de la grille est achevé, le nombre de croix est donné sous la forme d'une écriture multiplicative, d'une écriture additive, d'un nombre. On rappelle le score obtenu.



Le contrôle informatique de l'activité de l'élève

Le logiciel contrôle le choix du sommet du rectangle

-ER2 -erreur de manipulation: lors du déplacement du carré jaune, l'élève a tapé sur autre chose qu'une flèche.

-ER5 -il a choisi pour sommet une croix déjà découpée.

-ER4 -il propose un sommet qui n'est pas situé sur la grille

Le logiciel contrôle les 2 flèches et les deux nombres:

-ER9 -Il y a quatre paires de flèches possibles ; si une autre proposition est faite, la deuxième flèche n'est pas acceptée.

-ER1 -lors du choix d'un nombre, l'élève propose un caractère qui n'est pas un chiffre .

Le logiciel contrôle que le répertoire est utilisé au maximum. A la question "PEUX-TU UTILISER LE REPERTOIRE?", si l'élève répond oui le contrôle sera fait pour le choix des dimensions du rectangle qui doivent figurer dans le répertoire. Si l'élève répond non, sa réponse est vérifiée. Si elle s'avère fautive, l'erreur n°3 (ER3) est enregistrée et le message d'erreur "TU T'ES TROMPE, REGARDE BIEN" apparaît .

Le logiciel contrôle que le rectangle proposé convient bien.

-ER6 -Les nombres choisis ne sont pas dans le répertoire.

-ER7 -On ne peut pas découper ce rectangle, il sort de la grille

-ER8 -Le rectangle proposé est non disjoint d'un autre déjà découpé.