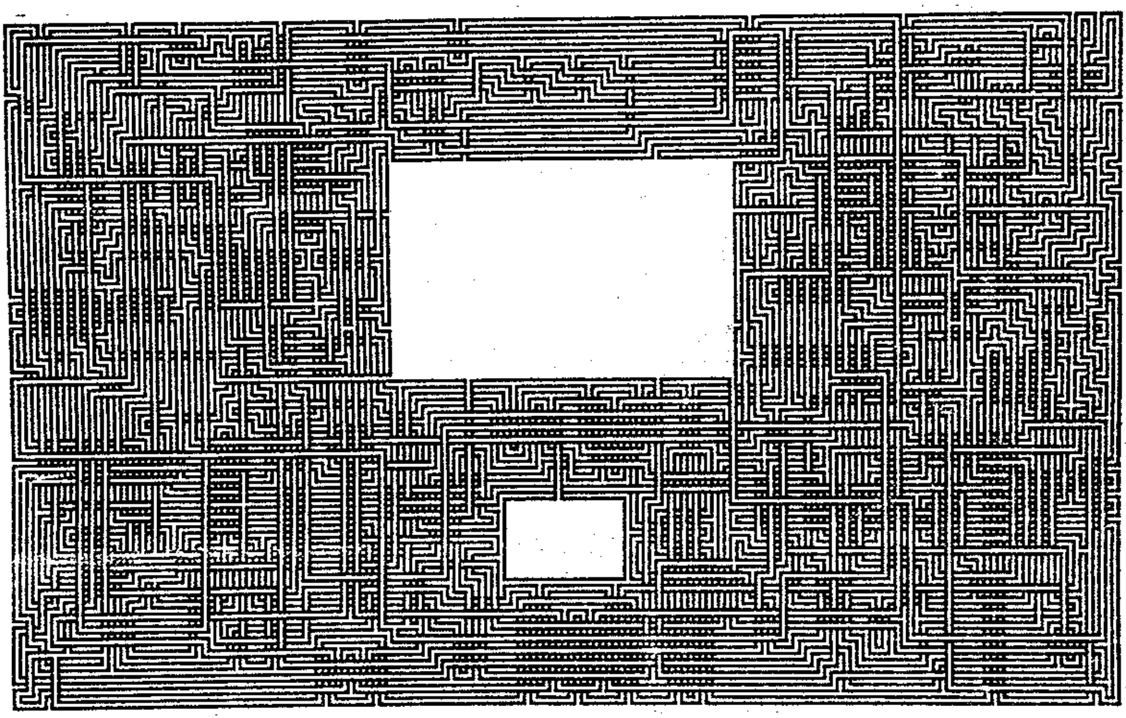
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII

7
Réédition
02/85

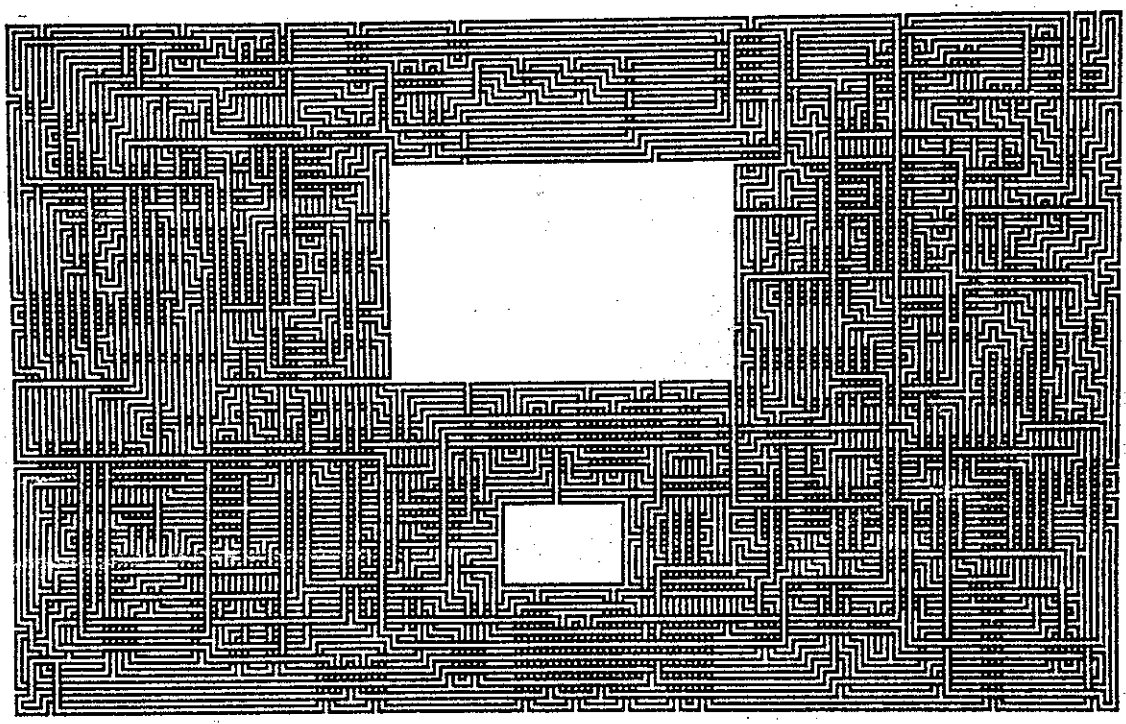
PAVAGES & COLORIAGES



Par Marie-Pierre COLLONGE et Françoise TREHARD

NIVEAU	4ème / 3ème
PUBLIC	Elèves
SUJET	. Isométries . Dessins à motifs répétitifs
OBJECTIF	Voir et manipuler

PAVAGES & COLORIAGES



Par Marie-Pierre COLLONGE et Françoise TREHARD

S O M M A I R E

Ce travail a été réalisé avec la collaboration de

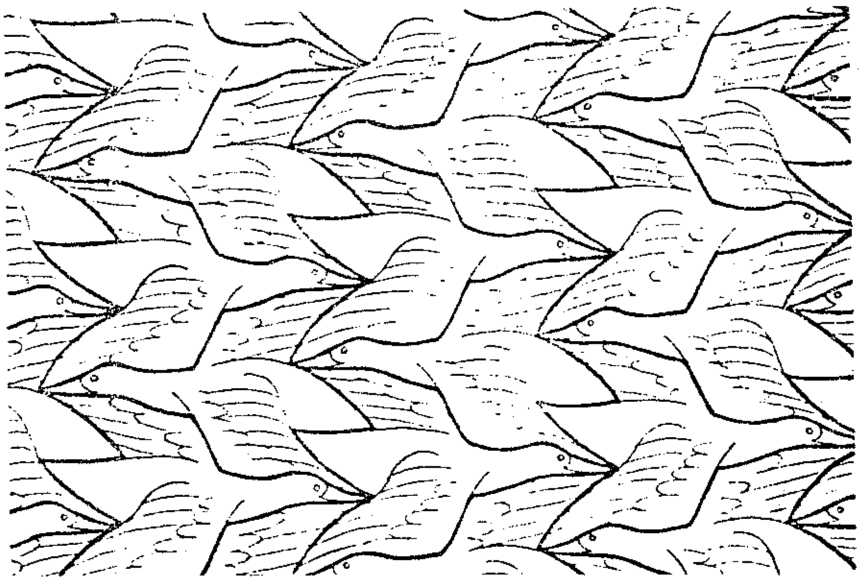
A. DELEDICQ

Le dessin de couverture est extrait de
" 1000 Casse-tête du monde entier " de Pieter van DELFT
et Jack BOTERMANS
(Ed. du Chêne)

D E S S I N S

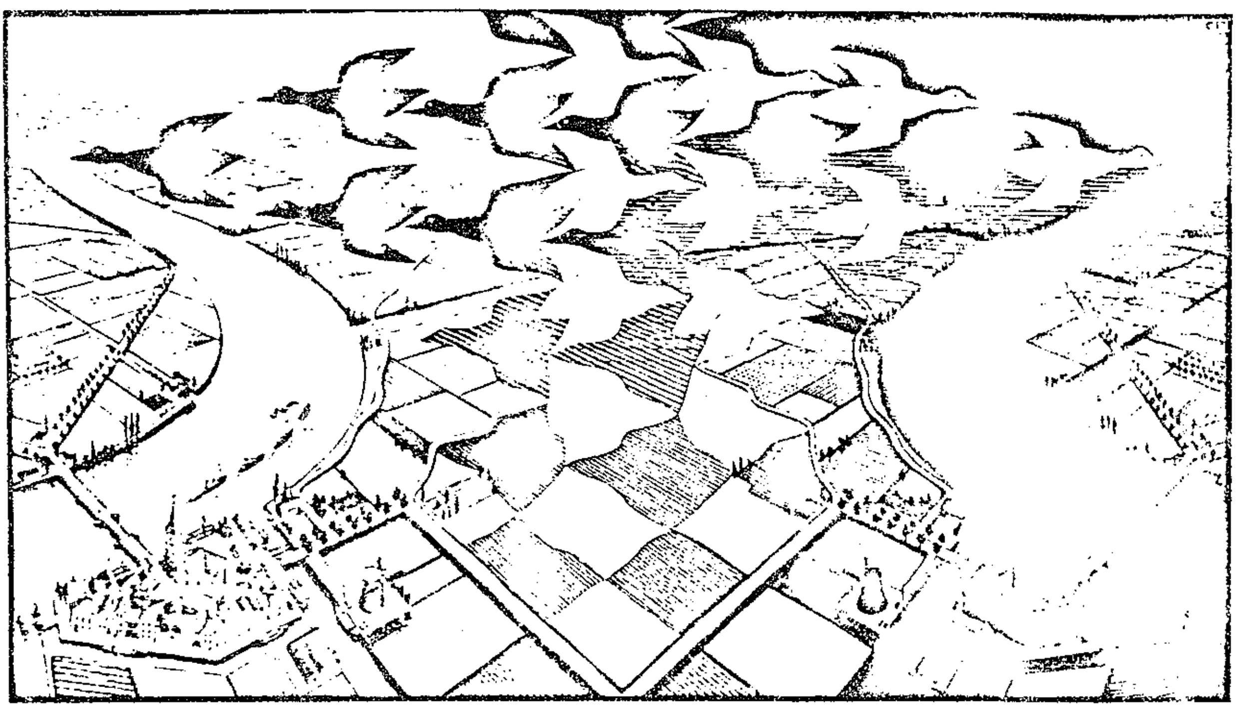
On s'interesse aux dessins à motifs répétitifs, c'est-à-dire aux dessins que l'on peut obtenir en répétant un motif initial dans deux directions (en " utilisant " les composées de deux translations et de leurs réciproques).

Par exemple, ce dessin fait partie de notre sujet :



Dessin de M.C. ESCHER

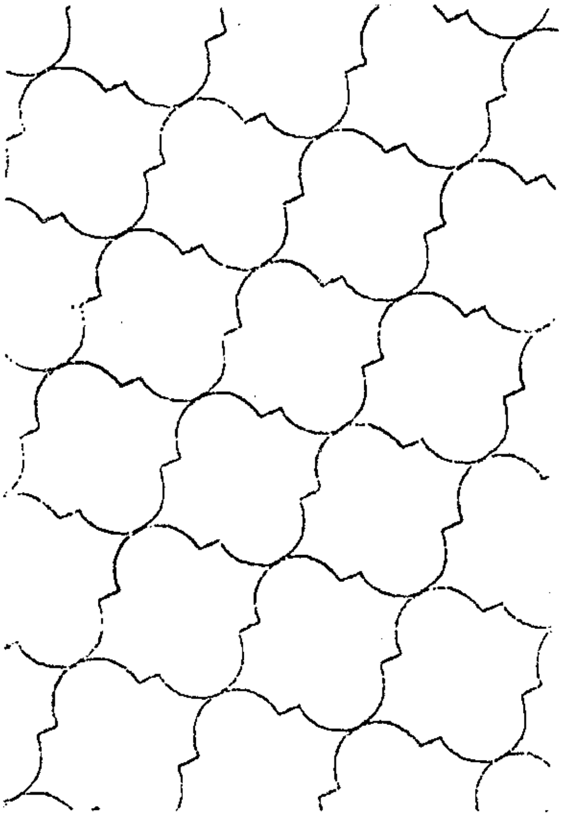
Contrairement à celui-ci, bien qu'il présente certaines régularités dans sa construction :

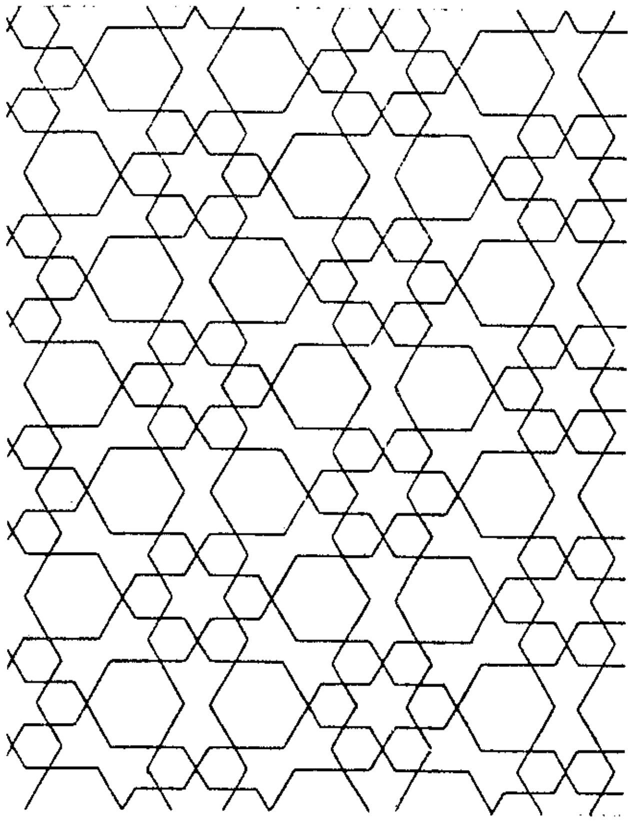


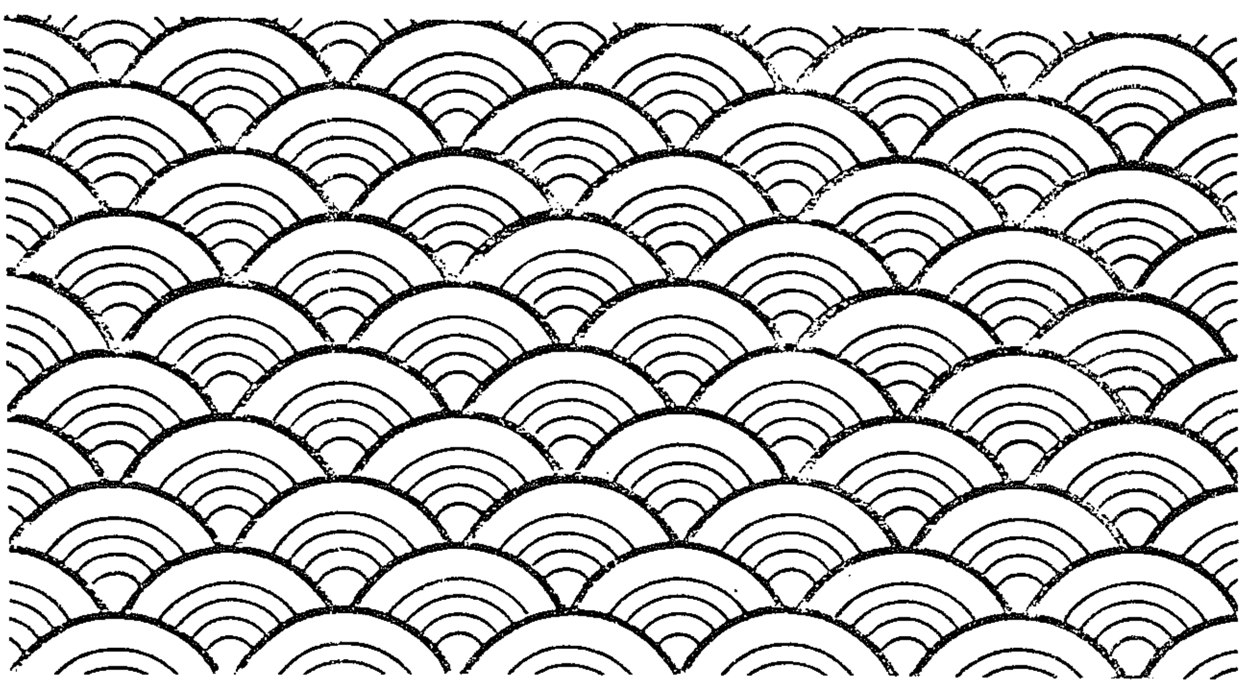
Dessin de M.C. ESCHER

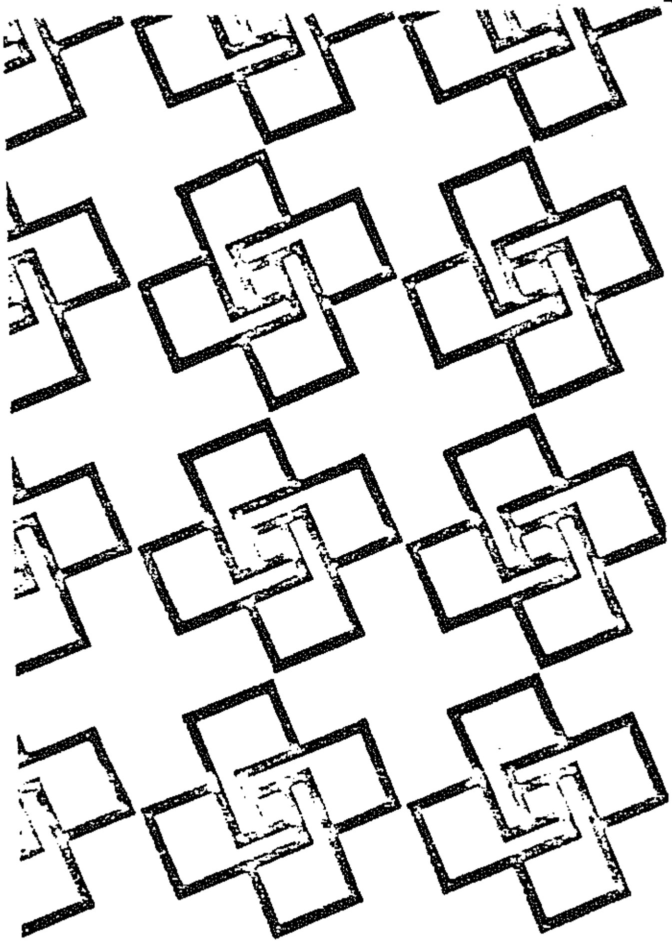
Parmi les dessins à motif répétitif qui suivent, vous trouverez :

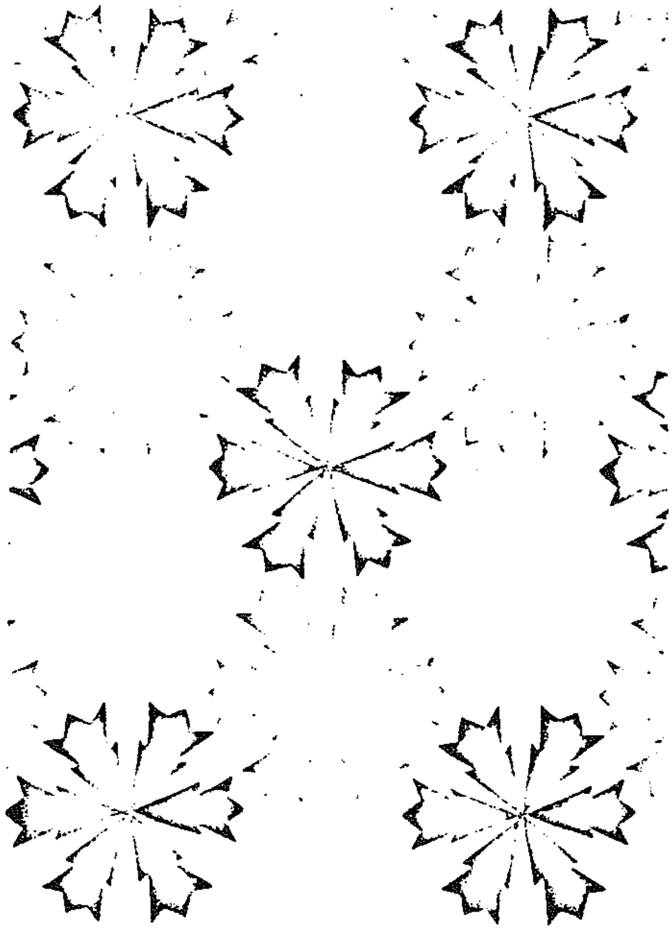
- <u>des pavages</u> (pensez à certains revêtements de cuisine, carrelages, sols de rue piétonnières, etc...)
- <u>des dessins</u> (du type papier peint, papier cadeau, etc...)

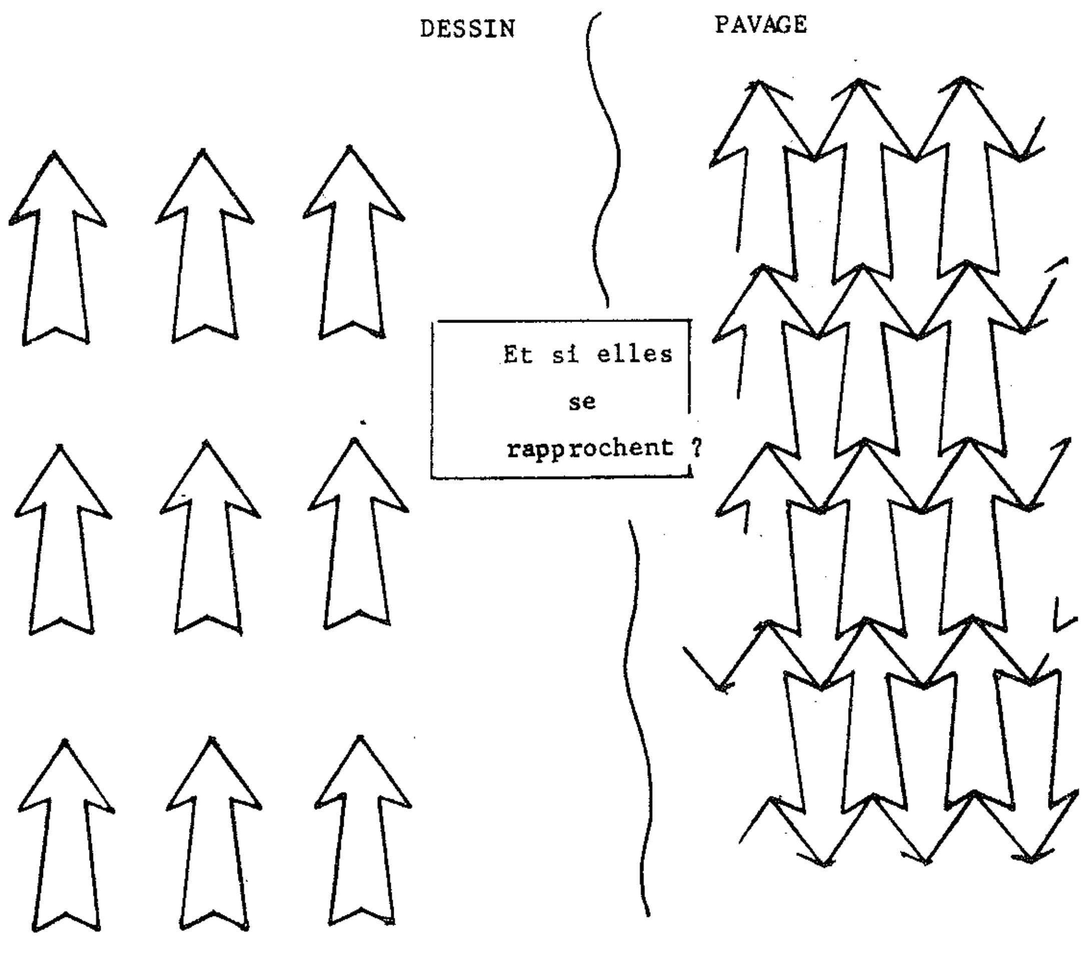




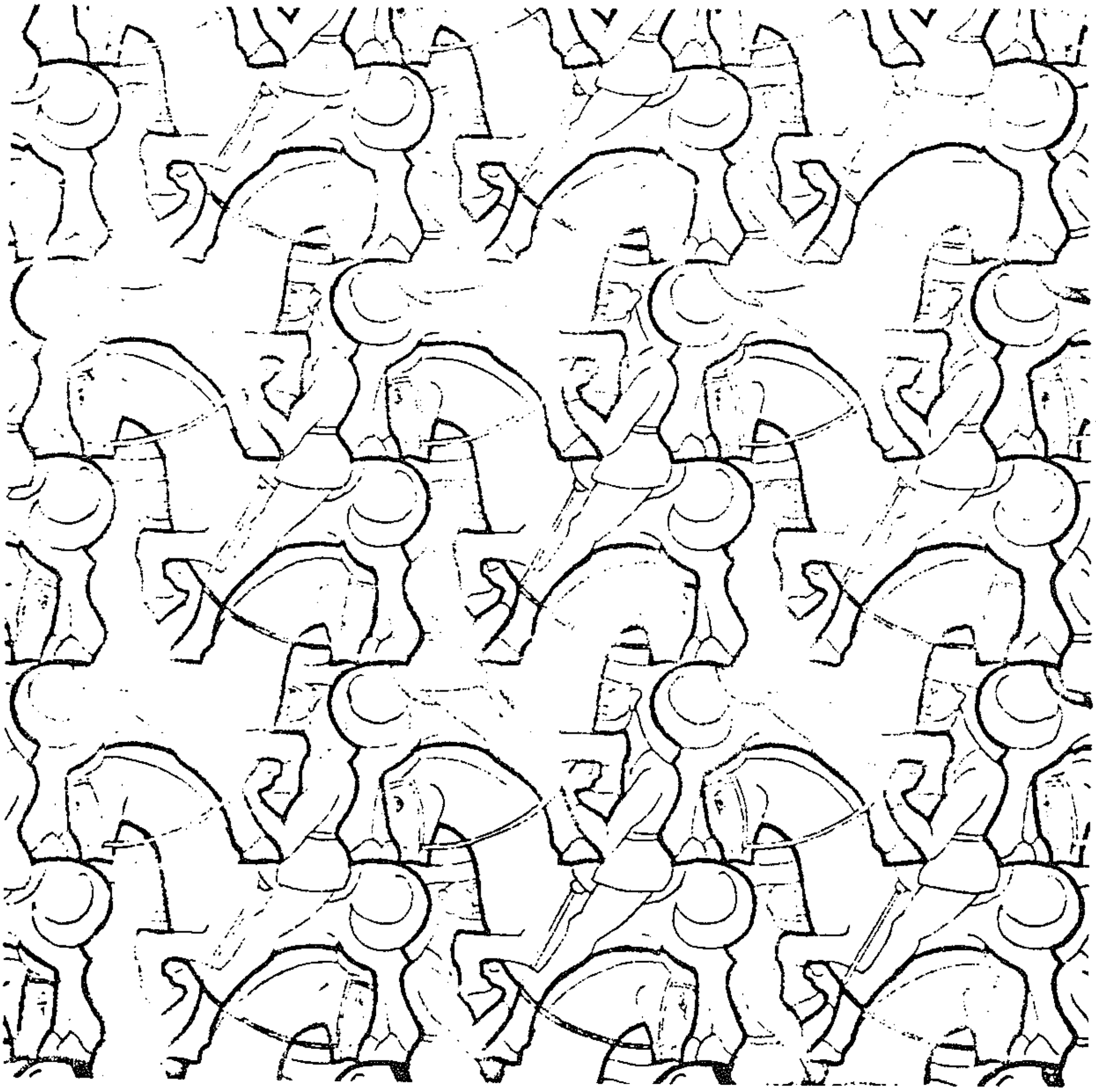


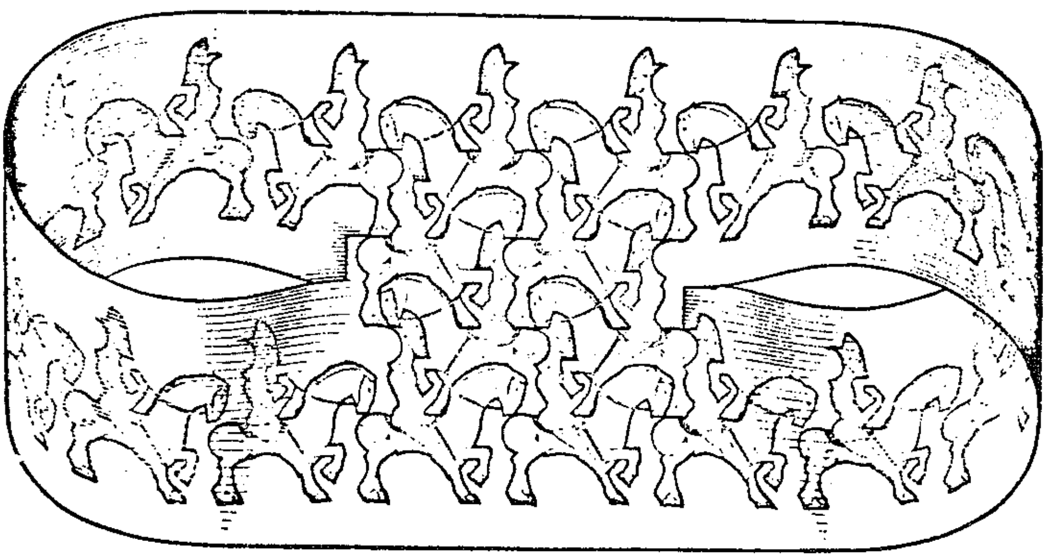


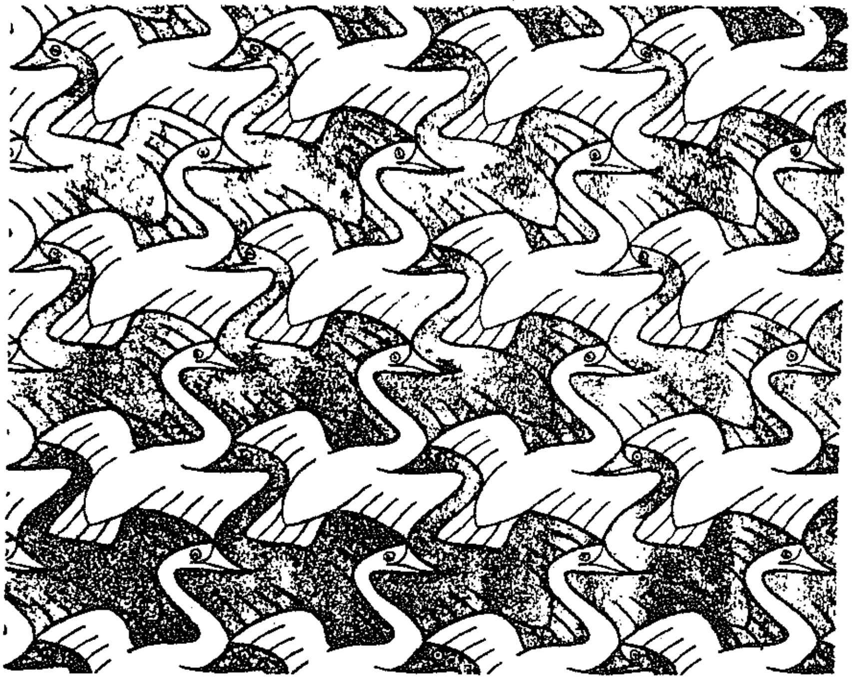


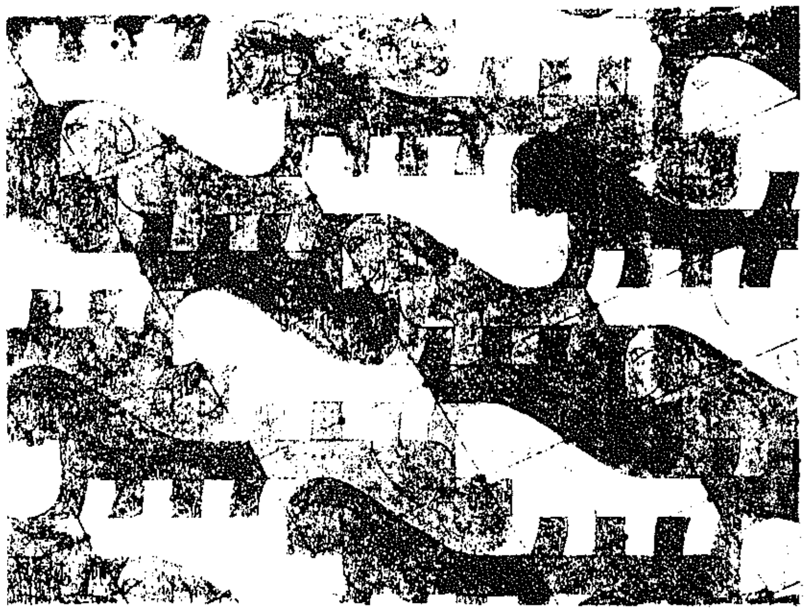


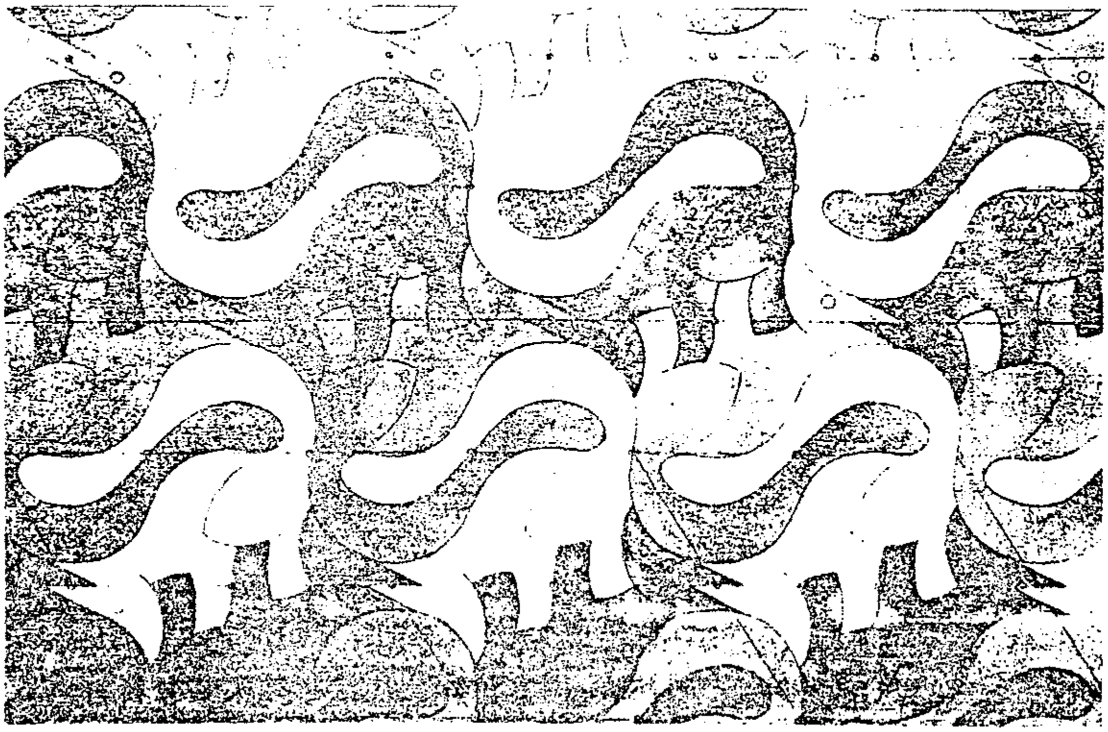
(A propos, sauriez-vous dessiner une flèche ou un autre motif qui fournisse un résultat analogue ?)

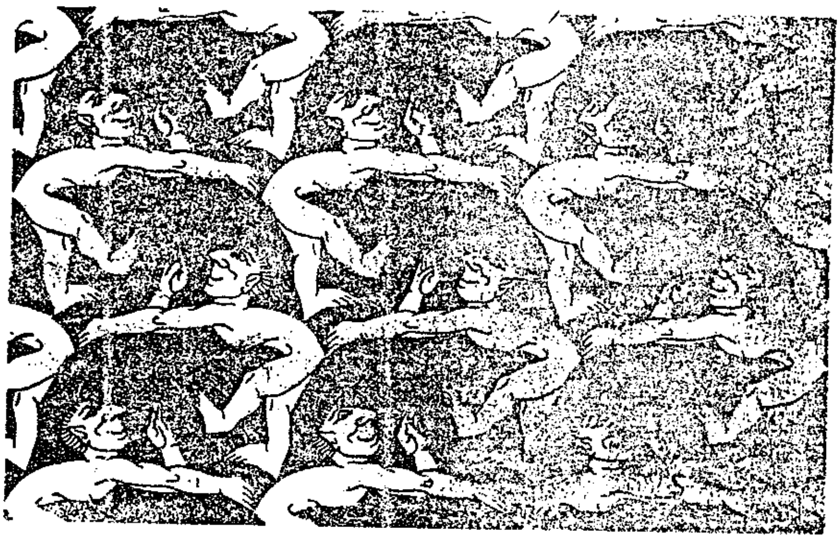


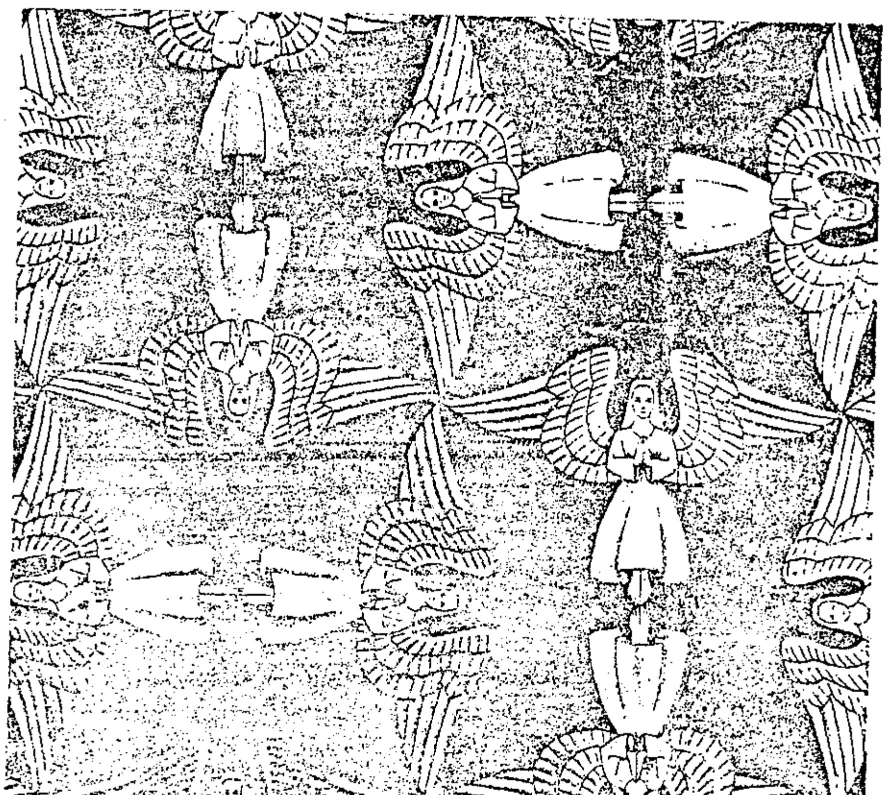


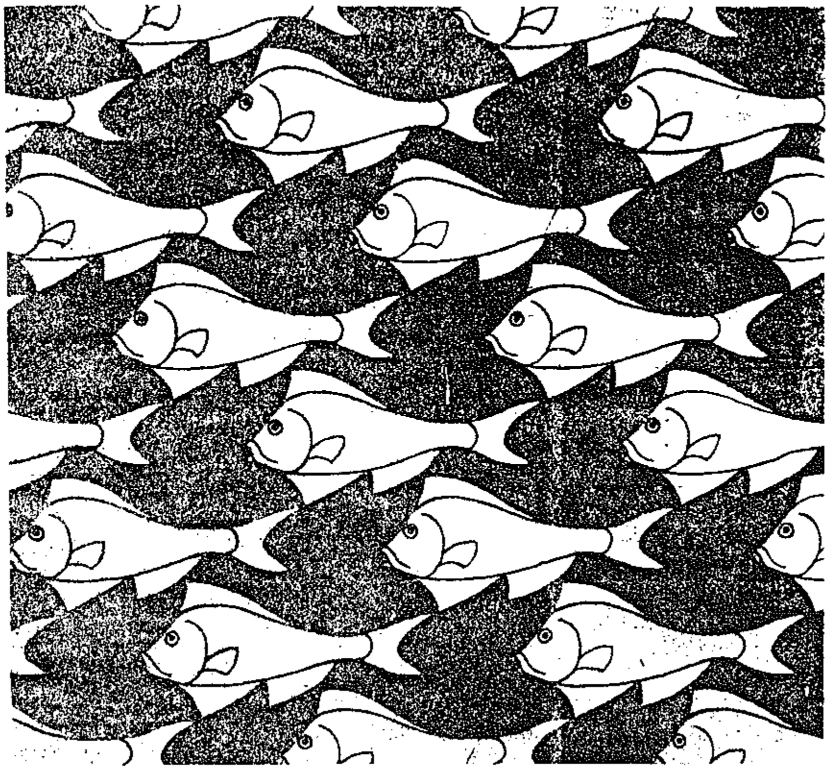




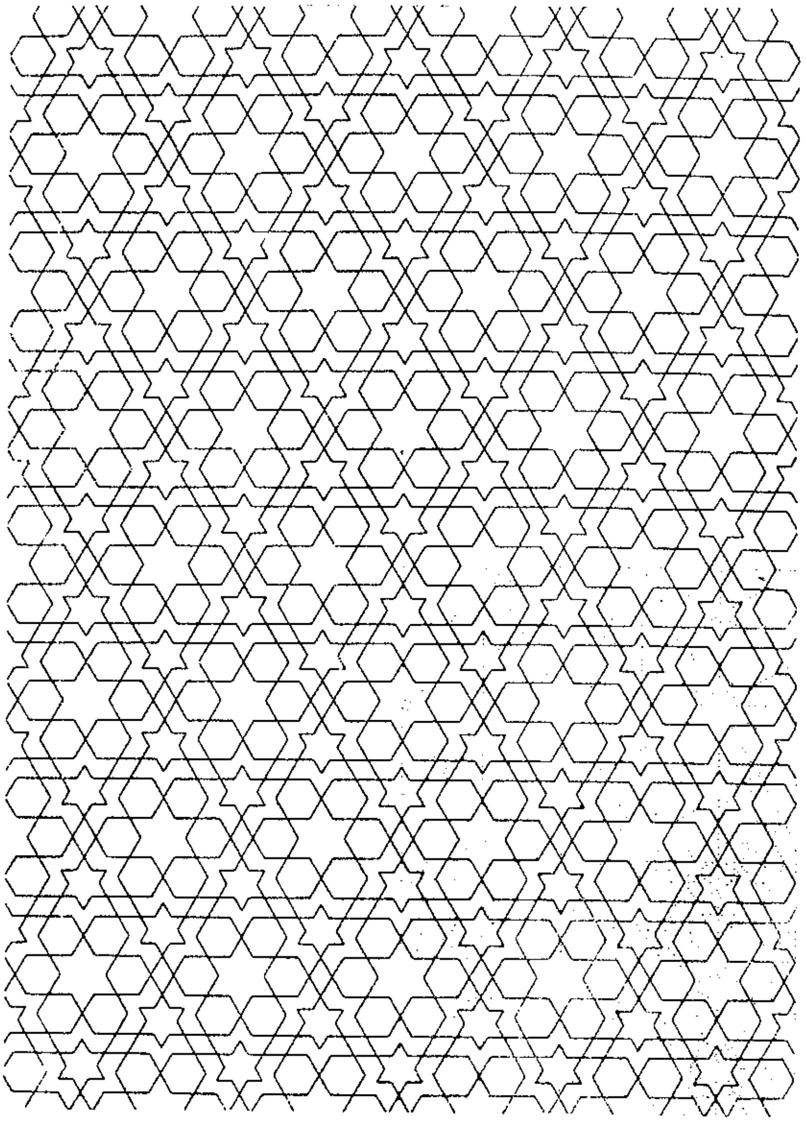


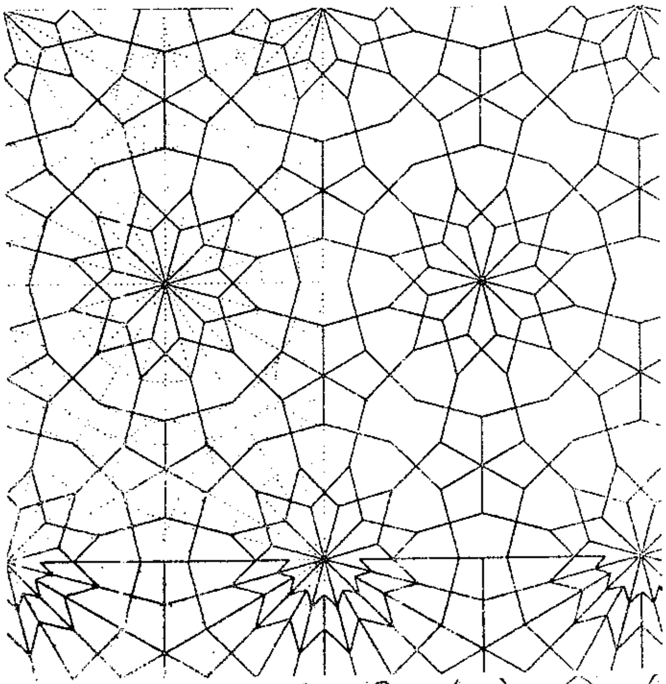


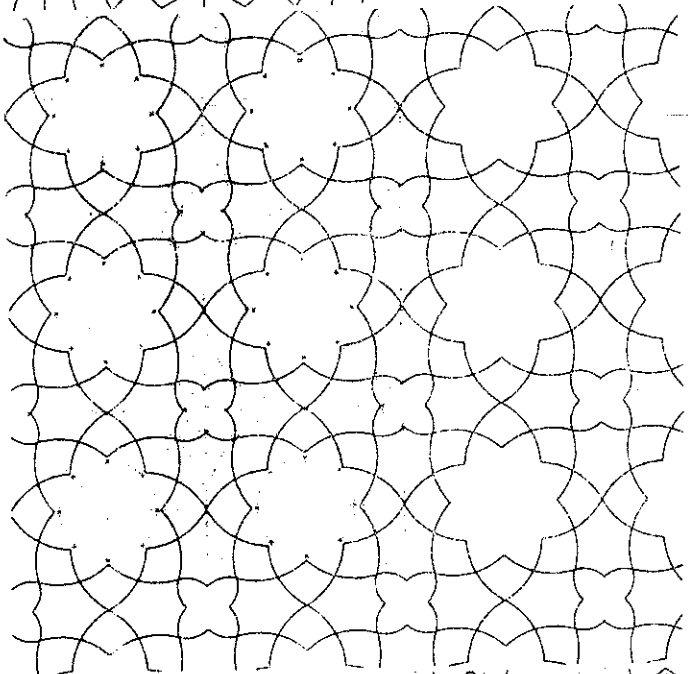


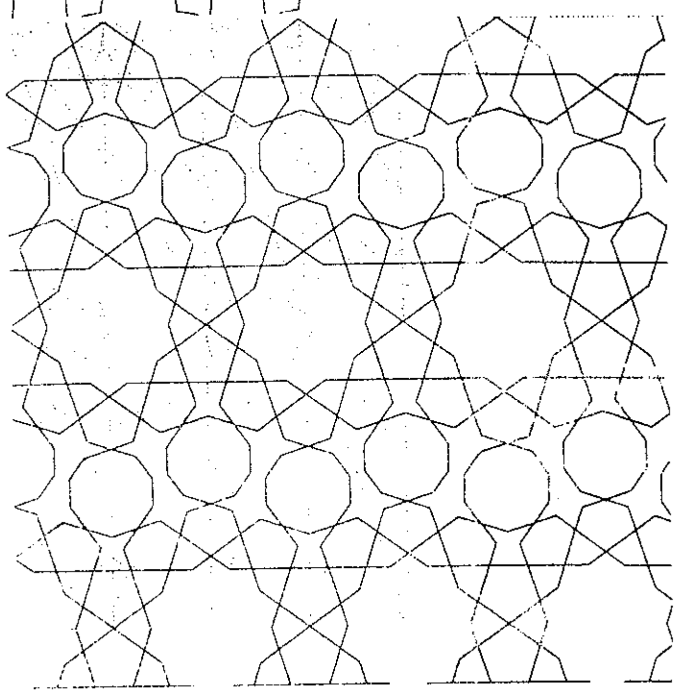


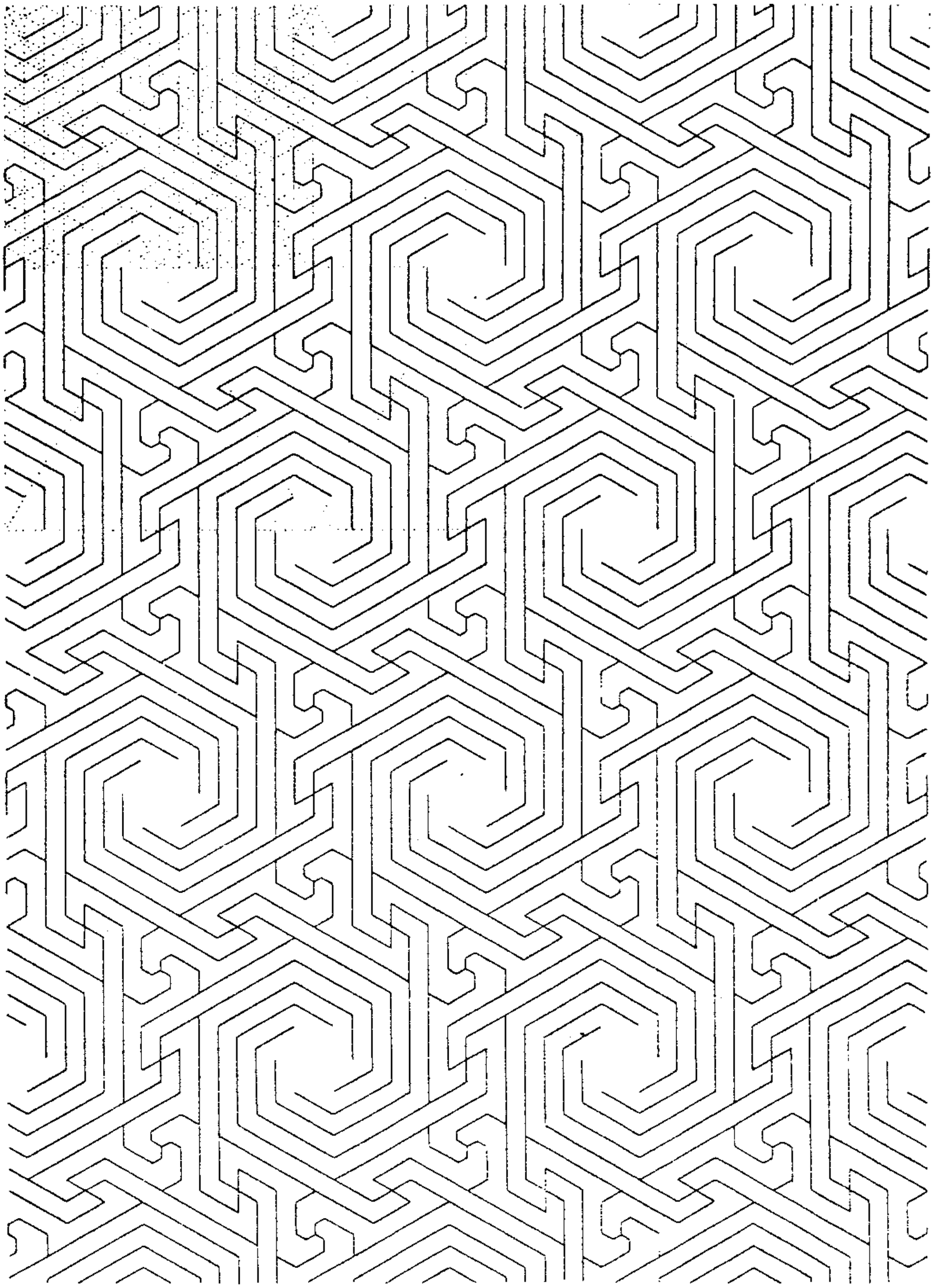
Dessin de M. ESCHER











Les dessins des pages 5 à 7 sont des oeuvres du graveur néerlandais M.C. ESCHER (1898/1972).

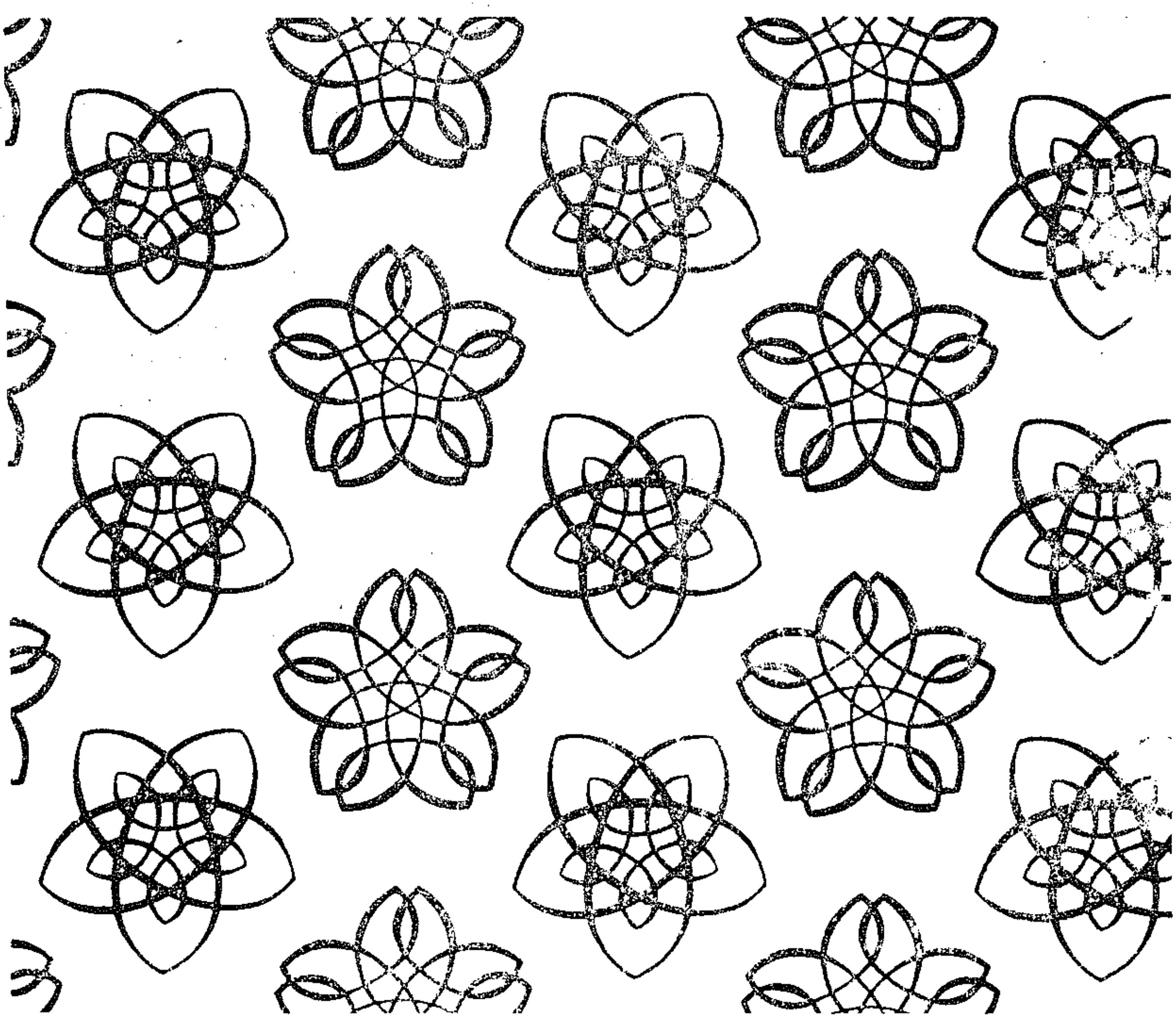
Il produisit en outre de nombreuses constructions spaciales imaginaires, possibles sur papier mais non dans notre espace quotidien.

Bibliographie : - " Le monde de M.C. ESCHER " (Ed. du Chêne)
- " L'oeuvre graphique de M.C. ESCHER (Ed. Solin)

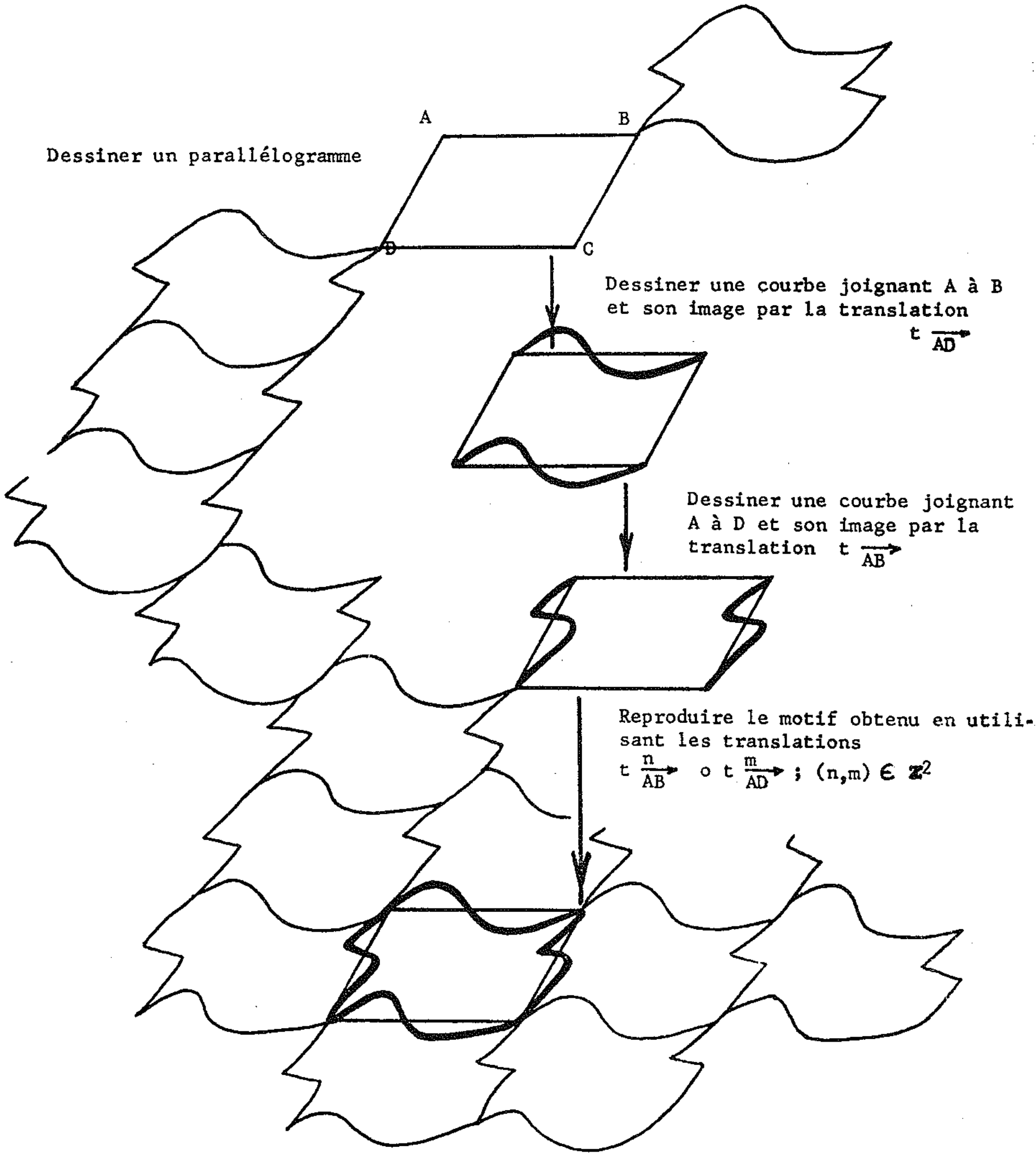
Les dessins des pages 8 à 10 reproduisent des mosaîques du Palais de l'Alhambra de Grenade (Espagne) construit au XII° siécle, et/ou d'autres monuments de la civilisation arabe.

Les musulmans n'étant pas autorisés à représenter la figure humaine ou animale, firent des décorations utilisant des formes géométriques. On a pu constater au Palais de l'Alhambra la présence de pavages des 17 types (voir pages 23 - 25).

Vous trouverez dans les pages qui suivent quelques idées et techniques pour faire vous-mêmes des dessins à motif répétitif.



TECHNIQUE N° 1 : UN PARALLELOGRAMME DEFORME

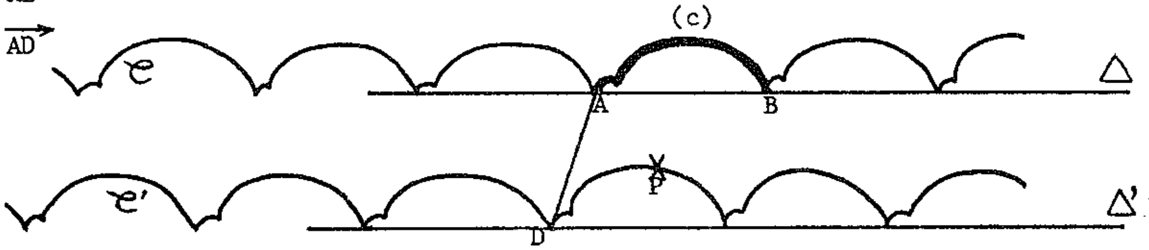


TECHNIQUE N° 2 : FAIRE DES " BANDES "

Attention aux éventuelles intersections de courbes !

Dessiner deux droites parallèles Δ et Δ' ; choisir deux points A et B et les joindre par une courbe (c) ;

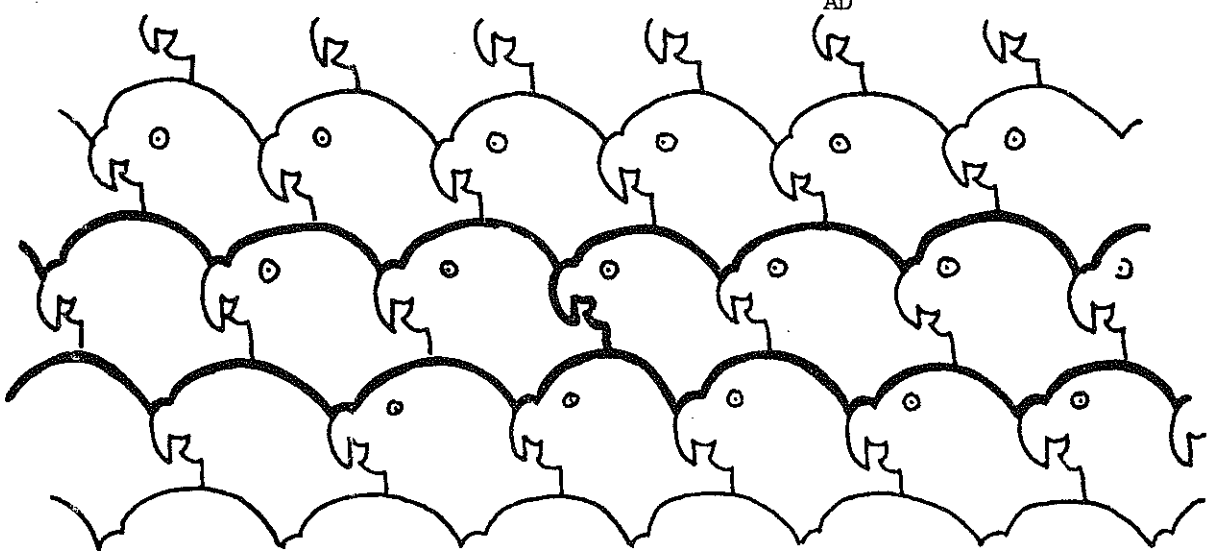
Dessiner la courbe $\mathcal{C}$ obtenue en reproduisant (c) par les translations $t^n_{\overrightarrow{AB}}$ $(n \in \mathbb{Z})$; choisir un point D de Δ' et dessiner l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par $t_{\overrightarrow{AD}}$



Choisir un point P de $\mathcal{C}'$;

Dessiner une courbe joignant A à P et la reproduire en utilisant les translations $t^n_{\overrightarrow{AB}}$ $(n \in \mathbb{Z})$

Reproduire en utilisant les translations $t^n_{\overrightarrow{AD}}$ $(n \in \mathbb{Z})$



Ce pavage ne vous semble-t-il pas à pavés " décalés " ? Où choisir P pour qu'il n'en soit pas ainsi ?

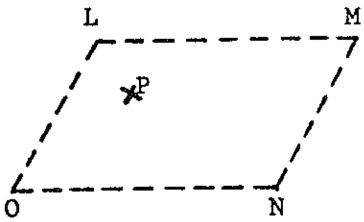
Pouvez-vous construire le pavage présenté à propos de la technique N°1 en utilisant cette technique ?

Recherchez la technique N°3 sur ce pavage.

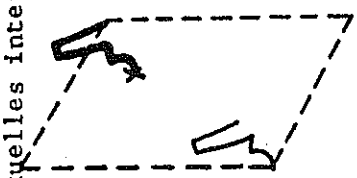
TECHNIQUE N° 3 : POINTER DANS UN PARALLELOGRAMME

Attention aux éventuelles intersections de courbes !

Dessiner un parallélogramme et choisir un point P

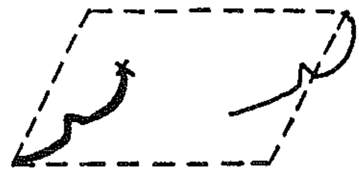


Peut-on choisir P extérieur au parallélogramme ?



Dessiner une courbe L à P et son image par la translation $t_{\overrightarrow{PN}}$

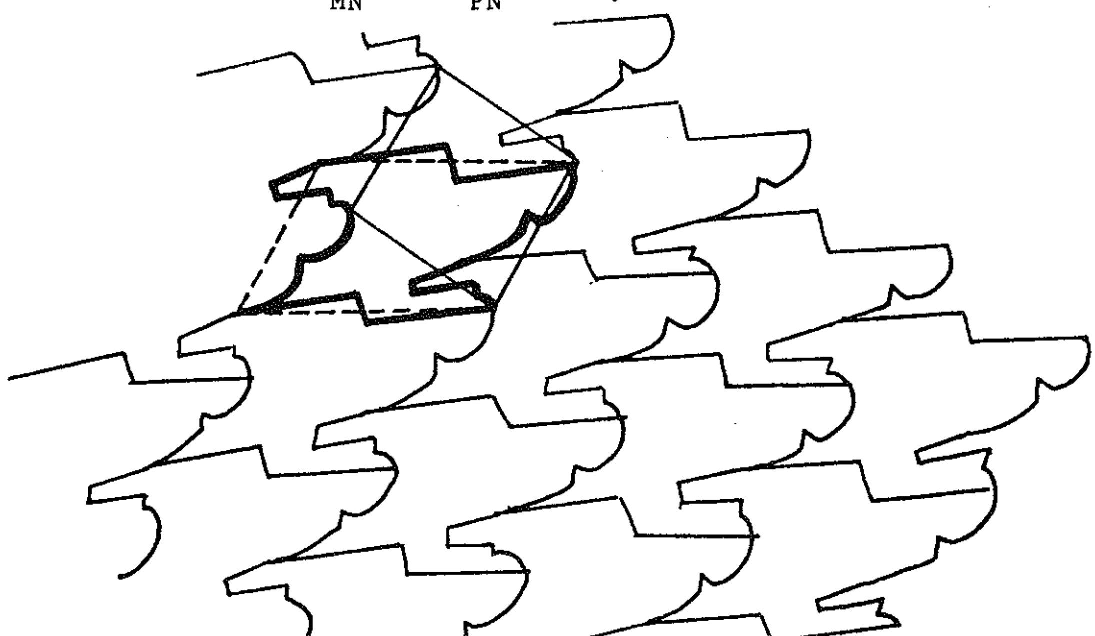
Dessiner une courbe O à P et son image par la translation $t_{\overrightarrow{PM}}$



Dessiner une courbe joignant L à M et son image par la translation $t_{\overrightarrow{MN}}$

Reproduire le motif obtenu en utilisant les translations :

$$t^{n}_{\overrightarrow{MN}} \circ t^{m}_{\overrightarrow{PN}} \quad ; (n,m) \in \mathbb{Z}$$



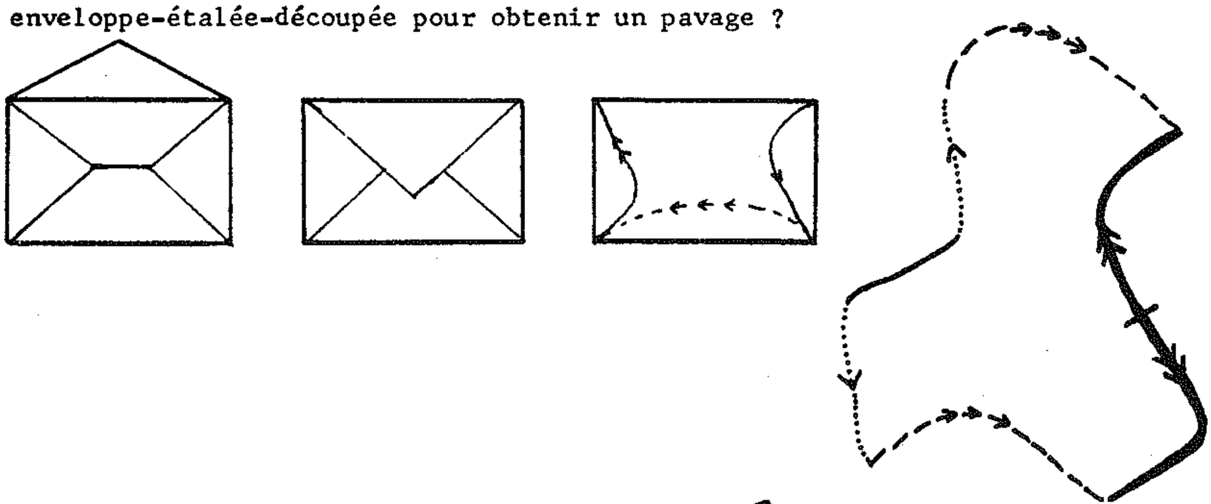
Où choisir P pour que les pavés ne soient pas " décalés " ?

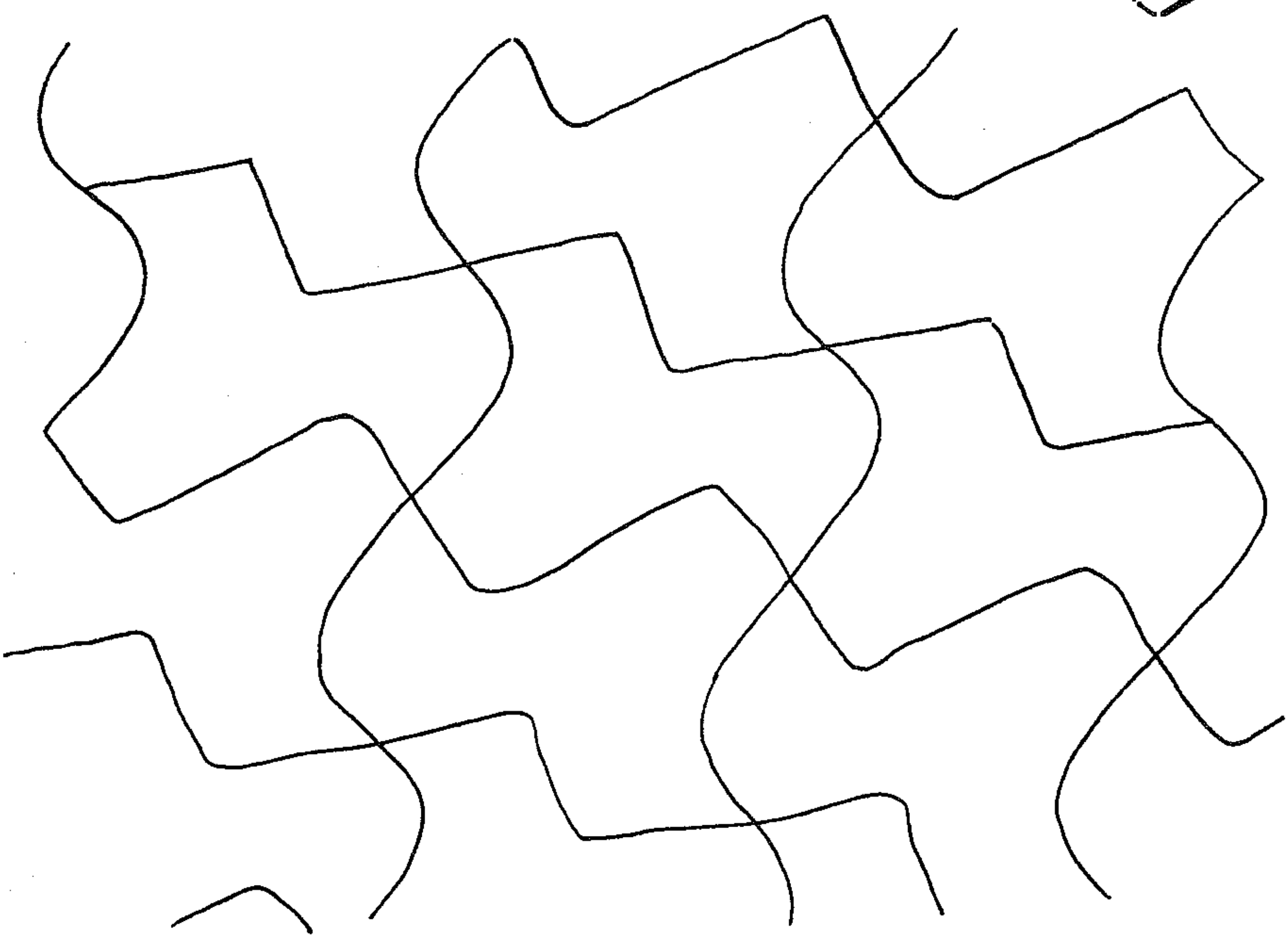
Retrouvez la technique N° 2 sur ce pavage.

TECHNIQUE N° 4 : DECOUPER UNE ENVELOPPE

Prenez une enveloppe ordinaire pour le courrier ; cachetez-la ; avec des ciseaux, découpez-la de façon à la mettre à plat, ceci en faisant bien attention à obtenir un morceau d'un seul tenant (à quels endroits de l'enveloppe les ciseaux doivent-ils nécessairement passer ???)

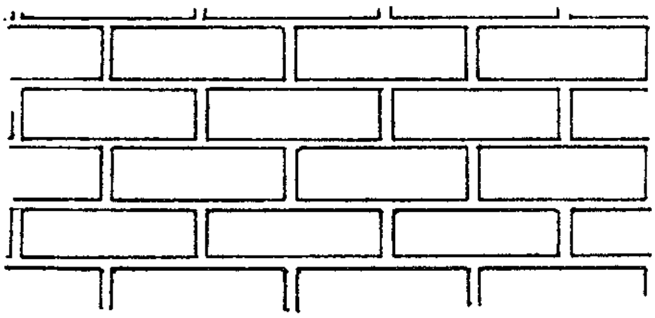
Dessinez le contour du motif ainsi obtenu ; comment déplacerez-vous votre enveloppe-étalée-découpée pour obtenir un pavage ?

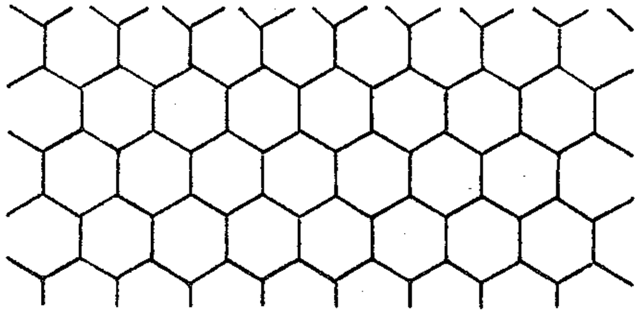


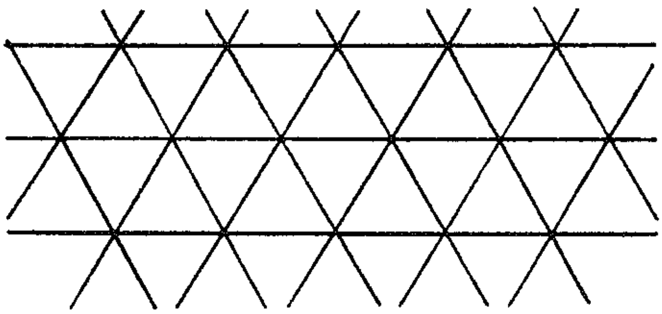


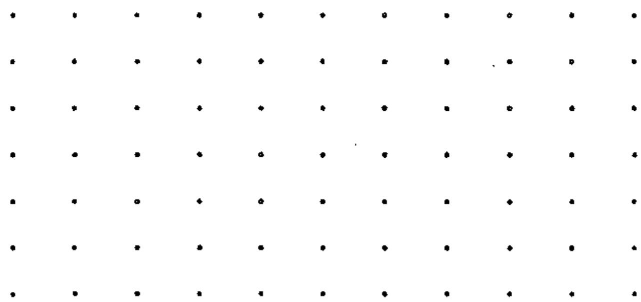
TECHNIQUE N° 5 : UTILISER UN RESEAU

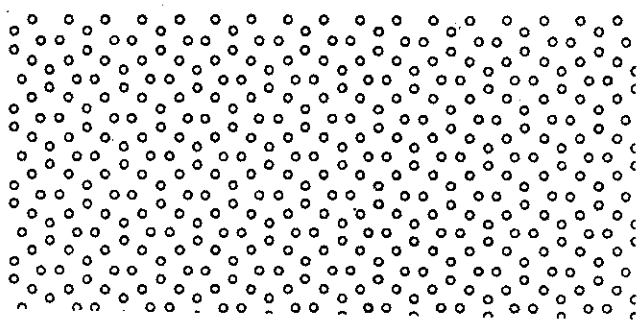
Si vous disposez déjà d'un pavage ou d'un réseau de points comme par exemple ceux présentés ci-dessous :











Vous pouvez joindre certains points ou colorier pour faire apparaître différents pavages

Ainsi, pourriez-vous utiliser N°6 pour montrer :

- un pavage constitué d'hexagones non réguliers
- un pavage constitué d'octogones non convexes
- un pavage constitué de pentagones (peuvent-ils être réguliers ?? !!)
- un pavage constitué de trapèzes isocèles

•••••••••••

•••••••••••

Vous trouverez à la fin de ce facicule des planches de réseaux (ultérieurement disponibles à l'I.R.E.M.)

INTERMEDE SUR LES ISOMETRIES

Par A. DELEDICQ

Pour bien comprendre ce qui suit, il te faut absolument du <u>papier calque</u>.

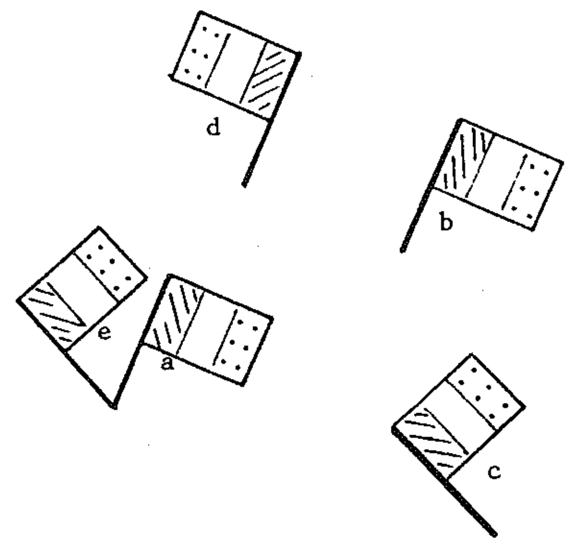
Figures " superposables "

Regarde les cinq figures a,b,c,d,e dessinées en marge.
En mathématiques, on ne dit pas que ces cinq figures sont " égales " : si elles étaient vraiment " égales " tu n'en verrais qu'une !

Dans le langage courant, on peut dire qu'elles sont <u>superposables</u>.

Comment vérifier <u>pratiquement</u>, par exemple que a et c sont superposables ?

- On pose un calque sur la feuille où sont dessinés a et c ;
- on décalque a sur le calque : on obtient le dessin $\bar{a}$
- Si en déplaçant le calque, on arrive à placer **a** de sorte qu'il soit un calque de c, alors a et c sont bien superposables.



Si la figure " calquée-déplacée-excalquée " de a est la figure c, alors a et c sont dits superposables.

Cela parait très simple, mais tu as intérêt à faire les manipulations avec un calque ; tu peux le déplacer n'importe comment mais nous t'invitons à réfléchir ceci :

Tu peux toujours t'arranger pour ne déplacer ton calque que de trois manières différentes :

<u>Première manière</u> : fixer un point du calque (comme avec une punaise) et faire pivoter le calque autour de ce point.
Tu " réalises " ainsi une <u>rotation</u>.

<u>Exemple</u> : on passe de <u>a</u> à <u>e</u> par une rotation

<u>Deuxième manière</u> : pousser le calque dans une direction (comme si il glissait le long d'une règle), chaque point du calque décrivant une droite.
Tu " réalise " ainsi une <u>translation</u>

<u>Exemple</u> : on passe de <u>a</u> à <u>b</u> par une translation

<u>Troisième manière</u> : retourner le calque (comme si tu pliais une " moitié " du calque le long d'un fil, l'autre " moitié "

devrait alors traverser la table ; ce qui t'oblige, en fait à soulever le calque), tous les points d'une certaine droite du calque ne se déplaçant pas.
Tu " réalises " ainsi une symétrie (axiale).

Avec ces trois types de déplacements : PIVOTER, GLISSER, RETOURNER, tu peux toujours amener une figure sur une autre qu'on prétend " superposable " . On est parfois obligé de faire successivement un tel déplacement, puis un autre, mais on peut toujours décomposer le déplacement nécessaire en succession de rotation-translation et symétrie :

- la rotation permet de faire coïncider les directions ;
- la translation permet de faire coïncider deux points particuliers.

La rotation et la translation sont réalisées par des déplacements que l'on appelle " directes " , c'est-à-dire des déplacements qui n'obligent pas à retourner le calque.

Une symétrie peut être nécessaire pour échanger la gauche et la droite
(Cette histoire de gauche et de droite peut paraitre embêtante, mais notre monde est ainsi fait : regarde sur un dictionnaire les mots : dextre, senestre, énantiomorphe, latéralité, orientation)

Figures isométriques

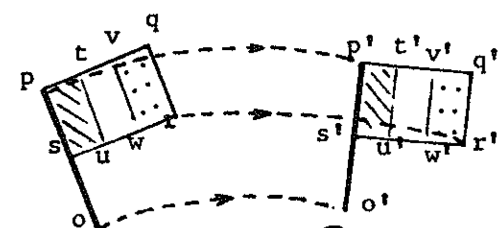
Les déplacements du calque " réalisent " dans la pratique certaines transformations du plan.
Il y a des transformations du plan qui changent la forme ou la dimension des figures ; mais si une transformation correspond, dans la pratique, à un déplacement d'un calque, les figures conservent leur forme et leur dimension.

C'est dû au fait que, dans le déplacement du calque, deux points du calque restent toujours à la même distance l'un de l'autre (il n'y a ni déchirure ni froissage !). Il est commode et satisfaisant de penser que les déplacements du calque correspondent exactement aux transformations du plan qui conservent les distances

Exemple : on passe de b à d par une symétrie.

Exemple : on passe de a à c par une rotation (qui amène a sur e) suivi d'une translation (qui amène e sur c).

Exemple : on passe de a à d par une translation (qui amène a sur b) suivi d'une symétrie (qui amène b sur d).



t : $\widehat{S} \longmapsto \widehat{S}$
oD ⟶ o'
TM ⟶ T'

Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$

VOICI QUELQUES RESULTATS MATHEMATIQUES :

Définition : Les transformations d'un plan $\mathcal{P}$ qui conservent les distances sont appelées : " isométries de $\mathcal{P}$ "

Les translations sont des isométries de $\mathcal{P}$.

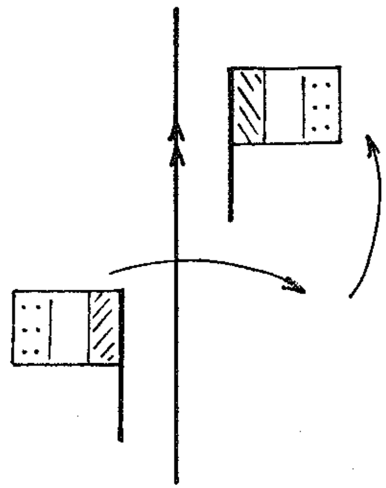
Définition : Les isométries de $\mathcal{P}$ qui laissent un unique point invariant sont appelées " rotations de $\mathcal{P}$ "

Remarque : Une symétrie centrale de centre O est une rotation d'un demi-tour autour de O.

Définition : Les rotations et les translations de constituent l'ensemble des isométries directes de $\mathcal{P}$.
Les autres isométries de $\mathcal{P}$ sont dites indirectes.

Théorème : Les isométries indirectes autre que les symétries orthogonales existent.
Certains les appellent des " vissages " ou des " glissements ". Dans ce facicule; nous dirons symétrie-translation.

Une symétrie-translation est la composée d'une symétrie et d'une translation de vecteurs parallèles à l'axe de la symétrie.



FIN DE L'INTERMEDE

CANEVAS

Si maintenant vous voulez étudier plus précisément un dessin à motif répétitif, vous pouvez vous intéresser aux diverses isométries qui le conservent globalement.

Qu'entendons-nous par " isométrie qui conserve globalement un dessin " ? :

- Reproduisez le dessin sur un calque ;
- Trouvez des positions pour lesquelles le dessin sur papier calque coïncide avec le modèle ..... supposé tous deux étendus à tout le plan (pensez à retourner le calque !).

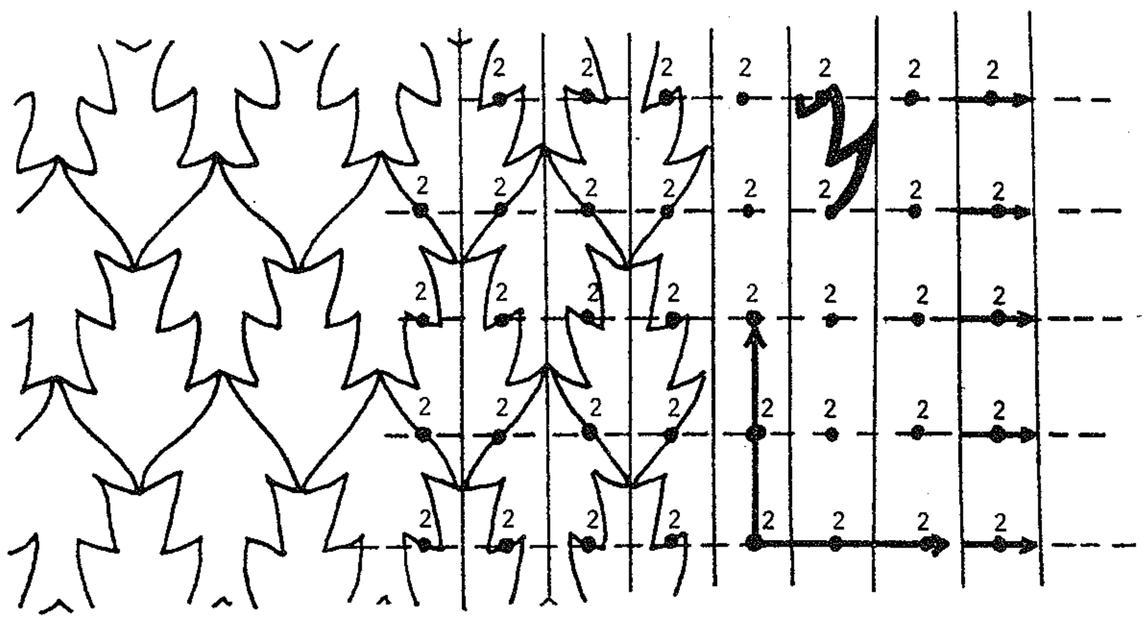
A chaque façon de procéder correspond une isométrie (translation, rotation, symétrie orthogonale, symétrie-translation) qui " conserve globalement le dessin ".

Si vous notez maintenant sur un autre papier calque les éléments caractéristiques de ces diverses isométries (centre, axe, vecteurs), vous obtiendrez le " <u>canevas</u> " du dessin :

- parmi les translations, pouvez-vous en trouver deux qui suffisent à engendrer le dessin à partir d'un motif initial " minimum " ?
  Notez alors leurs vecteurs ainsi : ——→

- si un point est centre d'une rotation (minimale) de $1/n^{\text{ième}}$ de tour, notez-le : $\overset{n}{\bullet}$
- si une droite est axe de symétrie, notez-la : ————
- si une droite est l'axe d'une symétrie-translation, notez ainsi : — → — —

Voici par exemple le canevas d'un certain pavage :

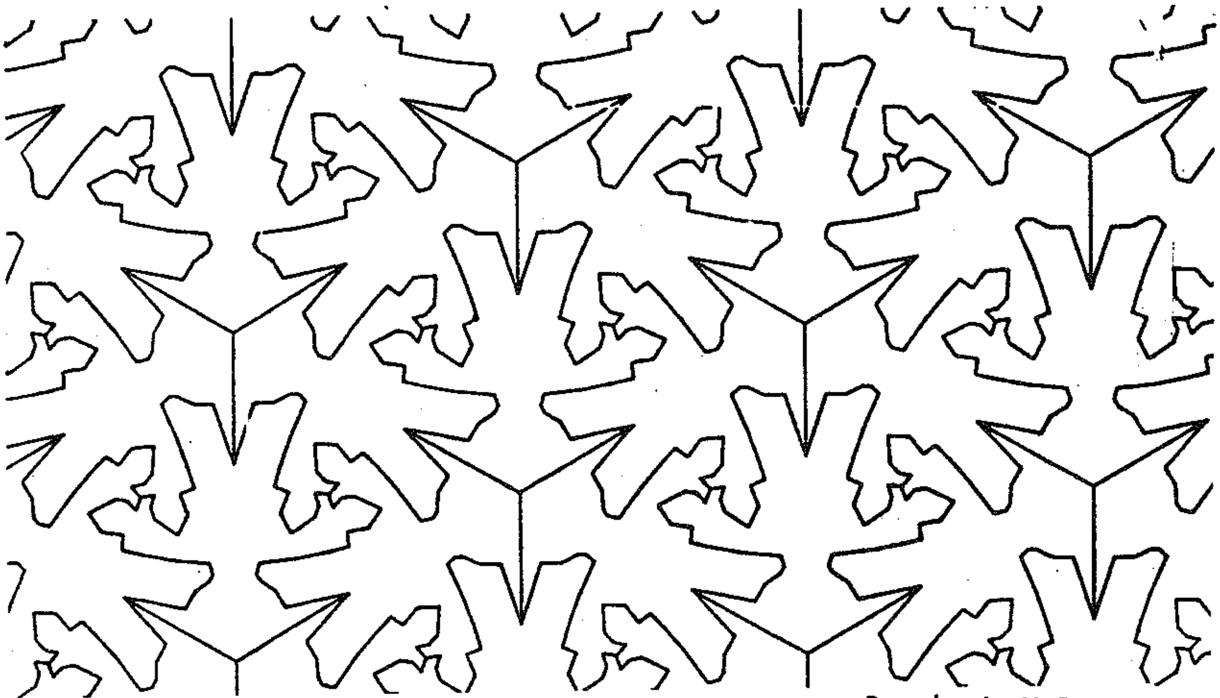


RECHERCHE DE CANEVAS

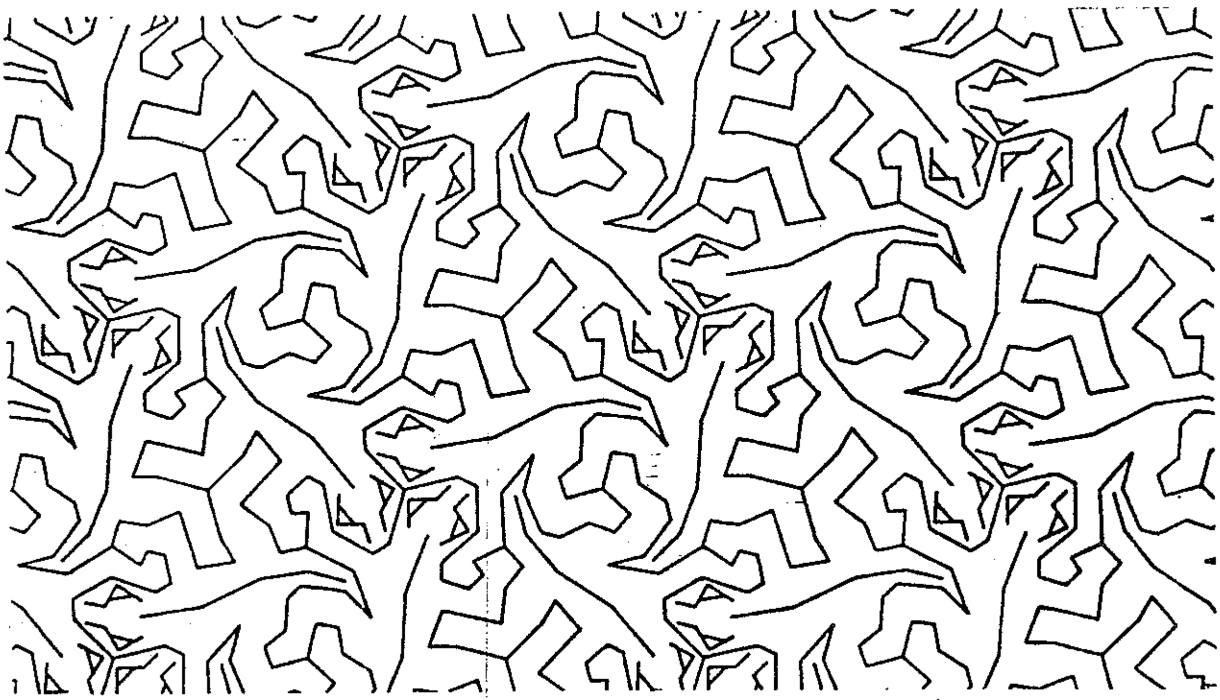
Trouvez des rotations qui amènent un " chinois " sur un " chinois ", ou une salamandre sur une salamandre.

Pour chaque dessin, combien y-a-t-il de directions d'axe de symétrie ?

Dessinez les canevas de ces dessins.

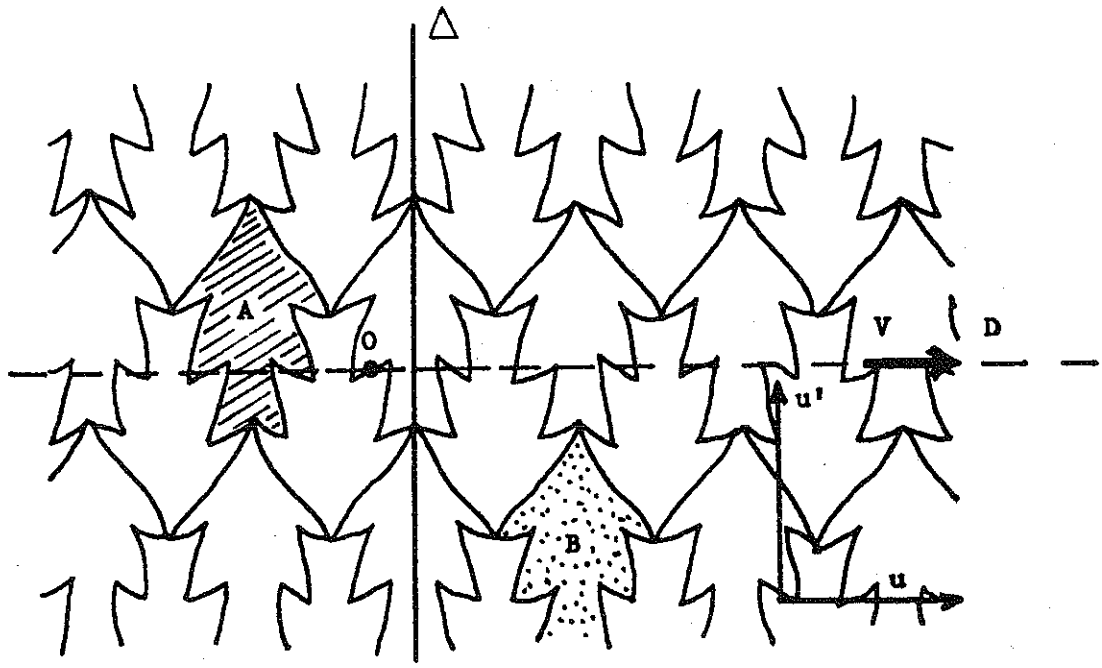


Dessin de M.C. ESCHER



Dessin de M.C ESCHER

Les isométries se composent comme toutes les applications. Et si vous composiez celles qui conservent globalement un dessin ?



Appelons : t la translation de vecteur u, t' celle de vecteur u'
r la rotation d'un demi-tour de centre O
s la symétrie d'axe Δ
d la symétrie-translation d'axe D de vecteur V

Coloriez les images du " sapin " A, par :

- r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}, d^{-1} , réciproques de r, s, t, d.
- $r \circ r$, $s \circ s$, $t \circ t$, $d \circ d$, $r \circ s$, $d \circ s$, $s \circ t$, $s \circ r$, etc...
- $r \circ s \circ t$, $r \circ t \circ s$, $r^{-1} \circ t^{-1} \circ s$, $d^{-1} \circ s \circ r \circ t^{-1}$, $t \circ s \circ t \circ t \circ t \circ t$, etc...

Quelles remarques faites-vous ?
Comment définiriez-vous l'isométrie qui donne le sapin B pour image du sapin A
Pouvez-vous le faire de plusieurs façons ?
Que pensez-vous des composées d'isométries de ce dessin ?

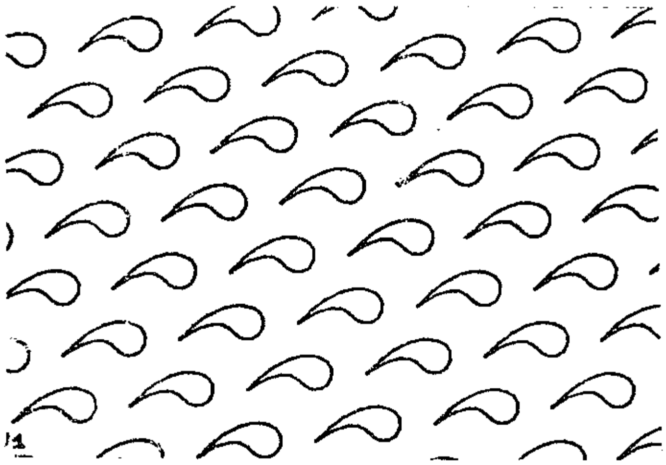
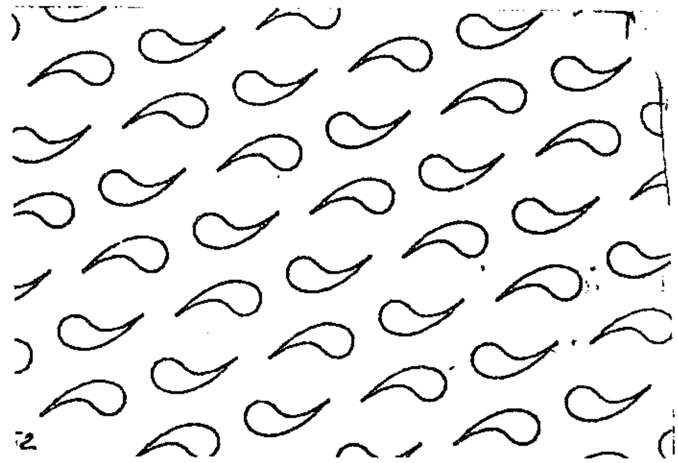
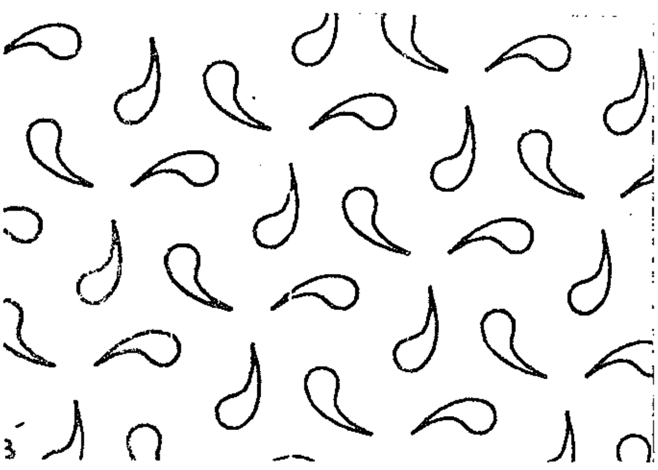
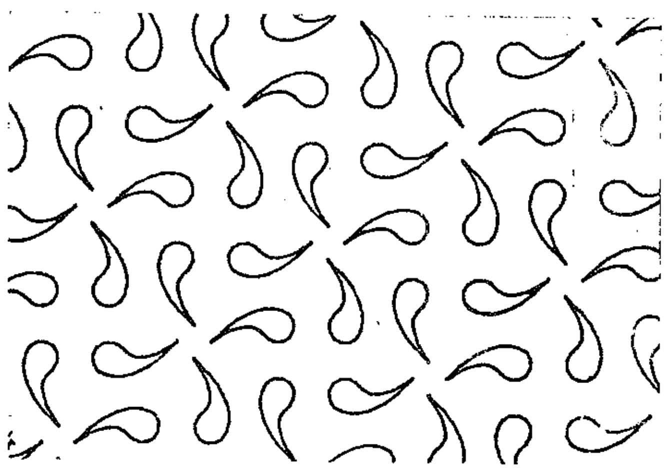
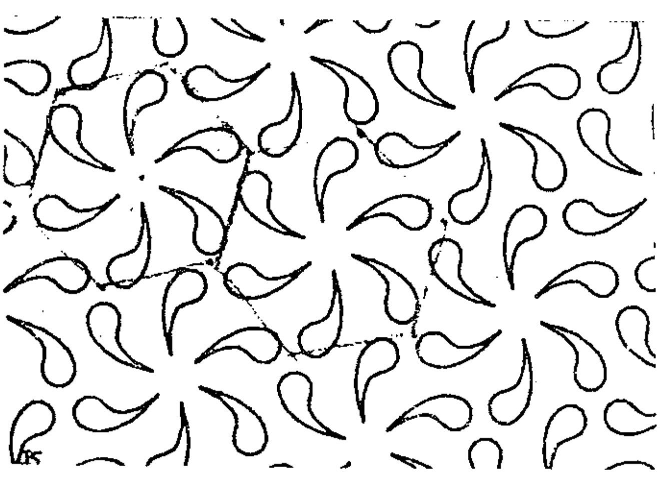
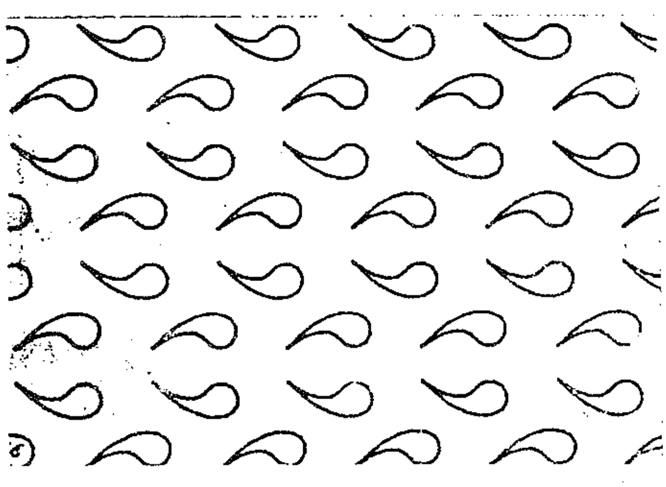
A ce propos, les mathématiciens disent que " l'ensemble des isométries qui conservent globalement un dessin est un groupe pour la composition des applications ".

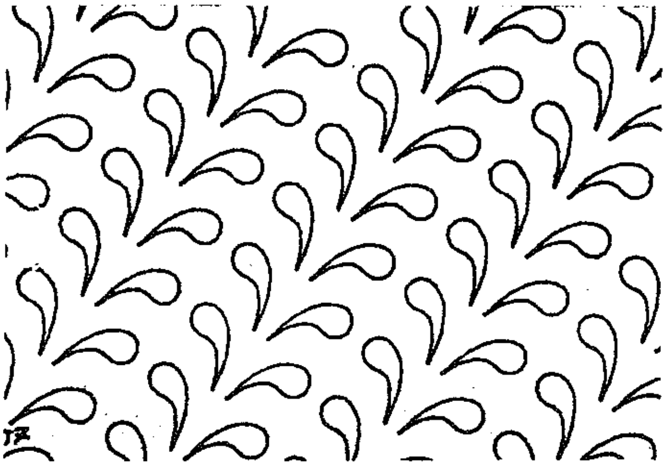
L E C L U B D E S D I X S E P T

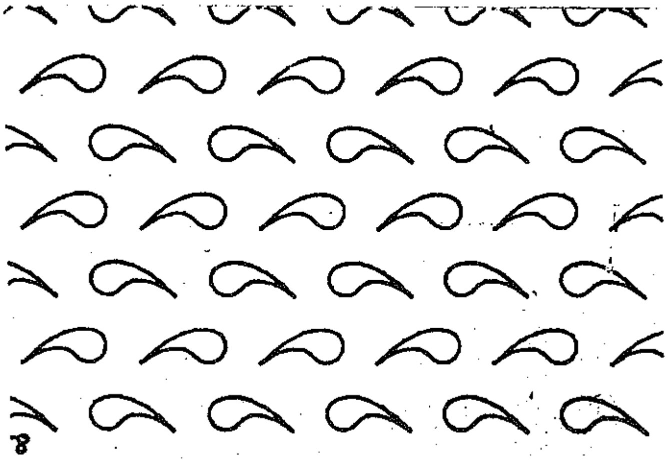
Il y a bien sûr une variété illimitée de dessins à motif répétitif.

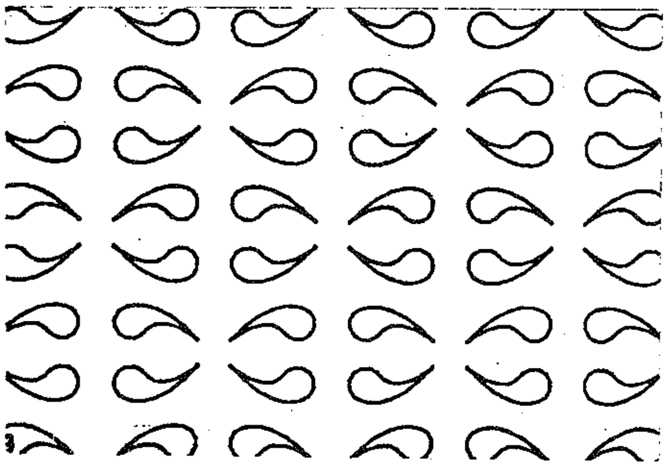
Mais en comparant leur divers groupes d'isométries (selon la nature des isométries et les positions relatives de leurs diverses caractéristiques), on a pu démontrer que l'on ne trouve que 17 types de dessins.

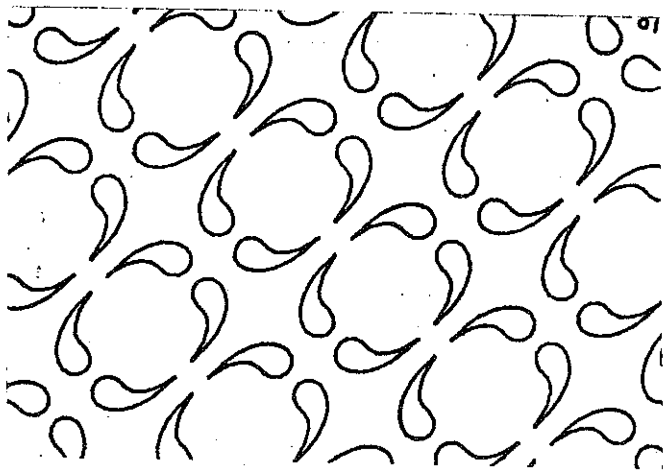
Voici, illustrés avec le même motif, les 17 types (Ces dessins ont été réalisés par P. JULLIEN, digne professeur à l'Université de Grenoble) :

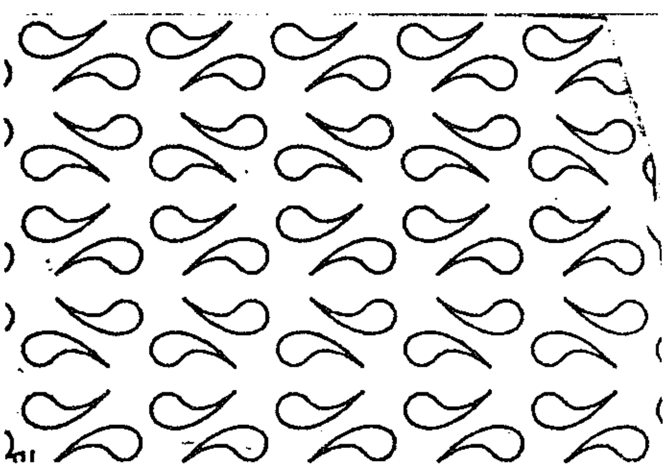







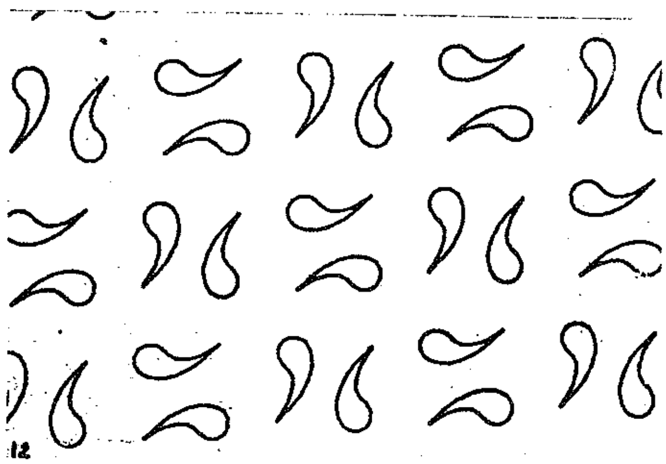


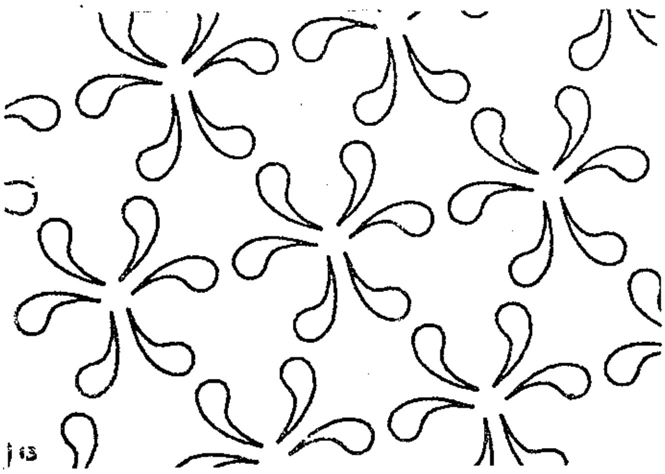


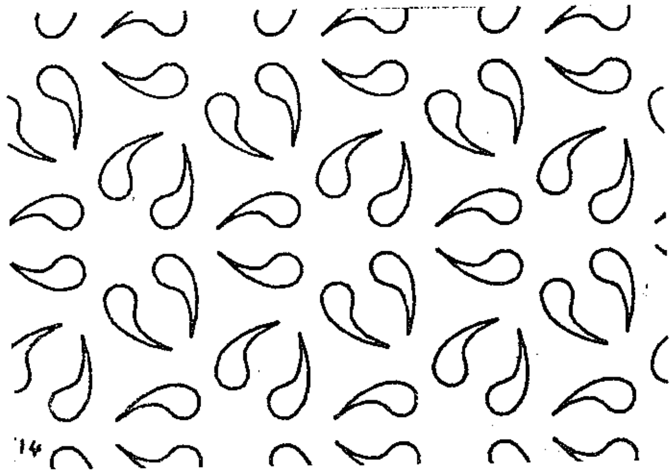


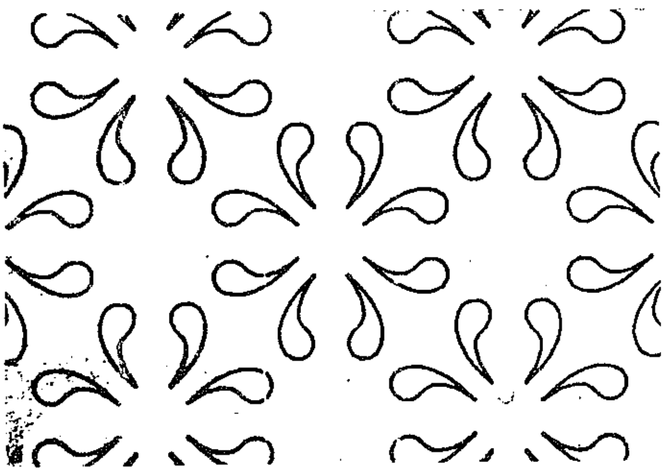


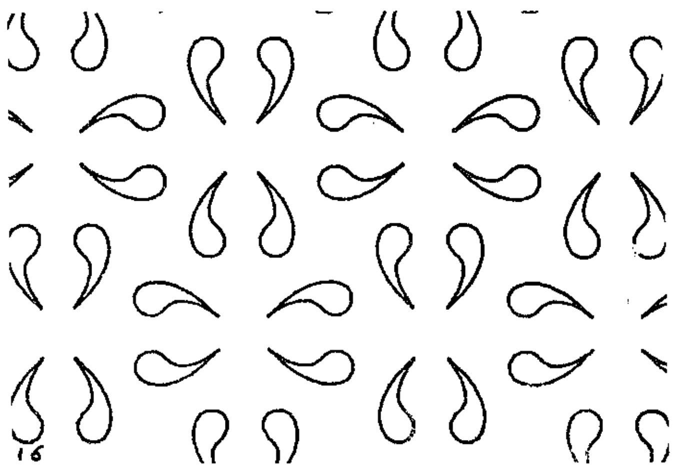


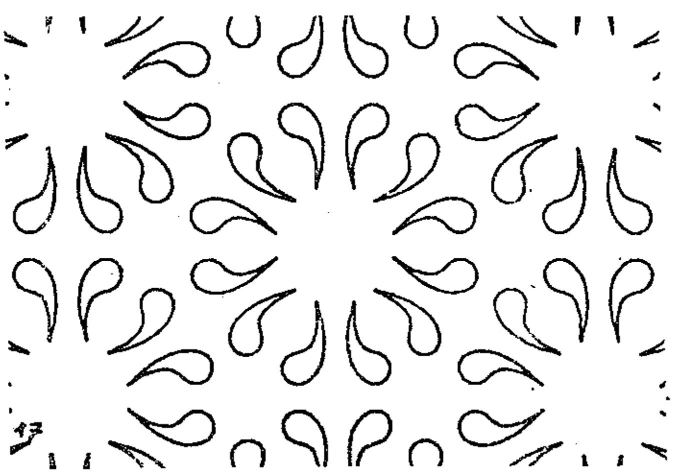



13


14




16


17

LE TABLEAU SUIVANT PERMET DE RECONNAITRE LE " TYPE " D'UN DESSIN OU D'UN PAVAGE

	Le dessin coïncide-t-il avec son calque retourné ?																
	NON					OUI											
	Quelle rotation minimale non nulle ?					Combien de directions d'axes de symétrie ?											
	0	R2	R3	R4	R6	0		1			2			3		4	6
						R2 ?		Observer les rotations entre les mailles formées par les axes de symétrie									
						non	oui	non R2		R2	0	R2	R4	R3	non R3		
								symétrie-translation ?									
								oui	non								
Type du dessin :	p1	p2	p3	p4	p6	pg	pgg	cm	pm	pmg	pmm	cmm	p4g	p3m1	p31m	p4m	p6m

° Les codes R2, R3, R4, R6 désignent respectivement des rotations d'un demi, d'un tiers, d'un quart, d'un sixième de tour.

° La désignation des types est celle adoptée par les cristallographes.

- Essayez de classer les dessins de cette brochure d'après le tableau ci-dessus.

Remarque : Le pavage de la page 20 est donc de type pmg
Les pavages de la page 21 sont de type p^3 et p^3m1 .

PRATIQUEMENT

Chaque groupe peut être caractérisé par son canevas.

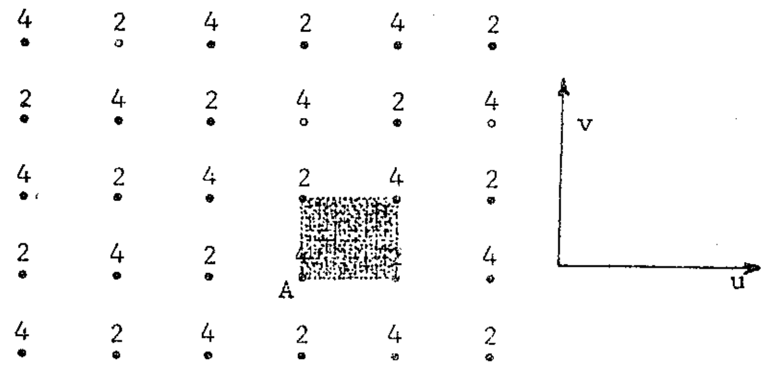
Avec du courage (et du papier calque) vous pouvez obtenir des canevas de chacun des 17 types à partir des dessins des pages 23 à 25.

- Re-trouvez en faisant leur canevas les types des différents dessins de ce fecicule.

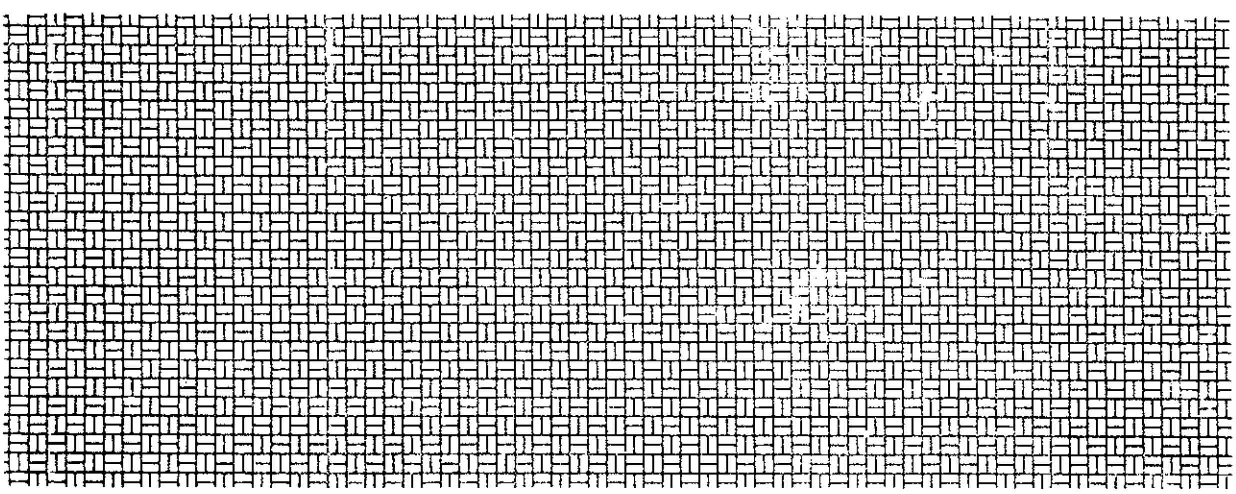
- Essayez de rechercher des techniques de construction des dessins des divers types en vous servant de leurs canevas. Pour cela : dessinez le canevas du type choisi ; localisez sur le canevas une partie du plan nécessaire et suffisante à la génération du dessin (par des isométries qui le conservent ; dessinez à l'intérieur de cette partie un motif quelconque ; adjoignez à cette partie ses transformées par les diverses isométries indiquées sur le canevas.

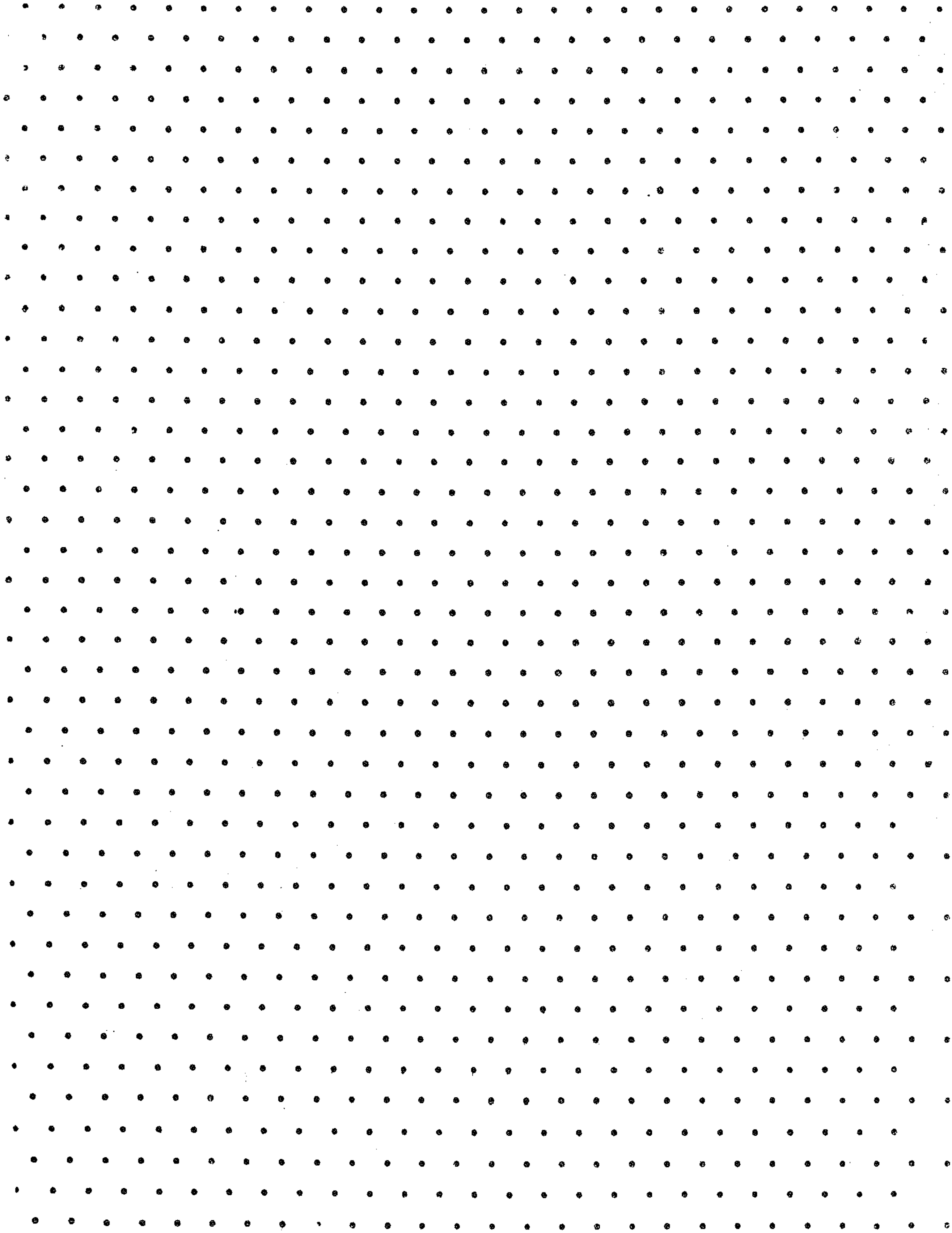
Ainsi, par exemple pour dessiner un dessin de type p^4 :

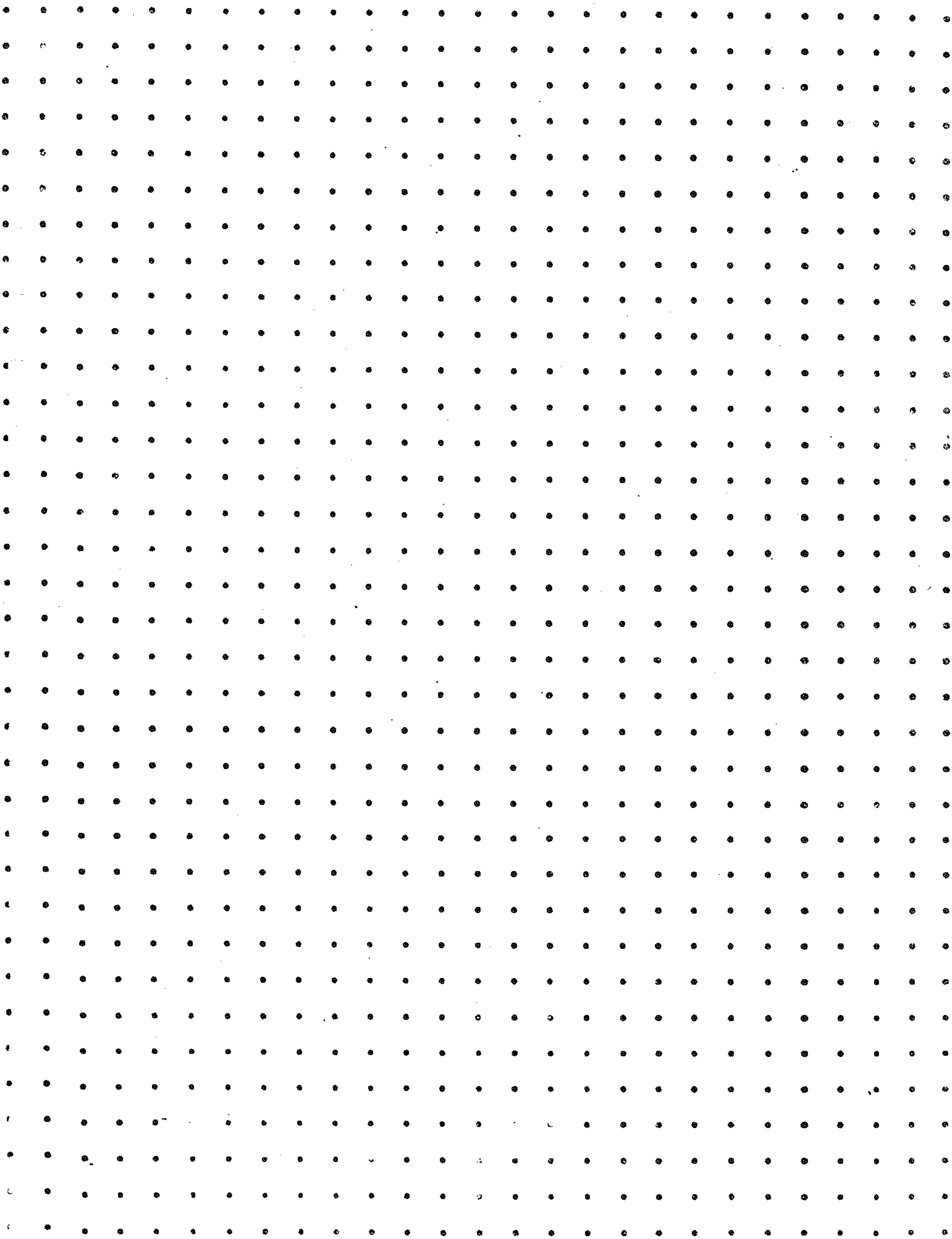
- faire à l'intérieur de la partie grisée un motif quelconque
- dessiner ses images par les rotations de centre A d'un quart, d'un demi et de trois quarts de tour
- reproduire la figure obtenue en " utilisant " les composées des translations (de vecteurs u et v) et de leurs réciproques.

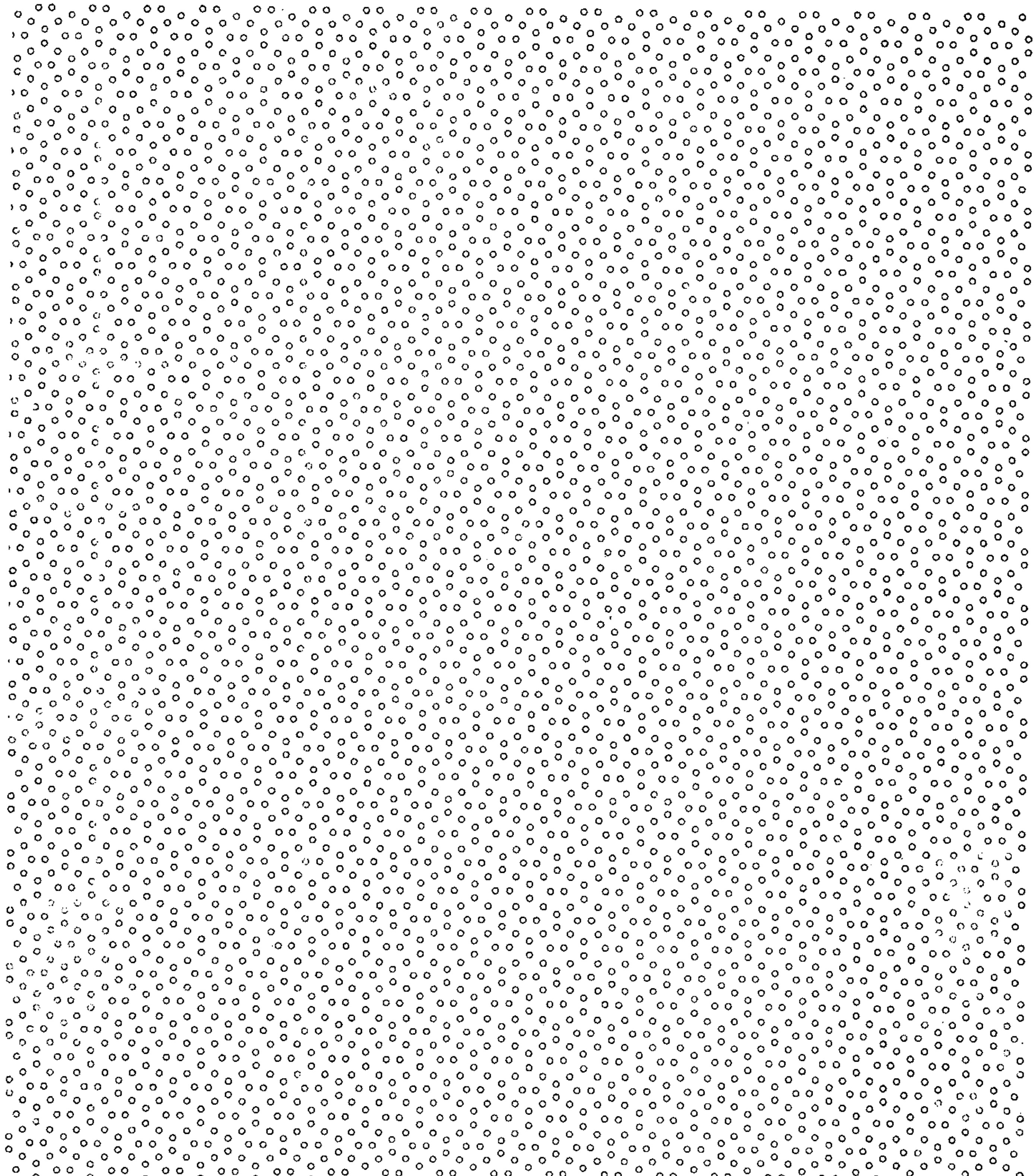


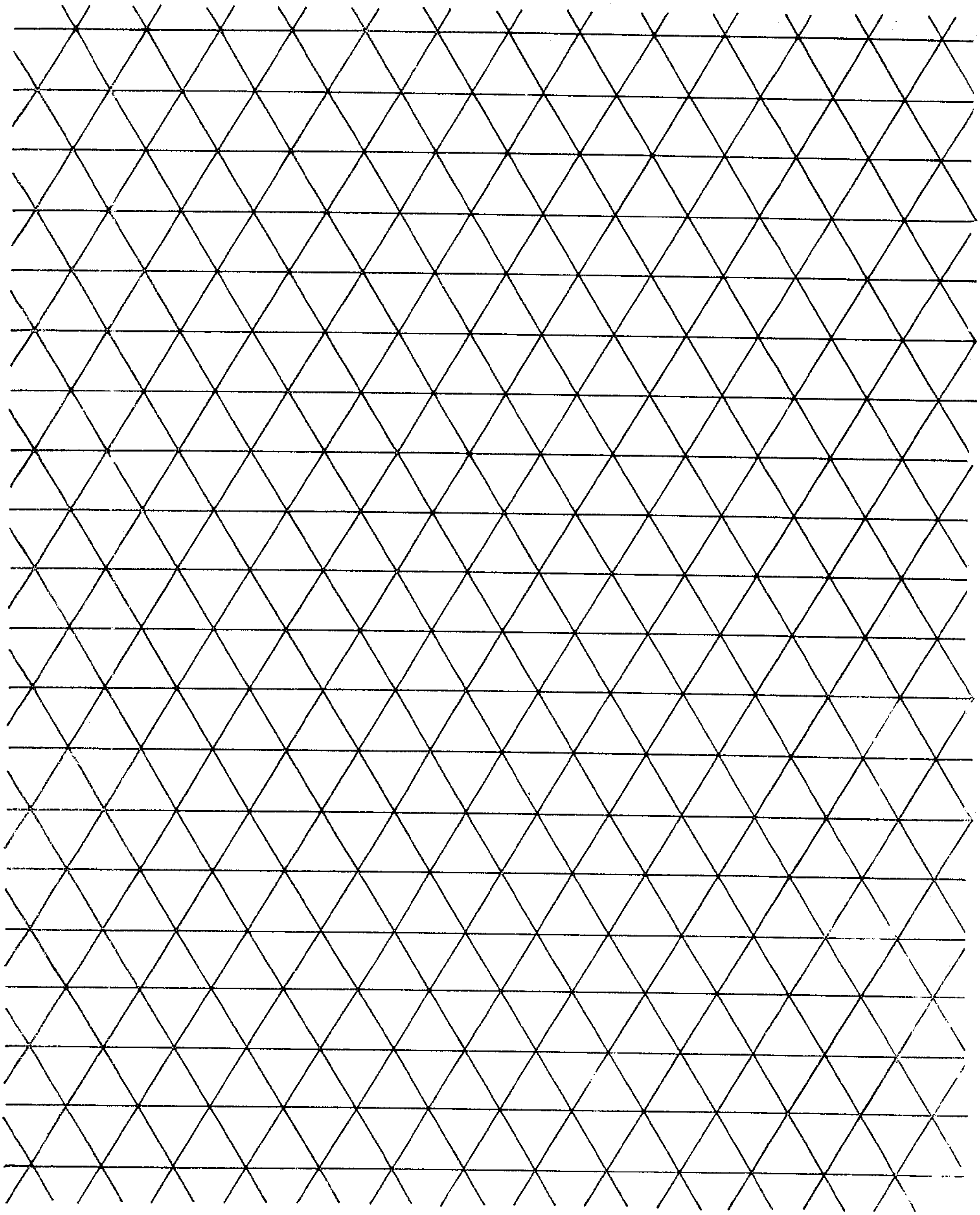
Bibliographie : Si vous ne trouvez pas les canevas de certains types, vous pouvez consulter " Rosaces, frises et pavages " de Y. BOSSARD - Editions Cedic -

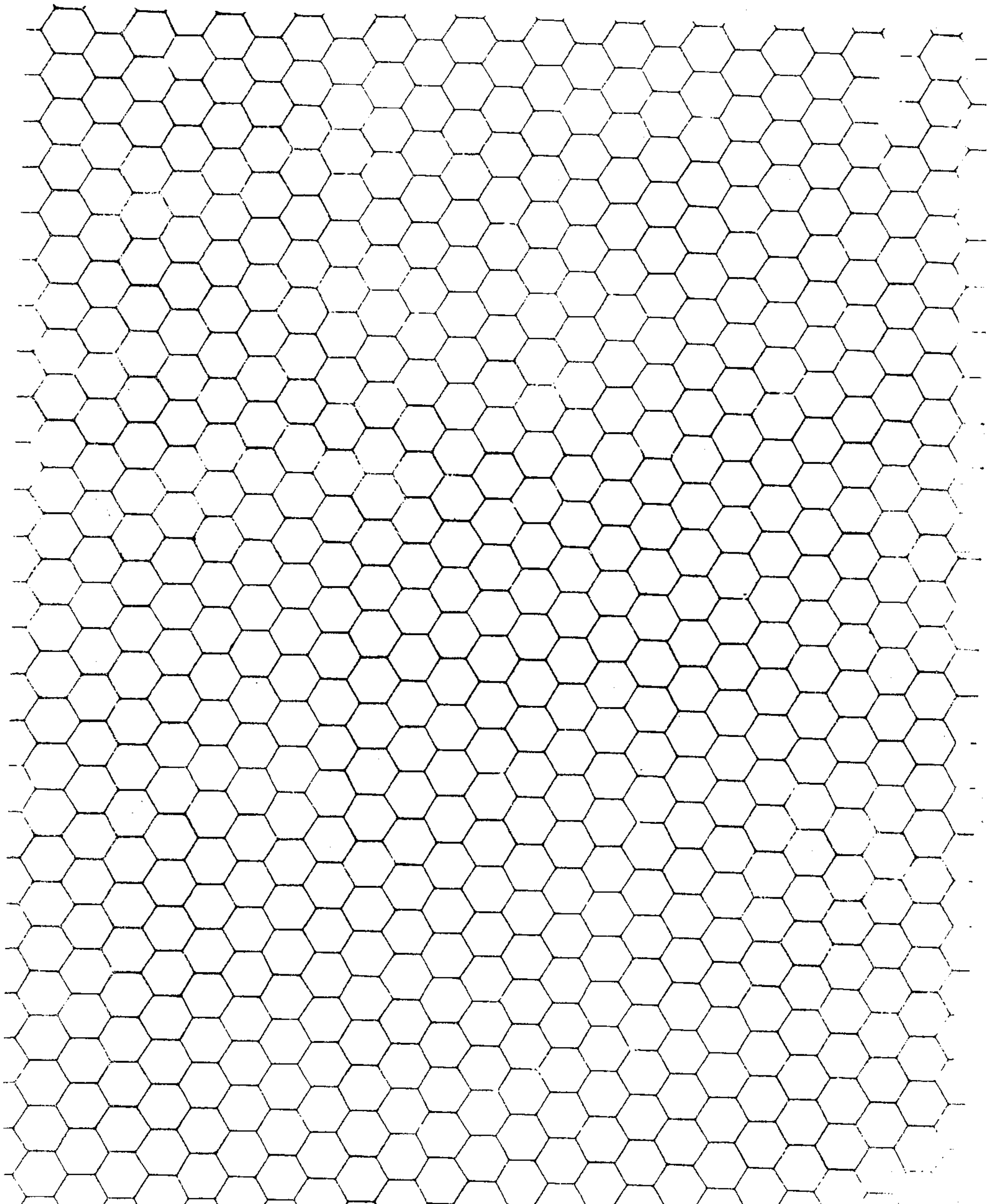


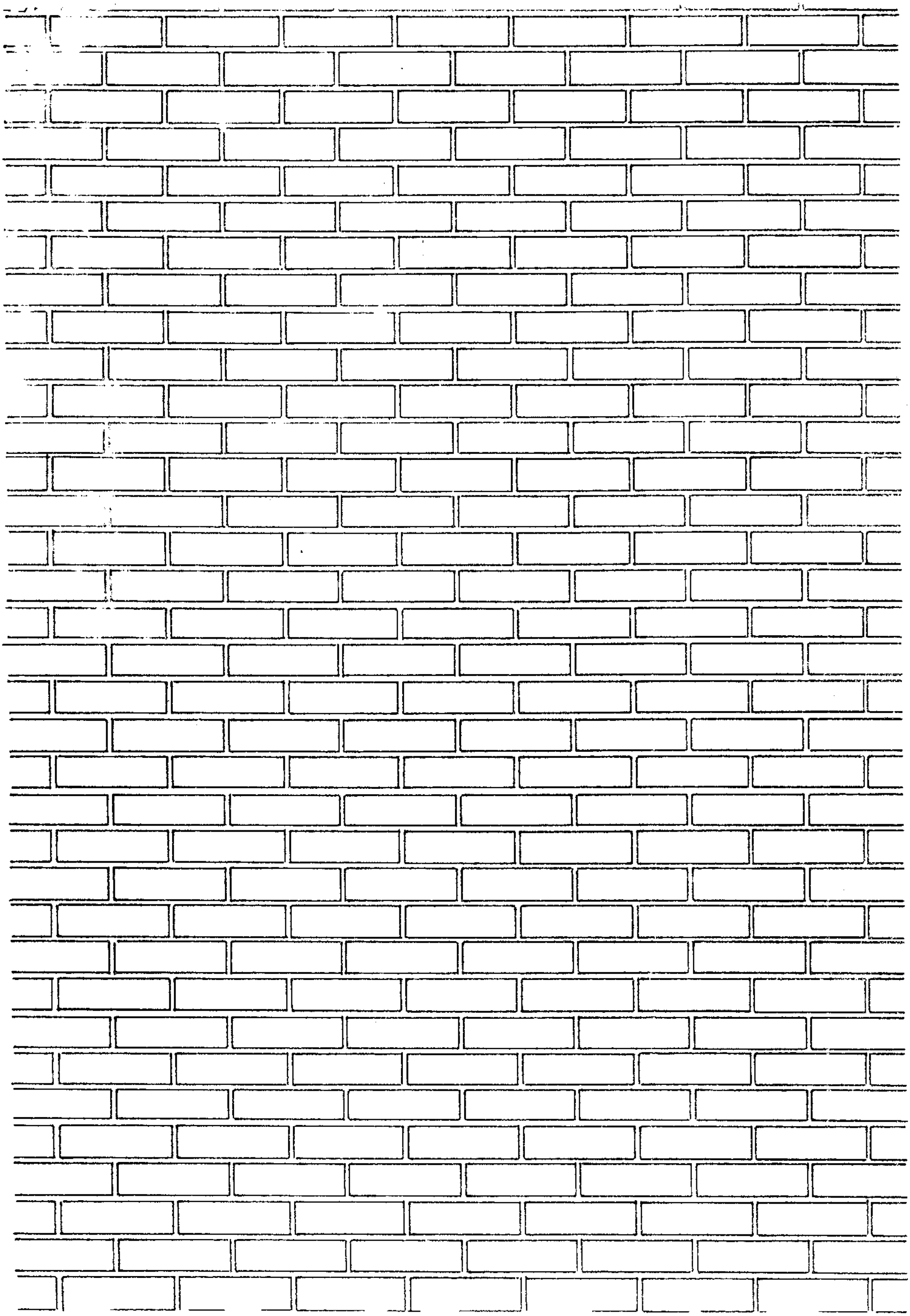












Notre site WEB

http://iremp7.math.jussieu.fr

IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Pavages et coloriages

AUTEURS :

COLLONGE Marie-Pierre
TREHARD Françoise

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 1985
ISBN : 2-86612-141-4