I.R.E.M.

UNIVERSITE PARIS VII

A PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE

PAR M. PEZARD

cahier de didactique des mathématiques

numéro 20

Introduction

Ce chapitre [1] comporte :

* Une analyse mathématique de la notion de proportionnalité.

* Une première partie qui est un essai de synthèse bibliographique faite à partir de différentes études sur le thème de la proportionnalité. Bien sûr, je ne prétends pas être exhaustive quant aux travaux cités.

Les différentes études sont présentées en les regroupant en trois grands thèmes :

I) Analyse des tâches.

II) Comportement des élèves (face à des problèmes de proportionnalité).

III) Enseignement de la proportionnalité.

I) comporte trois parties :

A) : Analyse de la structure des problèmes.

B) : Procédures de résolution des problèmes.

C) : Cas particulier des problèmes de pourcentages.

Dans II), je distingue :

Partie I : Ecole Elémentaire et 1er cycle des collèges.

Partie II : Second cycle des lycées et Ecoles Normales.

Il s'agit, selon les résultats des recherches citées, de décrire les comportements des élèves face à des problèmes de proportionnalité.

Pour cela, différents points de vue sont envisagés dans la partie I :

- Celui des procédures utilisées : A).
- Celui de la structure des problèmes proposés : B).
- Celui des domaines de référence et de la complexité relative des questions : C).
- Celui des représentations graphiques C).

La partie II, plus succinte, se borne à citer quelques recherches faites à ces niveaux.

(1) Ce travail représente le premier chapitre d'une thèse de 3ème cycle en cours sur l'enseignement de la proportionnalité aux normaliens.

Le III) analyse l'enseignement de la proportionnalité en France :

- Dans son évolution historique : A).
- Au travers des programmes actuels : B).

Dans cette partie B), j'essaie aussi de faire une synthèse des propositions de modification faites par les auteurs des différentes recherches citées.

Enfin les parties C) et D) concernent l'hétérogénéité des classes d'une part, et le rôle du "Modèle" mathématique d'autre part.

* Une deuxième partie qui relate une suite de séquences sur la proportionnalité que j'ai réalisées dans une classe de CM_2 ne figurant pas dans ce cahier.

Analyse Mathématique

Une situation de proportionnalité se traduit par l'intervention de relations linéaires ou multilinéaires entre des variables qui représentent soit des valeurs d'une grandeur, soit des nombres. Pour chaque grandeur, on peut choisir une unité de mesure. Les unités ayant été choisies, toute relation entre deux grandeurs (par exemple, entre la longueur du côté d'un carré et son périmètre, ou entre le temps t et la distance parcourue par un mobile pendant le temps t...) se traduit par une relation entre les nombres qui les mesurent (ces nombres dépendant des unités choisies).

Quand utilise-t-on les mots de proportionnalité, proportionnel et quelles définitions mathématiques y sont attachées ?

On parle de "situation de proportionnalité" ou de "suites de nombres proportionnels" lorsqu'on a un ensemble d'au moins 2 couples de valeurs réelles (a_1, b_1) (a_2, b_2) ... et lorsque la correspondance $(a_i \to b_i)_{i=1,2..}$ est d'un type particulier.
Précisons.
La situation est du type proportionnel si cette correspondance est la restriction d'une fonction $y = Ax$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) aux valeurs $(a_i)_{i=1,2...}$ prises par la première variable.

Initialement, le terme "proportion" désignait tout ensemble de quatre nombres a, b, c, d entre lesquels on a l'égalité des rapports $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ainsi, connaissant 3 des termes a, b, c, d d'une proportion on peut déterminer le 4ème.

Il y a eu extension de l'utilisation du terme à plus de 2 rapports et par là même, glissement de sens.

On peut donc représenter la correspondance de diverses manières : couples de nombres, tableaux, points sur un quadrillage gradué... Dans ce dernier cas, les points sont alors alignés sur une droite, passant par le point (0,0), dont la pente s'appelle "le coefficient de proportionnalité".

Nous allons développer les différents points de vue correspondant à la traduction du concept dans ses divers cadres d'intervention.

1) Rappel sur les fonctions linéaires (Point de vue numérique).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $x \to Ax$ où $A \in \mathbb{R}$. Ces fonctions dites linéaires sont les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant

considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). Notons que les situations de proportionnalité se modélisent par f ou par une restriction de f à une partie continue ou discrète de $\mathbb{R}$ (et même plutôt de $\mathbb{R}^+$), les enfants du cours moyen travaillant essentiellement sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}^+$, $\mathbb{Q}^+$ ... (ou une partie de ces ensembles) selon le moment de leur apprentissage.

A ce propos, rappelons qu'une fonction de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ additive ($\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$) est $\mathbb{Q}$-linéaire ($\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$).

Plus généralement, notons que la connaissance d'un seul couple de nombres (α, α') en correspondance, si on sait que la situation étudiée est du type proportionnel, permet de déterminer le coefficient A, donc de connaître la fonction linéaire :

En particulier : si $a = 1$ $a' = f(1) = A$

Une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc entièrement déterminée par la donnée de l'image de 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = x \times f(1)$.

Remarque 1 : Si on ne considère que 2 couples en correspondance $(a,a'),(b,b')$

on a : $a' = A \times a$

$b' = A \times b$

Alors $a'b = A\,ab$ d'où $a'b = b'a$

$b'a = A\,ba$

C'est l'égalité du "produit en croix" (Elle permet d'exprimer l'égalité de 2 rapports sans faire intervenir la valeur de ce rapport).

Inversement, en divisant cette égalité par $a'b'$ (non nul) on obtient : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

On retrouve donc :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \iff a\,b' = b\,a'$$

On disait autrefois "le produit des extrêmes est égal au produit des moyens" et pour la relation $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, on parlait de "proportion".

Dans une proposition, on peut permuter les extrêmes (et aussi les moyens) :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \iff \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \iff \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Remarque 2 (de vocabulaire) : On a l'habitude d'appeler proportionnalité inverse entre x et y une relation de proportionnalité entre $\frac{1}{x}$ et y .

2) Point de vue graphique.

(On se place dans $\mathbb{R}^2$ espace affine euclidien)
Un repère étant fixé, une relation de proportionnalité se représente graphiquement par une droite, passant par l'origine, dont la pente est le coefficient de proportionnalité.

3) Point de vue des Grandeurs.

Toute la description qui vient d'être faite dans le cadre numérique a sa formulation dans le cadre des grandeurs.

Qu'est-ce-qu'une grandeur ? Il est difficile d'exprimer correctement ce qu'est une grandeur sans faire appel à des notions élaborées. On peut dire que c'est une variable qui prend ses valeurs dans un ensemble où on sait les ajouter et les comparer.

Précisons cette définition dans le cas particulier de la longueur (d'après R. Douady (1) .) :

Notons OM l'ensemble des objets matériels rigides marqués d'un couple de points, que nous appellerons objets marqués. Il est possible de comparer ces objets du point de vue de leur longueur :

Comparaison directe

Soient $\underline{A} = (A, a_1, a_2)$ et $\underline{B} = (B, b_1, b_2)$ 2 objets marqués.
Nous dirons que $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont mis en coïncidence si on peut attribuer à a_1 et b_1 la même position, à a_2 et b_2 la même position.

Nous dirons que $\underline{B}$ dépasse $\underline{A}$:

1) si on peut attribuer à a_1 et b_1 la même position,

2) si a_1, a_2, b_2 sont alignés avec a_2 strictement entre a_1 et b_2.

Le résultat de la comparaison ne dépend ni des positions des points, ni du moment de l'expérience.

Comparaison indirecte (en utilisant un intermédiaire)

On ne peut pas toujours procéder par comparaison directe (objets non déplaçables par exemple). Mais on peut en général mettre en coïncidence le premier objet marqué $\underline{A}$ avec un objet intermédiaire $\underline{C}$ que l'on pourra comparer directement à $\underline{B}$.

Structure sur l'ensemble L des longueurs.

Définition : Notons L l'ensemble quotient $OM/\mathcal{R}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ "$\underline{A}$ a même longueur que $\underline{B}$" entre objets marqués. Notons $\lambda : OM \longrightarrow L$ l'application canonique de passage au quotient qui à un objet marqué $\underline{A}$ associe sa longueur $\lambda(\underline{A})$.

Ordre. Soient $\ell_1 \in L$ et $\ell_2 \in L$. Soient $\underline{A_1}$ et $\underline{A_2}$ 2 éléments de OM tels que $\ell_1 = \lambda(\underline{A_1})$ et $\ell_2 = \lambda(\underline{A_2})$

On définit :

$\ell_1 \leq \ell_2$ si et seulement si $\underline{A_1}$ est plus court ou de même longueur que $\underline{A_2}$

La relation "$\ell_1 \leq \ell_2$" entre éléments de L est une relation d'ordre total.

Addition. La justaposition (notée $\perp$) sur OM étant compatible avec la relation $\mathcal{R}$, on pose :

$$\ell_1 + \ell_2 = \lambda(\underline{A_1} \perp \underline{A_2}) \quad \text{avec} \quad \ell_1 = \lambda(\underline{A_1}), \quad \ell_2 = \lambda(\underline{A_2})$$

On obtient ainsi une loi de composition partout définie entre longueurs, bien que la juxtaposition ne soit pas partout définie (mais on peut toujours trouver des représentants juxtaposables).

Les objets marqués de la forme (A,a,a) sont tous de même longueur. On pose $(A,a,a) = 0$.

Muni de l'addition + et de l'ordre $\leq$, l'ensemble L est un demi groupe commutatif totalement ordonné.

En particulier $\mathbb{N}$ opère sur L.

Opération de $\mathbb{N}$ sur L

Soit $(n,\ell) \in \mathbb{N} \times L$

Posons $n.\ell = \underbrace{\ell + \ell + \dots + \ell}_{n \text{ termes}}$ on a $n.\ell \in L$

L'application $\mathbb{N} \times L \longrightarrow L$, $(n,\ell) \longmapsto n.\ell$ possède les propriétés suivantes :

$(\forall \ell \in L), (\forall p \in \mathbb{N}), (\forall q \in \mathbb{N})$

$p.(q.\ell) = (pq).\ell$

$(p+q).\ell = (p.\ell) + (q.\ell)$

$(\forall \ell' \in L)$ on a :

$p.(\ell+\ell') = (p.\ell) + (p.\ell')$

$n.\ell = 0 \iff n = 0$ ou $\ell = 0$

Mesure

Une longueur u ayant été choisie, on peut définir la mesure de certaines longueurs avec u comme unité :

Définition : On dit qu'une longueur ℓ est $\mathbb{N}$ - mesurable de mesure n avec l'unité u s'il existe un entier n tel que $\ell = n.u$

Notons L_u l'ensemble des longueurs $\mathbb{N}$ - mesurables en u. Pour toute longueur ℓ, notons $g_u(\ell)$ sa mesure en u. L'application $g_u : L_u \to \mathbb{N}$ est un isomorphisme de demi-groupe commutatif compatible avec l'ordre de L_u et celui de $\mathbb{N}$. Mais toutes les longueurs ne sont pas $\mathbb{N}$ - mesurables en u. Par exemple, si $v \in L$ et $v < u$, v n'est pas $\mathbb{N}$ - mesurable en u.
Cette remarque nous conduit à la question suivante :

Peut-on étendre $\mathbb{N}$ à un ensemble M de nombres tel que :

- Toutes les longueurs soient M - mesurables en u,

- Les longueurs qui étaient $\mathbb{N}$ - mesurables en u soient M mesurables en u avec le même nombre.

- Ordre et Opérations de $\mathbb{N}$ s'étendent à M.

Dans un premier temps, on peut étendre $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Q}^+$ Mais toutes les longueurs ne sont pas $\mathbb{Q}^+$ -mesurables en u. On ne peut alors obtenir que des encadrements de plus en plus fins de la mesure "exacte" de telles longueurs. Si on désigne respectivement par $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites de rationnels positifs satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) Pour tout n, on a : $x_n \leq x_{n+1} < x'_{n+1} \leq x'_n$,

2°) la différence $x'_n - x_n$ tend vers 0 [exemple : les 2 suites de nombres décimaux approchant x par défaut et par excès],

alors il existe un nombre x et un seul (limite des suites $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$) tel que pour tout n, $x_n \leq x \leq x'_n$. Ce nombre x désigne alors la "mesure exacte" cherchée.

Il faut donc étendre $\mathbb{N}$ à un ensemble de nombres où tout ensemble majoré admet une borne supérieure, c'est-à-dire à l'ensemble des nombres réels (positifs).

Une longueur u ayant été choisie comme unité :

Le demi-groupe commutatif totalement ordonné des longueurs est isomorphe au demi-groupe additif des nombres réels : c'est-à-dire qu'il existe une application μ_u unique de L dans $\mathbb{R}^+$

ayant les propriétés suivantes :

1°) μ_u est bijective

2°) $\mu_u(\ell_1+\ell_2) = \mu_u(\ell_1) + \mu_u(\ell_2)$

3°) μ_u est strictement croissante : si $\ell_1 < \ell_2$ alors $\mu_u(\ell_1) < \mu_u(\ell_2)$

4°) $\mu_u(u) = 1$.

Remarque :
Le mot "mesure" désigne à la fois :

- l'application μ_u

- la valeur $\mu_u(\ell)$ de cette application pour $\ell \in L$.

Une grandeur peut avoir plusieurs mesures, selon l'unité choisie.

Grandeur Produit : L'aire et le Volume en sont des exemples. La notion mathématique sous-jacente est celle d'application bilinéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (trilinéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour le volume).

(Dire qu'une application est bilinéaire signifie qu'elle est définie sur un espace produit et qu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables lorsque l'autre est fixée).

Les seules applications bilinéaires de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme :
$(x,y) \to k\,x\,y \quad (k \in \mathbb{R})$.

En effet :

Soit f une application bilinéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est linéaire par rapport à la 1ère variable, donc :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = x\,f(1,y)$$

f est aussi linéaire par rapport à la 2ème variable, donc :

Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(1,y) = y\,f(1,1)$$

finalement : $f(x,y) = f(1,1)\,x\,y$,
donc f est de la forme : $(x,y) \to k\,x\,y$
avec $k = f(1,1)$.

Le produit est la fonction bilinéaire type de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Grandeur quotient</u> : La vitesse, la masse volumique en sont des exemples :

Si m désigne une masse et v le volume correspondant,

Si on a choisi u comme unité pour m et u' pour v, on a :

$$m = a\,u$$

$$v = a'\,u'$$

et $a = \alpha \times a'$. Le nombre α est alors la mesure d'une grandeur quotient qui est la masse volumique. Cette grandeur quotient est mesurée avec une unité quotient qui peut être $\frac{u}{u'}$ mais aussi $\frac{u_1}{u'_1}$:

en effet, on peut mesurer la masse volumique en g/cm^3 mais aussi en g/dm^3, en kg/m^3 ...

de même, on peut mesurer une vitesse en km/h mais aussi en m/s , ...

En conclusion, on peut dire que l'analyse de la notion de proportionnalité présente des difficultés pour au moins trois raisons :

1. Le mot "proportionnel" est ambigü : il ne recouvre pas un concept particulier, mais il touche plusieurs concepts dans différents cadres. On ne peut le définir en toute généralité : ce n'est que lorsqu'on a fixé les domaines de référence (domaine numérique, cadre des grandeurs) qu'on est en mesure de donner des définitions précises.

2. Il faut distinguer entre :

- Le traitement d'une situation où la proportionnalité est reconnue.

- La reconnaissance de la proportionnalité (c'est-à-dire du modèle mathématique) dans une situation donnée. Pour l'enseignant, la reconnaissance du modèle risque de rester à l'état implicite soit parce qu'il considère cela comme évident, soit, à la limite, parce qu'il ne s'est pas posé le problème. Par contre, pour l'élève, la reconnaissance de la proportionnalité ne va pas de soi. Il semble donc nécessaire que l'enseignant explicite ce problème.

3. Quand dans une situation de proportionnalité, le cadre est fixé, il existe plusieurs procédures pour traiter ce problème. Cela doit évidemment être pris en compte par l'enseignant.

Cette variété des procédures est mise en évidence dans la partie I de ce chapitre qui est un essai de synthèse bibliographique des différentes recherches faites sur la notion de proportionnalité.

I - <u>ANALYSE DES TACHES</u>.

A) <u>Analyse de la structure des problèmes</u> : (d'après G. Vergnaud (1))

Dans cette recherche les problèmes de proportionnalité sont replacés dans le cadre des "structures multiplicatives" définies comme

" ... des relations, transformations, lois de composition ou opérations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions".

Dans l'ensemble des problèmes de type multiplicatif, les auteurs distinguent deux structures relationnelles :

1°) Celle de la proportion simple dans laquelle deux variables dépendent linéairement l'une de l'autre : des quantités de marchandises et leur prix, des volumes (dans une matière homogène) et les masses correspondantes, des durées et des distances parcourues à vitesse constante, etc ...
Les grandeurs peuvent être continues (Volume, Masse, Temps) ou discrètes (nombre d'objets).
Cette structure peut être représentée par un tableau :

$$\begin{array}{c|c} x & y = f(x) \\ x' & y' = f(x') \end{array}$$

f étant la fonction qui fait passer de la mesure de la première grandeur à la mesure de la deuxième grandeur correspondante.

Ce tableau peut être analysé :

a) en considérant l'expression analytique de la fonction linéaire :
$x \to f(x)$ où $f(x) = ax$
a étant le coefficient de proportionnalité.

b) en considérant les propriétés de la fonction linéaire :

1) si $x' = \lambda x$ alors $f(x') = \lambda f(x)$

2) si $x'' = x + x'$ alors $f(x'') = f(x) + f(x')$

3) Combinaison des propriétés 1) et 2) :

si $x'' = \lambda x + \lambda' x'$ alors $f(x'') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$

Pour une telle relation de proportionnalité entre deux grandeurs, G. Vergnaud propose le terme d'"Isomorphisme de mesures".

2°) Celle de la proportion multiple dans laquelle une variable est une fonction multilinéaire de plusieurs autres variables indépendantes entre elles.

G. Vergnaud distingue deux cas :

2.1 Celui du "Produit de Mesures" dans lequel la grandeur est une grandeur produit : l'aire et le volume en sont les exemples les plus simples, mais de nombreux produits cartésiens relèvent aussi de cette structure (nombre de couples différents que l'on peut former avec n filles et m garçons).

D'après les auteurs, le "produit de mesures" pourrait s'analyser comme un double "isomorphisme de mesures". Réciproquement, dans le cas de la vitesse uniforme ($d = v \times t$), l'"isomorphisme de mesures" pourrait s'analyser comme un "produit de mesures".

Néanmoins, les auteurs estiment qu'il est intéressant de distinguer ces deux structures :

- d'une part, pour faire une analyse aussi fine que possible des différentes classes de problèmes.

- d'autre part, parce que leurs études sur les "structures multiplicatives" (1 et 2) ont montré que le "produit de mesures" était une structure plus complexe que "l'isomorphisme de mesures".

2.2 Celui de la "proportionnalité multiple ordinaire" :

Exemple : la consommation de mazout en fonction du temps et du nombre de radiateurs. Du point de vue mathématique, on est aussi en présence d'une fonction bilinéaire par rapport à 2 variables, mais G. Vergnaud pense qu'il faut distinguer cette structure de celle du "produit de mesures".

En fait, toute fonction bilinéaire par rapport à 2 variables est par définition linéaire par rapport à chacune d'elles : on peut donc, à partir d'un problème de proportion multiple, obtenir un problème de proportion simple en fixant une des variables. Mais les auteurs de 1 et aussi de 12 pensent que cela ne suffit pas à décrire complètement une situation de proportion multiple. On peut aussi dire qu'en fixant le résultat, on obtient une situation de proportion inverse, qu'en "égalant" les 2 variables, on obtient une situation de proportion au carré (Aire du carré par rapport à celle du rectangle).
Les auteurs de 12 estiment que "les cas de portionnalité étudiés classiquement sont souvent des cas de proportionnalité multiple où l'on se refuse à faire varier plus d'une variable en même temps".

B) Procédures de Résolution des problèmes : (d'après 1).

a) Analyse a priori

On a vu qu'un problème de proportionnalité pouvait être analysé :

- Soit en considérant l'expression analytique de la fonction linéaire : $x \to ax$: c'est l'aspect fonction qui mène à la recherche du coefficient de proportionnalité a.

- Soit en considérant les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire : c'est l'aspect isomorphisme.

Ces deux analyses, complémentaires l'une de l'autre, permettent aussi de distinguer différentes procédures de résolution d'un problème type "règle de trois" ; chaque procédure retenant certaines caractéristiques du problème :

A partir d'un tableau $\begin{array}{c|c} a & b \\ c & x \end{array}$ représentant un problème type "règle de trois", les auteurs de 1 distinguent 2 types de procédures :

- Dans la procédure de type scalaire, ils retiennent que "la relation entre x et b est la même que la relation entre c et a" : $\frac{x}{b} = \frac{c}{a}$

$$\times\frac{c}{a} \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ c & x \end{array} \right) \times\frac{c}{a}$$

$\frac{c}{a}$ peut être déterminé soit par un calcul direct, soit par des décompositions du type $c = \lambda_1 a + \lambda_2 a$

$\frac{c}{a}$ est un rapport sans dimension (ou scalaire).

Si $\frac{c}{a}=3$, dire que c est 3 fois plus grand que a résume une situation additive : $c = a + a + a$ et a du sens dans le cadre des grandeurs.

Cette procédure est basée sur la propriété d'isomorphisme multiplicatif : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Elle n'explicite pas le coefficient de proportionnalité.

- Dans la procédure de type fonction, les auteurs retiennent que "la relation entre x et c est la même que la relation entre b et a" : $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ c & x \end{array} \quad \begin{array}{l} a \xrightarrow{\times b/a} b \\ c \xrightarrow{\times b/a} x \end{array}$$

Cette procédure explicite le coefficient de proportionnalité α : on a $\alpha = \frac{b}{a}$

. Si a et b désignent les mesures de 2 grandeurs distinctes v et v' (une unité de mesure u ayant été choisie pour v, de même u' pour v'), le

nombre α est alors la mesure d'une grandeur quotient avec l'unité u'/u - (exemples : la vitesse, la masse volumique, etc...)
L'unité quotient dépend des unités avec lesquelles on a mesuré les grandeurs v et v' : par exemple, la vitesse peut être mesurée en km/heure, mais aussi en mètre/seconde et on a : 1 m/s = 3,6 km/heure.

. Si a et b désignent les mesures d'une même grandeur v : c'est le cas dans les problèmes d'échelle ou de pourcentage. Alors, si v est mesurée avec la même unité, la grandeur quotient est un nombre. Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité α est aussi un nombre.
Les auteurs de (12) font remarquer que si v et v' sont 2 grandeurs distinctes et si α est un entier, par exemple $\alpha = 3$, dire que b est 3 fois plus grand que a n'a de sens que dans le cadre numérique. En effet, si v' est une distance et v une durée, cela ne signifie pas que la distance b est égale à 3 fois la durée a mais seulement que la mesure de v' (en km) est égale à 3 fois la mesure de v (en heures).
La multiplication par α n'est donc pas une addition répétée dans le cadre des grandeurs, alors que, dans le cadre numérique, elle peut l'être lorsque α est un entier naturel.
Les auteurs de (12) remarquent aussi que la grandeur quotient α peut être familière aux élèves (km/h, F/kg...). Mais, dans ces mêmes cas, la grandeur quotient $1/\alpha$ l'est beaucoup moins. Pourtant, dans le cadre numérique les coefficients $\frac{1}{\alpha}$ et α jouent des rôles analogues. L'aspect fonction introduit donc une dissymétrie entre les rôles des deux grandeurs. Cela disparaît si on en reste à la formulation numérique sans chercher à traduire les calculs dans le cadre des grandeurs.

b) Analyse a postériori

L'analyse des procédures de résolution effectivement utilisées par les élèves dans un problème conduit à distinguer d'autres procédures. En particulier :

- La procédure "valeur unitaire" qui utilise à la fois l'aspect isomorphisme (calcul de $f(1) = \frac{1}{a} f(a)$) et l'aspect fonction (calcul de $\frac{b}{a}$)

- La procédure "règle de trois" qui consiste à calculer d'abord le produit $b \times c$ puis à diviser par a . Hors du cadre numérique, ces calculs n'ont aucun sens.

L'utilisation de ces différentes procédures par les élèves montre comment ils perçoivent, de façons très diverses, les données du problème et les relations entre ces données.

C) Cas particuliers des problèmes de pourcentage : (d'après (7))

Les problèmes de pourcentage entrent dans le cadre général des problèmes de proportionnalité, mais leur résolution présente sans doute des difficultés spécifiques. Dans son étude sur Pourcentages, P. Buisson propose une classification des problèmes de pourcentages.
Après avoir rappelé les deux aspects :

- Descriptif : "le candidat X a obtenu 25 % de voix"

- Fonctionnel : "Calculer 25 % d'un prix"

il propose de distinguer

1°) Les trois problèmes élémentaires de pourcentage :

a) Calcul de l'image :

$$x \xrightarrow{\times a\%} ?$$

b) Calcul de l'antécédent :

$$? \xrightarrow{\times a\%} y$$

Dans les 2 cas :

. le pourcentage a% est donné : c'est le coefficient de proportionnalité.
. le calcul de l'image se fait par une simple multiplication.
. le calcul de l'antécédent se fait à l'aide d'une division en résolvant une équation ou en déterminant l'opérateur inverse.

c) Calcul du pourcentage :

$$x \xrightarrow{?\ \%} y$$

Cela revient à chercher la "quatrième proportionnelle" :

x	y
100	?

2°) Problèmes de hausse et de baisse

Augmenter un nombre de 10 % revient à le multiplier par 1,1 : la résolution d'un tel problème est facilitée dès qu'on a remarqué l'existence d'un opérateur multiplicatif entre la valeur initiale et la valeur finale.

3°) Composition d'opérateurs multiplicatifs

Deux hausses successives de 10 % ne se traduisent pas par une hausse de 20 % mais de 21 %.
De même, une inflation mensuelle de 1 % ne se traduit pas par une inflation annuelle de 12 %, mais de 12,7 %.
De tels problèmes nécessitent la composition d'opérateurs multiplicatifs, ce qui se traduit par le produit des coefficients.

4°) Problèmes divers

Au premier janvier 1977, le taux de la T.V.A., pour certains articles, a été ramené de 20 % à 17,6 %. La baisse des prix correspondante est alors de 2 % et non de 2,4 % car la baisse de 2,4 porte sur 120 et non sur 100.
Cet exemple montre que certains problèmes de pourcentages sont assez complexes.

P. Buisson conclut en disant que la résolution des problèmes de pourcentage nécessite des connaissances acquises en cours de troisième : langage des variables et résolution d'équation d'une part, nombres réels d'autre part.

Seul le pourcentage descriptif ne nécessite que la compréhension de la structure multiplicative.

II - COMPORTEMENTS DES ELEVES.

Partie 1 : Ecole Elémentaire et 1er cycle des collèges.

A) Procédures

a) Evolution des procédures à l'Ecole Elémentaire (d'après (9))

Le travail de G. Ricco sur "les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire" a mis en évidence la hiérarchie des stratégies utilisées par les enfants de 7 à 11 ans lors de la résolution de problèmes de multiplication et de division.

Initialement, ces stragégies respectent certaines propriétés de la fonction linéaire (croissance et univocité à droite), mais ignorent la proportionnalité.

La notion de constante n'apparaît nettement qu'au cours élémentaire 2ème année (9 ans). Elle est liée soit à un opérateur additif (écarts constants), soit à un opérateur multiplicatif (procédure de type fonction). La procédure de type scalaire n'est employée que plus tardivement.

La proportionnalité est donc progressivement prise en compte par les enfants en même temps que la notion de rapport constant.
Cette étude montre également que les procédures conduisant à l'échec contiennent des éléments qui peuvent conduire à la réussite : par exemple, l'utilisation de certaines propriétés de la fonction linéaire, en particulier la croissance.
En cela, elle rejoint les conclusions de G. Vergnaud ((2)) à savoir que les enfants, lorsqu'ils échouent, font des tentatives qui révèlent une certaine rationnalité sur laquelle les maîtres pourraient s'appuyer.

b) Procédures utilisées dans le premier cycle (d'après (1) et (2))

Les recherches de G. Vergnaud ((1)) sur les "structures multiplicatives" semblent indiquer que la procédure scalaire est toujours plus employée que la procédure fonction, même dans les cas où elle est moins "simple".
Cette prédominance des procédures scalaires semble aussi attestée dans une expérience didactique de A. Rouchier et Al. faite en classe de quatrième ((4)) :

Les élèves avaient à compléter un tableau donnant les distances parcourues par un train à vitesse constante en fonction du temps.

A aucun moment, la constante de vitesse n'a été formulée par les élèves. Ils ont rempli le tableau en utilisant uniquement les propriétés d'isomorphisme.
D'après ces recherches, il semble donc que l'aspect isomorphisme soit l'aspect le plus naturellement utilisé par les élèves du premier cycle dans la résolution

d'un problème de proportionnalité.

Cela semble en contradiction avec les recherches de G. Ricco à l'Ecole Elémentaire (9) où elle constate que l'utilisation de l'aspect fonction est antérieure à celle de l'aspect isomorphisme : en effet, celle-ci n'apparaît qu'au cours moyen.

Cette apparente contradiction est-elle dûe à une évolution des procédures utilisées par les élèves entre l'Ecole primaire et le premier cycle ?

Selon R. Douady (11), il n'y a pas toujours prédominance de la procédure scalaire sur la procédure fonction : les élèves détermineraient plutôt leur choix de procédure selon la facilité ou la difficulté technique à calculer le rapport scalaire ou le rapport fonction. Ce sont donc les domaines numériques de ces rapports qui sont en jeu. Quand le rapport fonction est "simple" (entier naturel ou même fraction simple, par exemple $\frac{1}{2}$), la majorité des élèves utilise la procédure fonction (cf. test sur le puzzle dans (11)). Les variables numériques constituent donc une variable didactique à la disposition de l'enseignant pour favoriser ou au contraire bloquer une procédure.

Les recherchers de G. Vergnaud (2) ont également montré que dans un problème de double proportionnalité, certaines procédures canoniques apparaissent nettement plus "naturelles" que d'autres pour les enfants. En particulier :

- Les procédures faisant intervenir un calcul intermédiaire sans signification physique sont très rares.

- Dans le cas d'une double proportionnalité par rapport au temps, c'est la procédure qui consisteà multiplier en second lieu par le temps qui est largement majoritaire.

B) Difficulté relative des deux structures : "Produit de Mesures" et "Isomorphisme de mesures".

Les mêmes recherches sur les "structures multiplicatives" (1) et d'autres plus récentes de G. Vergnaud, A. Rouchier et Al. sur le volume (3) ont montré que pour les auteurs la structure de "produit de mesures" (dont le volume est un exemple) est complexe, plus complexe que celle d'"Isomorphisme de mesures".

En effet, le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle s'avère très difficile en 6e, même lorsque ce calcul est demandé explicitement dans une question isolée.

Par contre, la difficulté est moins grande pour des questions isolées faisant intervenir un "isomorphisme de mesures".

Les récentes recherches sur le volume, menées dans le premier cycle du second degré, ont montré l'extrême difficulté, pour les élèves, des propriétés de trilinéarité du volume.

Les représentations erronées du volume sont de type "périmètre" ou de type "surface".

Elles traduisent sans doute un modèle additif du volume (décomposable en couches) ou un modèle géométrique (ensemble d'arêtes ou de surfaces).

Les élèves essaient de tenir compte des trois dimensions, mais ne se représentent par correctement la composition multiplicative de ces dimensions.

C) Rôle des domaines de référence, et de la complexité relative des questions

1°) Domaines de référence (différentes disciplines)

Dans une enquête faite en classe de 5ème par F. Pluvinage et C. Dupuis (8), chaque élève a été interrogé sur des problèmes de proportionnalité soit en physique, soit en géographie, et également en Mathématiques.

Les résultats montrent que des questions analogues obtiennent des résultats analogues d'une discipline à une autre. Et même, quand il y a une légère différence, ce serait plutôt en défaveur des mathématiques.

Il y a donc cohérence des résultats entre différentes disciplines.

2°) Complexité relative des questions

a) Différentes formes d'une même question

Cette même enquête a révélé des variations importantes de résultats pour différentes formes d'une même question :

Exemple :

A la question : résoudre $12 \times x = 36 \times 13$ on a 78 % de réussite mais à la question : résoudre $\frac{12 \times x}{36} = 13$, le taux de réussite tombe à 18 %.

Il semble que beaucoup d'élèves suivent pas à pas les opérations présentées par l'énoncé écrit, sans voir les simplifications possibles.

b) Difficultés cumulées

Cette enquête ainsi que les travaux de G. Vergnaud en classe de 6ème (2) montrent que l'addition de deux petites difficulutés peut être unedifficulté considérable :

- le fait de devoir construire un résultat intermédiaire est une grande difficulté à ces niveaux (6ème - 5ème),

- les questions comportant un seul calcul sont relativement bien réussies, mais, si on demande en plus une comparaison des résultats, le taux de réussite chute,
- une question, insérée dans un problème "complexe", est nettement moins bien réussie que la même question, posée isolément.

D) Difficultés d'interprétation d'un Graphique

Une représentation graphique peut être un outil pour reconnaître une situation de proportionnalité. Mais elle peut aussi présenter un caractère opératoire immédiat (Détermination du point de croisement de 2 mobiles, de la formule la plus avantageuse pour le prix d'un taxi (avec prise en charge ou non), etc...).

La situation "les trains" proposée par A. Rouchier et Al. (4) à des élèves de 4ème tendrait à montrer que l'interprétation d'un graphique est un problème très difficile pour la grande majorité des élèves :

La représentation graphique et la relation fonctionnelle $d = f(t)$ ne sont pas mises en rapport : il y a confusion entre la trajectoire et la représentation du mouvement.
Un élément d'explication de ces difficultés pourrait être de dire que les graphiques ne sont pas introduits assez tôt dans le cursus scolaire : un travail explicite sur les graphiques[1] à l'école primaire permettrait peut-être une meilleure réussite des élèves dans le premier cycle, dans la mesure où le temps de familiarisation serait plus long. L'apprentissage se ferait ainsi dans la durée.[1]

Cette expérience de A. Rouchier et Al. montre en même temps que la notion de vitesse moyenne, pourtant manipulée implicitement, est une notion difficile. En effet, la vitesse est une grandeur quotient, pouvant se mesurer dans différentes unités quotients (km/heure, mètre/seconde).
Son étude ne peut se restreindre au cadre numérique. Les aspects dimensionnels et graphiques doivent aussi être pris en compte.

(1) en interaction avec d'autres concepts (cf. 11).

Partie II : Second cycle des lycées et Ecoles Normales.

Toutes les Recherches citées précédemment ont été faites dans le premier cycle du second degré, et plus particulièrement en sixième et cinquième.
Il y a peu de travaux concernant le second cycle, sans doute parce que la notion de proportionnalité est censée y être acquise.
Pourtant, la résolution de problèmes de pourcentages est source de grosses difficultés chez les élèves du second cycle.

En effet, l'enquête de P. Buisson (7) menée en particulier dans des classes de première, seconde et terminale montre que :

- Sauf en terminale C/D, le calcul d'un pourcentage d'augmentation est plutôt mal réussi.

- Dans des problèmes de composition de pourcentages, un bon quart des élèves du second cycle ajoute les pourcentages.

- Face à des questions plus difficiles (calcul d'une baisse des prix consécutive à une baisse du taux de la T.V.A.), il y a beaucoup de non-réponses, même en Terminale C.

Enfin, cette enquête montre que l'apprentissage de l'économie en Terminale B n'influe pas sur les résultats, qui sont plutôt plus faibles qu'en terminale C.

D'autre part dans cette enquête, une étude longitudinale des résultats (de la cinquième à la terminale) révèle deux discontinuités très nettes :

de la cinquième à la quatrième (les résultats de 4ème (resp^{t} de 2nde) sont meilleurs que ceux de 5ème (resp^{t} de 3ème), et de la troisième à la seconde.

L'auteur explique ce fait en disant que c'est en quatrième que les principales notions mathématiques (rapport, équation du premier degré) sont apprises pour la première fois.
On peut aussi proposer une explication sociologique à ces deux discontinuités : la fin de 5ème et la fin de 3ème sont des endroits où beaucoup d'élèves sortent du système éducatif pour aller vers des formations professionnelles courtes ou vers la vie active. Ce ne sont donc plus les mêmes populations que l'on compare et on peut ainsi expliquer que les résultats de 4ème soient nettement meilleurs que ceux de 5ème (de même que les résultats de 2nde soient meilleurs que ceux de 3ème).

Une autre enquête (de F. Carayol 6) en direction des élèves-instituteurs, montre les difficultés de ceux-ci face à des questions de mathématiques, et en particulier face à des problèmes de pourcentages.

Les élèves réussissent mal ces exercices : même en ne tenant compte que des exercices numériques, il y a seulement un tiers de résultats parfaitement exacts.
En particulier, la composition des pourcentages est très mal connue des Elèves-Instituteurs.

Mais le grand intérêt de cette étude est de montrer le comportement des Elèves-Instituteurs par rapport aux notations littérales :
L'introduction de lettres (implicite ou explicite) provoque une augmentation des blocages, des réponses non justifiées, et une diminution importante du taux de réponses justes (il peut tomber de 85 % à 20 %).

L'opposition se fait entre les exercices purement numériques et ceux où, de manière implicite ou explicite, interviennent des lettres.

Enfin, une Enquête de l'I.N.R.P. (10) montre que la notion de proportionnalité reste confuse, même pour des bacheliers amorçant leur formation à l'Ecole Normale.
En effet, pour les 4 questions du test proposé :

1. La taille est-elle proportionnelle à l'âge ?
2. 12 est proportionnel à 4
3. 5 et 7 sont proportionnels à 20 et 28
4. 4,7,11 sont proportionnels à 12, 28, 33

} Vrai ou Faux ?

On note seulement 12 bonnes réponses sur 71.

En particulier :

18 sur 71 répondent oui à la première question, confondant sans doute les notions de proportionnalité et de croissance,

47 sur 71 répondent oui à la deuxième question alors qu'à la question "13 est-il proportionnel à 7 ?", ils répondent non.

Il y a sans doute confusion avec la notion de multiple.

III - L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE.

A) Evolution de l'Enseignement de la Proportionnalité.

Si on reprend l'analyse de F. Pluvinage et C. Dupuis (8) il faudrait distinguer trois grandes périodes dans l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité à l'Ecole Elémentaire et au début du premier cycle.

1. Celle des "Mathématiques Traditionnelles" où les problèmes de proportionnalité se résolvent par une "règle de trois" : c'est une suite d'opérations présentée généralement sur trois lignes :

Exemple de problème :
"6 cm^3 d'un minerai homogène ont une masse de 25 g.
Quelle est la masse de 15 cm^3 de ce même minerai ?"

La solution était alors présentée ainsi :
Un volume de 6 cm^3 a une masse de 25 g.
Un volume de 1 cm^3 a une masse six fois plus petite : $\frac{25}{6}$ g
Un volume de 15 cm^3 a une masse quinze fois plus grande : $\frac{25}{6} \times 15$ g

Il n'y a pas vraiment apprentissage de la règle de trois, mais plutôt un "dressage".
Le "dressage" se caractérise par le respect de certains rites : solution présentée sur 3 lignes. Emploi de mots clefs "fois plus" - "fois moins".
Il se fait juste après l'apprentissage des opérations sur les nombres décimaux.

2. Celle des "Mathématiques Modernes"
Ce sont les structures qui sont importantes, notamment les structures numériques au détriment du rôle joué par les grandeurs.
Si on reprend le même problème, la solution s'énoncerait :
" la mesure y de la masse (en cm³) du minerai est une fonction linéaire de son volume (en cm³) de mesure x

on a : $y = ax$
pour $x = 6$ $y = 25$ d'où $a = \frac{25}{6}$
donc pour $x = 15$ $y = \frac{25}{6} \times 15$

En fait, peu d'exercices de ce type sont proposés, sinon à titre d'application.

3. Celle des "Mathématiques Concrètes"
On définit des suites finies proportionnelles, le passage de l'une à l'autre se faisant par un opérateur multiplicatif.
La solution du même problème passe par la construction d'un tableau de proportionnalité :

6	25
15	x

A partir de là, plusieurs procédures sont possibles :

- Recherche d'un opérateur
  - interligne
  - intercolonne

- Former une équation en utilisant les produits en croix.

Les exercices proposés sont soit de type "traditionnel", soit purement numériques.

B) Les programmes scolaires actuels : Quelles propositions de modification ? (par les auteurs des recherches)

1°) Analyse des programmes actuels.

Actuellement, l'apprentissage de la proportionnalité commence à l'Ecole Elémentaire (CM_1 et surtout CM_2) et se termine en cinquième.
Au cours Moyen, les programmes recommandent de mettre en évidence la proportionnalité et d'utiliser les propriétés de l'isomorphisme linéaire, sans formalisation, dans la résolution de problèmes (problèmes de pourcentages, de conversion, d'échelle ...)

En sixième, il est fait mention de "Suites finies proportionnelles - Calculs de pourcentages - Exercices de changement d'unité".
En cinquième, l'étude se fait en liaison avec les grandeurs (Volume - Masse volumique - Vitesse - Débit ...)

Dans les deux autres classes du premier cycle, la proportionnalité n'apparaît plus en tant que telle :

Pourtant, en quatrième, on propose d'étudier des exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré et en troisième, d'en faire une étude plus systématique et de travailler sur des "exemples variés de problèmes du premier degré".
Or les problèmes de pourcentages sont des exemples de problèmes du premier degré.
C'est également en troisième que l'on aborde les applications linéaires et affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et leurs représentations graphiques.

D'autre part, on peut remarquer qu'avec les nouveaux programmes de seconde, l'initiation à la statistique ne peut se faire qu'en s'appuyant sur le pourcentage.

Cette notion est alors considérée comme acquise.
En fait, on peut considérer, d'après les auteurs de (12) que les situations de proportionnalité apparaissent très tôt dans la scolarité des élèves : en effet, l'aspect élémentaire de la multiplication comme somme itérée fait déjà apparaître une propriété de l'isomorphisme :
Ils prennent deux exemples :

1) "Une mère de famille veut offrir 5 bonbons à chacun de ses 3 enfants. Combien de bonbons achètera-t-elle ?

2) J'achète 3 kg de pommes de terre à 5 F le kg. Combien vais-je payer ?"

Dans les deux cas l'écriture $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ est parfaitement adaptée.
Mais dans le 1er cas, il s'agit de grandeurs discrètes. Si on fait varier les données numériques, on peut utiliser une écriture analogue.
Par contre, dans le cas 2), si on fait varier les données, par exemple 3,275 kg et 5,80 F le kg, on ne peut plus réduire la multiplication à une suite d'additions (sans changer les unités).

Finalement, les programmes scolaires actuels consacrent une place au concept de proportionnalité, mais seulement jusqu'en cinquième, c'est-à-dire jusqu'à l'âge moyen de treize ans.

2°) Propositions de modification

Or, les Recherches de G. Vergnaud et Al. ((2)) ont montré que les élèves de sixième sont encore loin de maîtriser les structures multiplicatives élémentaires.
G. Vergnaud propose donc de prolonger, pendant une bonne partie du premier cycle secondaire, l'étude de ces structures, en prenant comme base les connaissances non négligeables des élèves.

a) Un exemple de "produit de mesures" : le Volume

D'autre part, les récentes recherches sur le Volume ((3)) ont montré la difficulté de ce concept :
En effet, le volume est à la fois une grandeur physique unidimensionnelle (qui se prête à des comparaisons, des mesures, des sommes) et une grandeur tridimensionnelle (c'est une fonction trilinéaire de 3 variables).
C'est l'approche tridimensionnelle qui permet de donner leur sens le plus complet aux formules donnant les volumes usuels qui sont censés être connues et pratiquées en fin de cinquième.

Or d'après ces recherches, les propriétés de trilinéarité, qui justement ne sont guère analysées dans les manuels et dans l'enseignement actuel, sont d'une extrême difficulté pour les élèves du 1er cycle.
Les auteurs pensent donc qu'il ne faudrait pas réduire l'enseignement du volume à une application de formules, mais utiliser la richesse de ce concept à travers ses liens avec d'autres concepts (grandeurs, proportionnalité, fonctions de plusieurs variables ...).

b) Procédures.

Comme on l'a vu précédemment, les recherches de G. Vergnaud et Al. (1) semblent montrer que l'aspect isomorphisme est l'aspect le plus naturellement utilisé par les élèves lors de la résolution d'un problème de proportionnalité.
Or, il semble aux auteurs que les propriétés de l'Isomorphisme linéaire soient encore trop rarement mises en évidence et utilisées dans l'enseignement actuel.
Cela serait en particulier attesté par l'enquête de J. Julo (5) qui proposait à des classes de 6ème un questionnaire de reconnaissance de situations de proportionnalité.
Les résultats semblent indiquer que les propriétés de linéarité sont très peu utilisées par les élèves.

G. Vergnaud et Al. proposent donc de revoir l'enseignement de la proportionnalité au niveau élémentaire et premier cycle de façon à tenir compte des résultats de leurs recherches.

De plus, cet enseignement devrait utiliser la diversité des procédures de résolution d'un problème pour les confronter, les faire comparer, expliciter et pratiquer par les élèves.

c) Exemples.

A propos de son expérimentation didactique sur des contenus relatifs à la proportionnalité, A. Rouchier (4) souligne l'importance des situations - problèmes :
Il pense que c'est à travers la résolution de problèmes que l'élève manifeste sa maîtrise d'un concept. Le découpage entre Mathématiques et Applications des Mathématiques ne lui paraît pas forcément intéressant.
Il a donc choisi des situations - problèmes "riches", présentant à la fois des aspects numériques, dimensionnels et fonctionnels.
A partir de là, il a essayé de "créer les conditions d'un début de théorisation en respectant la richesse d'aspects des situations et des concepts".

Dans cette même recherche, il propose aussi de distinguer les différentes sortes de situations - problèmes où la proportionnalité intervient :

- Celles issues de "la vie quotidienne" où deux grandeurs sont proportionnelles : exemple : nombre d'objets et leur prix,

- La proportionnalité permet aussi de construire un modèle mathématique local d'un phénomène physique, biologique, etc ... : allongement d'un ressort, engrenages, ... Il se pose alors le problème de l'adéquation du modèle à la situation physique ou biologique ou ... : exemple : limites de l'élasticité du ressort, ...

- Enfin, elle intervient dans la construction de concepts :

  . produit de deux (ou plusieurs) grandeurs : Aire, Volume,

  . quotient de deux grandeurs : Vitesse moyenne, masse volumique, débit ...

Pour les auteurs, un problème de proportionnalité ne présente donc pas que des aspects strictement numériques ou fonctionnels. Les aspects dimensionnels, liés au rôle des grandeurs, ne sont pas moins importants.
De plus, il leur paraît difficile de séparer le concept de proportionnalité d'autres concepts : par exemple, ceux de fractions et de décimaux.

D'autre part, au cours de l'analyse des résultats de leur enquête, F. Pluvinage et C. Dupuis (8) posent le problème de la contrainte des énoncés écrits : ceux-ci apparaîtraient, pour beaucoup d'élèves, comme "des déterminants d'une suite rigide d'opérations". Ils préconisent alors des exercices de transformation d'énoncés, de confection d'énoncés qui pourraient être d'un grand intérêt dans l'enseignement.

C) Hétérogénéité des classes

Cette hétérogénéité a été mise en évidence, entre autres, dans l'enquête de F. Pluvinage et C. Dupuis où les résultats sont très variables d'une classe à l'autre.
En particulier, la différence entre la classe qui apparaît comme "nettement meilleure" et les autres correspond à un nombre important d'utilisations de tableaux de proportionnalité.
Cette liaison entre de bons résultats et l'utilisation d'un tableau de proportionnalité apparaît aussi dans l'enquête de J. Julo (5).

Ces résultats ont amené les auteurs à réfléchir sur le rôle des tableaux de proportionnalité. Le recours à ces tableaux est évidemment très lié à l'enseignement reçu.

F. Pluvinage et C. Dupuis pensent que ces tableaux peuvent constituer une aide efficace à la résolution de problèmes de proportionnalité dans la mesure où ce sont des Intermédiaires.

La résolution d'un problème se ferait alors en deux étapes :

1°) Reconnaissance d'une situation de proportionnalité. On pose

2°) Le tableau ne contient plus qu'une information numérique (indépendamment des grandeurs en jeu).

Résolution de ce problème numérique.

Bien sûr pour les auteurs, l'utilisation de ces tableaux ne doit pas être systématique; elle doit correspondre à une "compréhension du problème".
Il ne faudrait pas recréer un mécanisme identique à celui de la "règle de trois".

D) Rôle du "Modèle" Mathématique (J. Julo 5).

Dans sa Thèse de Psychologie J. Julo a essayé de voir dans quelles conditions les élèves avaient recours au "modèle" mathématique lors de la résolution de problèmes de proportionnalité.

Sa première conclusion est que la connaissance du "Modèle" mathématique n'est pas une condition nécessaire pour résoudre le problème : en effet, certains élèves de 6e, n'ayant pas encore reçu d'enseignement de la proportionnalité réussissent tout de même.
On peut remarquer que ces élèves ont sans doute reçu un enseignement de la proportionnalité à l'Ecole Elémentaire, au cours moyen, et ont pu l'utiliser lors des épreuves.

Sa deuxième conclusion est que l'enseignement a un effet "non négligeable" sur la capacité des élèves à résoudre le problème (le taux de réussite passe de 49 % à 60 %). Mais cet effet n'est pas le même pour toutes les modalités du problème.
Il est plus important pour les modalités qui incitent davantage à utiliser le modèle mathématique : par exemple, le changement dans l'ordre d'énumération de deux suites de nombres mesurant des grandeurs proportionnelles.

Enfin, la complexité du coefficient de proportionnalité est un facteur déterminant au niveau de la capacité à résoudre le problème : pour un coefficient fractionnaire, il y a supériorité très nette des élèves ayant compris le modèle mathématique.

Cela est beaucoup moins sensible pour les autres coefficients (entiers ou décimaux).
Finalement, les élèves auraient recours aux connaissances mathématiques seulement dans certains cas, lorsque les procédures "immédiatement" disponibles ne marchent pas.

Ce recours au modèle mathématique serait donc imposé par la difficulté du problème.

Bibliographie

(1) VERGNAUD Gérard, RICCO Graciela, ROUCHIER André et al :
Acquisition des "structures multiplicatives" dans le premier cycle du second degré.
IREM d'ORLEANS RO n°2 (1979).

(2) VERNAUD Gérard, RICCO Graciela, ROUCHIER André et al :
Quelles connaissances les enfants ont-ils des structures multiplicatives élémentaires ? un sondage.
Bulletin de l'A.P.M. n°313 - Avril 1978. (331 - 357)

(3) VERGNAUD Gérard, RICCO Graciela, ROUCHIER André :
Didactique et Acquisition du concept de volume
R.D.M. Vol 4.1. 1983.

(4) ROUCHIER André et Al :
Situations et Processus didactiques dans l'Etude des nombres rationnels positifs.
R.D.M. Vol 1.2 (1980)

(5) JULO Jean : Acquisition de la proportionnalité et résolution de problème - Thèse de 3e cycle (1982) IREM de RENNES.

(6) CARRAYOL Françoise : Comportements d'Elèves et de futurs maîtres de l'Ecole Elémentaire face à des questions de Mathématiques - Thèse de 3e cycle (1983) IREM de TOULOUSE

(7) BUISSON Pierre : Pourcentages : appropriation - transfert
IREM de ROUEN (1981).

(8) PLUVINAGE François, DUPUIS Claire :
- La proportionnalité et son utilisation
IREM de Strasbourg.
RDM Vol 2.2 (1981)

(9) RICCO Graciela : Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'Enfant de 7 à 12 ans.
Un article est paru dans E.S.M. (Educational Studies in Mathematics).

(10) ERMEL Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CM Tome 3 SERMAP / HATIER.

(11) DOUADY Régine : Thèse d'Etat en Didactique des Mathématiques : Jeux de cadres et dialectique outil - objet dans l'enseignement des mathématiques - Article dans Recherches de didactique des mathématiques Vol 1.1.

(12) Texte de la COPREM (Mars 1984) : "l'enseignement de et autour de la proportionnalité"