i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

INTRODUCTIONS DE LA MULTIPLICATION A L'ECOLE PRIMAIRE : HISTOIRE, ANALYSES DIDACTIQUES, MANUELS ACTUELS.

PAR D. BUTLEN

cahier de didactique des mathematiques

numéro 19

INTRODUCTION

Nous nous sommes intéressés dans cette étude aux points suivants :

- analyse de l'évolution des programmes de l'école élémentaire de 1880 à nos jours, portant sur l'introduction de la multiplication. Cette analyse ne peut prendre en compte les nouveaux programmes (encore en cours d'élaboration);

- afin de resituer notre recherche dans le cadre des travaux déjà effectués en didactique sur ce sujet, une deuxième partie est consacrée à ces études dont nous essayerons de dégager les grandes lignes;

- de même, nous sommes amenés à étudier le point de vue des manuels en usage actuellement en CE 1.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaires 1ère année. Toutefois il nous a paru nécessaire, sans pour autant en faire une étude approfondie, de replacer cette notion dans le cadre plus général de l'introduction de la multiplication au CE.

Nous suivrons donc le plan suivant :

1°) Evolution des programmes de l'école élémentaire de 1880 à nos jours.

2°) Analyse des recherches effectuées en didactique des mathématiques et portant sur l'introduction de la multiplication.

3°) Analyse comparée d'une dizaine de manuels scolaires, édités après la réforme des programmes de 1978 et actuellement utilisés dans des classes de CE 1.

- LA MULTIPLICATION ET L'ÉVOLUTION DES PROGRAMMES A L'ECOLE ÉLÉMENTAIRE (1882-1980)

La multiplication et l'évolution des programmes de l'école élémentaire

Sans faire ici une analyse approfondie de l'enseignement de la multiplication de 1880 à nos jours, analyse qui nécessiterait notamment une analyse de manuels de l'époque, nous nous contenterons de noter à travers l'intitulé des programmes officiels de 1882 à 1980, l'évolution de cet enseignement.

Pour cela nous étudierons les programmes arrêtés

- en 1882-1887
- le 20 juin 1925
- les 17/10/1945 et 7/12/1945
- le 2/1/1970
- les 7/7/1978 et 7/7/1980 (voir annexe).

1°) programmes de Calcul - Arithmétique - Géométrie et Commentaires de 1882 et 1887.

L'enseignement de la multiplication dans $\mathbb{N}$ commence dès la "classe enfantine" (5 à 7 ans), elle porte sur des nombres à deux chiffres. Au Cours élémentaire (7 à 9 ans), le programme cite explicitement l'apprentissage et l'étude de la table de multiplication", de la multiplication en calcul écrit et indique qu'il faut traiter "de petits problèmes oraux ou écrits portant sur les sujets les plus usuels; (d') exercices de raisonnement sur les problèmes et sur les opérations exécutées".

Les programmes de cours moyen prévoient une révision du cours élémentaire et une "application des quatre règles règles aux nombres décimaux".

Aucune allusion n'est faite quant à la nécessité d'un travail particulier sur le sens des opérations sinon par l'étude de problèmes.

En 1904, dans le Manuel du Certificat d'Aptitude Pédagogique (Brossard Deferdon) - (Editions Hachette), les auteurs proposent de recourir pendant la période d'initiation "au sens", de faire voir, de faire toucher et surtout d'intéresser. C'est ainsi qu'on se servira d'objets matériels. Ils précisent que les "enfants doivent être accoutumés à opérer vite", mais engagent les maîtres à "les accoutumer à se rendre compte de leurs opérations". Ces conseils portent toutefois sur l'explication des règles de calculs et non sur le sens d'une écriture multiplicative (...). Pourquoi dans la multiplication, on recule le deuxième produit partiel d'un rang vers la gauche; (...). Donc, de la théorie : seulement de la théorie à la portée des enfants" (SIC).

Ils soulignent la nécessité de faire beaucoup d'applications à partir de problèmes usuels.

2°) Programmes et instructions officielles du 20 juin 1925.

Ces programmes prévoient un temps plus long pour l'apprentissage de la multiplication :

- . Section préparatoire (6 à 7 ans) : "Multiplier par 2, par 3, par 4"
- . Cours élémentaire (7 à 9 ans : "Calcul oral : table de multiplication. Les quatre règles appliquées à des nombres inférieurs à cent.
  Calcul écrit : les quatre règles appliquées à des nombres peu élevés"
- . Cours moyen (9 à 11 ans) : "Calcul et arithmétique : application des quatre règles à des nombres plus élevés qu'au cours élémentaire. Pratique des quatre opérations sur les fractions ordinaires dans des cas numériques très simples".

Les Instructions officielles accompagnant le programme mettent l'accent sur l'importance des manipulations : "Partout l'opération manuelle précède l'opération arithmétique; l'expression du langage courant précède l'expression du langage mathématique. Partout, le souci de marquer que l'enseignement doit être concret, simple, progressif".

De même, elles privilégient la pratique du calcul, à une théorisation de celui-ci, ne servant "qu'à la rendre plus agréable à l'enfant" et à justifier cette pratique.

La nécessité de dépasser ce stade se perçoit dans un rapport rédigé par deux inspecteurs généraux en 1928, Messieurs Marlion et Leconte, sur le calcul à l'école primaire, faisant suite à une enquête effectuée auprès des maîtres. Dans celui-ci, ils témoignent longuement de la nécessité (partagée par certains maîtres) de traiter de la décomposition additive d'un nombre naturel (dès le CP)

- d'aller lentement dans la construction d'un algorithme opératoire,
- de privilégier l'intelligence par rapport à la mémoire.

Notons que si les maîtres de l'époque approuvent dans leur réponse au questionnaire cette conception pour l'addition, ils y sont beaucoup plus réticents et parfois même farouchement opposés en ce qui concerne la multiplication et la division. Cela amène les auteurs à proposer une manipulation d'écritures multiplicatives pour justifier les propriétés de cette opération. Celles-ci étant définies comme écritures plus courtes d'une écriture additive réitérée*

* "La multiplication n'est qu'un cas particulier de l'addition (...). Une pareille addition (58+58+58), dont tous les termes sont égaux, s'appelle une multiplication, le résultat est appelé produit de 58 par 3".

Ils proposent de même la possibilité de construire (et/ou justifier) l'algorithme de la division à partir de la méthode dite des "soustractions successives", et termine leur rapport par la remarque : "il est plus logique d'insister sur de tels sujets, dont l'importance est primordiale, que de se hâter pour arriver plus vite aux problèmes de robinets ou sur les partages par fausses suppositions".(Pages choisies de Pédagogie contemporaine. L. Savard - Editions Delagrave).

3°) Programmes et instructions officielles du 17/10/1945 et du 7/12/1945.

- Cours préparatoire : "exercices et problèmes concrets (...) de multiplication et de division par 2 et 5"
- Cours élémentaire : "Table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication et de la division dans des problèmes simples empruntés à la vie courante. Calcul rapide de la multiplication et de la division par 2 et 5".
- Cours moyen : "usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux". (révision également du programme du CE).

Nous voyons que ce programme "accélère" légèrement l'apprentissage de la multiplication des entiers naturels.
La lecture des instructions officielles montre que l'accent est mis sur
- "rendre à l'enseignement primaire sa simplicité et son efficacité anciennes en ce qui concerne l'acquisition des mécanismes fondamentaux"
- "le fonder davantage sur les faits, sur l'observation personnelle, afin de donner à la jeunesse française "le grand bain de réalisme" dont elle a besoin".
- l'objectif principal est de calculer vite et bien.

Notons que les I.O - soulignent qu'il est inutile de justifier les propriétés des opérations.
- associent le terme multiplier au terme"fois" explicitement.
- appuient sur la notion de nombre concret (lié à une mesure).
- proposent l'apprentissage des tables de multiplication comme un objectif "en soi" du CE.
- proposent une gradation dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication (appelé mécanisme) à savoir = table, multiplication par un chiffre, par 10, 100, multiplication par un nombre de deux chiffres en la décomposant dans un premier temps en deux multiplications (unités, dizaines).

Un paragraphe est consacré à la définition des signes, on peut y lire :

- que "le signe × indique qu'il faut multiplier les nombres qu'il sépare" (la commutativité des termes devant se constater !)
- que "le signe = ne sépare pas deux nombres égaux, ce qui ne servirait à rien; on n'écrit pas 3 = 3. Il sépare l'indication d'une opération et son résultat ou encore l'indication de deux opérations qui ont le même résultat".

Nous voyons que nous sommes très loin ici de la notion d'écritures multiplicatives comme désignation d'un nombre. Si les I.O proposent d'utiliser des damiers comme représentation possible d'un produit, la définition du signe = donnée ci-dessus interdit de penser que l'écriture $a \times b$ puisse désigner un nombre.

Cette question mettra beaucoup de temps à être tranchée, comme en témoigne le rapport du séminaire de Royaumont (décembre 1959) s'intéressant à une réforme de l'enseignement. En effet un point de désaccord étant

- "l'emploi de symboles tels que : 8 + 1, 7 + 2, etc..., comme nouvelles définitions du nombre 9, plutôt que comme opérations" (le problème est ici similaire bien que portant sur des écritures additives).

4°) <u>Programmes et instructions officielles du 2/1/1970.</u>

Le programme de 1970 s'inscrit en rupture complète par rapport au programme de 1945 et notamment sur les derniers points soulevés. La multiplication n'est introduite qu'au cours élémentaire.

. <u>Cours élémentaire 1ère et 2ème année</u> : "Produit de deux nombres, pratique de la multiplication"

. <u>Cours moyen</u> : "Multiplication par 10, 100, 1000 (et division)
"Opérations et leurs propriétés" (dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{D}^+$)" suite d'opérations; pratique des opérations; preuve par 9 des opérations; calcul mental".
"Produit de deux fractions".

Le but de ces programmes n'est plus de préparer à la vie pratique mais "d'assurer une approche correcte et une compréhension réelles des notions mathématiques liées à des techniques de résolution de problèmes. Les instructions officielles font référence à des "situations" d'apprentissage, à la connaissance du développement psychologique de l'enfant, et à des manipulations variées dont l'enfant doit abstraire le concept.

Les mêmes instructions dans le paragraphe (CE) "comparer deux nombres" rétablit le statut du signe " = " : "d'une façon générale lorsqu'on écrit a = b, c'est que les symboles a et b désignent le même objet. En particulier un nombre peut s'exprimer de différentes façons, ex : 6, 2 × 3; 4 + 2; 8 -2; 24 : 4 sont des désignations du même nombre, cela donne le droit d'écrire : 6 = 6; 6 = 2 × 3; 2 × 3 = 4 + 2 etc...".

La multiplication est étudiée dans le sous paragraphe : Opérations, Propriétés Pratique - Multiplication - division exacte du cours élémentaire (I.O).
On y propose d'introduire l'écriture multiplicative 5×8 à partir d'une grille rectangulaire et des écritures additives réitérées $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ ou $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ que l'on écrira par convention 5×8 ou 8×5.
On y définit la multiplication comme application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On y propose de construire les tables de multiplication à partir de table de Pythagore et de manipuler des écritures multiplicatives pour expliciter les propriétés de la multiplication (associativité, distributivité, commutativité...).
Enfin les auteurs proposent de construire des techniques usuelles opératoires à partir de découvertes et synthèses effectuées par les élèves.

5°) Programmes et instructions officielles du 7/7/1978.

a) Programmes

CE : " 1 - Ecrire et nommer les nombres : (...)

" Maitriser l'utilisation et le sens de l'égalité en travaillant sur des écritures différentes désignant le même nombre"

" 2 - Comparer les nombres : "Savoir comparer des nombres écrits sous les différentes formes obtenues en 1".

" 3 - Calculer sur les nombres : "Pour construire les techniques opératoires, savoir transformer les écritures additives, multiplicatives et soustractives en utilisant les propriétés des opérations, savoir utiliser les parenthèses.
Elaborer des techniques opératoires (mentales ou écrites) pour (...) la multiplication".

CM : Le programme prévoit un approfondissement de ces notions, de plus il étend cette étude et les opérations aux décimaux positifs.

b) Instructions officielles (cours élémentaire)

Ces programmes renforcent (par rapport au précédents) l'étude des écritures d'un nombre, notamment l'étude des écritures multiplicatives. Celles-ci permettant de désigner un nombre dont on ne connait pas forcément l'écriture réduite. Ils proposent d'introduire les écritures multiplicatives à partir de représentations de collections organisées en grilles rectangulaires, dans le but de donner un sens à ce type d'écritures, de préparer la construction d'algorithmes opératoires, de "renforcer l'utilisation du signe égal", d'élaborer des répertoires (notamment multiplicatif) d'égalités qui seront par la suite et progressivement organisées en table de Pythagore.

Dans le chapitre consacré aux techniques opératoires, les auteurs exposent que "la justification (des techniques opératoires) nécessite un travail de transformations d'écriture conscient à partir de l'utilisation plus ou moins explicite des propriétés de ces opérations lors de ces transformations.

Ces transformations pouvant avoir pour point de départ le dénombrement de cases de grilles rectangulaires (voir annexe). Les instructions proposent de construire et/ou de comparer plusieurs techniques opératoires (eventuellement) afin d'arriver à la "maîtrise des techniques opératoires (...) en base dix" (pour le CE).

L'accent est mis sur la nécessité d'une construction progressive de techniques de calcul et sur la diversité de ces techniques.

6°) Conclusions

Nous voyons que l'on peut distinguer deux grandes périodes, pré et post 1970. Avant 1970 ("réforme des mathématiques modernes"), l'accent est mis sur l'apprentissage basé essentiellement sur la mémoire d'une technique opératoire, on ne s'intéresse pas (ou peu) à la justification, à la construction de cette technique, de plus les différentes désignations d'un même nombre (écritures additives, multiplicatives...) ne sont pas un objet d'enseignement, elles sont même considérées comme dangereuses dans les programmes de 1945.
Après 1970, ces programmes ont pour souci de donner les moyens, par un travail sur des représentations graphiques et sur les écritures multiplicatives, aux enfants de construire et de maîtriser une ou plusieurs techniques opératoires de la multiplication; de même ils mettent l'accent sur l'étude des propriétés de cette opération. Le programme de 1978 semble privilégier un type d'introduction, celui utilisant les découpages de grilles rectangulaires et le dénombrement de leurs éléments, semble privilégier une définition graphique de l'écriture $a \times b$ par rapport à la définition utilisant l'addition réitérée (aucune référence n'est faite à ce type d'écriture dans les I.O de 1978). Un lien étroit

est fait avec la numération.

Cette évolution est due d'une part à la réflexion générale qui a eu lieu lors de la réforme des "mathématiques modernes" et d'autre part à l'apport des recherches en didactique (notamment les travaux de l'I.R.E.M. de Bordeaux).

Terminons par les résultats d'une enquête effectuée par le Ministère de l'Education Nationale en 1980 (annexe I).

Cette enquête montre que les instituteurs accordent beaucoup d'intérêt à la notion des nombres, toutefois s'ils jugent essentielle l'acquistion des mécanismes opératoires au CM 2, ils ont une opinion plus partagée sur l'utilité d'une réflexion sur les propriétés de ces opérations et sur la maîtrise réfléchie de ces mécanismes.

Cette même enquête montre que les professeurs de 6ème ne jugent pas indispensable la reconnaissance des écritures additives ou multiplicatives d'un nombre et les savoirs sur les propriétés d'association, mais que toutefois ils attendent que les élèves aient à l'entrée en sixième la notion de nombre. De même, cette étude semble montrer que ces professeurs se réservent pour eux-mêmes l'objectif d'apprendre à l'enfant à raisonner (même sur les opérations).

Les élèves de CM 2 ne réussissent que dans une proportion de 1/2 les épreuves relatives aux écritures multiplicatives (voir annexe 1) et dans une proportion de 60 %, les item relatifs au raisonnement sur les mécanismes de la multiplication (opération "à trous").

Les élèves de 6ème ont des résultats identiques sur les écritures multiplicatives et les autres item relatifs aux mécanismes opératoires.

Notons enfin que si les résultats sont satisfaisants (75 % de réussite) sur les entiers, ils chutent lorsque l'on passe aux décimaux (50 %, voire 30 %). La notion de nombre décimal ne semble pas acquise (c'est normal !) au CM 2, de même en 6ème.

ANALYSE DES TRAVAUX EFFECTUES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES SUR LA MULTIPLICATION

1°) La signification sémantique prise par le signe " x " à l'école élémentaire

Dans leurs travaux sur la multiplication et les écritures multiplicatives, les auteurs sont amenés à traiter ce problème de deux points de vues :

- d'une part, quel est l'objet de savoir intervenant dans la définition, proposée aux enfants, du produit de deux naturels (la réponse est unanime : le produit cartésien).

- d'autre part, quels types de situation, la multiplication permet-elle de mathématiser.

Les deux points de vue sont évidemment liés et conduisent à proposer une même série d'activités permettant d'introduire l'écriture $a \times b$, avec toutefois une certaine différence d'appréciation sur la place que doit tenir l'enseignement du produit cartésien, en tant que tel, à l'école élémentaire. Nous allons essayer de cerner les deux points signalés ci-dessus, et d'en montrer l'impact sur les propositions d'enseignement.

a) La place du produit cartésien dans l'enseignement de la multiplication.

Comme nous l'avons signalé plus haut, tous les travaux montrent que la définition du produit de deux naturels découle immédiatement de la définition du produit cartésien de deux ensembles, l'écriture $a \times b$ désigne le cardinal du produit cartésien de deux ensembles ayant respectivement a et b éléments. La multiplication étant alors définie comme une loi de composition interne dans N. La nécessité de clarifier, pour les instituteurs, le statut mathématique de l'écriture $a \times b$, amène, par exemple l'I.R.E.M. de Bordeaux, à exposer une étude théorique (assez simple) de cette notion dans le numéro 10 des cahiers sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. [10] (1972-1973).

Toutefois, cet accord ne se traduit pas toujours de la même façon dans les activités proposées aux élèves lors de l'introduction de l'écriture multiplicative, et cette traduction évolue dans le temps chez les chercheurs eux-mêmes.

Ainsi Guy Brousseau, M. Bourgeois et C. Pezeen 1972-73 dans l'ouvrage cité ci-dessus construisent deux leçons (les deux premières leçons sur la multiplication)

- l'une portant "sur la construction de l'ensemble produit et la désignation de couples" basée sur une activité de communication revenant à repérer une case dans un tableau cartésien;

- l'autre ayant pour but, cité explicitement, de "faire découvrir la compatibilité de la relation d'équivalence (équipotence) avec la multiplication.

Les élèves devant classer une dizaine de tableaux d'après le nombre de cases, dans un premier temps, et dans un second temps, rendre compte de ce classement par l'utilisation d'un codage (en l'occurence l'écriture a × b).

De même l'I.R.E.M. de Grenoble relatant, dans un article publié dans la revue grand $\mathbb{N}$ (numéro spécial CE) [17] des expériences effectuées entre 1973 et 1975 propose des activités de combinatoire et d'ensembles produits, en précisant : "Cette activité n'est pas indispensable pour parvenir à la technique de la multiplication, mais nous pouvons remarquer qu'elle a souvent été abordée dès le CP et que les enfants cherchent spontanément à dénombrer les couples d'un ensemble-produit". Les activités de combinatoire consistent à dénombrer et à représenter (à l'aide d'arbres, de diagrammes sagittaux ou de tableaux à double entrée) le nombre de bateaux que l'on peut former à l'aide de coques de 4 couleurs et de voiles de 3 couleurs distinctes; les activités portant sur les ensembles-produits et leur traduction par l'écriture multiplicative, étant semblables à celles exposées par l'I.R.E.M. de Bordeaux [10].

Le reste des travaux spécifie, plus ou moins clairement, qu'il n'est pas utile d'étudier, en tant que telle, cette notion :

- J. Lecoq dans la revue de l'A.P.M.E.P. consacrée à la multiplication [1] propose, afin de préparer l'étude de la multiplication, de familiariser l'enfant avec des situations pouvant se représenter à l'aide de tableaux à double-entrée, mais signale "qu'il ne s'agit pas ici de mettre en place les concepts de couple et de produit cartésien. Ces notions sont inutiles et prématurées au niveau de la représentation en rectangle que l'on désire mettre en place".

- De même, l'équipe élémentaire de l'I.R.E.M. de Paris-Sud dans la brochure "Nombre à l'école élémentaire" [3] remarque (page 48) : "rattacher la multiplication à la mesure-produit" (nous expliciterons cette notion en b)) "ne suppose pas que l'on ait fait une étude exhaustive du produit cartésien et de ses propriétés (...). Si l'on veut introduire la multiplication à partir de tableaux cartésiens obtenus dans une situation de dénombrement par exemple, ce qui sera important, ce sera de constater que le nombre de cases du tableau ne dépend que du nombre de lignes et de colonnes du tableau : il faudra en quelque sorte oublier son contenu. Mais on peut aussi se passer des tableaux cartésiens, demander aux enfants de dessiner des rectangles et de poser un jeton dans chaque case, les leur faire ranger, découper (...)".

On retrouve cela dans l'ouvrage de G. Deramécourt : " la multiplication au CE", publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux, postérieure à celle déjà citée, [8] qui se prévoit d'aborder l'étude du produit cartésien que dans un chapitre "situation-problèmes" (au CE 1 et au CE 2 que pour l'étude de l'associativité de la multiplication.

Janine Rogalski dans son étude sur l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire" [4] signale que "l'objet de savoir" "produit cartésien" n'est pratiquement pas objet d'enseignement dans l'enseignement élémentaire et du 1er cycle du second degré", elle remarque qu'il "(...) fonctionne comme "connaissance implicite" et non objet d'enseignement", qu'en ce qui concerne "la connaissance de l'enfant, issue de ses activités socio-cognitives générales, prend beaucoup plus de place dans son développement cognitif que la connaissance institutionnalisée". Elle souligne l'importance de l'étude de cette acquisition "spontanée" (prise dans le sens d'une construction extra-scolaire")"pour analyser ce qui se passe dans l'école lors de l'enseignement de notions relevant du champ conceptuel dans lequel on peut situer le produit cartésien".

Ainsi nous constatons que si la multiplication fait directement référence à une modélisation mathématique en terme de produit cartésien, le produit cartésien n'est pas étudié en tant que tel, dans l'enseignement, il prend un statut implicite qui est censé fonctionner lors de la modélisation de situation pouvant s'y référer. Toutes les recherches que nous avons étudiées adoptent donc le même point de vue à cet égard.

b) <u>analyse des situations susceptibles d'être mathématisées à l'aide de la multiplication lors de la présentation de cette notion.</u>

L'ensemble des travaux étudiés montre la nécéssité, et/ou choisissent de présenter la multiplication à partir de situationsoù elle prend un statut de mesure-produit.

Dans "nombres à l'école élémentaire", les auteurs relèvent deux types de situations susceptibles d'être mathématisées à l'aide de la multiplication :

- une situation de type loi externe de $\mathbb{N} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ pouvant se traduire par l'étude de la correspondance entre, par exemple le nombre de tours de manège à 3 francs, le tour et le prix que l'on doit payer pour effectuer ces tours. Situation où la multiplication apparaît comme l'écriture réduite d'une addition réitérée ;

- une situation du type loi interne de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$) qui se traduit par l'évaluation du cardinal de l'ensemble $A \times B$ en fonction des cardinaux de A et B ou par l'aire d'un rectangle en fonction des mesures de ses côtés. Situation où la multiplication est une mesure-produit.

Les arguments légitimant ce choix, sont exposés le plus clairement et le plus complètement par J. Lecoq dans la brochure de l'A.P.M.E.P. [1] qui analyse dans un premier temps l'introduction de la multiplication à partir des additions répétées, dans cette analyse l'auteur considère que cette introduction si elle

...

légitime, n'est pas adaptée aux élèves de CE, et ceci pour les raisons suivantes :

- n et p ne se réfèrent pas à des "objets" de même nature :

$$n \times p = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ termes}} \quad \text{voir } 1$$

  . au niveau manipulatoire : n désigne un nombre d'ensembles, p le nombre d'éléments de chaque ensemble,

  . au niveau numérique : p désigne le nombre qui est répété dans l'écriture $p + p + \ldots + p$ et n le nombre de répétition du symbole "p" ;

- cette différence de nature ne traduit pas et même s'oppose à la commutativité de la multiplication;

- de plus elle conduit à certains abus $p + p + \ldots + p$ s'écrivant $n \times p$ et se lisant "n fois p" et non $p \times n$ désignant $n + \ldots + n$ (et se lisant "p fois n");

- cette présentation introduit des difficultés d'ordre perceptif chez l'enfant qui doit percevoir simultanément trois types d'objets :

  . n collections 2 à 2 disjoints

  . $n \times p$ objets (ou éléments d'une collection)

  . des correspondances un à un (pour s'assurer que les collections sont equipotentes);

- elle ne constitue pas un outil efficace d'exploration, notamment elle ne permet pas de représenter simplement la distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition;

- faute de représentation adaptée, elle conduit à une étude de la multiplication, se situant presque exclusivement au niveau des écritures.

L'analyse précédente conduit l'auteur à présenter la multiplication à partir de situations répondant aux quatre conditions suivantes :

- "lever les critiques formulées" ci-dessus;
- "engager l'activité manuelle et donner un outil - i.e. une représentation - bien adapté au problème étudié";
- "permettre aux enfants (dès le CE 1) de "faire des multiplications"", même sans avoir acquis une technique opératoire affinée;
- favoriser l'élaboration pour ceux-ci de techniques de calcul qui s'amélioreront avec leur pratique, leurs connaissances et leur souci d'économie.

Notons que le choix est le plus souvent exclusif, les travaux ne comportent pas d'activités permettant de relier les deux définitions (exception faite pour l'I.R.E.M. de Paris VII, l'équipe ayant dû tenir compte du fait que la multiplication avait été introduite précédemment à partir d'additions réitérées).

Ce choix conduit généralement à présenter l'introdution de l'écriture $a \times b$ à partir de la situation de communication suivante [8].

Les élèves sont divisés en plusieurs équipes, chaque équipe est scindée en deux groupes : un groupe émetteur et un groupe récepteur. Le groupe émetteur possède une feuille portant des points disposés en rectangle (exemple 7×12) et une bande de papier destinée au message. Le groupe récepteur possède environ six feuilles de points disposés en rectangle, l'une d'elles est identique à une des feuilles du groupe émetteur (exemple : 8×7, 7×10, 9×8, 7×12, 9×12, 12×13) et une boîte de 100 jetons.

Le groupe émetteur doit réaliser un message qui doit permettre au groupe récepteur de choisir parmi les six feuilles, la feuille correspondant à celle du groupe émetteur, et reconstuire à l'aide des jetons une collection correspondant au message. La validation des messages se faisant par confrontation des collections d'objets.

G. Deramecourt (p.8) propose la classification suivante des "bons" messages (ceux comportant une indication exacte sur le nombre d'objets de la collection)

- ou bien ces messages ne sont pas ceux attendus (par exemple ils sont du type 12 + 12 + 12 + ... ou simplement 84) et il propose une reprise de l'activité en précisant les contraintes (il faut des messages plus courts dans le premier cas, ce n'est pas le message le plus rapide à obtenir, ni celui permettant une recherche la plus rapide pour les récepteurs dans le second cas).

- ou bien ces messages utilisent une écriture pertinente (7 lignes de 12, 7 rangées de 12, 7×12, 7 lignes, 12 colonnes) et le maître donne l'écriture correcte utilisant le signe $\times$ et propose (éventuellement) des exercices de renforcement du même type.

Nous analyserons plus en détail cette situation dans le chapitre n°2. Signalons toutefois le rôle joué par le facteur temps dans la production de "bons messages pertinents".

Cette activité est suivie dans [8] et [3] par une activité utilisant des caches, dont le but est de faire prendre conscience aux élèves que le nombre de points d'un tableau rectangulaire est déterminé par le nombre de lignes et le nombre de colonnes. On propose aux élèves des grilles incomplètes (un cache

---

* nous présentons ici l'introduction proposée par G. Deramécourt [8] , les autres auteurs proposent (parfois avec quelques variations), des situations similaires.

masquant une partie des points), ils doivent déterminer le nombre d'éléments de la collection et coder celui-ci sous forme d'une écriture multiplicative, ils ont, selon les cas, la possibilité de se référer à des exemplaires de grilles complètes. Nous analyserons plus précisément cette situation dans le chapitre 3. Ces deux situations inspireront les situations 1 et 2 proposées aux chapitres 2 et 3.

2°) Etude de la période concernant la manipulation d'écritures mutiplicatives indépendamment de la construction de techniques opératoires

Nous avons signalé ci-dessus les situations permettant d'introduire l'écriture a × b, à partir du dénombrement des éléments d'une grille de points rectangulaire. Dans "Nombres à l'école élémentaire" les auteurs avant d'exposer leur point de vue soulignent le fait que la plupart des manuels scolaires suivent une démarche linéaire d'étude de la multiplication à savoir : introduction du signe × - apprentissage d'une technique opératoire et parallèlement du répertoire multiplicatif standard (la table de multiplication), application à l'étude de situations multiplicatives, proportionnalité. Ils notent l'absence de liaison entre multiplication et division, ils optent pour une progression non linéaire, car ils considèrent "qu'avant d'acquérir une technique opératoire, l'enfant doit manipuler le langage" (écritures multiplicatives)" qu'il a construit et expérimentalement se forger un modèle implicite de son fonctionnement". Ils pensent qu'il faut lier (et ceci contrairement aux instructions officielles) multiplication et division, sans pour autant en construire les techniques (du moins immédiatement).

Ces considérations les amènent à proposer deux phases d'activités précédant l'apprentissage d'une technique opératoire.

⟶ Une première phase dont le but est d'assurer la définition de la multiplication dans le cadre où elle a été introduite et de faire trouver et reconnaître par les enfants des écritures équivalentes (afin de faire le lien avec l'addition réitérée).

Cette phase comprend :

. des activités de dénombrement portant sur des grilles rectangulaires et leur traduction par des écritures (additives, multiplicatives ou autres ...);

. la recherche (à partir de l'organisation en grille d'un nombre donné de jetons) des écritures multiplicatives d'un entier donné;

. la résolution de petits problèmes multiplicatifs simples portant sur des objets de même type ou de types différents;

. l'élaboration par les élèves de problèmes multiplicatifs;

. des activités permettant de faire le lien avec la numération en base dix (décomposition polynômiale d'un nombre) ou non décimale (jeu de cible).

⟶ Une deuxième phase constituée par l'étude d'une situation fonctionnelle faisant intervenir la multiplication, la proportionnalité, des représentations graphiques d'applications linéaires, dont le point de départ est l'étude des prix de parking.

Ce souci de lier l'étude de la multiplication notamment à l'étude de la résolution de problèmes multiplicatifs et à la numération est partagé par tous les auteurs de travaux sur cette notion. Toutefois la nécessité du lien à faire entre multiplication et division est plus spécifique de l'I.R.E.M. de Paris VII. Il en est de même, dans une moindre mesure, pour l'importance accordée à l'étude de situations fonctionnelles, ainsi Deramécourt [8] ne fait ce lien que pour le CE 2. Le but de l'I.R.E.M. de Paris VII est, par l'étude de situations fonctionnelles, "de développer une utilisation implicite des propriétés de la structure ($\mathbb{N}$, + , × , < , =) afin de rendre plus économique les calculs, d'enrichir le domaine numérique, de dépasser un point de vue ponctuel (chez l'élève)". [3].

Enfin signalons le souci exposé par Deramécourt 8 , d'une part de faire la distinction entre écriture additive et écriture multiplicative, à partir de l'observation et d'un travail sur des représentations graphiques de collection d'objets et d'autre part de prévoir des activités montrant que l'écriture a × b n'est pas liée uniquement à une représentation sous forme de grille rectangulaire. Signalons à ce propos l'existence d'un didacticiel, élaboré par Jacqueline Mac Aleese, permettant à des élèves de réorganiser sous forme de grilles rectangulaires ("complète" ou non suivant les cas) des nuages de points et de traduire par une écriture faisant intervenir les signes + et × , cette réorganisation.

3°) La construction d'un ou de plusieurs algorithmes de la multiplication

Afin de légitimer les choix pédagogiques effectués par les différentes équipes, sur ce point, nous serons amenés à traiter et exposer les thèmes suivants :

- l'importance du facteur temps dans cette construction et plus généralement dans l'acquisition des structures multiplicatives;

- les difficultés spécifiques de l'apprentissage d'une (ou de plusieurs) techniques opératoires de la multiplication;

- leurs traductions en terme de processus d'apprentissage et d'enseignement, notamment le rôle joué par la construction d'un répertoire multiplicatif (non standard);

a) <u>le temps didactique</u>

Nous avons déjà signalé l'importance de ce facteur lors des situations d'introduction des écritures multiplicatives(cf. chap I § 1 - 1 - b). Nous allons ici souligner un autre aspect : la durée importante nécessitée pour l'acquisition, l'élaboration d'une technique opératoire et plus généralement par l'acquisition des structures multiplicatives.

Tous les auteurs remarquent que la construction d'un ou de plusieurs algorithmes de la multiplication est un travail de longue haleine :

- "Toute construction est dialectique et une technique opératoire est, à un instant donné, le fruit d'un équilibre entre un répertoire et un certain savoir-faire. Cette technique évoluera avec le répertoire et les compétences calculatoires de l'enfant dans un souci d'économie pour aboutir à une forme stable. Si comme cela paraît préconisé, on se lance trop tôt dans l'apprentissage opératoire, une telle construction dialectique se fera mal. La tentation sera grande pour l'enfant de se réfugier dans un apprentissage par conditionnement, sécurisant pour lui, car il aura alors l'impression de répondre au désir de performance de son maître. Dans ces conditions, les propriétés mêmes qui auront servi à la justification de la technique apparaîtront comme tout à fait accessoires. La technique sera le refuge et le moyen d'appréhender la multiplication.

C'est ainsi que l'on voit des enfants au CM poser des opérations comme 240 × 20". ([2], page 187).

- J. Painchault [17] de Grenoble propose d'examiner les tables pendant une période de 3 mois au moins afin d'en découvrir les propriétés.

- G. Deramécourt dans son film "répertoire multiplicatif" [6] rappelle la nécessité de construire lentement un algorithme multiplicatif, dans son document [8] sur la multiplication, il ne propose de construction effective que pour le CE 2. Il en est de même, pour l'équipe de Paris VII [3].

- J. Lecocq 1 remarque que l'apprentissage de la multiplication doit se poursuivre jusqu'à la 5e du premier cycle de secondaire.

- J. Painchault [17] ne propose la construction d'une technique élaborée de calcul, au CE 1, que pour des produits où le multiplicateur est un nombre à un chiffre (c'est d'ailleurs le seul, en dehors de certain manuels scolaires, à proposer ce schéma).

- L'équipe élémentaire de Paris VII propose une construction en 9 phases (voir c)), G. Deramécourt propose une progression s'étalant sur 15 leçons (24 séquences) au CE 1 et de 13 séquences (sans compter les activités portant sur des fonctions ou sur la résolution de situation-problèmes) au CE 2 [8].

En tout état de cause, cet apprentissage doit être repris et complété dans les classes suivantes.

Jeanine Rogalski dans son étude sur l'acquisition de la bidimensionnalité 4 signale que : "De la 6ème à la 4ème alors que la linéarité de la mesure des longueurs est utilisée de façon fiable, la bidimensionnalité de la mesure des surfaces garde un domaine de validité limité". Elle signale toutefois qu'une intervention de longue durée de l'enseignement pourrait produire des effets (modifier la rapidité et/ou l'ordre des acquisitions sur la bidimensionnalité, et de ce fait sur les structures multiplicatives).

b) Etudes didactiques portant sur l'apprentissage de techniques opératoires

Nous étudierons plus précisément ici les recherches effectuées, notamment par Guy Brousseau, à l'I.R.E.M. de Bordeaux [16].

L'auteur part d'une description mathématique (voir 16) de la théorie que l'on veut enseigner, présentée comme un langage autonome, il en tire les bases de l'étude de l'enseignement des mécanismes et du calcul. Il compare les résultats scolaires obtenus avec deux méthodes de multiplication "à l'italienne" et "per Gelosia" (voit p.19) et recherche les facteurs dont dépendent ces résultats, dans le but de proposer un modèle de comportement des élèves. Il étudie ensuite les conséquences, défavorables pour l'apprentissage, du choix de la méthode "à l'italienne". La méthode "Per Gelosia" donnant de meilleurs résultats, cela sera la base des apprentissages étudiés en c).

Brousseau élabore des ordinogrammes respectivement de l'"algorithme à l'italienne" et de celui dit "Per Gelosia". (voir annexe du chapitre I - § 1), il va ensuite chercher à savoir (notamment pour le premier) s'ils constituent des modèles convenables du comportement de l'enfant qui effectue une multiplication.

L'expérience comporte trois parties :

- étude 1 : influence de l'algorithme

- étude 2 : construction d'un pré-test destiné à indiquer l'ordre de grandeur des valeurs à mesurer

- étude 3 : le test proprement dit.

L'influence de l'algorithme : - Il est proposé à des élèves de CM 2 ayant une bonne connaissance de l'algorithme à l'italienne 3 opérations dans ID de 4 chiffres par 3 chiffres avec des zéros intercalés, ne sont comptés que les opérations fausses et le temps mis;

- 2 jours après, on leur enseigne de "façon classique" l'algorithme Per Gelosia en 1 seule séance (1/2 h. d'application, 3 exercices et correction)

- le lendemain, on leur propose 3 nouvelles opérations du même type que les premières

Les conclusions sont les suivantes : - l'emploi de l'algorithme a une influence sur le nombre d'erreurs, la méthode per Gelosia est la plus sûre (par la suite, l'auteur constate que les élèves préfèrent utiliser cette dernière dès que la dimension du produit dépasse 3 chiffres sur 2, et préfèrent la technique Fibonacci pour des dimensions inférieures).

- Le temps d'exécution n'est pas significativement changé car les enfants dans les deux cas recomptent plusieurs fois certaines séquences, certains produits partiels.

- Il n'y a pas de corrélation entre le temps mis et les erreurs.

Le pré-test : Il a montré : - que les pourcentages d'erreurs variaient entre 0,3 % (bons élèves de CM 2 sur des produits faciles) et 35 % (élèves faibles sur des produits difficiles).

- que les sources d'erreurs les plus évidentes sont : "la recherche en mémoire permanente du produit, variant avec le couple considéré; la recherche en mémoire permanente de la somme; la place du sous-algorithme dans l'algorithme de l'opération; la taile de l'opération".

Les résultats amènent l'auteur "à construire un plan d'expérience tel que l'on maîtrise chacune de ces variables tandis que l'on fait varier l'une d'elles". Il définit une partition de l'ensemble des "boucles" (une boucle est un produit de 2 nombres à 1 chiffre, inséré dans l'algorithme général) en 4 classes suivant le produit :

- Zone 0 : $\{ 0 \times m \text{ ou } n \times 0 \}$.
- Zone rouge : produits difficiles $\{ n \times m \text{ avec } n > 5 \text{ et } m > 5$ sauf 6×6 et $7 \times 7 \}$.
- Zone verte : produits moyens $\{ 3 \times n , n > 5 \} \cup \{ 4 \times n , n > 6 \} \cup$ $\cup \{ 6 \times 6 , 5 \times 7 \}$.
- Zone blanche : produits faciles (les autres).

De même il définit 4 classes concernant le calcul de la somme :

- ORO pas de retenue ni avant, ni après la boucle
- IRO pas de retenue avant, mais une après la boucle
- ORI une retenue avant, mais pas après la boucle
- IRI une retenue avant et après la boucle.

Il propose enfin 5 tailles d'opérations et repère les places des boucles dans les produits partiels.

Chaque élève, de chaque niveau, effectue environ 600 boucles, il y a 150 élèves par niveau (environ 1200 élèves) (du CE 1 à la 3ème de transition).

Brouveau constate que :

- le nombre d'erreurs dépend des produits élémentaires, les moyennes de réussites par zones étant significativement différentes;

- le nombre d'erreurs dépend des sommes, surtout quand il y a une retenue;

- il ne lui est pas possible de conclure sur la taille de l'opération, ni sur l'influence de la place de la boucle dans l'algorithme général;

- il constate que la progression des résultats au cours de l'apprentissage s'arrête au CM 1, qu'il n'y a plus d'apprentissage ensuite.

Danièle Coquin-Viennot (juillet 1979) s'est intéressée à l'étude de l'insertion d'un sous-algorithme dans un algorithme à propos du même type d'algorithme, ses conclusions sont les suivantes :

- les résultats s'améliorent avec le niveau scolaire (y compris au CM 2);

- les bonnes réponses diminuent quand la difficulté de la boucle augmente;

- les boucles avec retenues sont beaucoup moins réussies; son coût relatif diminue quand la difficulté augmente, la probabilité d'erreur due à la retenue varie en fonction de la taille du produit et ceci quel que soit le niveau de difficulté et le niveau scolaire, elle est plus grande dans les produits moyens que dans les produits difficiles;

- l'insertion se réduit à l'effet de la retenue.

c) <u>La prise en compte de ces études dans les propositions d'apprentissage de techniques opératoires au cours élémentaire.</u>

Les recherches effectuées à Bordeaux conduisent les auteurs de l'ensemble des travaux étudiés à proposer une progression basée sur

- des découpages de grilles en petits pavés dont on peut calculer le nombre d'éléments, soit directement, soit à l'aide d'un répertoire multiplicatif,

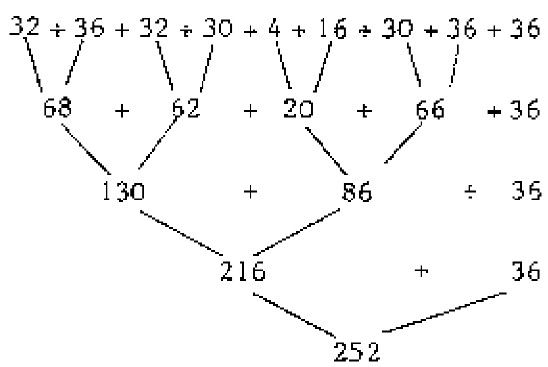
- la construction, l'enrichissement et l'organisation d'un répertoire multiplicatif non standard, l'organisation de ce dernier en table de multiplication se faisant progressivement et étant motivé par les calculs de produits.

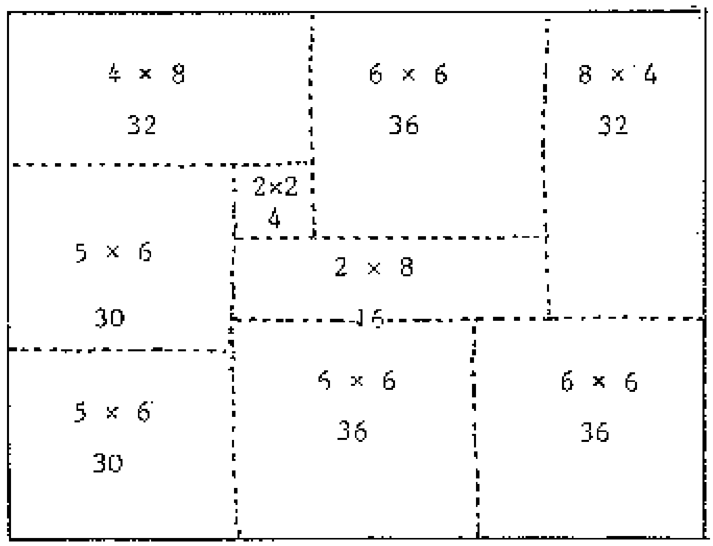
Cette progression prend en compte, de façon très nette, le souci d'économie, manifesté par les élèves dans les calculs.

Elle s'articule de la façon suivante (avec des variantes suivant les équipes) :

- à partir de la comparaison de grilles (de faibles dimensions), début de construction d'un répertoire multiplicatif, puis organisation partielle de ce dernier à partir de la comparaison des écritures (avec retour éventuel aux collections);

- réduction d'écritures multiplicatives, dans un premier temps, "sauvage", à partir du découpage d'une grille, en grilles plus petites dont on sait calculer le cardinal (directement ou à l'aide de produits connus), puis calcul de cette écriture par addition, écriture canonique correspondantes :





- utilisation du souci d'économie des élèves et d'un répertoire imposé (ainsi que d'une compétition inter-élèves) pour réduire ce découpage;

- découverte de la règle des zéros (multiplication par 10, 100, 1000 ...) et réinvestissement de cette découverte dans les découpages pré-cités;

- passage d'un découpage effectif à la représentation de ce découpage sous forme de schéma;

- étude et/ou réinvestissement de l'étude des puissances de 10 dans la réduction des écritures multiplicatives.

A cette étape, deux choix sont possibles :

. construction de l'algorithme traditionnel de la multiplication, en passant éventuellement, par l'algorithme à l'italienne "de Fibonnacci" (*)

. construction de l'algorithme à la grecque ou "Per Gelosia" (**) puis, construction de l'algorithme traditionnel et comparaison des deux.

G. Deramécourt signale dans son film [6] l'importance de la construction d'un répertoire multiplicatif. D. Delor [1] montre de même la construction d'une technique opératoire.

J. Lecocq [1] et G. Brousseau [11] exposent d'autres techniques opératoires et d'autres méthodes pour introduire la multiplication (en tant que technique) à savoir : règlettes de Neper, Technique russe, égyptienne...

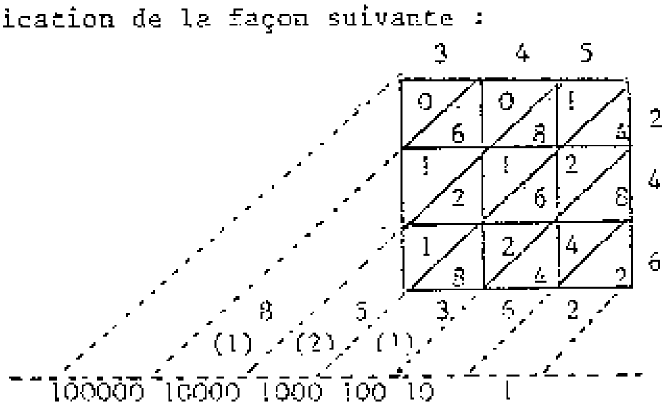
Les progressions proposées se terminent toutes par l'apprentissage de la multiplication à la française, compte tenu du rôle social joué par cette dernière en France.

G. Demécourt [8], souligne l'importance du calcul mental et prévoit un certain nombre d'activités tout au long de la progression, sur ce thème.

Nous voyons que le statut pris par la notation a × b, le sens donné et pris par le produit de deux naturels se construit, s'affirme et se stabilise non seulement lors de l'introduction de cette écriture et du produit, mais aussi tout au long du travail effectué sur les écritures multiplicatives, sur leur manipulation, et lors de la construction des techniques opératoires.

(*)L'algorithme de Fibonacci est proche de l'algorithme français, il revient à poser la multiplication de la façon suivante :

```
   347
 × 246
69 400
13 880
 2 082
85 362
```



(**)L'algorithme dit "Par Gelosia" revient à poser la multiplication sous forme de grille rectangulaire (cf. ci-dessus) et "de sommer suivant les diagonales", en reportant les retenues éventuelles.

d) quelques remarques portant sur l'ingénierie didactique.

- G. Deramécourt dans son ouvrage 8 précise sa démarche pédagogique :

" Sur le plan pédagogique, ces leçons sont étayées par un ensemble d'hypothèses et de réflexions sur le processus de mathématisation (...) où il est notamment tenu compte de l'aspect dialectique de la formulation, de la validation des résultats, et par suite de la communication au sein de la classe".

<< Nous cherchons des situations auto-correctives où les mécanismes de sanction soient visibles et motivent les corrections à apporter aux propositions, aux raisonnements.

Dans cet ordre d'idée le travail en groupe a pour but d'amener les élèves du groupe à des propositions, des confrontations qui sont alors affinées et au cours desquelles éventuellement, les proposants sont amenés face aux résistances des autres à élaborer un langage, une argumentation.

Le travail en groupe n'exclut pas les phases individuelles nécessaires à une familiarisation et à une élaboration personnelle de résultats permettant d'accéder à une certaine indépendance; ces résultats pouvant être confrontés dans des activités de groupes.>>

Il souligne d'autre part le facteur "recherche de l'économie "qui joue" chez les élèves, il en est de même de J. Lecocq et de l'équipe de Paris VII. Ces derniers sont amenés, de même, à réfléchir sur le degré d'ouverture dans lequel, une situation est présentée, sur l'organisation de la classe et la gestion de l'activité, sur la notion de contrat didactique (Brousseau l'avait fait auparavant), et sur les conditions de reproductibilité de telles situations.

- Nous n'avons pas ici étudié en détail, les travaux de Jeanine Rolgaski qui doit faire l'objet d'une thèse d'Etat, sur la bidimensionnalité, ces travaux replacent l'acquisition des structures multiplicatives dans un champ plus large, celui de l'acquisition de la bidimensionnalité. Elle est amenée à étudier "trois champs de problèmes : le combinatoire des dimensions (forme et couleur notamment) le repérage avec des coordonnées cartésiennes (dans un réseau fini), les mesures spaciales de surfaces (dans le plan)" (...)" dans lesquels "une même structure intervient dans la modélisation (...) : celle du produit cartésien".

ANALYSE DE 10
MANUELS SCOLAIRES DE
COURS ELEMENTAIRE - 1ère
ANNÉE

ANALYSE DE QUELQUES MANUELS SCOLAIRES

L'analyse porte sur l'introduction de la multiplication au CE 1. Nous sommes conscients que cette analyse est incomplète, en effet il serait nécessaire pour bien cerner les problèmes liés à l'acquisition des structures multiplicatives, d'analyser l'enseignement de la multiplication sur l'ensemble du cycle primaire, toutefois le thème même de la recherche (introduction des écritures multiplicatives) nous a conduit à limiter, aux manuels du cours élémentaire 1ère année cette étude.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux questions suivantes :

— sur quelle(s) définition(s), explicitement citée(s) ou implicite(s) de la multiplication dans $\mathbb{N}$ et du produit de deux entiers naturels, s'appuient les auteurs des manuels scolaires pour proposer leur progression;

— comment est justifié ce choix;

— quelles sont les représentations graphiques utilisées pour représenter le produit de deux entiers naturels;

— quel est le schéma de la progression;

— quelle est la place tenue par l'étude des écritures multiplicatives, par la constitution d'un répertoire multiplicatif;

— comment se construisent les algorithmes opératoires.

Nous avons analysé dix manuels scolaires ainsi que les livres du maître accompagnant ces ouvrages, à savoir :

. <u>E.R.M.E.L. (CE), apprentissages mathématiques à l'école élémentaire</u>, - INRP (collection SERMAP - O.C.D.L.).

. <u>Math et calcul (CE 1)</u> de R. Eiller, R. Brini, M. Martineu, S. Ravenel et R. Ravenel (édition de 1979) (Hachette).

. <u>Bati-Math au CE 1</u> de M. Daubet, P. Davinroy et C. Biehler - 1981 - (Editions MAGNARD).

. <u>L'éveil mathématique au CE 1</u> de J. Manesse et M. Lehouchu - 1978 (HACHETTE).

. <u>Math en fête (CE 1)</u> - Collection Barataud - Brunelle - de Lucien Brunelle, Catherine Comas et Max Durand - 1984 - (ARMAND COLIN - BOURRELIER).

. Math CE 1 de H. et J. Denise et R. Polle - 1982 (DELAGRAVE)

. Uni Math (CE 1) de B. Goergler, P. Cormanry, A. Viala - 1979 - L'ECOLE

. Activités mathématiques au cycle élémentaire de P. Meffe - R. Lédé et B. Constans - édition 1979 (FERNAND NATHAN).

. Activités mathématiques au cycle élémentaire lère année, P. Meffe, R. Lédé et B. Constans - édition 1980 - (FERNAND NATHAN).

. Découvrir et calculer - math CE 1 de S. Thévenet, A. Carioud et N. Pitot - 1983 (BORDAS).

Tous les manuels étudiés sont parus après la parution des programmes de 1978, ils tiennent donc compte explicitement de cette réforme du programme du cours élémentaire, notons que seuls deux ouvrages font référence explicitement à des travaux effectués en didactique des mathématiques ou dans le cadre d'I.R.E.M. ou de l'I.N.R.P. (ERMEL et Math. en fête). L'étude de la multiplication occupe environ 15 % de l'activité mathématique dans la classe.

1) définition de la multiplication dans $\mathbb{N}$, définition du produit de deux naturels, choix pédagogique sur lequel s'appuie l'étude de la multiplication.

a) le caractère implicite du produit cartésien

Le produit cartésien a un statut ambigu dans l'introduction de la multiplication, tous les auteurs semblent considérer que la définition du produit de deux entiers naturels renvoie à l'objet mathématique : produit cartésien, toutefois deux ouvrages seulement donnent une définition explicite du produit de deux naturels faisant intervenir le produit cartésien (définition destinée aux maîtres): Math et Calcul et découvrir et calculer.

De plus, si six manuels intercalent des activités mathématiques sur le produit cartésien, lors de l'introduction du produit de deux naturels, la quantité de ces exercices est très faible. En général, aucun lien n'est prévu avec des activités de repérage, traités séparément (sauf pour Math en fête et Découvrir et calculer). La notion de produit cartésien semble être supposée acquise par les élèves. Nous renvoyons, pour une analyse plus complète du statut du produit cartésien à la thèse d'état de J. Rogalski sur la bidimensialité (en préparation).

b) <u>définition de la multiplication</u>

Quatre ouvrages seulement définissent la multiplication, explicitement (pour les maîtres), comme un loi de composition interne dans N , un seul ouvrage en donne une définition explicite pour les élèves (<u>Uni-Math</u>). Toutefois six ouvrages prévoient des exercices (très peu) portant sur cette définition (à deux entiers naturels a et b, on associe a × b). C'est là, sans doute, le résultat d'une réaction contre les programmes de 1970.

Notons que tous les ouvrages définissent le produit de deux naturels comme un nombre. L'écriture a × b désigne un nombre et ne fait pas automatiquement référence à l'écriture canonique de ce dernier (obtenu comme résultat d'une multiplication).

c) <u>usage explicite du terme "écritures multiplicatives"</u>.

Six ouvrages sur dix emploient explicitement le terme "écritures multiplicatives" en direction des maîtres et/ou des élèves. Cela traduit là encore une certaine réticence à considérer l'écriture a × b, comme une écriture désignant un nombre, et cela même si les auteurs affirment explicitement le statut de nombre du produit. Notons que ce terme est en général très peu employé par ces six manuels (exception faite pour ERMEL, math et calcul et Bati-Math). Notons que <u>découvrir et calculer</u> n'emploie pas ce terme.

d) <u>multiplication et addition réitérée; multiplication et mesure-produit</u>.

. <u>quatre ouvrages</u> (Activités mathématiques – 1979, Uni-Math, Math CE 1 et <u>Eveil mathématique au CE 1</u>) introduisent la multiplication à partir de l'addition réitérée en s'appuyant essentiellement sur des représentations utilisant "des paquets équipotents", la représentation sous forme de grilles (le plus souvent discrètes et de faibles dimensions) n'intervenant que pour l'étude des propriétés de la multiplication (commutativité, distributivité, associativité)

. L'édition de 1980 du manuel <u>Activités mathématiques au CE 1</u> semble tenir compte des instructions officielles de 1978 et introduit le produit a × b à l'aide de quelques représentations en grilles (discrètes), toutefois cela ne semble pas être autre chose qu'une concession aux nouveaux programmes, le "sens" de la multiplication est essentiellement additif.

. Le manuel "Math en fête" s'appuie lui aussi essentiellement sur l'addition réitérée mais utilise les représentations en grilles (discrètres ou non) pour renforcer le sens du produit et lui donner un nouveau statut.

. Les manuels math et calcul, Découvrir et calculer introduisent conjointement l'écriture a × b à l'aide d'une représentation en grille et à l'aide de l'addition réitérée.

. Les manuels ERMEL et Bati-math introduisent l'écriture a × b à partir de représentations en grille et s'appuient essentiellement sur la nature "mesure-produit" de la multiplication. Notons que seul ce dernier ouvrage emploie le terme (explicitement) de dénombrement multiplicatif (dans une plus faible mesure ERMEL et math en fête y font allusion).

Nous voyons que si les recommandations faites dans les Instructions Officielles ont un effet certain quand à l'introduction de l'écriture a × b, à l'aide de grilles, la tendance à s'appuyer essentiellement sur l'addition reste très forte (voir majoritaire) pour introduire la multiplication. Nous renvoyons le lecteur au premier paragraphe de ce chapitre, pour l'étude particulière des conséquences d'une telle tendance dans l'enseignement (notamment aux travaux de J. Rogalski).

Signalons enfin que l'étude du lien entre type de dénombrements, mis en oeuvre par les élèves pour compter le nombre d'objets d'une collection disposée en rectangle, d'une part et définition du produit d'autre part n'est presque jamais fait (la plupart des manuels considère comme allant de soi, qu'un élève utilisera un dénombrement de type additif ou multiplicatif (voir chapitre II)).

e) les différentes représentations graphiques du produit de deux naturels

Nous avons vu ci-dessus la part prise par des représentations en forme de grilles (discrètes ou non) pour introduire l'écriture a × b, signalons toutefois la part encore importante prise par la représentation sous forme de paquets équipotents (quatre manuels sur dix) pour introduire cette écriture.

De plus il est notable de remarquer que peu d'ouvrages font le lien entre ces deux représentations (même quand elles y figurent toutes les deux). Peu de manuels prévoient des activités de réorganisation en grilles d'un nuage de points (ERMEL essentiellement et ceci très rapidement !). Les activités où figurent les deux représentations ont pour but de distinguer les écritures additives (où on ne peut utiliser qu'une représentation en paquets) des écritures multiplicatives.

f) <u>les auteurs n'explicitent pas leur choix</u>

Cinq auteurs seulement indiquent (dans le livre du maître) les raisons qui les ont conduit à adopter un type de présentation de la multiplication plutôt qu'un autre.

Ces raisons portent :

- sur la nécessité de s'appuyer sur la définition du produit cartésien pour définir le produit de deux naturels (5)
- sur les instructions officielles (1)
- sur le fait que n et p ne jouent pas le même rôle quand on introduit $n \times p$ par l'addition réitérée (quatre auteurs)
- sur la nécessité de présenter un produit commutatif (4)
- sur des problèmes d'ordre psychologique (deux auteurs).

2) Étude des progressions proposées

g) <u>schéma des progressions proposées, sur la multiplication</u>

Nous remarquons que deux manuels utilisent le schéma linéaire (introduction du signe "×", technique opératoire et table de multiplication, application à des situations multiplicatives).

Trois manuels utilisent un schéma proche de ce dernier à savoir : introduction du signe "×", calculs de produits et construction d'un répertoire multiplicatif plus ou moins standard, technique(s) opératoire(s).

Un seul manuel fait un lien entre multiplication et division (<u>Uni-math</u>)

Tous les ouvrages indiquent la nécessité de faire un lien entre numération et multiplication mais seuls trois manuels prévoient des insertions de leçons sur la numération dans leur progression, six manuels traitent et/ou envisagent ce problème au moment de la construction d'un algorithme ou de calculs de produits.

Cinq ouvrages prévoient d'insérer des activités portant sur des fonction $\begin{pmatrix} N \longrightarrow N \\ x \longrightarrow ax \end{pmatrix}$ dans leur progressions.

h) existence de situations se rapprochant des situations n°1 et 2 des chapitres deux et trois de l'étude

Quatre manuels présentent un équivalent de la situation n°1 et 2 de la situation n°2.

i) répertoire multiplicatif

Quatre manuels prévoient la construction d'un répertoire multiplicatif non standard. Sept manuels prévoient la construction d'un répertoire standard, ce dernier "répertoire standard" prend dans chaque cas la forme d'une table de Pythagore, dans un cas la forme traditionnelle des tables de multiplication et dans un cas une forme proche de cette dernière mais faisant intervenir un opérateur fonctionnel. Sur sept ouvrages, six en proposent explicitement la mémorisation.

j) techniques opératoires

. Tous les ouvrages prévoient des activités de comparaison d'écritures multiplicatives mais le but de ces activités est parfois différent :

- 5 manuels travaillent (de façon explicite ou non) sur l'égalité d'écritures multiplicatives (plus ou moins complexes) sans référence systématique à des représentations,
- 10 manuels travaillent sur les propriétés de la multiplication (notamment la commutativité),
- 6 manuels utilisent ces activités pour calculer certains produits (non immédiats).
- 3 manuels prévoient des activités (explicitement) de réduction d'écritures multiplicatives et deux de développement de telles écritures.

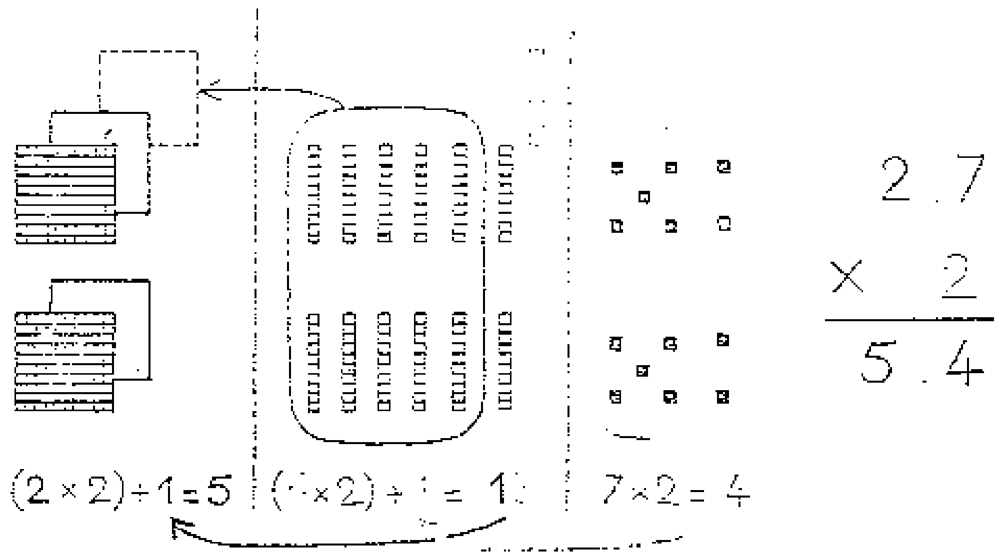
. 6 manuels sur 10 proposent de calculer des produits dont les facteurs sont supérieurs à 10, (sans utilisation de techniques opératoires affinées) mais seulement 3 s'y attardent suffisamment (la représentation graphique majoritaire est alors une représentation par grille (6 manuels), grilles puis schéma de grilles découpées (5 manuels).

. 2 ouvrages ne proposent pas de construction d'algorithme de la multiplication au CE 1 (ERMEL - Bati-Math).

. Pour les autres : 3 manuels se limitent à des multiplications en faisant intervenir que des multiplicateurs à un chiffre.

. Sur les 8 manuels proposant l'apprentissage d'un ou de plusieurs techniques affinées de la multiplication; 6 manuels utilisent des représentations liées à un matériel multi-bases(*), 6 utilisent également (ou exclusivement) des représentations sous forme de grille-quadrillages.

(*)



3) Conclusions portant sur l'analyse de manuels scolaires

L'analyse faite ci-dessus nous permet de tirer un certain nombre de conclusions relatives à l'enseignement de la multiplication au CE 1. Sans réduire le travail des maîtres, à l'énoncé des manuels, nous pouvons considérer que ceux-ci reflètent globalement leur activité.

Nous constatons donc qu'il n'y a pas d'étude approfondie du produit cartésien et que la plupart des manuels suppose cette notion sinon acquise, du moins allant de soi.

Nous constatons une certaine réticence à considérer une écriture multiplicative comme désignation d'un nombre.

De même la multiplication est le plus souvent introduite comme une autre addition (addition réitérée) et cela malgré l'utilistion de représentation en grilles de l'écriture a × b. De plus la liaison entre les techniques de denombrement d'une collection organisée en rectangle (ou grille) et la définition du produit a × b est très souvent (sinon systématiquement) occultée.

Les progressions proposées ne suivent pas majoritairement. Elles ne font pas beaucoup intervenir les problèmes liés aux fonctions, le schéma introduction de l'écriture a × b - apprentissage d'une technique opératoire, application à des problèmes multiplicatifs linéaires (notamment) et ne lient jamais multiplication et division.

Enfin la grande majorité des manuels proposent une construction d'algorithmes (algorithme le plus souvent unique) de la multiplication dès le CE 1, paradoxalement cet algorithme n'est utilisé que pour des calculs faisant intervenir des multiplicateurs à 1 seul chiffre. De plus si ces algorihmes sont construits, conformément aux I.O. à l'aide de découpages de grilles, on retrouve l'utilisation systématique (du moins dans 6 manuels sur 8) de représentations s'inspirant d'un matériel multi-bases(voir page); pour les multiplications à 1 chiffre". L'utilisation serait beaucoup complexe pour schématiser une multiplication faisant intervenir deux facteurs supérieurs à dix

ANNEXES

ANNEXES PORTANT SUR LE PREMIER CHAPITRE

[1] Programme de Calcul - Arithmétique - Géométrie et Commentaires 1882 - 1887.

[2] Manuel du Certificat d'Aptitude Pedagogique - Ed. Brossard - Defodon - Hachette 1904.

[3] Programmes et Instructions Officielles du 20 juin 1925.

[4] L'enseignement du calcul à l'école primaire - Rapport de M.M. MARIJON et LECOQ: Inspecteurs Généraux - 1928.

[5] Programmes et Instructions Officielles - arrêtés des 17-10-1945 et 7-12-1945

[6] Programmes et Instructions Officielles - arrêté du 2-1-1970.

[7] Rapport sur le séminaire de Royaumont - decembre 1959 - Mathématiques Nouvelles - éditions O.E.C.E.

[8] Programmes et Instructions Officielles - arrêté du 7 juillet 1978.

[9] Rapport de l'enquête INRP - mathématiques - liaison CM2 - 6e - [1982]

	CLASSE ENFANTINE DE 5 A 7 ANS.	COURS ÉLÉMENTAIRE DE 7 A 9 ANS.	COURS MOYEN DE 9 A 11 ANS.	COURS SUPÉRIEUR DE 11 A 13 ANS.
7° Calcul, arithmétique.	Premiers éléments de la numération orale et écrite. Petits exercices de calcul mental. Addition et soustraction sur des nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. Étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart. Les quatre opérations sur des nombres de deux chiffres. Le mètre, le franc, le litre.	Principes de la numération parlée et de la numération écrite. Calcul mental : Les quatre règles appliquées intuitivement d'abord à des nombres de 1 à 10 ; puis de 1 à 20 ; puis de 1 à 100. Étude de la table d'addition et de la table de multiplication. Calcul écrit : L'addition, la soustraction, la multiplication ; règles générales des trois opérations sur les nombres entiers. La division bornée aux nombres de deux chiffres au diviseur. Petits problèmes oraux ou écrits, portant sur les sujets les plus usuels ; exercices de raisonnement sur des problèmes et sur les opérations exécutées.	Revision du cours précédent. La division des nombres entiers. Idée générale des fractions. Les fractions décimales. Application des quatre règles aux nombres décimaux. Règle de trois, règle d'intérêt simple. Système légal des poids et mesures. Problèmes et exercices d'application. Solutions raisonnées. Suite et développement des exercices de calcul mental appliqué à toutes ces opérations.	Revision, avec développement, d'une part, pour la théorie et le raisonnement ; d'autre part, pour la recherche des procédés rapides, soit de calcul mental, soit de calcul écrit. Nombres premiers. Caractères de divisibilité les plus importants. — Principe de la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. — Plus grand commun diviseur. — Méthode de réduction à l'unité appliquée à la résolution des problèmes d'intérêt, d'escompte, de partage, de mélanges, etc. Système métrique, applications à la mesure des volumes et à leurs rapports avec les poids. Premières notions de comptabilité.
7° Calcul, arithmétique (Suite.)	....	Notion du mètre, du litre, du franc, du gramme, de ses multiples et sous-multiples.	....	....
8° Géométrie.	Choix d'exercices Froebel, évitant les nomenclatures techniques, les définitions et l'excès de détail dans l'analyse des formes géométriques.	Simples exercices pour faire reconnaître et désigner les figures régulières les plus élémentaires : carré, rectangle, triangle, cercle. Différentes sortes d'angles. Idée de trois dimensions. Notions sur les solides au moyen de modèles en relief. Exercices fréquents de mesure et de comparaison des grandeurs par le coup d'œil ; appréciation approximative des distances et leur évaluation en mesures métriques.	Étude et représentation graphique au tableau noir des figures de géométrie plane et de leurs combinaisons les plus simples. Notions pratiques sur le cube, le prisme, le cylindre, la sphère, sur leurs propriétés fondamentales ; applications au système métrique.	Notions sommaires sur la géométrie plane et sur la mesure des volumes. *Pour les garçons :* Application aux opérations les plus simples de l'arpentage. Idée du nivellement.
9° Dessin d'ornement. (Arrêté du 15 janvier 1881.)	Combinaisons de lignes. Représentation de ces combinaisons sur l'ardoise et le papier au crayon ordinaire ou en traits de couleur ; petits dessins d'invention sur le papier quadrillé ; reproduction de dessins très simples faits par la maîtresse. Représentation d'objets usuels les plus simples.	Tracé des lignes droites et leur division en parties égales. Évaluation des rapports des lignes entre elles. Reproduction et évaluation des angles. Premiers principes du dessin d'ornement. Circonférences, polygones réguliers, rosaces étoilées.	*Dessin à main levée.* — Courbes géométriques usuelles ; ellipses, spirales, etc. Courbes empruntées au règne végétal ; tiges, feuilles, fleurs. Copie de plâtres représentant des ornements plans d'un faible relief. Premières notions du dessin géométral et éléments de perspective. Représentation géométrale au trait et représentation perspective au trait, puis avec les ombres, de solides géométriques et d'objets usuels simples. *Dessin géométrique.* — [illegible] des instruments sur	*Dessin à main levée.* — Dessin, d'après l'estampe et d'après le relief, d'ornements purement géométriques : moulures, oves, rais de cœur, perles, denticules, etc. Dessin, d'après l'estampe et d'après le relief, d'ornements empruntant leurs éléments au règne végétal : feuilles, fleurs et fruits, palmettes, rinceaux, etc. Notions élémentaires sur les ordres d'architecture, données au tableau par le maître (3 leçons). Dessin de la tête humaine ; ses parties, ses proportions. *Dessin géométrique.* — Exécution sur le papier, avec l'aide des

6. *Enseignement de l'arithmétique.*

La méthode en arithmétique consiste, comme ailleurs, à procéder logiquement, à passer du connu à l'inconnu, du simple au composé. C'est surtout ici qu'il faut s'adresser plutôt à l'intelligence qu'à la mémoire. L'arithmétique est la vraie gymnastique de l'esprit : elle développe le jugement, apprend à raisonner, c'est-à-dire à tirer des conséquences rigoureuses d'un principe vrai, reconnu d'abord comme tel par l'esprit ou parfaitement démontré. Mais, au début, elle est aride, et, dans la période d'initiation, il est nécessaire de recourir aux sens, de faire voir, de faire toucher, et surtout d'intéresser. C'est ainsi qu'on se servira d'objets matériels, des boîtes de Frœbel, des paquets de bâtonnets, du boulier-compteur, de traits ou de ronds tracés sur le tableau noir, etc. Il faut transporter sur ce tableau, en chiffres, le résultat des connaissances acquises, des découvertes opérées, et faire marcher ainsi de front la numération parlée et la numération écrite.

Du calcul oral et mental d'abord, de petites opérations sur des nombres concrets, sur des réalités. La faculté d'abstraire et de généraliser tarde moins qu'on ne le pense à se développer chez les enfants ; mais ce ne sera guère que dans le cours moyen qu'il conviendra de profiter de cette disposition.

On dit souvent : peu ou point de théorie. Que restera-t-il donc? La routine, le calcul machinal des élèves savants ou des automates. Nous dirons, nous : sans doute, il faut accoutumer les enfants à opérer vite ; c'est un but matériel et pratique qu'il est désirable d'atteindre. Mais qu'on ne craigne pas non plus de les accoutumer à se rendre compte de leurs opérations. Si la théorie de la division ou des fractions s'adresse surtout au cours supérieur, des enfants du cours moyen ne peuvent-ils pas savoir aisément comment, avec dix signes, on peut écrire tous les nombres possibles ; comment, en vertu du grand principe de notre numération, on arrive à la fraction décimale ; pourquoi, dans l'addition, on commence par la droite ; pourquoi, dans la multiplication, on recule le deuxième produit partiel d'un rang vers la gauche ; pourquoi, dans un produit, on doit reculer la virgule vers la gauche d'autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis? etc., etc. Donc, de la théorie ; seulement, de la théorie à la portée des enfants auxquels on s'adresse ; tout est là.

Beaucoup d'applications, c'est-à-dire de problèmes, et de problèmes tirés du milieu même où devra se passer la vie de nos élèves. Pourtant, dans le cours supérieur, ne craignons pas de nous élever un peu. Les sciences ont aussi leurs problèmes usuels en quelque sorte, intéressants pour tous, de nature à éveiller les esprits. Ne craignons pas d'aborder des problèmes de cette catégorie même avec des enfants destinés aux champs ou à l'atelier.

Pour la solution des problèmes du moins, personne ne le contestera, il faut recourir au raisonnement bien plus qu'aux formules toutes faites.

Le Père Girard, que nous citions tout à l'heure, veut que l'enseignement du calcul lui-même tourne au profit du cœur en même temps qu'à celui de l'intelligence. Il est facile, en effet, de tirer des problèmes des règles de conduite, de montrer, par exemple, le trait grossissant de l'épargne et le résultat de dépenses peu utiles et souvent répétées. Ce sera de la bonne morale, en même temps que de la bonne arithmétique : pourquoi pas?

7. *Enseignement du système métrique.*

Cet enseignement, pendant la période d'initiation, ne peut guère consister que dans l'exhibition, la manipulation, la reconnaissance des mesures effectives, dans l'étude de la nomenclature avec laquelle il est bon de se familiariser de bonne heure. Le tableau noir, le décimètre cube permettent de donner l'idée du carré, du rectangle, du triangle, des polygones, etc., du cube, des anomalies apparentes que présentent les subdivisions du mètre carré et du mètre cube. Pour le surplus, les conseils que nous venons de donner en ce qui concerne l'arithmétique s'appliquent à l'enseignement du système métrique, soit en pratique, soit en théorie.

8. *Enseignement de la géométrie.*

L'enseignement géométrique est intimement lié, dans l'école primaire, à celui du système métrique. Les applications de celui-ci reposent sur des notions au moins élémentaires de géométrie. C'est en effet la géométrie qui nous conduit à la mesure des surfaces et des volumes, et qui nous en donne l'intelligence. Elle accoutume d'ailleurs merveilleusement l'enfant à raisonner juste, à tirer d'un principe fourni soit par l'intuition, soit par le raisonnement, des conséquences logiques et rigoureuses. Elle a, sur l'arithmétique, l'avantage d'être une science d'aspect, d'exercer à la fois la main qui trace les lignes et l'œil qui en saisit les proportions et les rapports ; de ce chef, elle est une excellente préparation au dessin. A tous ces titres, l'enseignement de la géométrie mérite d'avoir sa juste part dans les exercices de l'école primaire. Il est inutile de faire remarquer qu'il sera singulièrement facilité par une collection de solides de nature à donner aux enfants une idée nette des corps et à leur faire bien comprendre comment l'on arrive à en mesurer exactement le volume, comment l'on passe de la mesure du prisme à celle du cylindre, de la pyramide, du cône, etc.

Manuel du Certificat d'Aptitude Pédagogique
Bernard – Defodon
Hachette 1964.

Article de J. Tannery - Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire
Février 1904

— ANNEXE 2 —

Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire.

D'excellents esprits se préoccupent de la façon routinière et mécanique dont l'arithmétique serait enseignée à l'école primaire : la méthode suivie, dit-on, ne vise nullement à développer la faculté de raisonnement des enfants. « Tandis que les autres études, celles de l'histoire, de la morale, du français, par exemple, en dehors des connaissances spéciales dont elles meublent la mémoire, concourent puissamment à former l'esprit, le calcul, tel qu'il est enseigné, ne favorise nullement le développement intellectuel du jeune écolier. » Ailleurs, on se plaint de l'insuffisance des soi-disant raisonnements qui accompagnent, d'habitude, les solutions des problèmes, raisonnements d'où la raison est bannie, et qui sont, le plus souvent, reproduits d'après quelques modèles.

Ces préoccupations sont excellentes ; leur source est dans le désir de voir cultiver à l'école les qualités supérieures de l'enfant, dans le souci du progrès, dans la haine de cette paresse intellectuelle où la fatigue du métier peut faire tomber le meilleur maître, s'il ne veille pas incessamment sur lui. Malgré le profond respect que j'ai pour l'origine de ces préoccupations, je n'ai pu m'empêcher de les trouver excessives et, puisqu'il est dangereux de vouloir trop bien faire, puisqu'on risque de se décourager en voulant viser trop haut, je demande la permission de m'en expliquer ici ; il va de soi que je n'apporte pas des observations personnelles, mais des réflexions sur un sujet auquel j'ai beaucoup pensé. Le lecteur, qui connaît mieux que moi les choses de l'enseignement primaire, sera juge de la mesure dans laquelle ces réflexions s'appliquent à la réalité des faits.

L'instituteur, cela est entendu, doit saisir toutes les occasions qui s'offrent à lui de développer la moralité de ses élèves, leur intelligence et leur jugement ; lorsqu'il peut éclairer pleinement ce qu'il enseigne, en donner toutes les raisons, qu'il le fasse ; c'est pour le mieux. Mais faut-il qu'il interdise à ses élèves de *croire* à ce qu'il leur dit, lorsqu'il ne leur apporte pas une démonstration complète, une de ces démonstrations qui font que la chose enseignée appartient désormais à l'élève qui l'a comprise tout autant qu'au maître qui l'a enseignée? S'il en était ainsi, que deviendrait l'enseignement de l'histoire, du français, de la morale? Faudra-t-il, pour qu'on n'accuse pas l'enseignement d'être dogmatique, expliquer aux enfants ce qu'est la critique des textes, ou la philologie, et discuter les fondements de la morale? Personne n'y pense, et si toutes ces explications et toutes ces discussions étaient possibles, ne resterait-il plus dans l'enseignement de l'histoire, du français et de la morale aucune de ces vérités auxquelles l'enfant est obligé de croire parce qu'elles lui sont affirmées par un homme en qui il a confiance? Et pourquoi donc le maître ne solliciterait-il pas la confiance de ses élèves, quand il leur apprend l'arithmétique et qu'il a le droit de leur dire en toute sincérité : « Si vous travaillez bien, plus tard, en vous donnant un peu de peine, vous pourrez reconnaître par vous-mêmes la vérité de ce que je vous affirme? » Que l'élève sache distinguer entre l'affirmation à laquelle il croit, et la démonstration qu'il comprend : c'est en cela que consiste l'esprit critique; il ne consiste pas à rejeter toutes les affirmations. Reconnaître la sincérité de celui qui parle, et qui dit toujours la vérité, se fier à celui qui sait, ne juger par soi-même que ce que l'on connaît et ce que l'on comprend par soi-même, s'avouer que l'on ignore beaucoup, ce n'est là, pour les hommes faits ou les écoliers, ni une cause d'erreur, ni la marque d'un défaut d'intelligence.

D'autre part, il y a, dans tous les enseignements, une partie mécanique et routinière qu'il faut accepter avec modestie. Rien n'est plus élevé que le rôle de l'instituteur ; encore faut-il qu'il sache descendre des hauteurs de ce rôle et qu'il ne prétende pas former le cœur et l'esprit de ses élèves quand il leur apprend la table de multiplication. Je veux bien qu'il en tire une leçon de morale, et c'est qu'il y a des choses ennuyeuses qui sont fort utiles ; mais cette leçon même, il ne la répétera pas toutes les fois qu'il demandera à ses élèves combien de fois font sept fois huit, ou sept fois six : de même, dans tout métier, il y a des gestes qu'il faut apprendre à faire automatiquement, et qu'il faut répéter des milliers de fois avant de les bien faire ; que l'on soutienne l'enfant ou l'apprenti par l'espoir d'un temps où la répétition de l'effort aura supprimé la difficulté, j'en suis d'avis ; mais qu'on se garde bien de lui inspirer du mépris pour ce qu'il entre de *machinal* dans cette répétition. Il faut que le geste soit machinal.

L'enseignement de l'arithmétique, dit-on, semble n'avoir plus d'autre objet que de mettre l'écolier en état d'appliquer un certain nombre de règles *qu'il ne comprend pas.* Il ne faudrait pas s'exagérer l'importance de la justification théorique de certaines règles ou opérations : je m'imagine que tout le monde reconnaît l'impossibilité de justifier à l'école, par un raisonnement rigoureux, la règle de la division des nombres entiers, mais que, tout en reconnaissant cette impossibilité, quelques personnes s'en affligent. Je voudrais qu'elles se consolassent entièrement. Si c'est là ces règles que l'écolier ne comprend pas, il n'y a pas lieu de s'en émouvoir, à mon avis. Sans doute, celui chez qui la curiosité scientifique s'est éveillée, désire se rendre compte, au moins une fois, des règles ou des procédés qu'il applique; encore ne pense-t-il pas à la théorie qui justifie ces procédés lorsqu'il les applique : il ne doit pas y penser; il doit mettre toute son attention dans l'application correcte des règles qu'il sait être vraies, et plus cette application est machinale, plus elle est sûre. Le mathématicien même emploie des outils qu'il n'a pas vérifiés et dont il ignore parfois comment ils ont été fabriqués. Malgré toute sa critique, c'est un homme qui se résigne à avoir confiance en d'autres hommes; la table de logarithmes qui est sur sa table, il n'en a sûrement pas vérifié tous les nombres. Sait-il seulement comment on s'y est pris pour la construire? Pas toujours, au moins dans le détail. Et pour d'autres tables numériques, dont il se sert à l'occasion, il ne s'est même jamais posé la question. Est-il un seul mathématicien qui ne se soit jamais servi d'un théorème ou d'une formule qu'il serait incapable d'établir au moment où il l'utilise? Quel ingénieur, même sorti de l'École polytechnique, qui n'a pas recours, à l'occasion, à un aide-mémoire, voire à un barème? Pourquoi ne pas permettre aux enfants d'accorder à leur maître cette confiance que le mathématicien de profession accorde volontiers à d'autres mathématiciens qui ont calculé des tables numériques, ou dressé des recueils de formules? Pourquoi ne croiraient-il pas ce maître quand il leur dit que c'est ainsi qu'on s'y prend pour faire une multiplication ou une division?

Ce que les enfants ont besoin de comprendre, c'est le sens de l'opération, c'est ce qu'elle permet d'obtenir. Je m'imagine qu'on leur apprend cela à l'école, et, peut-être, mieux qu'on ne fait au lycée. Je ne crois pas trop m'avancer en disant qu'il y a plus d'un bachelier ès sciences, qui a étudié l'algèbre et la trigonométrie, pour qui la division est une opération dans laquelle on met le dividende à gauche, le diviseur à droite, à l'intérieur d'un angle droit, dans laquelle on sépare, etc. ; c'est la description de l'opération, non sa définition non ses propriétés, qui subsiste dans son esprit. Voilà ce qu'il faut éviter, à l'école comme au lycée.

Comment arrive-t-on à faire comprendre aux écoliers le sens de chacune des quatre règles ? Je crois bien que, là-dessus, la plupart des instituteurs m'en remontreraient. C'est au fond la définition de l'opération qu'il s'agit d'éclairer ; ils ne commencent pas par dicter à leurs élèves une belle phrase abstraite, qui ferait ouvrir de grands yeux à tous ceux qui ne sont pas résignés à apprendre sans comprendre ; non, ils commencent par des exemples concrets, avec des nombres très simples : j'ai sept billes dans ma poche gauche et cinq dans ma poche droite ; je prends ces cinq billes et je les mets dans ma poche gauche ; combien y a-t-il de billes dans cette poche gauche ? Des douze billes qui sont maintenant dans ma poche gauche, j'en prends cinq que je mets dans ma poche droite ; combien en restera-t-il dans ma poche gauche ? Et si je remets ces cinq billes dans cette poche gauche, combien contiendra-t-elle de billes ? Voici quatre petits tas dont chacun comprend cinq billes ; je mets toutes les billes en tas ; combien y en aura-t-il dans ce tas ? J'ai dix-neuf billes que je veux partager entre cinq enfants ; chacun reçoit trois billes, et il m'en reste quatre. Chaque opération reçoit son nom. Les exemples sont repris, multipliés, diversifiés. Les nombres sont assez simples pour que les calculs puissent se faire de tête, ou même sur des objets réels ; on demande aux enfants, pour une foule de petits problèmes, non seulement d'arriver au résultat, mais de reconnaître chacune des opérations qu'ils ont faites, de la nommer ; on passe à des cas un peu plus compliqués où il faut faire deux, trois de ces opérations ; là encore, il ne suffit pas que les enfants trouvent le résultat exact, ils doivent analyser le calcul qu'ils ont fait : d'abord une addition, puis une soustraction, etc. Sans doute, tous ceux sous les yeux desquels cette page est tombée se disent : « Oui, c'est ainsi que l'on fait, à peu près, avec des exemples, ou avec d'autres... » Et comment ferait-on autrement ? Il suffit d'y penser, et d'avoir eu des enfants à qui l'on a appris à compter.

Eh bien ! tout cela n'est nullement mécanique. Reconnaître les cas où il faut faire cette opération et non cette autre, sentir ce qu'il y a de commun dans les cas où l'on fait la même opération, c'est faire acte d'intelligence, de la même intelligence qui nous sert à grouper des individus, ou des mots, ou des faits, dans une même famille, sous une même loi. Et l'enfant est capable de ces actes intellectuels, parce qu'ils se rapportent à des objets qu'il peut voir, toucher ou imaginer, et que l'effort d'attention qu'ils exigent est court.

Fixer l'attention sur de longs raisonnements abstraits, où les conclusions se développent l'une après l'autre, n'appartient qu'à des esprits formés, où les aptitudes logiques se sont développées.

Au bout d'un certain temps, quand il juge que le moment est venu, que les écoliers ont vu et reconnu assez de faits pour comprendre un énoncé général, l'instituteur définit chacune des règles ; je crois bien que l'écolier, qui comprend cette définition abstraite, y trouvera quelque joie, et qu'il se donnera volontiers la peine d'en fixer les termes dans sa mémoire. Devant des questions toutes pareilles à ces questions qu'il sait résoudre, mais où les données sont un peu plus compliquées, les nombres un peu plus grands, l'enfant sent qu'il lui manque quelque chose : cela est trop long pour qu'il s'en tire ; il n'en finirait pas de compter sur ses doigts ou avec des boules. Comment faire? Il est tout découragé. Le maître lui dira : « Je vais vous apprendre un moyen d'aller plus vite ; » il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rendra pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplait en aucune façon. Sans doute, il est bon que l'ouvrier connaisse son outil; exigera-t-on, pour cette raison, qu'il ne se serve que d'outils qu'il est capable de fabriquer lui-même, ou seulement même qu'il peut démonter ou remonter? Il doit savoir ce qu'il peut faire de son outil, les cas où il doit le prendre, ceux où il lui en faut un autre; il doit être très habitué à s'en servir. De même en arithmétique deux points importants : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, bien comprendre les définitions; puis, savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude. Il ne faut pas mépriser cette routine-là ; le résultat est un profit très clair qu'on emporte de l'école; que de fatigues, d'agacements, que de temps elle épargnera à l'homme fait, à l'ouvrier, au contremaître, à l'ingénieur ou au savant!

Et dans la partie même de l'enseignement du calcul qui s'adresse vraiment à l'intelligence, il faut faire sa part à l'habitude. N'est-ce point en vertu de l'habitude que nous reconnaissons si vite les choses qui nous sont familières, que nous les nommons de suite, que nous n'hésitons pas sur le parti que nous pouvons en tirer? N'est-on pas allé jusqu'à soutenir que l'évidence même n'était qu'une longue habitude, qui s'accumule dans la race, et dont les individus profitent!

Cette explication raisonnée des opérations fondamentales, à laquelle on attache tant de prix, j'admettrais fort bien qu'on la laissât de côté, même pour des enfants qui reçoivent quelque éducation théorique. Il est beaucoup plus important de savoir les propriétés des opérations que d'être en mesure de justifier la façon dont on les effectue, et quelques unes de ces propriétés peuvent être enseignées et démontrées à l'école ; est-il difficile, par exemple, de faire comprendre à des écoliers, sur des exemples concrets, que pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les éléments de la somme et ajouter ensuite les produits partiels. Les propositions de ce genre, dont les unes peuvent être démontrées complètement, dont les autres seront simplement énoncées et vérifiées, sont beaucoup plus précieuses que ce qu'on appelle « la théorie de la multiplication, ou de la division »; les problèmes où l'on pourra les utiliser ne manquent pas; elles contribuent à la vraie intelligence des définitions, dont elles sont des conséquences logiques. C'est elles d'ailleurs qui mènent plus loin, puis servent, par exemple, à l'intelligence de l'algèbre, dont on peut pousser l'étude aussi loin qu'on veut, sans avoir jamais besoin de la « théorie de la division ».

J. Tannery.

(Revue pédagogique, février 1904.)

Extrait de C. Savard, Pages choisies de Pédagogie
éd. Delagrave.

1929.

ANNEXE 3

Horaires

	Cours préparatoire	Cours élémentaire Garçons	Cours élémentaire Filles	Cours moyen Garçons	Cours moyen Filles	Cours supérieur Garçons	Cours supérieur Filles
Instruction morale et civique	1 h. 1/4	1 h. 1/4	1 h. 1/4	1 h. 1/4	1 h. 1/4	1 h. 1/2	1 h. 1/2
Lecture courante et expressive	10 h.	7 h.	6 h. 1/2	3 h.	[illegible]	2 h. 1/2	2 h. 1/2
Ecriture	5 h.	3 h. 1/2	2 h. 1/2	1 h. 1/2	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Langue française	2 h. 1/2	5 h.	5 h.	7 h. 1/2	[illegible]	7 h. 1/2	[illegible]
Histoire et géographie		2 h. 1/2	2 h. 1/2	3 h.	3 h.	[illegible]	3 h.
Calcul, arithmétique, géométrie	2 h. 1/2	3 h. 1/2	3 h. 1/2	4 h. 1/2	4 h. 1/2	[illegible]	[illegible]
Sciences physiques et naturelles	1 h. 1/4	1 h. 1/2	1 h. 1/2	2 h. 1/2	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Dessin	1 h.	1 h.	1 h.	1 h.	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Travail manuel	1 h. 1/2	1 h.	1 h. 1/2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Chant et musique	1 h. 1/4	1 h.	1 h.	1 h.	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Exercices physiques	1 h. 3/4	2 h.	2 h.	2 h.	[illegible]	2 h.	[illegible]
Récréations	2 h.	1 h. 3/4	1 h. 3/4	1 h. 3/4	1 h. 3/4	1 h. 3/4	[illegible]
	30 h.	30 h.	30 h.	30 h.	30 h.	30 h.	30 h.

Programmes de Calcul.

Section préparatoire

(de 6 à 7 ans)

5° CALCUL

Premiers éléments de la numération. Compter des objets, en écrire le nombre jusqu'à 10, puis jusqu'à ...

Petits exercices de calcul oral ou écrit (sans dépasser 100).

Ajouter ou retrancher des groupes d'objets; additionner ou soustraire les nombres correspondants.

Compter par 2, par 3, par 4. Multiplier par 2, par 3, par 4.

Diviser des groupes d'objets en 2, 3, 4 parts égales.

Cours élémentaire

(de 7 à 9 ans)

CALCUL, ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE

Numération décimale. Le mètre, le gramme, le litre, leurs multiples.

Calcul oral. — Table d'addition, table de multiplication. Les quatre règles appliquées à des nombres inférieurs à cent.

Calcul écrit. — Les quatre règles appliquées à des nombres peu élevés (Pour la division se borner à un diviseur de deux chiffres).

Petits problèmes oraux ou écrits portant sur des ... usuels.

Premiers exercices de calcul rapide et de calcul mental.

Géométrie. — Mesurer des longueurs. Apprécier des distances par l'œil et contrôler par la mesure directe.

Dessiner et reconnaître les figures les plus élémentaires : triangle, rectangle, carré, cercle. Notion d'angle.

Idée de la nature des surfaces rectangulaires par quadrillage.

Notions sur les solides au moyen de modèles en re-

Cours moyen

(de 9 à 11 ans)

2° CALCUL, ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE

1. Calcul et arithmétique. — Application des 4 règles à des nombres plus élevés qu'au cours élémentaire.

Les nombres complexes : le temps (heures, minutes, secondes). La circonférence (degrés, minutes, secondes). — Calcul de la longueur de la circonférence.

Système des mesures légales à base dix, cent, mille. Multiples et sous-multiples.

Calcul des surfaces : rectangle, carré, triangle, cercle.

Calcul des volumes : prisme droit à base rectangulaire, cube, cylindre.

Nombres décimaux et fractions décimales. — Idée générale des fractions ordinaires. — Pratique des quatre opérations sur les fractions ordinaires dans des cas numériquement très simples.

Problèmes sur des données usuelles. — Règle de trois simple, règle d'intérêt simple.

Suite et développement des exercices de calcul rapide et de calcul mental.

2. Géométrie. — Etude intuitive et représentation par le dessin des figures de la géométrie plane.

Notions sommaires sur la représentation des longueurs sur les plans et cartes à une échelle donnée.

Notions pratiques sur les solides géométriques simple (cube, prisme droit). Notions sommaires sur leur représentation géométrique (croquis coté).

Cercle. Sa division en degrés.

Carré, hexagone régulier, triangle régulier inscrits dans le cercle.

Instructions officielles - 20 juin 1923.

CALCUL, ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE

L'ancien horaire prévoyait, « pour l'arithmétique et les exercices qui s'y rattachent », trois quarts d'heure ou une heure par jour de classe. Nous n'avons guère modifié ces proportions, puisque nous prévoyons :

Au *cours préparatoire*, deux heures et demie par semaine, soit en moyenne une demi-heure par jour de classe ;

Au *cours élémentaire*, trois heures et demie par semaine, soit en moyenne plus de quarante minutes par jour de classe ;

Au *cours moyen*, quatre heures et demie par semaine, soit en moyenne plus de cinquante minutes par jour de classe ;

Au *cours supérieur*, cinq heures par semaine, soit en moyenne une heure par jour de classe.

***

Les idées directrices de l'ancien programme ne sont pas davantage abandonnées. Si nous avons modifié le texte de 1887, c'est pour en mieux marquer l'esprit. On s'en rendra nettement compte en juxtaposant les deux rédactions.

Par exemple, le texte de 1887 : « *Premiers éléments de la numération orale et écrite* » a été traduit, en 1923, par : « Compte des objets, en écrire le nombre. » Le texte de 1887 : « *Les quatre opérations sur des nombres* » est devenu : « Ajouter ou retrancher des groupes d'objets ; additionner ou soustraire les nombres correspondants. — Compter par 2, par 3, par 4 ; multiplier par 2, par 3, par 4... »

Ainsi est consacrée la méthode qui consiste, au cours préparatoire comme à l'école maternelle, à placer entre les mains des enfants des objets (boutons, graines, bûchettes, etc.) qu'ils ont à grouper, séparer, combiner de diverses manières pour se rendre compte, par les yeux et par la main, de la signification réelle des calculs les plus simples.

Partout, l'opération manuelle précède l'opération arithmétique ; l'expression du langage courant précède l'expression du langage mathématique. Partout, le souci de marquer que l'enseignement doit être concret, simple, progressif. C'est sur les faits qu'il faut appuyer les calculs, les idées.

Dans les programmes d'aujourd'hui, pas plus que dans ceux d'hier, on ne craint d'aborder des notions inscrites sous le titre, un peu effrayant, d'*arpentage*, mais il faut entendre par là « forme des champs, mesures sur le terrain ». Il s'agit d'opérations réellement exécutées avec un ruban gradué, avec une règle graduée, accessibles en pratique à de jeunes enfants. Le texte porte, en effet : « Mesure des longueurs, apprécier les distances par l'œil et contrôler par la mesure directe. » On opérera dans la cour, dans la salle de classe, parfois sur le pupitre.

Il faut signaler (pour le *cours élémentaire*) une intention qui se manifeste dès la première ligne : « Numération décimale : le mètre, le gramme... » Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. — Ainsi, le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.

L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. Et ici, plus encore que dans le cas précédent, le système décimal servira de base, et de base presque unique aux études des nombres. Les élèves comprendront ce qu'est un dixième de mètre, un dixième de gramme, avant de comprendre ce qu'est un dixième d'unité.

Ainsi, le système légal des mesures ne se distingue pas de la numération décimale, au moins à l'origine. Mais on remarquera que le programme, dans sa rédaction actuelle, sépare en trois parties l'étude du système légal : « Système des mesures légales à base dix, à base cent, à base mille. »

On a vu, au cours élémentaire, le mètre, le gramme et leurs multiples, et voilà commencé le système légal *à base dix* ; il suffit, pour en finir, de parler des sous-multiples du mètre, des sous-multiples du gramme, ce que l'on fera au cours moyen.

Remarquons que, de cette manière, on épuise d'abord les grandeurs que l'on mesure avec ce qu'on appelle parfois des unités effectives.

Mais, les surfaces, on ne les mesure pas effectivement ; on les calcule, en appliquant des formules. On les exprime en se plaçant dans un système de numération *à base cent*. Les volumes ensuite, on ne les mesure pas non plus ; on les calcule, on les exprime en se plaçant dans un système de numération *à base mille*.

Voilà qui justifie la modification adoptée dans la rédaction actuelle. Mais le nouveau texte implique un simple changement dans l'ordre des leçons et non dans leur étendue. Il y a là un effort de simplification et non une modification radicale.

Un autre changement de même nature, simple interversion de deux chapitres, se présente au sujet des fractions.

Pratiquement, l'étude des sous-multiples dans les mesures légales à base dix conduit aux nombres décimaux. Rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers ; aussi, leur étude, suite immédiate de ce qu'on sait déjà, les calculs où ils interviennent, analogues à ceux qu'on a souvent exécutés, n'embarrassent guère les élèves.

Or, ces nombres décimaux peuvent s'écrire comme fractions décimales, presque immédiatement. Et c'est ce que demande le programme actuel, en vue de sérier les difficultés. On écrira ces nombres comme fractions :

$0{,}1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{1}{10}$

$0{,}01 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{1}{100}$

On aura des fractions à dénominateur 10, 100, 1 000... On fera, sur ces fractions particulières, tous les exercices de réduction au même dénominateur, d'addition, de soustraction, etc. Dans la suite, pour les fractions ordinaires, selon toute vraisemblance, les élèves seront moins surpris, mieux préparés. La voie inclinée sera plus aisée que la voie abrupte.

Mais voici maintenant un changement plus marqué, une suppression qui provoquera peut-être des regrets chez certains maîtres. Le programme du cours supérieur ignorera désormais l'étude des nombres premiers, les caractères de divisibilité, le plus grand commun diviseur, en un mot, tout ce qui est arithmétique pure. Faut-il le déplorer ?

Évidemment, ces questions font la joie de quiconque a du goût pour les mathématiques. Elles continueront d'ailleurs à faire la joie de ceux qui, à l'école normale, par exemple, poursuivront leurs études. Mais, dans nos écoles élémentaires, pour des enfants qui n'ont pas treize ans, pouvons-nous, en toute tranquillité, laisser subsister des enseignements de luxe ? Des vœux unanimes, répétés, réclament des programmes allégés et pratiques. Un sacrifice a paru nécessaire. Il faut bien se résigner à ce qu'on a souhaité et exigé. Qui serait assez insensé pour réclamer l'inscription au programme de tout ce qui est la fleur des disciplines variées ? Les mathématiques ont bien d'autres chapitres aussi élégants ; l'histoire, la philosophie, les lettres, les sciences de la nature, l'astronomie n'offriraient-elles pas, sans fin, des chapitres rivalisant de charme avec les nombres premiers ? Mais, hélas ! l'art est long et les années sont brèves.

Ajoutons qu'il sera permis de faire faire en classe des problèmes, des exercices de calcul où les mots : *nombres premiers*, *diviseurs communs*, *caractères de divisibilité* pourront être employés. Ce qui est supprimé, c'est le « cours », « l'étude théorique » de cette arithmologie. Il est permis, en histoire, de parler de *self government*, ce n'est pas une raison pour que les historiens réclament l'enseignement de l'anglais à l'école primaire.

Il reste encore, après la suppression de cette arithmologie, assez de calculs au cours supérieur, assez de formules, assez de problèmes, assez de géométrie pour meubler l'esprit de connaissances utiles et pour lui donner souplesse et vigueur. Nous devons même signaler une addition qui, si soucieux que nous fussions d'alléger le programme, nous a paru nécessaire : l'*algèbre* pénètre à l'école primaire. Il ne saurait être question naturellement de théories algébriques. Il s'agit simplement d'habituer les élèves à l'emploi des lettres, des signes et des solutions algébriques les plus élémentaires. N'oublions pas que l'algèbre est, à certains égards, une arithmétique simplifiée. Il n'est donc pas contraire à notre principe général d'initier nos élèves à la pratique de cet incomparable instrument de calcul.

⁂

Calculer, calculer rapidement et exactement, tel est l'*objectif* principal de l'enseignement mathématique à l'école primaire. La théorie ne doit intervenir que dans la mesure où elle est nécessaire pour justifier la pratique du calcul, la rendre plus agréable à l'enfant qui cherche à s'expliquer ce qu'il fait, la rendre plus féconde en la rendant plus intelligible. Durant le temps assigné à cet enseignement, les exercices de calcul ne sauraient être trop fréquents : en particulier, aucune classe d'arithmétique ne devrait s'écouler sans que des exercices de *calcul mental* aient été proposés aux élèves. C'est peut-être dans l'enseignement mathématique que nos instituteurs ont remporté jusqu'à présent leurs succès les plus incontestés. Ils ne doivent pas s'en contenter. De nouveaux progrès seront accomplis si l'on s'efforce de rendre cet enseignement de plus en plus concret et de plus en plus pratique.

- ANNEXE 4 -

1

"Pages choisies de pédagogie contemporaine",

L'enseignement du calcul[1].

Introduction (extrait) :

La perfection à laquelle notre pédagogie du calcul s'est élevée est, sur certains points, plus apparente que réelle; et elle ne va pas sans de graves inconvénients; le point de vue utilitaire a trop souvent caché l'éducatif dans une discipline que sa simplicité désigne pourtant comme un des premiers aliments de l'esprit. On parviendrait à de meilleurs résultats, avec moins de fatigue, si, comme il est presque toujours possible, on s'appliquait à *faire comprendre avant de faire apprendre*. Rousseau, Condillac, Lacroix, Pestalozzi avaient exprimé cette vérité que d'autres grands esprits, Tolstoï notamment, mettent à la base de leurs idées sur l'instruction. Il semble qu'en calcul nous l'ayons oubliée, en dépit d'efforts méritoires dont plusieurs ont été enregistrés par la *Revue pédagogique*. Ces efforts en faveur d'un enseignement de réflexion s'opposant à un enseignement de mémoire, il nous avait paru nécessaire de les renouveler. Sans aucun doute, nous sommes trop emportés par le désir d'aller plus loin, et d'aller plus vite. Puisque tout est élucidé et codifié, à quoi bon les hésitations, les tâtonnements, même s'ils sont le signe d'un travail de la pensée? Et puisque nos enfants arrivent à suivre le chemin le plus logique, qui est le plus court et le plus rude, pourquoi revenir aux sinuosités, même quand les jeunes esprits aiment à les suivre, à l'exemple de l'humanité dans sa marche?

Le souci de ne pas perdre de temps, et les nécessités de l'enseignement collectif dictent trop souvent à ces questions une réponse contraire aux principes d'une saine pédagogie. Nous avons voulu provoquer, sur ce point, les réflexions des maîtres. Nous avons constaté avec plaisir que nos suggestions n'étaient pas tombées dans le vide...

I. *Quelle doit être la part de la réflexion et de la mémoire dans l'enseignement des premières notions de calcul?*

Convient-il d'apprendre par cœur la table d'addition? Vaudrait-il mieux exercer les élèves à combiner les nombres en utilisant les notions de compensation, de voisinage, de symétrie et de décomposition que leur intuition conçoit sans grand effort?

1. *Réflexion et mémoire.* — La question posée ne revient pas sur les procédés dont l'importance est partout reconnue, qui mettent en œuvre, lors de la première initiation, l'expérience motrice, auditive ou visuelle, puis conduisent à l'association des impressions produites par les divers sens. Mais si personne ne conteste leur efficacité, peut-être en pratique ne les applique-t-on pas assez systématiquement, ni assez longtemps; peut-être aussi discuterait-on encore, à tort, qu'appliqués au calcul, les exercices de maniement de divers objets ainsi que la vue des choses puissent être à la base du développement de la réflexion et puissent diminuer l'emploi de la mémoire, cette merveilleuse qualité des enfants, dont nous abusons à la leçon de calcul.

Réflexion, mémoire, voilà les deux mots en faveur desquels nous en avions élagué tant d'autres, sans que nous eussions perdu de vue l'insuffisance du mot réflexion pour désigner seulement le premier rudiment de l'esprit de réflexion.

2. *Une doctrine.* — Les réponses sont très intéressantes. Et il suffit d'en réunir quelques-unes pour former une doctrine : « En calcul, il y a des retards qui valent des avances. » « Ce n'est qu'après avoir bien réfléchi, comparé, raisonné même, qu'une notion est confiée à la mémoire. » « L'on passe toujours trop rapidement sur l'étude des premiers nombres, dans la hâte d'arriver aux opérations,... ces brillantes opérations qui font la joie de certains maîtres et d'à peu près tous les parents. » «Evidemment les résultats doivent être solidement fixés dans la mémoire et retrouvés au premier appel; mais nous nous obstinons à penser que l'étude première des tables d'addition est objet de réflexion. » « Mécanisme nécessaire? Peut-être cette nécessité n'est-elle pas entièrement démontrée. En tout cas, nous n'augurons rien de bon pour la formation de l'esprit d'exercices d'où toute pensée véritable est absente. » « Les enfants du cours préparatoire et du cours élémentaire sont-ils capables de ces décompositions de nombres? Je pense qu'ils arriveront à les concevoir de tête si elles ont été préparées par les procédés sensoriels. » « Cette méthode de compréhension, si elle est capable de donner des résultats chez des élèves intelligents, ne risque-t-elle pas d'échouer avec des élèves médiocrement doués? A ceux-ci les procédés mécaniques conviendraient-ils alors seuls? »

Bien des conséquences d'ordre pratique peuvent être tirées de ces extraits.

3. *De un à cent.* L'étude des cent premiers nombres entiers et en particulier les combinaisons à réaliser sur ces nombres par voie d'addition et de soustraction seulement sont, pour un jeune enfant de 6 à 7 ans, un vaste monde à parcourir; et il est essentiel, au point de vue de la formation, de s'y arrêter longuement. Il n'y aurait que des avantages à retarder plus qu'on ne le fait habituellement l'usage des grandes opératio. de multiplication et de division.

On répondra qu'il est possible, sans manquer à la logique, d'adopter dès les débuts une méthode rapide. Nous le savons; il suffit d'apprendre à nommer et à écrire les nombres, de faire réciter jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'hésitation une table d'addition jusqu'à 18 et la table de soustraction correspondante, et enfin d'imposer à l'esprit le mécanisme de la retenue pour que tout ce qui concerne la numération, l'addition, la soustraction semble être achevé. Mais il n'y a rien de plus néfaste. C'est l'application de cette méthode qui conduit à rencontrer tant d'enfants de douze ans capables de bien faire les opérations tout en ignorant entièrement le sens de l'écriture décimale, et même des jeunes gens sur lesquels les premières notions ont à ce point glissé qu'ils ont oublié jusqu'au mécanisme des opérations. A la méthode rapide, directe, logique, condensée, qui ne convient qu'aux esprits mûris, nous opposons une méthode résolument lente qui retourne les choses de toutes façons pour les expliquer, qui n'hésite pas, pour prendre un exemple, à insister sur les exceptions de la numération parlée (onze au lieu de dix-un..., quatre-vingts au lieu de octante) et qui, en variant à l'infini les exercices, reste assez ingénieuse pour éviter la monotonie. C'est manquer de sens pédagogique que de méconnaître la difficulté et l'importance de l'étude de la première centaine de nombres bornée à l'addition et à la soustraction...

[1]. Extraits du Rapport de MM. les Inspecteurs généraux sur les conférences pédagogiques de 1922.

... D'abord, l'étude de la première dizaine de nombres contient en germe bien des idées et nécessite bien des gradations : nommer ces nombres tout en les réalisant matériellement avec des objets, recommencer avec des haricots, des billes, avec les carreaux des fenêtres, les tables de la classe..., d'une manière aussi variée que possible, ce qui aura été fait avec des bûchettes, puis combiner les premiers nombres par addition et soustraction, n'employer la répétition, pourtant nécessaire, qu'après s'être assuré que toutes les combinaisons ont été « senties » de telle façon que le rôle de la mémoire reste subordonné et final, ensuite écrire ces nombres et enfin s'élever au nombre dit abstrait, le seul sur lequel on opère finalement, tout cela qui est aujourd'hui si bien fait à l'école maternelle peut aussi servir de méthode pour la suite au cours préparatoire et au cours élémentaire. Bien entendu, lorsque la toute première initiation a été à ce point détaillée, les enfants ne doivent plus compter à l'aide des doigts.

4. *Rôle spécial de la dizaine.* — Nous avons cru longtemps qu'il pouvait être utile de continuer au delà de dix l'étude des nombres successifs sans accorder à la dizaine un rôle spécial. Nous ne le pensons plus. Un relais est nécessaire avec de si jeunes esprits, et, d'autre part, la numération parlée à partir de dix-sept, la numération écrite à partir de 10, obligent vite à faire connaître l'idée essentielle de notre numération, idée d'une telle importance qu'on n'y insistera jamais assez, car il est impossible de comprendre quoi que ce soit en arithmétique si on ne la possède pas entièrement. Enfin nous estimons que le principe de la numération décimale ne dépasse nullement les moyens d'enfants même jeunes, car le désir de grouper, de classer, leur est naturel; ils sont capables d'apprécier et d'admirer un puissant moyen de rangement et de se distraire en l'appliquant. Il convient donc, selon nous, d'arriver très vite à la formation, par voie purement mentale, de $8 + 7 = 15$, au moyen de $8 + 2 = 10$, $10 + 5 = 15$, étant entendu que ces exercices auraient été précédés de nombreuses réalisations manuelles et visuelles. A cet égard, il nous semble que le matériel employé pourrait être amélioré, en vue de mettre en lumière l'idée de la numération, tout en laissant le reste dans l'ombre et de rendre plus commode, plus rapide, la formation des paquets de dix. Nous voudrions encore, au sujet du matériel, dire quelques mots en faveur du boulier. Nous comprenons mal qu'on ne l'utilise pas aussi généralement qu'autrefois, et les critiques dont il est l'objet nous paraissent peu probantes. « Le boulier, écrit-on, n'est pas un bon instrument pour enseigner la numération. Les boules glissent de droite à gauche autant que de gauche à droite, et le nombre formé n'apparaît pas, ne saute pas aux yeux. De même n'apparaissent pas sur le boulier les additions et les soustractions. » Seule, à notre point de vue, la dernière objection a du poids. Il est clair que l'emploi individuel des bûchettes précède l'usage collectif du boulier et se prête mieux à la réalisation des premières additions et soustractions. Mais nous ferons remarquer qu'il serait possible de représenter les deux nombres à additionner ou à soustraire sur un premier boulier, l'un en haut, l'autre en bas, et de figurer le résultat sur un autre boulier. Enfin, notons-le, il importe de varier les procédés concrets, les uns manuels, les autres visuels, pour que les premiers principes du calcul pénètrent dans l'esprit de l'enfant par tous les moyens.

5. *Les exercices : réalisation manuelle et calcul mental.* — Sans entrer dans le détail des exercices, en nombre infini, qu'il y a lieu de faire faire aux enfants, et de conduire méthodiquement, disons que lorsqu'on est arrivé à des nombres de plusieurs dizaines, les exercices essentiels, présentés, par exemple, sous la forme de la réalisation manuelle, consistent : 1° à donner en vrac un certain nombre d'objets, à demander le classement suivant les règles de la numération, puis l'énoncé du nombre ainsi obtenu; 2° à recommencer avec d'autres groupes d'objets; 3° à réunir deux groupes des mêmes objets et à demander le total; 4° à retirer d'un premier groupe déjà classé un nombre donné d'objets. Chacun de ces deux derniers exercices se subdivise en deux; dans le cas de l'addition, il peut arriver que la réunion des deux groupes ne nécessite pas ($34 + 21$, par exemple) ou nécessite ($34 + 27$) le rangement d'une nouvelle dizaine d'objets; dans le cas de la soustraction, ou bien les dizaines et les unités se retranchent séparément ($37 - 22$), ou bien ($63 - 28$) il est nécessaire de détruire le classement opéré dans la formation du nombre 63 et de puiser dans une dizaine déjà classée en écrivant : $63 = 50 + 13$. C'est là l'explication de la retenue. Faite manuellement, vue sur le boulier, elle représente la justication des opérations d'addition et de soustraction. Ce n'est pas tout. Il reste à obtenir que les enfants — ou au moins la majorité d'entre eux — puissent faire mentalement toutes les additions et soustractions dans lesquelles entrent des nombres inférieurs à cent. Il en est qui referont de tête l'opération régulière. D'autres, plus ingénieux, emploieront les idées de symétrie, de décomposition, de compensation, plus simples souvent que la règle. C'est ainsi que, pour calculer $42 - 17$, au lieu de retrancher 7 de 12 et 10 de 30, il est possible, plus simplement, de retrancher 20 de 42 et d'ajouter 3. Ces exercices de calcul mental sont très connus, et nous n'y reviendrions pas s'ils étaient employés assez tôt, au tout premier degré des études, alors que, loin d'être un simple procédé de calcul rapide, ils constituent un moyen admirable de conduire l'esprit de l'enfant à pénétrer la structure du nombre et s'identifient avec la formation théorique qu'il est possible d'envisager à cet âge.

Selon nos vues, c'est toujours après l'emploi prolongé de ces méthodes que la répétition et la récitation interviendront. Dans l'enseignement individuel, la part des procédés instructifs et réfléchis et la part de l'acquisition par le verbe et la règle — celle-ci pouvant alors dans certains cas devenir insignifiante — se détermineraient aisément. Elles sont plus difficiles à fixer dans l'enseignement collectif, il est vrai, mais cette difficulté n'est-elle pas relative à toutes les disciplines? En tous cas, nous sommes profondément convaincus que l'application des idées que nous venons de développer peut avoir sur le cours des études des enfants qui nous sont confiés (et même sur le développement de leur personnalité) l'influence la plus salutaire. Une fois les cent premiers nombres bien connus et rapprochés les uns des autres de toutes façons, un grand pas est franchi, les procédés concrets peuvent céder le pas à l'imagination et au travail de l'esprit pour concevoir mille, dix mille... C'est alors que les cartes de dix boutons, les paquets de dix cartes, les boîtes de dix paquets,... de même que les escouades de dix, les sections de cent, les bataillons de mille hommes... viennent au secours du maître, lequel trouve aussi à ce moment dans les multiples des unités du système métrique mieux qu'un utile auxiliaire, un véritable soutien, pour donner des [illegible] sur la numération.

II. *Croyez-vous possible de faire faire aux enfants un certain nombre de multiplications et de divisions en s'appuyant sur la définition de ces opérations, pour réinventer ensuite la règle pratique usuelle comme conséquence des calculs effectués?*

Reconnaissons, en toute modestie, que la question a eu peu de succès; de sévères objections, accompagnées de réponses entièrement négatives, prouvent que nous n'avons pas été compris. « La théorie des opérations à l'école primaire? » « Etudier pour les enfants les quatre cas de la multiplication et les trois cas de la division? C'est absolument impossible. » Et d'autres ajoutent : « La définition des opérations dépasse nos élèves tant qu'ils ne savent pas faire ces opérations. Et il ne faut pas penser faire découvrir une règle pratique dont l'énoncé embarrasserait la plupart des instituteurs. »

Ces mots, *théorie, définition, règle pratique*, ont pour beaucoup d'esprits le sens étroit que leur donne notre goût des exposés irréprochables et complets qui, sans intermédiaires, s'opposeraient aux réalisations mécaniques. Bien au contraire, de même qu'on peut, raisonnablement, expliquer aux enfants la formation d'un nombre sans leur faire la « théorie » du système décimal, nous essayerons de montrer qu'il n'est pas absurde de les faire réfléchir sur les opérations.

Les définitions auxquelles nous pensons n'ont rien de commun avec ces longues phrases où des mots creux comme « répéter », « composer avec », avaient la prétention de faire comprendre un mot précis. Ces définitions ne valaient que par la convention tacite qu'on les acceptait le jour de l'examen. Elles ne correspondent plus maintenant à nos habitudes de langage et de pensée.

Connaître la *règle pratique* d'une opération, ce n'est pas réciter les longs discours que les livres donnent sous ce titre; c'est savoir effectuer l'opération.

Pour mieux montrer le sens de cette deuxième question, nous allons tâcher d'expliquer comment nous entendons les opérations fondamentales.

1. *Addition*. — Un sac contient 58 billes, un autre en contient 23. — L'action de réunir les billes du premier et celles du deuxième sac dans un troisième sac s'appelle une *addition*. Le nombre des billes du troisième sac s'appelle *somme* des nombres 58 et 23. (On dit quelquefois *total* au lieu de somme.)

Les enfants ont une tendance naturelle à remplacer un mot par un autre en disant, par exemple : faire une addition, c'est *ajouter*; ils admettent que si le mot addition a besoin d'être défini, le mot *ajouter* a un sens par lui-même. Aussi est-il nécessaire de compléter la définition de l'addition par celle des mots *ajouter, additionner, augmenter de*, etc., *termes qui se rencontrent à propos de l'addition*. On ne saurait prendre trop de précautions pour *obtenir d'une part que les rares mots techniques de l'arithmétique soient pris avec un sens parfaitement net, et d'autre part que les élèves ne considèrent pas l'acquisition d'une notion nouvelle comme l'effet d'une simple transposition de mots.*

En ce qui concerne la justification de la règle de l'addition, personne ne conteste qu'il soit possible de faire comprendre que 321 + 657 + 368 comprend 16 unités, 13 dizaines, 12 centaines et, après classement, 6 unités, 4 dizaines, 3 centaines, 1 millier.

2. *Soustraction*. — La soustraction demande un peu plus de temps et de travail. D'un sac qui renferme 81 billes j'enlève 53 billes. J'ai fait une *soustraction*. Et le nombre de billes qui me restent est la *différence* des nombres 81 et 53 (on dit encore *reste* ou *excès* au lieu de *différence*). *Soustraire, retrancher, diminuer de, ôter de*, demandent aussi d'être définis en passant.

Cette définition donnée, il convient d'insister sur le fait que la somme de la différence et du plus petit nombre donne le plus grand nombre. D'où une deuxième façon de concevoir la différence de deux nombres.

Ce que nous avons dit à propos de la soustraction de deux nombres inférieurs à 100 montre assez que l'on peut arriver, dans le cas général, à faire comprendre aux meilleurs élèves la raison d'être de la règle courante. Ici encore, on le voit, notre « théorie » est une banalité qui n'a rien de rébarbatif.

3. *Multiplication*. — Nous avons trois sacs de billes qui renferment 58, 23 et 36 billes. Nous réunissons toutes ces billes dans un quatrième sac. Il y aura (58 + 23 + 36) billes. Une addition donne le résultat.

La multiplication n'est qu'un cas particulier de l'addition. J'ai maintenant trois sacs de billes. Ils contiennent tous trois le même nombre de billes, 58 par exemple. Combien aura-t-on de billes dans un quatrième sac où on les vide tous trois? Le résultat est encore celui d'une addition : (58 + 58 + 58) billes. *Une pareille addition, dont tous les termes sont égaux, s'appelle une multiplication.* Le résultat est appelé *produit* de 58 par 3. C'est l'emploi de la table de Pythagore qui permet de simplifier une telle addition. Et nous reconnaissons volontiers qu'en apprenant cette table, on ne fait presque exclusivement appel qu'à la mémoire. Mais pourrait-on, en arithmétique, trouver d'autres cas que celui-là? Quoi qu'il en soit, nous souhaitons qu'on explique aux enfants que 58 × 3 donne 24 unités, 15 dizaines, c'est-à-dire 4 unités, 7 dizaines, 1 centaine. Et après avoir constaté — il n'est pas mauvais de le faire d'abord par l'expérience d'une addition — que 58 × 10 = 580, puis que 58 × 30 est l'addition de trois nombres égaux à 580, ou mieux encore celle de 10 nombres égaux à 58 × 3, on peut être conduit à l'explication de la règle habituelle donnant par exemple le produit de 58 × 37, qui consiste à effectuer l'addition de 58 × 7 = 406 et de 58 × 30 = 1740. C'est peu à peu qu'il y a lieu de parvenir à la manière rapide de poser l'opération.

Tout cela est long, nous a-t-on objecté. Nous en convenons. Mais nous avons la certitude qu'un enfant ne peut pas comprendre un problème sur la multiplication sans avoir réfléchi plus longuement qu'on ne le fait dans beaucoup de classes, sur le sens profond de l'opération. Et il est plus logique d'insister sur de tels sujets, dont l'importance est primordiale, que de se hâter pour arriver plus vite aux problèmes sur les robinets ou sur les partages par fausse supposition.

4. *Division*. — La définition est plus délicate. Bien entendu, il convient aussi de la présenter sur des exemples : mais ces exemples doivent être choisis avec un soin particulier. Laissons de côté le cas d'un partage possible en parts égales pour aborder le cas général.

Nous voulons partager 37 plumes entre un certains nombre d'élèves de manière que chaque élève ait 8 plumes. Nous en distribuons successivement 8, reste 29; encore 8, reste 21; 8, reste 13; 8, reste 5. Le partage est terminé, 4 élèves auront

8 plumes, et il restera 5 plumes. Il y a lieu d'éviter, dans les premières explications relatives au sens du mot division, de partager 37 plumes entre 8 élèves. Le dividende et le diviseur représentent ici des unités concrètes d'ordres différents ; on ne ramène le problème au précédent qu'en donnant d'abord une plume par élève et en se demandant combien de fois cette distribution de 8 plumes peut être faite.

Quant à la redoutable « théorie » de la division, nous y avons intéressé des élèves de 1re année d'école primaire supérieure avec beaucoup de facilité, parfois à l'heure même où l'on venait de leur parler des insondables difficultés qu'elle présente ; et il serait également aisé d'y intéresser tout au moins des élèves du cours supérieur A. La méthode que nous allons rappeler en quelques mots est due à M. Gal. Diviser 7.328 par 13, c'est retrancher successivement 13 de 7.328 jusqu'à ce qu'on soit arrêté dans cette suite de soustractions, laquelle sera fastidieuse. Il y aura donc intérêt à faire ces soustractions « par paquets » ; et puisque le quotient doit être finalement écrit en dégageant le nombre d'unités de divers ordres qu'il contient (centaines, dizaines, unités dans le cas présent), il y a utilité à former les produits de 13 par 2, par 3,... par 9 ; ce qui, immédiatement, nous donnera les produits par 20, 200, 90, 900... Le tableau des produits de 13 par les 9 premiers nombres entiers est : 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117.

Il suffit de l'observer pour voir que le dividende est compris entre 6.500 et 7.800 et que par suite le quotient est compris entre 500 et 600, d'où le chiffre des centaines, 5, et la soustraction

$$7.328 - 6.500 = 828.$$

828 est compris entre 780 et 910, d'où le chiffre des dizaines 6, et la soustraction $828 - 780 = 48$. Le chiffre des unités est 3, le reste est 9. De cette manière, on fait, en suivant le même ordre, les mêmes opérations que dans la division usuelle ; on les fait plus lentement, on les explique, et on prépare, comme nous l'avons dit déjà à propos de la multiplication, le mode habituel et infiniment concis de l'opération de la division, dans laquelle les multiplications et les soustractions sont mêlées au point de rendre toute explication impossible.

Conclusion : On peut et on doit expliquer soigneusement les opérations avant d'en étudier la pratique.

On comprendra, nous l'espérons, après les développements qui précèdent, *qu'on peut et qu'on doit expliquer soigneusement les opérations avant d'en étudier la pratique* et que le « mystère » des règles opératoires, indéniable sous la forme définitive et concise que nous leur donnons, peut être aisément percé au moyen de quelques bienfaisantes longueurs. Jusqu'où aller dans cette voie ? C'est au maître de l'apprécier, en observant la tête de la classe. Mais pour prouver une fois de plus que nous ne préconisons aucune révolution, rappelons que le nombre des instituteurs qui s'efforcent de ne pas laisser à l'opération habituelle de la multiplication et surtout de la division le caractère d'une révélation est déjà très grand : ce sont ceux qui, tout d'abord et même pendant longtemps, les présentent sous les formes suivantes :

321	
456	
1926	
16050	
128400	
146376	

7328	13
6500	500
828	60
780	3
48	563
39	
9	

Cette précaution est un progrès considérable, et nous sommes prêts à reconnaître qu'il est parfois difficile d'aller plus loin à l'école primaire. D'ailleurs, nous n'hésiterons pas non plus à affirmer en terminant que le but essentiel de l'enseignement des quatre opérations est d'arriver à une impeccable sûreté.

III. *Dans le programme du cours élémentaire et du cours moyen, l'étude des mesures légales, de leurs multiples et de leurs sous-multiples est le support de l'étude de la numération des nombres entiers et décimaux. Quels sont les résultats de cette innovation ?*

1. *L'innovation.* — Il s'agit, en effet, d'une innovation ; car, sur ce point, les programmes de 1923 se séparent de ceux de 1887 qui faisaient de l'étude du système métrique une conséquence de l'étude des nombres entiers et des fractions.

L'examen des manuels parus en ces dernières années donnait à penser que l'on n'avait pas su tirer tout le parti possible des dernières directives officielles, principalement en ce qui touche les nombres décimaux. Cette opinion se trouvait confirmée par les appréciations de la presse pédagogique. En fait, le tiers environ des rapports reçus affirment que les maîtres consultés ont reconnu n'avoir pas suivi sur ce point les nouveaux programmes. Nul ne conteste d'ailleurs que l'étude des nombres à virgule est facilitée par celle des sous-multiples des unités essentielles. Mais on discute davantage l'intérêt que présente l'emploi des hectomètres et des kilomètres pour faciliter la compréhension de l'écriture décimale des nombres entiers.

2. *Les sous-multiples, base exclusive des nombres à virgule et des fractions décimales.* — Certes, en bonne logique, l'étude de la numération à base dix — qu'il s'agisse d'entiers ou de fractions décimales — doit précéder celle des mesures, celle des multiples et des sous-multiples de l'unité principale. C'est la numération décimale qui a conduit à notre système d'unités, et il y a un cercle vicieux à appuyer le principe sur ses applications. Mais certains cercles vicieux, Henri Poincaré l'a reconnu, sont bienfaisants en pédagogie. Les maîtres ne doivent pas craindre d'entrer résolument dans la voie de l'intuition, et de chercher, dans les sous-multiples, la base exclusive des nombres à virgule et des fractions décimales. Voilà le point capital des instructions de 1923. Moyennant des changements très simples d'unités, les opérations sur les nombres décimaux définis sous forme concrète deviennent des opérations sur les nombres entiers. S'il est, par exemple, question de mètres avec trois décimales et de francs avec deux décimales, les unités millimètre et centime donneront lieu à des manipulations d'entiers et un simple déplacement de virgule convertira le résultat en mètres ou en francs. Plus tard, après de nombreux exercices de ce genre, l'élève comprendra que cette manière de faire constitue une explication des nombres décimaux, qu'elle entraîne des longueurs et qu'elle est provisoire. Les changements d'unités seront alors rendus inutiles par l'énoncé des règles relatives aux opérations sur les nombres décimaux, règles si simples qu'elles se réduisent à l'indication de la place de la virgule.

3. *Multiples décimaux et numération des nombres entiers.* — Un assez grand nombre de conférences ont, nous l'avons dit, mis en doute l'avantage du secours qu'apportent les multiples décimaux dans l'étude de la numération entière. Nous ne saurions prétendre que l'étude du système métrique doit précéder celle de la numération. Mais on a trop oublié, en discutant cette troisième question, qu'à l'heure où il s'agit de rendre mieux assises et plus générales des notions déjà acquises sur la numération et où il serait fastidieux et vain de manier des marrons, des billes, des « unités discrètes », la distance au village voisin, le poids d'un objet, la capacité d'un vase, peuvent aisément donner l'idée de mille, dix mille, etc.

On nous a vigoureusement reproché le mot *support* employé dans notre texte. Nous ne l'avions pas choisi sans le peser.

Que disent, à ce sujet, les instructions de 1923? Sur les nombres entiers, « le système légal des mesures, système décimal, *appuiera* la leçon sur la numération »; et sur les nombres décimaux, « ici, plus encore que dans le cas précédent, le système décimal servira de *base* presque unique aux études des nombres ».

Nous n'avons forcé l'expression de notre pensée que pour la partie la moins importante de l'innovation de 1923, celle qui regarde les nombres entiers. Les instructions officielles, il est vrai, sont plus nuancées que nos quelques lignes; mais la contradiction qu'on a cru relever n'existe pas; et il n'y a pas lieu de regretter notre légère exagération, qui nous a permis de souligner plus fortement l'esprit des nouveaux programmes.

4. *Pas de nombres décimaux au cours élémentaire.* — Un très grand nombre d'instituteurs ont signalé l'embarras où les mettait l'observation stricte du plan d'études. D'une part, les nombres à virgule ne doivent intervenir qu'au cours moyen. D'autre part, on leur recommande d'enseigner de façon concrète, dès le cours élémentaire, les rudiments du système métrique, mais sans parler des sous-multiples. Comment mesurer les longueurs qui se présentent tout naturellement en classe : dimensions d'une table, d'une règle, d'un cahier, sans faire usage des sous-multiples du mètre? comment faire des pesées avec la balance sans se servir des sous-multiples du kilogramme? L'objection vaut qu'on l'examine : le choix de l'unité ne doit pas être rigide et absolu. L'enfant sait qu'on ne donne pas en mètres, mais en kilomètres, la distance de deux villes voisines. Il concevra aussi bien qu'on choisisse une unité plus petite que le mètre pour mesurer une table. Le mètre vaut 100 centimètres, et l'on peut, sans parler des nombres décimaux, en s'appuyant sur le centimètre, le gramme, faire en classe toutes les mesures pratiques qu'on voudra.

Nous ne saurions, par contre, encourager ceux qui introduisent dès le cours élémentaire les nombres à virgule. Les élèves en voient partout, nous dit-on. C'est vrai, mais on n'élucide pas à l'école tous les sujets dont les élèves entendent parler à la maison. Et il faut éviter surtout en arithmétique les études prématurées; chaque difficulté doit venir en son temps.

IV. *Les programmes prescrivent de commencer l'étude des fractions par celle des fractions décimales. Y voyez-vous des inconvénients? A quel âge considérez-vous que l'étude des fractions est accessible et intéressante?*

La discussion, ici encore, a mis en évidence que les instructions de 1923 n'ont pas été partout appliquées. Le plus souvent l'étude des fractions décimales reste une dépendance de l'étude générale des fractions; et, par suite, on donne le pas à la méthode compliquée et abstraite sur la méthode simple et concrète. Et pourtant les maîtres qui n'ont pas craint de suivre le programme sont presque toujours satisfaits d'avoir adopté la marche qu'il préconise.

1. *Pas de fractions au cours élémentaire.* — Sans le moindre souci des difficultés, l'opinion est répandue que l'étude des fractions est accessible dès le cours élémentaire ou même dès le cours préparatoire et qu'elle est au premier chef [illegible] éducative et amusante. « *A quel âge l'étude en est-elle accessible? Mais dès 6 ans; c'est du C.P. que doit partir la voie inclinée pour atteindre, en pente douce, l'étape supérieure. Partir du cours moyen en décuplant l'intervalle entre les échelons : dixièmes, centièmes... au lieu de demi, tiers... c'est une gageure.* » « *Un enfant qui sait lire et écrire des nombres, et faire sur eux les quatre opérations d'arithmétique, est parfaitement capable d'acquérir les premières notions sur les fractions. Et l'on voit que cela peut se faire au cours élémentaire. Il n'est même pas besoin de savoir effectuer les quatre opérations d'arithmétique pour comprendre ce que c'est qu'une fraction et se rendre compte de la manière de l'écrire.* » Il y a là un évident malentendu qui se produit dans presque la moitié des rapports. On paraît croire que l'étude des fractions consiste simplement à définir la moitié, le tiers, le quart, notions fondamentales et simples qui relèvent autant de l'enseignement du français que de celui de l'arithmétique. « *Mais,* comme l'écrit un rapporteur, *concevoir les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, n'est pas calculer sur les fractions, et c'est d'opérations sur les fractions qu'il s'agit* » et d'opérations difficiles comme la simplification, l'addition, la multiplication, sans lesquelles l'introduction d'un symbole nouveau ne présenterait qu'un intérêt médiocre, qui dépassent de haut les élèves du cours élémentaire et même, si l'on veut sortir des règles opératoires pour s'élever jusqu'à leur compréhension, ceux du cours moyen et du cours supérieur. Lorsqu'on a constaté la peine considérable qu'éprouvent les élèves des écoles normales à comprendre l'étude élémentaire des fractions prévue par le programme, on est porté à trouver bien trop optimistes les appréciations d'après lesquelles il serait possible d'aller plus loin qu'à la définition concrète des fractions avec des bambins de 6 à 7 ans, alors que nombre de candidats au certificat d'études écrivent : *puisque la largeur est les 4/5 de la longueur, la longueur est égale à 5/5*, et ne peuvent sortir du piège dans lequel la logique les enferme ainsi.

2. *Autres erreurs à rectifier.* — Bien des idées peu justes sur l'utilité pratique des fractions sont à rectifier.

On ne saurait le faire mieux qu'en citant cette phrase : *Nous voulons bien concéder que les fractions de dénominateurs 2, 3, 4, 5 ou 6 ont en effet une petite place dans la vie courante. Est-ce suffisant pour en accorder une si grande aux fractions dans les programmes?* Quelques simplifications de calcul (il est plus simple de multiplier mentalement par 5/4 que de multiplier par 1,25) et d'autre part la considération des grandeurs qui ne se mesurent pas dans le système décimal (temps, angles, système des mesures anglaises) nous conduisent à employer quelques fractions, d'ailleurs simples. Mais on peut dire qu'en fait, la définition des fractions et leur conversion en décimales suffit dans la pratique de la vie.

Parfois la défense des idées traditionnelles sur l'enseignement des fractions devient véhémente et absolue : *introduite comme on nous le demande, la fraction décimale apparaît donc comme inutile, et elle se présente contre toutes les règles de la logique. Pourtant, s'il est un enseignement qui doive se soucier de la logique, c'est bien celui de l'arithmétique, du moins si l'on veut lui faire porter son meilleur fruit.* Nous pensons au contraire que le rôle de la logique ne devient essentiel que bien après nos classes élémentaires. Il arrive également que cette défense s'accompagne d'erreurs véritables, comme celle-ci : *L'enfant se perdra vite en utilisant le dénominateur commun — 1.000.000. — des fractions* $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{1000}$. Souvent, on confond l'habitude d'utiliser les fractions avec la nécessité de les employer : *7 kilogrammes de sucre valent 29 francs, combien valent 3 kilogrammes? Comment, dans ce problème, se passer de la fraction* $\frac{3}{7}$? Très simplement : 7×3 kilogrammes valent $29\times3=87$ fr. et le prix de 3 kilogrammes s'obtiendra en divisant 87 par 7. Comme il était à prévoir, des opérations si simples sur les nombres entiers se justifient aisément en ne se servant que de nombres entiers et, pour le résultat final, d'un nombre décimal.

Au sujet de la place excessive tenue par les fractions dans notre enseignement à l'école primaire, des progrès se font jour. Nous avons même rencontré cette opinion radicale : « Il faudrait rayer l'étude des fractions des programmes de l'école primaire. » Dans plusieurs circonscriptions, on s'est heureusement occupé de mettre au point un programme limitatif en vue du certificat d'études; et, dans l'une d'elles, en s'appuyant sur ces deux principes : « L'étude des fractions doit se borner aux points qui présenteront, dans la vie courante, un réel intérêt. Elle doit développer l'aptitude au raisonnement et non pas faire acquérir de simples mécanismes, » on propose de laisser dans l'ombre les questions suivantes qui sont difficiles : « multiplication d'une fraction par une fraction; division d'un nombre entier par une fraction; division d'une fraction par une fraction ».

3. *Il faut commencer par l'étude des fractions décimales.* — Mais après avoir souligné ces indéniables progrès, nous devons ajouter que tout — ou à peu près — reste à faire pour convaincre le personnel que si l'on se propose d'expliquer réellement à des candidats au certificat d'études ce que sont les diverses opérations sur les fractions, il y a nécessité presque absolue à commencer par les fractions décimales. Un enfant de 12 ans, même très intelligent, ne saisit pas le sens de l'opération $\frac{2}{13}\times\frac{7}{11}$ sans d'infinies précautions, et il n'y a aucun doute qu'il comprendra beaucoup mieux la multiplication par $\frac{7}{11}$ si on lui rappelle d'abord comment on a opéré pour multiplier par 0,6, c'est-à-dire par $\frac{6}{10}$, et cela d'autant plus que cette étrange multiplication par $\frac{7}{11}$, qui diminue le multiplicande, est déroutante, tandis que si 0,6 est par exemple employé dans le sens de 0 kg 6, lors de la suite des idées transmises à l'enfant, la multiplication a pu être faite par 6 en choisissant l'hectogramme pour unité, et elle est ainsi naturelle.

Pour avancer dans cette voie, le temps fera son œuvre. Actuellement, il est possible de consolider et d'étendre certains résultats déjà acquis si l'on s'interdit rigoureusement de commencer les opérations sur les fractions avant le cours moyen et si l'on évite, au certificat d'études, ces problèmes toujours artificiels dans lesquels on abuse de fractions. Nous devons tâcher de réduire à l'école le trop long temps qui leur est consacré au détriment d'autres questions arithmétiques plus utiles, au détriment aussi d'autres disciplines, s'il est vrai que trop souvent les horaires du calcul débordent.

V. *Quelle est votre opinion sur l'emploi des méthodes en usage pour la résolution des problèmes élémentaires? sur les problèmes types? sur la méthode analytique avec traduction progressive de l'énoncé, sur la méthode des tâtonnements? sur l'emploi des lettres?*

Pensez-vous qu'il y a abus de travaux écrits, qu'on met au net trop de problèmes, et qu'il serait préférable de traiter en grand nombre des questions simples, résolubles mentalement?

Tous les rapports sans exception traitent longuement cette cinquième partie du questionnaire, et même beaucoup de conférences n'ont guère vu qu'elle. On l'a examinée sous toutes ses formes, avec un intérêt passionné. Il est visible que, pour la plupart de nos maîtres, le problème est la clef de voûte de l'enseignement de l'arithmétique. Les préoccupations ne vont pas assez aux questions que l'élève aura plus tard à résoudre dans la vie courante, — ces questions paraissant trop simples; — elles vont trop aux sujets, souvent artificiels, dont nos errements au certificat d'études ont amplifié l'importance. Il faut accentuer le mouvement récent qui s'est produit en faveur d'exercices plus variés, plus pratiques, plus naturels.

Les problèmes du certificat d'études s'étaient peu à peu (surtout de 1880 à 1910) élevés à un niveau qui dépasse de beaucoup la faculté de raisonnement de la moyenne des candidats. Comment obtenir de nos élèves des solutions dont ils sont, en général, incapables de découvrir par eux-mêmes le développement?

1. *Les problèmes types.* — La « méthode » qui a eu longtemps le plus de succès est celle du problème type. Nous dirions volontiers de cette méthode ce qu'on a dit, dans beaucoup de rapports, des tâtonnements : elle est le contraire d'une méthode. C'est le triomphe de la transposition facile, c'est l'habitude remplaçant la réflexion. L'expérience n'a-t-elle pas montré que l'imagination des examinateurs

est limitée à un champ qui comprend l'ensemble des énoncés proposés au brevet? De là à tenter de préparer tous les problèmes que l'on peut rencontrer à l'examen, il n'y avait qu'un pas. Il a été franchi. On a classé les difficultés ; chaque série de questions résolubles sur des grandeurs de même nature ou par la même suite d'opérations a donné lieu à un problème type. Une émulation qu'explique le succès des livres ayant exploité cette veine, a engendré une quantité de plus en plus grande des types à étudier. Certains manuels en donnent plus de 200. Chaque élève absorbe tous les jours quelques-unes des solutions (parmi ces solutions, quelques-unes sont fausses, comme celles relatives aux carrelages, ou aux robinets vidant un bassin, ou aux intérêts sur plusieurs années), puis est exercé à les reproduire sur des données numériques différentes de celles du modèle. Le jour de l'examen, il se garde bien de raisonner; il cherche dans sa mémoire la recette apprise, qui s'adapte aux énoncés proposés comme une clef à sa serrure. Et s'il n'a pas été trop mal inspiré, un 10 sur 10 vient récompenser son talent d'imitation.

Nous ne saurions incriminer les instituteurs qui ont usé de ce procédé. Le mauvais choix de certains sujets du certificat les excuse. Et puis, nombre de ceux qui ont cédé aux nécessités de l'examen n'ignorent pas que le problème type est au problème ce que le papier-calque est au dessin. Car la moitié environ des rapports sont accablants pour ce genre de « bourrage ».

2. *La traduction progressive de l'énoncé (méthode naïve).* — Pour en revenir aux vraies méthodes, constatons la faveur dont a joui, dans presque toutes les conférences, l'analyse progressive ; amener lentement l'enfant à bien se représenter l'énoncé, à en suivre pas à pas le développement, en faisant, s'il le faut, les gestes qui en traduisent le sens, les dessins qui précisent les formes ou les dispositions, puis, de cette vision successive des circonstances en cause, lui faire tirer les éléments de la solution, telle est certainement la meilleure manière de le familiariser avec la pratique du problème. L'adulte ne procède pas autrement lorsqu'il est appelé, dans le détail de la vie quotidienne, à élaborer un problème qui se pose à lui pour la première fois.

C'est le moment d'ajouter que, trop souvent, au lieu de partir des circonstances concrètes et suggestives qui donnent lieu à un exercice numérique et qui conduisent à une élaboration préalable, utile à l'esprit, nous « arithmétisons » les textes à l'excès et nous les desséchons jusqu'à n'être plus qu'une suite d'opérations sans intérêt pratique. Laissons à l'enfant tout le bénéfice du passage d'un fait à sa traduction numérique.

Cette analyse progressive — qu'on appelle quelquefois synthèse — c'est, pour nous, comme pour Jules Gal, qui l'a préconisée sous le nom de méthode naïve, la pierre angulaire de l'étude du problème à l'école du premier degré. Elle constitue le meilleur moyen d'asseoir sur des bases solides le raisonnement de l'enfant. Un élève qui en possède bien l'usage et qui sait effectuer sans faute les quatre opérations, a appris l'essentiel de ce qu'on doit connaître en arithmétique : il est un candidat acceptable au certificat d'études.

3. *La méthode régressive ou analytique.* — Dans les problèmes plus difficiles, dès que la question à résoudre fait intervenir deux ou plusieurs inconnues liées entre elles de façon simple, — comme il arrive par exemple dans le « partage en parts inégales », — il devient indispensable d'employer la méthode régressive, plus connue sous le nom de méthode analytique. On part des inconnues; pour mieux fixer dans les esprits les relations qu'indique l'énoncé, on les combine de manière à remonter aux données; et la connaissance du sens des opérations de l'arithmétique permet de conclure, de cette marche en arrière, le chemin à suivre, en partant des données, pour aller jusqu'aux inconnues. Sur de tels sujets, le maître doit commencer par faire étudier des exemples numériquement très simples. Des manipulations de bûchettes, d'abord ; des représentations par des longueurs, ensuite, concrétiseront les solutions et aideront à leur découverte, ou tout au moins à leur compréhension. Une fois que les élèves auront vu clairement les cas simples, ils s'élèveront d'eux-mêmes à la co[nce]ption de la solution générale. Il y a là des genres de problèmes dont l'étude séparée s'impose.

La méthode analytique, qui, on l'a remarqué bien des fois, est une sorte d'algèbre où les lettres sont remplacées par des mots et des figures, fut, il y a quelque vingt ans, recommandée et parfois imposée; on l'appliquait même aux problèmes accessibles par l'analyse directe. Cet abus lui fait du tort aujourd'hui. Comme nous venons de le dire, il est des questions d'indéniable valeur pratique où elle est indispensable. Sans être la panacée universelle célébrée naguère par certains pédagogues, elle doit être conservée.

Les graphiques. — Nous avons fait allusion à l'usage des représentations graphiques pour éclairer certaines solutions. Nous n'entendons pas sous cette expression la figuration d'un champ, ou des allées d'arbres, ou de la grandeur géométrique dont il est question dans un problème, — figuration qui est indispensable pour une claire vision de l'énoncé, — mais l'emploi de longueurs ou de petits rectangles pour représenter les grandeurs à calculer, nombres, poids, volumes, etc. Les « graphiques » appuient utilement et heureusement la méthode analytique. Ils sont, eux, une algèbre où les inconnues sont, au lieu de lettres, des grandeurs géométriques. Beaucoup d'élèves en tirent le meilleur parti, et certains maîtres en préconisent l'utilisation systématique. Il semble, cependant, que l'abus en doive être évité. Tous les esprits ne trouvent pas dans ces représentations géométriques les mêmes clartés et les mêmes avantages.

4. *La méthode des tâtonnements.* — La méthode des tâtonnements rencontre, de façon générale, plus de dédain que d'égard. C'est qu'on considère trop souvent une « méthode » comme un moyen mnémotechnique infaillible de conduire au but, quelle que soit la difficulté proposée. A ce titre, la « méthode » du problème type aurait seule une réelle valeur, à condition qu'on ait traité tous les types possibles, condition dont nous n'avons pas besoin de souligner l'absurdité.

Il est humain, devant une question qui nous surprend et nous arrête, de chercher à tâtons; et, savoir tâtonner utilement est d'une très grande importance. Ceux qui en ont essayé judicieusement l'emploi affirment que les tâtonnements sont particulièrement fructueux et attachants pour les écoliers bien doués. Il n'est pas de moyen meilleur de développer l'intuition, et aussi de préparer l'étude de l'algèbre. Mais, en dépit de sa valeur, la méthode des tâtonnements est loin d'être entrée dans nos habitudes. Qu'il nous suffise de dire qu'elle donne de bons résultats dans les problèmes dits de « fausse supposition », dans tous les exercices où la réponse est un nombre entier dont on voit d'avance les limites, et dans de nombreuses questions de calcul proprement dit. Rien n'amuse une classe autant que de chercher la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre, en dehors de toute règle, par de simples essais.

5. *L'emploi des lettres.* — L'emploi des lettres, nous dit-on, donne de très bons résultats dès le cours moyen. Nous acceptons avec confiance cette affirmation.

L'emploi d'une lettre évite souvent la fatigue à l'enfant. Mais prenons garde au danger de l'abus prématuré des notations générales et des idées générales. Les enfants ont une tendance toute naturelle à remplacer le raisonnement par le mécanisme. Ne favorisons pas ce penchant et réservons les x et les y, lorsque leur emploi s'accompagne de quelques transformations, pour le cours supérieur, où leur intérêt est universellement admis.

6. *On abuse des travaux écrits.* — Qu'il y ait abus de travaux écrits, cela ne fait pas de doute pour la grande majorité des rapporteurs. Un problème par jour, rédigé de façon nette et en bon français, avec des explications raisonnées, avec des chiffres très lisibles, devrait être largement suffisant dans la plupart des classes. Là non plus la quantité ne parvient à remplacer la qualité. C'est surtout par de rapides exercices résolus mentalement que doit s'acquérir l'intuition des opérations, le sens de leur usage; chaque élève, entraîné à résoudre dans son esprit, sur des nombres très simples, les questions pratiques essentielles, arrivera à saisir la méthode qui convient le mieux, et à traiter intelligemment les problèmes qui sont à sa portée. On signale, dans quelques rapports, l'abus persistant de procédés de rédaction périmés; il est certain qu'on perd du temps et qu'on commet en plus un cercle vicieux inutile quand on écrit : « Si un mètre coûte 37 francs, 12 mètres coûteront 12 fois plus; donc, il faut multiplier 37 par 12... » Car 12 fois 37 veut dire 37×12 et on a dit deux fois la même chose, probablement sans s'en douter.

La grande difficulté dans la limitation du nombre des problèmes mis au net est celle que signalent les maîtres des écoles à classe unique, où, pour employer le temps des élèves, il est nécessaire de les faire écrire davantage. Nous convenons de cette difficulté. Nous croyons cependant qu'il est inhumain et contraire aux intérêts de l'enseignement, de demander aux candidats au certificat d'études de six à dix problèmes par jour, à partir de Pâques. Mieux vaudrait consacrer à la composition française ou au dessin les heures perdues en un déprimant travail de rabâchage. Et si le seul problème rédigé est fait avec plus de soin matériel et plus de souci d'une étude complète traduite dans une langue correcte, les progrès en arithmétique ne peuvent qu'y gagner.

Nous n'avons pas, dans cette étude du problème, exprimé de préférence exclusive pour une méthode. Toutes présentent leur intérêt : un maître doit hésiter à imposer à ses élèves une solution; et il convient de laisser à chacun la liberté du chemin à prendre, quand ce chemin mène correctement au but. La variété des aptitudes se concilie mal avec la rigidité de la méthode unique.

Ajoutons enfin que les instituteurs qui ont essayé, suivant les conseils de Jules Gal, de faire construire par leurs élèves des énoncés de problèmes, disent merveille des résultats obtenus; et signalons que cet excellent moyen de familiariser les esprits avec l'arithmétique a donné des satisfactions à de nombreux maîtres des pays étrangers.

ENSEIGNEMENT DU PREMIER DEGRÉ

PROGRAMMES (*Arrêtés du 17 octobre 1945 et du 23 novembre 1956.*)

COURS PREPARATOIRE

Toute la vie scolaire est orientée vers la formation des bonnes habitudes (propreté, ordre, exactitude, politesse, etc.). Comme à l'école maternelle, les divers exercices font appel à l'activité spontanée. Ils ont pour but de faire acquérir les premières connaissances usuelles et surtout d'amener les enfants à observer, à comparer, à questionner et à s'exprimer.

— Calcul (3 h. 3/4).
(3 leçons de 15 minutes par jour.)

Etude concrète des nombres de 1 à 5, puis de 5 à 10, puis de 10 à 20. Formation, décomposition, nom et écriture. Usage des pièces de 1, 2, 5, 10 francs, du décimètre et du double-décimètre gradués en centimètres.

Les nombres de 1 à 100. Dizaines et demi-dizaines. Compter par 2, par 10, par 5. Usage du damier de 100 cases et du mètre à ruban.

Exercices et problèmes concrets d'addition, de comparaison et de soustraction (nombres d'un chiffre, puis de deux chiffres), de multiplication et de division par 2 et 5.

COURS ELEMENTAIRE

— Calcul (5 h. 1/2).

Formation des nombres de 1 à 20. Table d'addition.

Numération de 1 à 100, puis de 1 à 1000 ; compter par milliers, en liaison avec l'étude des unités usuelles du système métrique : franc ; mètre, centimètre, kilomètre ; litre, centilitre, hectolitre ; gramme, kilogramme (sans l'usage de la virgule).

Usage et pratique de l'addition et de la soustraction.

Addition et soustraction mentales d'un nombre d'un chiffre.

Table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication et de la division (par un nombre de deux chiffres au plus) dans des problèmes simples empruntés à la vie courante. Calcul rapide de la multiplication et de la division par 2 et 5.

Calcul en cm² ou en m² de la surface d'un rectangle dont les dimensions sont exprimées en cm et en m.

Mois et jours. Heures et minutes.

Exercices pratiques de mesure des longueurs en m et en cm.

Etude de figures géométriques simples par tracés, découpages et pliages. Carré, rectangle, quadrillages, triangle régulier, cercle. Angle droit et demi-angle droit. Usage de la règle, du double-décimètre, de l'équerre (à 45°).

Observation d'un cube.

COURS MOYEN

— Calcul (5 heures).
(1 heure chaque jour.)
(*Les parties du programme en italique sont rendues facultatives*)

Nombres décimaux, en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueurs, de distances, de poids et de capacités. Changements d'unités (décimales) ; multiplication et division par 10, 100, 1000.

Usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux.

Problèmes de la vie courante, traités oralement ou par écrit, avec, éventuellement, usage du calcul mental ou rapide.

Divisibilité par 2, 5, 3, 9 (*preuve par 9 de l'addition et de la multiplication*).

Prix et poids à l'unité et exemples analogues de quotients. Règle de trois.

Utilisation des caractères de divisibilité pour la simplification d'un quotient (*et d'une règle de trois*).

Pourcentages : expressions diverses (6 %, 6/100, 0,06). (*Application à l'intérêt simple.*)

Fractions très simples de grandeurs : demi, tiers, quart, cinquième, dixième, soixantième.

Calculer une fraction d'une grandeur et problème inverse.

Additionner, comparer, et soustraire des fractions dans des problèmes très simples.

Mesure du temps : heures, minutes, secondes (*années commerciales de 12 mois de 30 jours*).

Problèmes sur le mouvement uniforme comportant un seul mobile (les données et les résultats seront des nombres simples).

(*Problèmes sur les placements à court terme.*)

Unités de longueur. (*Mesure de longueurs à l'aide des instruments usuels : chaîne ou ruban d'arpenteur, mètres en bois ou en métal, règles graduées et réglets.*)

Unités de surface. Calcul de la surface ou superficie d'un rectangle, d'un triangle, d'un trapèze rectangle, (*d'une figure simple décomposée en rectangles et trapèzes rectangles*).

(*Surfaces latérales de volumes géométriques simples (peintures ou tapisseries).*)

Unités de volume. Calcul du volume du parallélépipède rectangle.

(*Calcul du volume du prisme droit.*)

Correspondance des unités de volume et de capacité (*et de poids*).

Périmètre du cercle. Surface du cercle. (*Surface latérale et volume du cylindre droit.*)

Notions d'angle droit, de droites perpendiculaires, de droites parallèles.

Usage de la règle, du double-décimètre gradué en millimètres, de l'équerre.

(*Triangles et trapèzes rectangles (en vue de leur surface).*)

Cercle et circonférence. Usage du compas, (*du rapporteur gradué de 5 en 5 degrés*).

(*Tracé et étude sommaire du triangle régulier et de l'hexagone régulier.*)

Notions *très simples* (1) sur les échelles des plans et des cartes.

Travaux (2) pratiques sur le cube et sur le parallélépipède rectangle (*travaux sur les prismes droits et le cylindre de révolution*).

Instructions relatives à l'application de l'arrêté du 17 octobre 1945 fixant les horaires et les programmes.

Circulaire du 7-12-1945.

Des modifications assez importantes viennent d'être apportées aux horaires et aux programmes des cours destinés aux enfants de 6 à 12 ans. Elles ont un double but : 1° rendre à notre enseignement primaire sa simplicité et son efficacité anciennes en ce qui concerne l'acquisition des mécanismes fondamentaux ; 2° le fonder davantage sur les faits, sur l'observation personnelle, afin de donner à la jeunesse française « le grand bain du réalisme » dont elle a besoin. *Apprendre à observer doit être l'un des principaux soucis de nos éducateurs.* La suppression de l'heure de « sciences » au cours préparatoire ne contredit pas cette règle, car s'il est prématuré d'enseigner régulièrement les rudiments des sciences à des enfants de 6 à 7 ans, il est possible et désirable qu'à la base des exercices de vocabulaire et d'élocution, de calcul, de dessin et de travail manuel, il y ait des exercices d'observations nombreux, variés, bien à la portée des jeunes enfants, conduits suivant la méthode des leçons de choses.

Calcul et système métrique.

Introduction

L'observation doit également avoir une large place dans l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie à l'école primaire. Les principes énoncés dans les instructions de 1923 et repris dans celles de 1938 (pour le cours supérieur) restent valables :

« ...Partout, l'opération manuelle doit précéder l'opération arithmétique ; l'expression du langage courant doit précéder l'expression du langage mathématique.... C'est sur des faits qu'il faut appuyer — et, nous ajouterons, c'est à des faits qu'il faut appliquer — les calculs, les idées... »

Les modifications apportées au programme ne font que confirmer ces principes et en préciser l'application. Les liens étroits entre les diverses questions à étudier, le changement désiré dans la méthode et les procédés d'enseignement, imposent un commentaire détaillé de ce programme.

Ces explications soulignent les caractères essentiels des nouveaux programmes de l'enseignement mathématique à l'école primaire.

Calculer vite et bien reste son objectif principal. Ce but utilitaire explique la place de choix donnée à l'étude des nombres entiers et des nombres décimaux — qui suffisent aux problèmes de la pratique courante — et la place réduite laissée aux fractions ordinaires. L'apprentissage du calcul numérique prend appui sur les faits de la vie réelle. Enfin, à aucun moment, on n'a recours au raisonnement déductif, abordable seulement pour des adolescents. Les enfants de l'école primaire pourront constater des propriétés curieuses des nombres et des opérations ; le maître ne se préoccupera pas de les justifier ; il les considérera seulement comme des matériaux qui pourront être utilisés plus tard.

Bref, l'observation, qui doit tenir une grande place dans les leçons de choses, d'histoire et de géographie, doit jouer aussi un rôle important dans l'étude des premiers rudiments des mathématiques.

COURS PRÉPARATOIRE.

Dans l'enseignement au cours préparatoire, l'apprentissage des nombres doit se faire par l'observation de collections d'objets simples ou usuels, maniés ou dessinés. L'enfant doit être habitué à reconnaître, sans énumérer, de un à cinq objets : d'abord sur des dispositions géométriques simples, puis sur des objets groupés en ligne, puis sur des objets sans ordre. Les nombres de 5 à 10 peuvent être étudiés et retenus par leur formation avec 5 et un des cinq premiers nombres. Ceux de 10 à 20 sont ensuite réalisés par l'addition ou la réunion d'une dizaine avec un des dix premiers nombres.

Cet apprentissage est facilité par l'usage des monnaies, du décimètre et du double-décimètre, usage qui est indiqué par le programme et qui est familier à beaucoup d'enfants, en dehors même de la classe.

Les nombres ne s'obtiennent pas seulement en comptant des colonnes ou par la formation qui vient d'être indiquée, on les trouve aussi, et même plus souvent, en combinant d'autres nombres :

Six, c'est le plus gros point d'un domino ; mais c'est aussi un doigt à ajouter aux doigts d'une main, c'est le nombre de sabots dans trois paires, c'est deux rangées de 3, c'est 4 et 2.

Pour avoir véritablement la notion d'un nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers ; connaître son nom, sa figure, sa constitution.

De quels nombres faut-il ainsi connaître la constitution, les modes de formation? Des dix premiers évidemment et le plus possible des dix suivants. Au-delà, ce sera plus affaire de calcul que de mémoire.

Cet apprentissage coïncide avec celui de la table d'addition. En outre, beaucoup de réalisations matérielles d'additions constituent des compositions et des décompositions de nombres.

Une particularité intéressante de beaucoup de réalisations matérielles d'additions est qu'elles constituent en réalité un apprentissage de la soustraction ou plus précisément de la *recherche d'une partie inconnue d'une somme dont on connaît l'autre partie* : comment composer 9 avec deux nombres dont l'un est 6?

La soustraction peut aussi être une *recherche de reste* : j'ai 9 pommes, j'en donne 6, combien en reste-t-il?

Ce peut être encore une *comparaison* : un crayon a 9 centimètres, un autre 6 centimètres, quel est le plus grand et quelle est leur différence?

A cette dernière conception se rattache *la notion du nombre zéro, différence de deux nombres égaux* ; ce qui reste quand il ne reste rien ; ou inversement, ce qui ne change rien au nombre auquel on l'ajoute.

Les nombres de 10 à 100 non compris s'écrivent avec deux chiffres : celui de gauche qui représente les dizaines et celui de droite qui représente les unités. On peut d'abord faire manipuler aux enfants de vraies dizaines d'objets (paquets de bûchettes, jetons en piles, billes en sacs, boules sur les réglettes du boulier-compteur...). Quand cette manipulation est acquise, on peut utiliser des *dizaines figurées* : des boîtes ou des pochettes fermées dont une étiquette indique le contenu : 10 ; des décimètres sans graduations : de fausses pièces de dix francs marquées 10.

Les dizaines réelles ou figurées, complétées par des unités de même nature, permettent de former les nombres de 1 à 99. On imaginera aisément les dispositions matérielles permettant de réaliser cette formation : monnaie de carton, décimètres et centimètres, cartons de dizaines et cartons de 1 à 9 boutons ; on peut utiliser une sorte de calendrier perpétuel à deux tirettes, l'une de dizaines, et l'autre d'unités ; on peut même s'en tenir au boulier-compteur, soit sous sa forme classique avec des boules de diverses couleurs, soit avec des unités et des dizaines figurées. On peut compléter l'emploi de ces matériels par des exercices de répartition en dizaines et unités de jetons, de cartons carrés, ou de tous autres objets isolés que l'enfant range en piles ou en lignes de 10.

La figuration en dizaines et unités entraîne l'écriture, si l'élève sait, au préalable, faire la correspondance des collections et des chiffres et connaît l'usage du chiffre 0.

Les noms des nombres présentent, comme l'on sait, des anomalies ; il peut être avantageux d'employer d'abord les noms qui seraient logiques :

dix-un, au lieu de onze ;
dix-deux, au lieu de douze ;
. . . .
dix-six, au lieu de seize.

De même utiliser septante, octante et nonante au lieu de soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix. Des leçons complémentaires de vocabulaire feront ensuite correspondre à ces noms théoriques les noms de notre français courant.

Il est désirable d'apprendre d'abord à ajouter, puis à soustraire un nombre d'un chiffre à un nombre de deux chiffres. Un premier cas est celui où le résultat reste dans la même dizaine : le langage même de la numération donne la solution :

46 — 5, on retranche 5 de 6, reste 1, résultat *41* ;
46 + 3, on ajoute 3 à 6, la somme est 9, résultat *49*.

Le calcul est plus difficile si le résultat sort de la dizaine (il y a une retenue ou un report). Certains maîtres verront peut-être dans ce cas un avantage à utiliser *le complément* à 10) :

46 — 8, on retranche 10, ce qui donne 36, on ajoute le complément de 8, qui est 2. Résultat : $36 + 2 = 38$;

46 + 9, on ajoute 10, ce qui donne 56, on retranche le complément de 9, qui est 1. Résultat : $56 - 1 = 55$.

Pour justifier cet usage du complément, on peut essayer de le rendre évident par une disposition de points ou d'objets (cartes de boutons, monnaies fictives..).

On pourra étudier ensuite l'addition de deux nombres de deux chiffres, d'abord sans retenue, ensuite avec retenue.

Pour la soustraction, avec ou sans retenue, d'un nombre de deux chiffres, on verra peut-être quelque avantage à procéder par complément ou par addition :

Pour retrancher 26 de 38, on complète les unités : 6 et 2 font 8 ou 26 et 2 font 28. On complète ensuite les dizaines : 28 et une dizaine font 38. Le nombre qu'il faut ajouter est formé de deux unités et de une dizaine.

Pour retrancher 27 de 62, on complète les unités : 7 et 5 font 12 ou 27 et 5 font 32 ; on complète ensuite les dizaines : 32 et 3 dizaines font 62. Le nombre qu'il faut ajouter est formé de 5 unités et de 3 dizaines.

Ces calculs se font, bien entendu, sur les nombres écrits l'un au-dessous de l'autre à la manière habituelle, alors qu'il n'est pas nécessaire de poser l'opération quand on apprend à ajouter ou à retrancher un nombre de un chiffre.

La multiplication et la division sont limitées au cas d'un multiplicateur ou d'un diviseur 2 ou 5, alors que l'ancien programme prévoyait aussi le calcul par 3. On se borne ainsi au calcul des doubles, des dizaines et des demi-dizaines. Les nombres 2, 10 et 5 paraissent suffisants pour acquérir la notion complète de multiplication. Ils permettent de faire comprendre ce que veut dire 2 fois, 10 fois ou 5 fois. En même temps, les exemples tirés de ces nombres suffisent à illustrer la règle de commutativité, à savoir que deux fois 25 ou le double de 25 est le même nombre que 25 paires ou 25 couples ; que 10 fois 7 est égal à 7 dizaines ou 7 fois 10, que 5 fois 9, c'est aussi 9 demi-dizaines ou 9 fois 5.

On imagine aisément des illustrations ou des réalisations matérielles : des enfants qui lèvent les deux mains, ou qui sont groupés par deux : des rangées de couples de points : les lignes d'un damier ; un mètre divisé en centimètres avec des graduations renforcées pour les demi-décimètres et les décimètres, etc.

La division par 2, 10, 5, avec ou sans reste, peut se comprendre comme un *partage d'objets* en 2, ou en 10, ou en 5 parts. Elle peut se comprendre aussi comme une *répartition* en couples ou paires, ou bien en dizaines, ou bien en demi-dizaines d'objets.

COURS ÉLÉMENTAIRE.

Nombres concrets. — Le programme du cours élémentaire comporte le calcul des nombres entiers (sans virgule). Un nombre entier représente une collection d'objets (15 élèves, 15 bérets, 15 places), ou une grandeur considérée comme une collection d'unités (disposées d'une certaine façon) : une longueur de 15 cm peut être formée avec 15 centimètres placés bout à bout ; un objet de 15 g fait équilibre à 15 poids de 1 g ; un vase de 15 cl est rempli quand on y met 15 fois 1 cl d'eau ; un objet d'une valeur de 15 F peut être acheté avec 15 pièces de 1 F.

Dans les exercices on devra toujours utiliser de préférence des nombres concrets, c'est-à-dire des nombres (entiers) suivis d'un nom d'objet (élève, béret...) ou d'une unité : franc, gramme, centimètre... Un nombre concret n'est qu'un renseignement sur une grandeur qui doit être complété par l'indication de ce qu'on veut faire de cette grandeur :

15 pommes, ce peut être 15 pommes qu'on ajoute à d'autres qu'on veut acheter ; qu'on veut partager... ; 15 l, ce peut être un récipient de 15 litres ou 15 litres de vin ; ces 15 l de vin, on peut les mélanger à d'autres, ou les soutirer, ou les mettre en bouteilles, ou les boire...

L'acquisition de la notion de nombres entiers, concrets et de leur usage suppose naturellement des leçons de choses diverses, répétées, et néanmoins assez méthodiques.

Au cours moyen seulement, on rencontrera des exemples de nombres abstraits et indépendants des unités dans l'étude des pourcentages et des fractions simples.

Système métrique. — Le programme indique, non pas toutes les unités théoriques du système métrique, mais seulement les unités pratiquement utilisées. On sait que l'usage courant exclut à peu près complètement l'emploi du décimètre, du décamètre, de l'hectomètre, du décilitre, du décalitre, du kilolitre..., du décigramme... Aux unités effectivement indiquées, il faudra ajouter, au cours moyen, ou en fin de deuxième année de cours élémentaire : le millimètre, le centimètre cube (remplaçant le millilitre), le décimètre cube (équivalant au litre), le mètre cube (remplaçant le kilolitre), le milligramme, le quintal, la tonne, le centime et peut-être le mille et le million de francs.

Cette restriction n'empêche pas d'apprendre aux élèves le sens général des préfixes déci, centi, milli, déca, hecto, kilo, et de leur montrer des unités d'un compendium métrique.

Mais, dans les exemples et les exercices, on emploiera à peu près uniquement les unités pratiques.

On n'introduira pas ainsi des *sous-multiples*, mais seulement des unités différentes qui ont entre elles des rapports simples. Pour les diverses espèces de grandeurs, on choisira l'unité convenable, le cm pour des dessins, le m pour des terrains, le km pour des distances... Exceptionnellement, on exprimera une longueur avec des m et des cm : 3 m et 65 cm ; ou des kg et des g : 10 kg et 500 g. C'est l'amorce de l'écriture des nombres décimaux (qui sera étudiée au cours moyen), où la virgule remplacera le *et*.

Numération. — La numération est limitée aux nombres de 1 à 10 000, c'est-à-dire ayant au plus 4 chiffres caractéristiques ; on se bornera à des multiplications ou à des divisions de 2 chiffres au plus. Cette limitation est très suffisante dans les exercices et problèmes et même dans la vie courante, car on connaît rarement la mesure d'une grandeur avec plus de 2 ou 3 chiffres caractéristiques ; les nombres de 4 chiffres peuvent s'introduire dans les calculs.

On peut ainsi simplifier l'étude de l'écriture d'un nombre abstrait et ne pas parler des classes d'unités, de mille et de millions. Il est seulement commode de conserver l'habitude de séparer par un point le chiffre des mille des trois chiffres suivants.

Tables. — La pratique du calcul des quatre opérations exige que les élèves sachent les tables d'addition et de multiplication. La première, apprise au cours préparatoire, doit faire l'objet de révisions et surtout de nombreux exercices de contrôle. L'apprentissage de la deuxième est un des objets du cours élémentaire. Il appartient au maître de choisir l'ordre et les moyens qui lui apparaîtront les meilleurs pour le faire, soit en respectant l'ordre des nombres, soit en étudiant d'abord les tables les plus simples (en raison de l'écriture décimale). Par exemple : 2, 5, 10 (déjà appris au cours préparatoire) ; 3 et 6 ; 4 et 8 ; 9 ; 7. Les élèves ne doivent pas seulement connaître les 10 premiers multiples de chaque nombre d'un chiffre, mais encore placer ces multiples dans la suite des nombres, pour aboutir à la division : en 45 il y a 7 fois 6 et il reste 5. L'usage du damier de 100 cases, signalé dans le programme du cours préparatoire, peut de nouveau être utilisé dans ce but.

Calcul mental et rapide. — Le programme d'arithmétique comporte des exercices de calcul mental et rapide, strictement limités pour le cours élémentaire, mais signalés sans restriction précise pour le cours moyen. Il faut entendre par là un calcul sur des nombres simples avec seulement l'aide partielle de l'écriture. Dans un tel exercice, on peut distinguer trois parties :

1° Le fait de retenir les données ou les résultats partiels au cours des opérations faites de tête. On propose : 67+35. L'élève doit se souvenir de 67 et de 35. Il additionne 67 et 30 et trouve 97 ; il doit se souvenir de 97 et du chiffre des unités momentanément abandonné 5 et répondre 102 ;

2° Le fait de savoir des résultats : table d'addition, de soustraction, de multiplication ;

3° Un court raisonnement. Exemple : 97 et 5, on peut dire 7 et 5, 12 ; 9 et 1, 102 résultat : 102. On peut aussi dire : 97 et 10, 107 ; 107—5=102 ; ou encore 97 et 3, 100 ; 100 et 2, 102.

C'est la première partie qui semble la plus difficile pour les enfants. Pour cette raison, on peut se borner dans le cours élémentaire aux exercices suivants :

Un nombre (de 2 ou 3 chiffres) étant écrit au tableau ou sur l'ardoise, lui ajouter ou lui retrancher un nombre d'un chiffre indiqué de vive voix ; énoncer, puis écrire le résultat.

Un nombre étant écrit, le multiplier ou le diviser par 2 ou par 5, sans poser l'opération et en écrivant, au fur et à mesure, les chiffres du produit, du quotient, puis éventuellement le reste. La liaison entre ces deux opérations pourra être faite seulement au cours moyen, lorsque l'emploi des nombres décimaux permettra de donner un quotient décimal exact.

Il est à remarquer que le premier de ces deux exercices est indispensable dans la pratique du calcul écrit des quatre opérations.

Dans la deuxième année de cours élémentaire, on peut compliquer le premier exercice en ne faisant pas écrire le nombre de plusieurs chiffres auquel on veut ajouter ou retrancher le nombre d'un chiffre. On peut aussi faire traiter des exercices analogues en ajoutant ou en retranchant des nombres (entiers) de dizaines ou de centaines.

Calcul écrit. — Pour enseigner la pratique de la multiplication et de la division, il n'est pas inutile de se rendre compte de la gradation des difficultés du mécanisme ; ce qui pourra suggérer une gradation des exercices.

C'est ainsi qu'on peut considérer les cas suivants de la multiplication :

1° Multiplier un nombre d'un chiffre par un nombre d'un chiffre : c'est la table de multiplication ;

2° Multiplier par un multiplicateur d'un chiffre : il suffit de savoir qu'on multiplie unités, dizaines, centaines et qu'on ajoute à mesure les résultats :

523×8

$$\begin{array}{r} 3 \times 8 = \quad 24 \\ 20 \times 8 = \quad 160 \\ 500 \times 8 = 4\,000 \\ \hline 4\,184 \end{array}$$

3° Multiplier par 10, 100;

4° Multiplier par un nombre de dizaines;

5° Multiplier par un nombre de deux chiffres ; on multiplie par les unités, puis par les dizaines et on ajoute le résultat :

$$523 \times 25 \qquad \begin{array}{r} 523 \\ \times 8 \\ \hline 4\,184 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 523 \\ \times 20 \\ \hline 10\,460 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,184 \\ +\,10\,460 \\ \hline 14\,644 \end{array}$$

Dans l'opération, posée à la manière habituelle, on peut faire mettre les zéros dans les produits partiels. Cette habitude, qui ne complique pas beaucoup l'écriture, peut éviter, au cours moyen, des erreurs quand le multiplicateur a des zéros intercalaires.

Pour la division, on peut envisager les cas suivants:

1° Quotient et diviseur d'un chiffre. Il faut savoir reconnaître que le quotient n'a qu'un chiffre, trouver ce chiffre et le reste. Il faut pour cela connaître les tables de multiples et savoir y placer de mémoire les nombres intercalaires.

2° Diviseur d'un chiffre et quotient de plusieurs chiffres. On répète un certain nombre de fois le mécanisme précédent avec des soustractions mentales. Exemple:

$$339 \text{ à diviser par } 8 : \quad 330 = 40 \times 8 + 10 ;$$
$$19 = 2 \times 8 + 3.$$

Le quotient est 42 et le reste 3.

3° Diviser par 10 : on sépare un chiffre.

4° Diviser par un nombre de dizaines: on divise par 10, puis par le chiffre des dizaines.

5° Diviser par un nombre de deux chiffres. On peut d'abord dresser une table de multiples du diviseur et s'en servir pour calculer d'abord un quotient d'un chiffre, puis un quotient de deux chiffres. Quand cette méthode est suffisamment connue, on peut passer au procédé habituel des tâtonnements.

Formules et signes. — Les signes de l'arithmétique ont, tout au moins pour les nombres abstraits, une signification universelle qui s'étend, par généralisation, à l'algèbre. Il est essentiel de ne les employer qu'à bon escient.

Le signe + indique qu'il faut additionner les nombres qu'il sépare. Il s'applique aussi à l'addition successive de plusieurs nombres. Les habitudes acquises au cours élémentaire doivent rendre intuitive la possibilité de changer l'ordre des termes.

Le signe — indique qu'il faut soustraire le nombre de droite du nombre de gauche qui doit être plus grand que le précédent.

Le signe × indique qu'il faut multiplier les nombres qu'il sépare. La possibilité de permutation est moins évidente aux élèves à qui il faut l'apprendre, non par une preuve théorique, mais par des constatations faites plus ou moins méthodiquement, dans la table d'abord, ainsi qu'il a déjà été indiqué au cours préparatoire, ensuite sur des opérations.

On emploie aussi ces trois signes pour rappeler la nature des opérations posées.

Le signe = ne sépare pas deux nombres égaux, ce qui ne servirait à rien : on n'écrit pas 3 = 3. Il sépare l'indication d'une opération et son résultat ou encore l'indication de deux opérations qui ont le même résultat.

Le signe : est plus gênant. Suivant les cas, il représente soit une division exacte, soit une division approchée. Il semble possible de l'utiliser au cours élémentaire et au cours moyen pour indiquer la division approchée en écrivant à la suite la valeur du reste :

$$17 : 3 = 5 \text{ ; reste } 2.$$

Usage des opérations. — Le programme ne sépare pas la pratique des opérations de leur usage ou de leur application. L'élève doit savoir quand il faut faire une addition, une soustraction, une multiplication, une division.

Addition. — Il paraît évident qu'on doit additionner deux grandeurs de même espèce. Le nombre qui mesure la somme est la somme des nombres qui mesurent les grandeurs additionnées.

Cependant cette opération soulève des objections assez graves. Que veut dire « de même espèce » ? Des pommes et des poires ne sont pas de la même espèce et pourtant 8 pommes et 7 poires font 15 fruits. Huit litres et six litres sont de même espèce et cependant on n'additionne pas 6 litres de vin et un vase de 8 litres.

En réalité on n'additionne pas des grandeurs, fussent-elles de même espèce : on mélange les pommes et les poires ; 8 litres de vin et 6 litres de vin ; on récapitule ou on ajoute des dépenses ou des recettes : on place bout à bout des longueurs ; on parcourt successivement des chemins ; on compte des temps qui se suivent ; on allonge, on accroît, on réunit, on assemble...

A toutes ces combinaisons de grandeurs correspond l'addition de leurs mesures.

Soustraction. — On a indiqué au cours préparatoire que la soustraction était la recherche d'un terme inconnu d'une addition dont on connaît l'autre terme et le résultat. Ceci s'applique naturellement aux grandeurs : il suffit de remplacer le mot addition par le terme qui convient ; par exemple, compléter une longueur inachevée, trouver un poids net qui, par addition à la tare, donne le poids brut...

La soustraction correspond aussi à la notion de reste qui résulte d'opérations très différentes plus ou moins caractérisées par les verbes : retrancher, diminuer, couper, enlever, détruire, supprimer, tirer, retirer, soutirer, perdre, donner, consommer, dépenser...

Un troisième point de vue suppose une comparaison préalable. Il n'y a pas d'inconvénient à apprendre aux élèves que : *pour trouver la différence de deux nombres on cherche celui qui est le plus petit, puis on le soustrait du plus grand*. Cette façon de procéder éclaire les notions de bénéfice et de perte, d'économie et de dette.

Multiplication. — Il est fréquent de dire que la multiplication est une addition abrégée. On répète le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Quoique cette définition apparaisse très claire quand il s'agit de petits nombres, on ne s'en sert pas pour justifier les règles appliquées pratiquement, ni même l'usage de cette opération. En fait, dans le cas le plus fréquent, la multiplication est une convention commerciale : le prix total d'une grandeur (poids, longueur, volume, nombre d'objets) est obtenu en multipliant le prix de l'unité (g, m, l, objet) par le nombre d'unités. Cette règle s'étend quand on cherche un salaire total (produit du salaire horaire, journalier... par le nombre d'heures, de jours...) ; elle s'étend aussi à la recherche du poids total d'un volume de liquide, d'une longueur de fil, etc.

Ces quelques cas semblent très suffisants dans l'enseignement du cours élémentaire, soit qu'on les affirme comme des règles, soit qu'on les justifie par une apparence de raisonnement.

Quand les élèves notent une multiplication, dans leur solution, il leur est utile de rappeler la signification concrète de chaque nombre. Par exemple, ils pourront écrire :

$$\underset{(\text{F par kg})}{75} \times \underset{(\text{kg})}{5} = 375 \text{ francs ;}$$

$$\underset{(\text{F par heure})}{25} \times \underset{(\text{heures})}{42} = 1\,050 \text{ francs.}$$

Le signe ×, comme le signe + et le signe —, n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs.

Division. — La division est l'inverse de la multiplication, c'est-à-dire la recherche d'un facteur inconnu d'un produit. En réalité, l'opération n'est en général qu'approchée et il y a un reste. Comme on distingue, dans la multiplication, multiplicande (valeur de l'unité) et multiplicateur (nombre d'unités), il y a deux cas dans la division suivant qu'on cherche l'un ou l'autre. On peut les distinguer d'une façon sommaire en disant qu'on peut chercher la valeur d'une part ou le nombre de parts. Exemples :

(oranges) (enfants)
33 : 7 = 4 oranges par enfant ; reste 5 oranges.

(oranges) (oranges par enfant)
33 : 4 = 8 enfants ; reste 1 orange.

(F) (kg)
375 : 5 = 75 francs par kg.

(F) (F par kg)
375 : 75 = 5 kg.

Problèmes. — En principe, on peut se borner aux problèmes dont la résolution ne nécessite qu'une seule opération, écrite ou mentale. Quand la solution nécessite plusieurs opérations, on peut en faciliter la recherche en demandant les recherches intermédiaires par des questions auxiliaires. Les quelques types simples qui paraissent constituer le maximum de ce que l'on peut demander à des élèves du cours élémentaire sont :

1° Une suite d'additions et de soustractions de petits nombres, par exemple recettes et dépenses avec gain et perte ;

2° Une facture simple : une ou deux multiplications et une addition ;

3° Une addition ou une soustraction suivie d'une division ;

4° Une division suivie d'une multiplication.

Surfaces. — La relation entre le m^2 et le cm^2 résulte immédiatement de l'examen d'un damier de 100 cases. De même l'examen d'un quadrillage justifie le calcul de la surface d'un rectangle dont les dimensions sont des nombres entiers soit de cm, soit de m. Cet examen fournit aussi l'objet de petites manipulations et de vérifications d'égalités numériques, par exemple :

$$6 \times 2 = 3 \times 4.$$

Le programme ne prévoit pas d'autres calculs de surface. On pourra le compléter par quelques problèmes de valeur de terrain, de rendement de champ.

Temps. — On peut se borner, au cours élémentaire, à une leçon de choses sur le nombre de jours dans les différents mois et sur la façon de lire l'heure en heures et minutes.

Géométrie. — Les notions de géométrie doivent être comprises comme des exercices d'observation et de leçons de choses en même temps qu'un premier apprentissage du dessin et du travail manuel (découpage et pliage). Le pliage d'un carré pour la construction d'une cocotte peut fournir de nombreuses remarques : égalité de côtés, égalité d'angles droits, partage d'un angle droit en deux angles de 45°, centre et axe de symétrie..., etc. Il est désirable que les élèves aient un petit matériel de dessin : règle, double-décimètre, équerre à 45° (elle peut être construite par eux-mêmes en carton). Les quadrillages utilisés pour l'étude des surfaces peuvent aussi servir de base à des dessins simples.

Nombres décimaux. — L'usage des nombres décimaux, dont l'étude est prévue au cours moyen, est maintenant entré dans la pratique de la vie courante.

Les élèves ont presque tous entendu parler de prix exprimés en francs et centimes, de poids exprimés en kilogrammes et grammes, de capacités exprimées en litres et centilitres, de distances exprimées en kilomètres et mètres, etc. Il importe de préciser leurs connaissances et de leur faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule :

2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m.

On sait qu'il existe diverses écritures d'un nombre décimal suivant la position de la lettre qui indique l'unité :

m : 2,15, ou bien 2m,15, ou bien 2,15 m.

Bien qu'elle ne soit pas conforme à la lecture, la troisième écriture semble préférable, en particulier, pour indiquer des nombres concrets dépendant de deux unités (1) :

82,10 F par kg ; 7,05 kg par dm³.

Il importe également de faire comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule, soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1 000. Pour cela il est au moins commode d'utiliser toutes les unités décimales du système métrique. Cependant dans les données et les résultats des problèmes, il vaut mieux se borner aux seules unités pratiques (indiquées dans les commentaires du cours élémentaire). Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi amené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c) ; un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm) ; un nombre en kilomètres avec trois décimales (m) ; un nombre en litres avec deux décimales (cl) ; un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm³), etc.

Opérations. — Les règles de changement d'unité permettent d'expliquer — sinon de justifier — la pratique des opérations. L'addition ou la soustraction de nombres décimaux se ramène immédiatement à celle de nombres entiers par un changement convenable d'unité. Pour additionner

3,15 m avec 2,10 m,

il suffit d'additionner

315 cm et 210 cm,

puis de revenir à l'expression du total en mètres.

On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité. Par exemple :

$$\underset{\text{(F par litre)}}{3,40} \times \underset{\text{(litres)}}{7,25}$$

peut être remplacé par

$$\underset{\text{(F par cl)}}{0,034} \times \underset{\text{(cl)}}{725} = 24,65 \text{ F}$$

De même pour la division

$$\underset{\text{(kg)}}{2,975} : \underset{\text{(kg par l)}}{0,790}$$

peut être remplacé par

$$\underset{\text{(g)}}{2975} : \underset{\text{(g par l)}}{790} = 3,76 \text{ litres ; reste } 4,6 \text{ g.}$$

Dans ce cas le remplacement n'est plus une explication, mais une partie de la règle pratique.

Ces exemples montrent en même temps combien peut être suggestif l'emploi de formules où chaque nombre est accompagné de l'indication de l'unité, ainsi qu'il a été dit pour le cours élémentaire. Cette façon d'écrire la division donne aussi une indication précise sur la nature concrète du reste.

Problèmes. — Des unités diverses peuvent être employées pour les données d'un problème relatives à des grandeurs de même espèce. Les élèves seront habitués à choisir celles d'entre elles qui conviendront le mieux pour leurs raisonnements et leurs calculs. Ainsi, ils devront :

1° Appliquer couramment des règles de changement d'unité ;

2° Avoir une idée sommaire des ordres de grandeur, de façon à ne pas employer des grammes pour évaluer un chargement de wagon, ni des quintaux pour exprimer le poids d'un bijou ; sous une autre forme, dans les mesures, il faut choisir l'unité de façon à éviter les nombres trop grands ou trop petits qui ne parlent pas à l'esprit.

La pratique du calcul mental et du calcul rapide, commencée au cours élémentaire, devra être étendue à l'addition et à la soustraction de nombres de deux chiffres. En outre, les élèves devront être entraînés à calculer rapidement une multiplication et une division par un nombre d'un chiffre sans poser l'opération. Ils doivent connaître aussi les règles de multiplication et de division par les nombres inverses simples : 2 et 0,5 ; 0,2 et 5 ; 20 et 0,05 ; pour multiplier ou diviser par l'un des deux, il est équivalent de diviser ou de multiplier par l'autre.

Cette pratique ne doit pas faire l'objet d'exercices numériques systématiques, mais bien d'applications concrètes. Dans les calculs des problèmes, les opérations sur les nombres simples seront faites mentalement. On habituera aussi les élèves à chercher au préalable l'ordre de grandeur d'un résultat en « arrondissant » les données numériques. La détermination du nombre de chiffres avant la virgule, le changement d'unité sont des opérations qui peuvent être faites maintenant et dont l'importance est plus grande que celle d'une addition mentale de deux nombres de deux chiffres.

La condition de divisibilité par 2 et 5 résulte de l'examen de la table des cent premiers nombres. Le même examen peut servir de vérification à la règle de divisibilité d'un nombre de deux chiffres par 9 ou par 3 ; l'extension de cette règle à un nombre de plus de deux chiffres peut être admise sans justification. La règle de la preuve par 9 peut être limitée, comme il est dit dans le programme, à l'addition et à la multiplication. Elle pourra être aussi appliquée à la vérification d'une soustraction par addition.

Les mots de « vie courante », employés dans le programme, marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui. Avant de faire traiter un exercice dans la classe, ou de le donner en devoir écrit, le maître se demandera si cet exercice peut se présenter raisonnablement dans la pratique. Pour connaître le diamètre d'une tête de clou, il est plus immédiat, plus commode et plus exact de mesurer directement ce diamètre avec un pied à coulisse. Par contre, il vaut mieux chercher d'abord la circonférence d'un gros arbre, puis calculer son diamètre. Dans le partage d'une succession, le premier nombre connu, sauf circonstances exceptionnelles, est le montant de l'héritage ; on passe de ce montant aux parts et non de ces parts au montant. Par contre, un poids de confiture peut se calculer à l'avance, d'après le poids de jus de fruit, le poids de sucre, et la réduction approximative de poids à la cuisson.

Quotients et règles de trois. — Le programme comporte explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des exemples analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de « valeur de l'unité ». Une telle valeur peut être un prix par unité de longueur, de distance, de surface, de volume ou de capacité, de temps ; ce peut être un poids par unité de longueur ou de volume (poids spécifique) ; ce peut être encore une distance ou un volume par unité de temps (vitesse ou débit) ; ce peut être un rendement en volume, poids ou argent par unité de surface.

Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :

Valeur totale = valeur de l'unité × nombre d'unités.

Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.

L'énoncé d'une « valeur de l'unité » exige l'emploi de deux unités de nature différente : F par m, F par km, F par m², F par l, F par kg, F par h, g par cm, kg par l, km par h, cl par s, hl par a, etc.

Il y a lieu de faire à leur sujet des exercices de changement d'unité, par exemple :

1 kg/l = 1 000 g/l = 0,001 kg/cm³ = 1 g/cm³.

On a indiqué ci-dessus un des usages possibles de ces changements d'unités.

Les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un quotient intermédiaire qui peut être, soit la valeur d'une unité, soit un nombre d'unités. Les formules suivantes en donnent deux exemples typiques :

$$\frac{\text{valeur de la 1}^{\text{re}}\text{ parcelle}}{\text{surface de la 1}^{\text{re}}\text{ parcelle}} \times \text{surface de la 2}^{\text{e}}\text{ parcelle ;}$$

$$\text{prix de l'hectolitre} \times \frac{\text{poids d'une récolte}}{\text{poids de l'hectolitre}}.$$

Des exemples simples de quotient permettent, de même, de justifier sommairement les divers modes de calcul des problèmes de règle de trois :

$$\frac{a \times b}{c}; \quad a \times \frac{b}{c}; \quad \frac{a}{c} \times b ;$$

ainsi que des procédés de vérification (division par un même nombre d'un des facteurs et du diviseur).

Pourcentages. — Les pourcentages sont considérés comme des multiplicateurs abstraits, c'est-à-dire indépendants du choix de l'unité de la grandeur considérée. Prendre 80 p. 100 d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en 100 parties égales et prendre 80 de ces parties. Il suffit pour cela de multiplier la mesure de la grandeur par 0,80. On met ainsi en évidence la recherche inverse qui se fait en divisant par 0,80 :

$$\text{Poids de farine} = \text{poids de blé} \times 0{,}80 ;$$
$$\text{Poids de blé} = \text{poids de farine} : 0{,}80.$$

Les pourcentages se rencontrent dans des problèmes de proportions concernant des mélanges, des transformations, etc. Par exemple : azote dans l'air, savon frais et savon sec, poids de farine et poids de pain, acompte à verser, part de l'État et de la commune dans l'impôt, intérêt annuel d'un capital.

Fractions. — Les fractions, comme les pourcentages, sont considérées comme des multiplicateurs abstraits. Prendre les quatre-cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (il est équivalent d'en prendre 80 p. 100). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. On retrouve ainsi le mode de calcul de la règle de trois ; par exemple :

$$\text{poids de farine} = \begin{cases} \text{poids de blé} \times \frac{4}{5}, \\ \frac{\text{poids de blé} \times 4}{5}. \end{cases}$$

Le problème inverse consiste à chercher une grandeur quand on connaît la valeur de ses 4/5 ou son produit par 4/5. Dans le problème précédent, c'est chercher le poids de blé qui permettra d'obtenir un poids de farine connu. Il apparaît aisément qu'il suffit de multiplier par la fraction inverse (ou renversée) $\frac{5}{4}$:

$$\text{Poids de blé} = \text{poids de farine} \times \frac{5}{4}.$$

Ces deux problèmes inverses peuvent être condensés en une seule formule en disant que :

5 kg de blé donnent 4 kg de farine.

L'addition et la soustraction des fractions doivent être étudiées dans des cas numériquement très simples et sur des problèmes pratiques. Les maîtres se rendront compte qu'avec nos habitudes actuelles, ces problèmes pratiques sont de plus en plus rares. En outre, dans chaque cas, il est possible d'utiliser des nombres proportionnels.

Examinons, par exemple, le cas suivant :

La viande de porc renferme en moyenne $\frac{1}{6}$ de son poids d'os et $\frac{1}{5}$ de son poids de graisse. Quel poids de viande faut-il acheter pour avoir 1 000 grammes de viande désossée et dégraissée ?

Le calcul par fractions conduit à la formule

$$1\,000 \text{ grammes} : \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right).$$

Il est peut-être plus simple de dire qu'il y a, par 30 grammes de porc, 5 grammes d'os, 6 grammes de graisse et 19 grammes utilisables. Le poids de viande à acheter est donc les $\frac{30}{19}$ du poids de viande utilisable. D'où la formule :

$$1\,000 \text{ grammes} \times \frac{30}{19}$$

Cet emploi de nombres proportionnels est en réalité une réduction au même dénominateur 30 ; il a l'avantage de donner au raisonnement de l'enfant un support concret : 30 g, 5 g, 6 g et la différence 19 g, sont plus compréhensibles que

$$\text{l'unité, } \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \text{ et la différence } 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}.$$

Mesures du temps. — Le calcul direct de mesures du temps doit être limité à l'addition et à la soustraction de nombres exprimant des temps en heures et minutes ; ou éventuellement en minutes et secondes.

Le mécanisme des retenues et des reports est rendu très clair par l'analogie avec le même mécanisme pour les nombres décimaux.

En ce qui concerne la multiplication et la division, il conviendra, le plus souvent, de passer par l'intermédiaire de nombres entiers ou décimaux. Pour multiplier un nombre complexe mesurant un temps, on pourra, par exemple, le transformer d'abord en nombre décimal, l'unité étant la minute. Inversement, la recherche d'un temps par une division pourra se faire en minutes ou en heures et sous-multiples décimaux, sous la réserve d'exprimer ensuite le quotient en heures, minutes et secondes.

Surfaces et volumes. — L'étude des surfaces, commencée au cours élémentaire, peut être complétée par l'énumération et les relations mutuelles des unités théoriques et pratiques : m², dm², cm², a, ha. Pour le calcul des surfaces usuelles, on peut se borner à celles qui sont indiquées explicitement dans le programme. Il n'est pas indispensable notamment de traiter le cas du triangle (et du trapèze) non rectangle, ce qui suppose le choix d'une base et d'une hauteur, alors qu'il est presque aussi rapide de le décomposer effectivement en deux triangles rectangles.

L'étude des volumes appelle des remarques analogues.

Le périmètre du cercle, la surface du cercle et, en conséquence, la surface latérale et le volume d'un cylindre droit ne doivent donner lieu qu'à l'utilisation (bien entendu sans justification théorique) du nombre approché 3,14.

Géométrie. — Les notions de géométrie étudiées au cours élémentaire comme des exercices d'observation et de leçons de choses doivent être un peu précisées au cours moyen en introduisant l'usage de quelques mots nouveaux et l'emploi de quelques instruments simples : règles, équerres, compas. Des constructions de carrés et de rectangles permettront de faire comprendre, sinon de définir, l'angle droit, la notion de droites perpendiculaires et de droites parallèles. La notion d'angle, en général, sera associée à l'usage de rapporteurs, soit pour mesurer, soit pour construire des angles.

L'étude du triangle régulier (ou équilatéral) et celle de l'hexagone, ainsi que leur construction, seront faites par l'observation comme avait été faite celle du carré dans le cours élémentaire.

La notion d'échelle (de plan ou de carte) pourra être étudiée soit sur des exemples géométriques, soit par des exercices d'arithmétique ; elle sera alors associée à l'étude de pourcentages et de fractions simples qu'elle permettra inversement d'illustrer. Les notions pratiques indiquées pour le cube, le parallélépipède rectangle, les prismes droits et le cylindre de révolution ne seront données qu'en raison de leur utilisation pour le calcul des surfaces latérales et des volumes. Elles pourraient être accompagnées de quelques exercices simples de travail manuel en utilisant soit du carton, soit du fil de fer.

- ANNEXE 6 -

Programmes et I. O du 2/1/1970.

ARRETE DU 2 JANVIER 1970

Programme de mathématiques de l'enseignement élémentaire

ARTICLE PREMIER. — A compter de la rentrée scolaire 1970, l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires sera donné conformément au programme annexé au présent arrêté.

ART. 2. — Le directeur de la Pédagogie, des Enseignements scolaires et de l'Orientation est chargé de l'exécution du présent arrêté.

ANNEXE

Programme

COURS PREPARATOIRE

Activités de classement et de rangement.

Notion de nombre naturel.

Nommer et écrire des nombres.

Comparer deux nombres.

Somme de deux nombres.

COURS ELEMENTAIRE : 1re ET 2e ANNEE

1° *Eléments de mathématique.*

Les nombres naturels : nom et écriture.

Somme et différence de deux nombres ; pratique de l'addition et de la soustraction.

Produit de deux nombres ; pratique de la multiplication.

Quotient exact.

Division avec reste ; quotient entier.

Pratique de la division par un nombre d'un chiffre.

Calcul mental.

2° *Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.*

Tracés, découpages, pliages.

Cube, carré, rectangle, triangle.

Quadrillages.

3° *Exercices pratiques de mesure et de repérage.*

Usage de la règle graduée, de la balance, du calendrier. Lecture de l'heure...

COURS MOYEN : 1re ET 2e ANNEE

1° *Eléments de mathématique.*

Nombres naturels et décimaux : nom et écriture.

Multiplication et division par 10, 100, 1 000...

Opérations et leurs propriétés ; suite d'opérations ; pratique des opérations ; preuve par 9 des opérations ; calcul mental.

Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9 et 3.

Exemples de relations numériques. Proportionnalité.

Fractions. Produit de deux fractions.

2° *Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.*

Bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle.

Disque, cercle.

Pavé (parallélépipède).

3° *Mesures : exercices pratiques.*

Longueur, aire, volume.

Temps, masse.

Expression d'un résultat avec une unité convenablement choisie.

Ordre de grandeur. Encadrement.

ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Circulaire du 4 septembre 1970

Mon attention a été appelée sur les inquiétudes suscitées parmi les instituteurs par l'entrée en vigueur, à la prochaine rentrée scolaire, de l'arrêté du 2 janvier 1970 et de la circulaire nº 70-2 du 2 janvier 1970, relatifs à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Il semble qu'une interprétation erronée ait créé une équivoque à propos de ces textes. Si une réforme foncière de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire est envisagée, elle doit entrer en application à une échéance plus lointaine et les textes du 2 janvier 1970 ne concrétisent pas cette réforme, mais constituent seulement un palier, une transition dans la direction de l'objectif à atteindre à plus long terme. Autrement dit, il apparaît qu'une confusion s'est établie entre l'enseignement de mathématique moderne et la rénovation de l'enseignement des mathématiques.

Ainsi, le programme défini par l'arrêté du 2 janvier 1970 est essentiellement le programme de 1945 allégé et présenté de façon plus rationnelle. Les commentaires joints évitent au maximum tout vocabulaire nouveau et suggèrent de façon très libérale une présentation rénovée de notions parfaitement connues des maîtres.

Dans le cadre de ce programme, les maîtres, même ceux qui n'ont pas dépassé le stade d'une information traditionnelle, sont invités à réfléchir à partir des commentaires aux conditions de leur enseignement. Ce qu'il est en effet fondamental de transformer, c'est le comportement des maîtres et des élèves devant les mathématiques. L'essentiel de cette transformation réside dans le fait qu'il convient d'accorder plus d'importance à l'expérience des enfants, à l'apprentissage des mathématiques plutôt qu'à leur exposé.

Cette transformation peut commencer à partir des mathématiques que connaissent les maîtres. Engagés dans cette voie de rénovation pédagogique, ils seront amenés tout naturellement à remettre en question ou à éclairer certaines notions et à rechercher une information nouvelle. Cela les conduira à modifier progressivement leur enseignement, qu'il s'agisse de son contenu ou des méthodes.

Remarquons que : $8 + 0 = 8$; $0 + 8 = 8$; $4 + 0 = 4$; $0 + 0 = 0$ etc.

4.1. 2. *La soustraction*

Exemple : Parmi 15 fruits, 8 fruits seulement sont des pommes.

Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l'égalité $8 + . = 15$ ou $. + 8 = 15$

On cherche parmi les nombres $(8 + 0)$, $(8 + 1)$,... celui qui est égal à 15. Le nombre cherché est $(8 + 7)$. Le nombre qui doit remplacer le point est donc 7. On dit que 7 est la différence des nombres 15 et 8 et on écrit, en utilisant le signe — (moins) :

$$15 - 8 = 7$$

La soustraction est l'opération qui associe aux nombres 15 et 8 leur *différence* $(15 - 8)$ (ou encore 7). D'une manière générale, la soustraction associe aux nombres naturels a et b leur différence $(a - b)$ qui existe seulement si $a > b$ ou si $a = b$.

Le fait que les égalités $8 + 7 = 15$ et $15 - 8 = 7$ ont même signification est difficilement compris par les enfants du cours préparatoire. Aussi paraît-il indiqué de n'introduire la soustraction, avec son signe, qu'au cours élémentaire. Au cours préparatoire, il suffit que les élèves connaissent correctement l'addition.

Par ailleurs, avant d'expliciter une notion nouvelle, il est indiqué d'en faire des approches successives. Dans cet esprit, dès le cours préparatoire, on étudiera de nombreuses situations décrites par une relation de la forme $b + \square = \quad \square + b = a$.

4.2. *Multiplication - Division exacte*

4.2. 1. *La multiplication.*

Exemple : Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante :

+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +

On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets.

Le nombre des objets est $(8 + 8 + 8 + 8 + 8)$ qu'on écrit selon une convention généralement adoptée (8×5)

Le nombre des objets est $(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5)$ que l'on écrit avec la même convention (5×8)

Ceci justifie l'égalité

$(8 \times 5) = (5 \times 8)$

On peut écrire indifféremment (8×5) ou (5×8) puisque ces écritures désignent le même nombre. On l'appelle *produit* des deux nombres donnés.

La *multiplication* est l'opération qui associe à deux nombres leur produit. Aux couples (8 ; 5) et (5 ; 8) la multiplication fait correspondre le nombre 40.

$(8 \times 5) = (5 \times 8) = 40$

La multiplication est *commutative*. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.

Cas particulier : l'un des nombres est 1 ou 0

$4 \times 1 = 1 \times 4 = 4$; $\quad 3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$; etc.

$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0$; $\quad 3 \times 0 = 0 \times 3 = 0$; etc.

4.2. 2. *Division exacte*

Exemple : On a obtenu un ensemble de 56 objets en réunissant 7 ensembles qui comprennent chacun le même nombre d'objets.

Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (□ ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.

$56 = 7 \times \square$ ou $56 = \square \times 7$ (commutativité de la multiplication).

□ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression (56 : 7)

La division exacte est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur *quotient exact* (56 : 7)

Ce nombre s'écrit 8 ; d'où l'égalité (56 : 7) = 8 que l'on écrit plus simplement 56 : 7 = 8

Les égalités : $56 = 7 \times \square$

$56 = \square \times 7$

$\square = 56 : 7$

ont la même signification.

□ représente un nombre naturel parce que 56 est un multiple de 7.

D'une façon générale, le quotient exact de deux nombres naturels n'existe que si le premier est multiple du deuxième. Il ne faut donc désigner un quotient à l'aide du signe « : » que lorsque l'on sait que le quotient exact existe.

Toute situation qui peut se décrire par une des deux égalités

$a \times \square = b$

ou $\square \times a = b$

est une situation de division

Si b est un multiple de a

on écrit $\square = b : a$

4.3. *Tables*

Aux tables traditionnelles, on préférera des tables de Pythagore construites par les élèves avec des nombres divers (sans oublier les lignes et colonnes qui comprennent 0 et 1).

exemples

+	2	5	8	4
7	9	12	15	11
0	2	5	8	4
6	8	11	14	10
3	5	8	11	7

×	0	7	2	5	3
6	0	42	12	30	18
1	0	7	2	5	3
4	0	28	8	20	12
3	0	21	6	15	9

La construction de telles tables facilite l'apprentissage et la mémorisation de sommes et de produits indispensables au calcul. On construira notamment les tables d'addition et de multiplication dans lesquelles les nombres placés en ligne et colonne sont ordonnés de 0 à 9.

4.4. *Division euclidienne* (avec reste, ce reste pouvant être nul)

Exemple : On veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants.

Formons la suite des produits (3×1) ; (3×2) ; (3×3), etc.

Aucun de ces nombres n'est égal à 17 donc il est impossible de servir équitablement les enfants en utilisant toutes les cerises.

On constate que

$(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$

et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$

Le plus grand nombre de cerises que l'on puisse donner à chaque enfant est 5 ; 2 cerises ne sont pas distribuées.

La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17 ; 3) le couple (5 ; 2)

5 est le *quotient entier* de 17 par 3

2 est le *reste* de la division euclidienne de 17 par 3 ; il est inférieur au diviseur 3.

Remarque :

La notation : est réservée *exclusivement* au cas où le *quotient entier* de la division euclidienne est aussi quotient exact c'est-à-dire au cas où le reste est nul.

On écrira donc :

$c = a : b$ si et seulement si $a = b \times c$

Dans l'exemple précédent, où le reste n'est pas nul, on pourra écrire simplement : « la division de 17 par 3 donne 5 pour quotient et 2 pour reste,

$17 = (5 \times 3) + 2$

chaque enfant recevra 3 cerises ».

L'égalité ci-dessus dispense de préciser que la division est euclidienne et le quotient entier.

4.5. *Suites d'opérations*

4.5. 1. *Additions successives.*

Exemple : A partir des nombres 8, 7, 5, on calcule :

$(8 + 7)$ on obtient 15

puis $((8 + 7) + 5)$ c'est-à-dire $(15 + 5)$

On constate que ce nombre peut être obtenu par un autre mode de calcul sans que soit modifié l'ordre des nombres donnés (8, 7, 5)

On peut, en effet, calculer $(7 + 5)$ on obtient 12

puis $(8 + (7 + 5))$ c'est-à-dire $(8 + 12)$.

Les expressions $(8 + (7 + 5))$ et $((8 + 7) + 5)$ désignent le même nombre. On convient de supprimer les parenthèses et d'écrire ce nombre

$8 + 7 + 5$

On l'appelle la somme des trois nombres.

Cet exemple illustre une propriété de l'addition : *l'associativité*.

4.5. 2. *Multiplications successives.*

Exemple : à partir des nombres 5, 6, 4,

On calcule (5×6) puis $((5 \times 6) \times 4)$ c'est-à-dire (30×4) ou bien (6×4) puis $(5 \times (6 \times 4))$ c'est-à-dire (5×24)

On constate que les deux expressions

$((5 \times 6) \times 4)$ et $(5 \times (6 \times 4))$ désignent le même nombre.

On convient de supprimer les parenthèses et d'écrire ce nombre

$5 \times 6 \times 4$

On l'appelle produit des trois nombres.

Cet exemple illustre le fait que la multiplication est *associative*.

Remarque : En effectuant des soustractions successives on vérifie que la soustraction n'est pas associative.

$7 - (5 - 2) \neq (7 - 5) - 2$

On ne peut donc pas supprimer les parenthèses.

Il en est de même de la division exacte.

4.5. 3. *Addition et multiplication*

Exemple : Calculer $(2 + 5)$ puis $((2 + 5) \times 3)$ c'est-à-dire (7×3)

Peut-on obtenir le même résultat d'une autre façon ?

On constate que ce nombre est le même que la somme

$((2 \times 3) + (5 \times 3))$ c'est-à-dire $6 + 15$

Cet exemple illustre une nouvelle propriété : la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

Le fait de pouvoir désigner et calculer un nombre de plusieurs façons différentes est une conséquence des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication que nous venons de signaler : commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Il n'est nullement question de nommer de telles propriétés au niveau élémentaire. Mais il est important de faire en sorte que les enfants les utilisent de façon naturelle et familière, parce qu'elles sont à l'origine de tous les modes de calcul : calcul mental et techniques usuelles.

4.6. *Techniques opératoires*

Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté.

Les techniques usuelles concernant les opérations doivent être parfaitement connues. Elles seront d'autant mieux acquises que les enfants, au lieu de les apprendre de façon purement mécanique, les auront découvertes par eux-mêmes comme synthèses d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées.

Les élèves seront entraînés à la pratique du calcul mental au cours duquel on s'attachera à mettre en œuvre les propriétés fondamentales des opérations (associativité, commutativité, distributivité) et leurs conséquences simples : additionner ou soustraire une somme ou une différence, multiplier une somme ou une différence par un nombre.

Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont dites *inverses.*

7. Nombre décimaux.

Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen ; à ce niveau les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupement d'objets d'un ensemble (cf. 2).

On peut chercher à mettre en évidence le nombre des groupements d'une certaine espèce :

7.1. *Définition et écriture*

Exemple 1

Le nombre d'habitants de la France est cinquante millions. Si l'on imagine une répartition des Français en groupements comprenant chacun un million d'habitants, le nombre de ces groupements s'écrit 50. Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.

Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 500 000.

Si les groupements ne comprennent qu'un seul habitant, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 50 000 000.

Exemple 2

Une ville compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le *nombre décimal* 10,850.

La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.

Afin de bien comprendre la signification de la virgule, on peut reprendre l'exercice de groupement du paragraphe 2.2 dans une numération où le groupement de base est le groupement par quatre.

— Lorsque l'enfant est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1 2 3.

— Lorsque le « groupe » (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 12,3.

— Lorsque le « grand groupe » (seize enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1,23.

D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.

On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

7.2. *Opérations sur les nombres décimaux*

7.2. 1. *Addition et soustraction.*

Exemple 3

Trois villes voisines, A, B, C, se sont réunies pour ne plus former qu'une seule agglomération. Leurs populations étaient, en milliers d'habitants :

A	28,5
B	11,4
C	4,7

Quelle est, en milliers d'habitants, la population de la nouvelle ville ainsi formée ?

Cet exemple montre que l'on peut définir l'addition des nombres décimaux en l'associant à l'addition des nombres naturels.

Il en est de même pour la soustraction des nombres décimaux.

7.2. 2. *Multiplication et division.*

7.2. 2. 1. Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

Elle se présente comme une addition de nombres décimaux égaux.
Exemple : $0,2 \times 3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6$

7.2. 2. 2. Multiplication et division par 10, 100, 1 000

D'après les propriétés de la numération et de la multiplication :

$$2 \times 10 = 20 \qquad 20 : 10 = 2$$
$$430 \times 10 = 4\,300 \qquad 4\,300 : 10 = 430$$

De même :

$$0,2 \times 10 = 2 \qquad 2 : 10 = 0,2$$
$$43,21 \times 10 = 432,1 \qquad 432,1 : 10 = 43,21$$
$$0,062 \times 100 = 6,2 \qquad 6,2 : 100 = 0,062$$

7.2. 2. 3. Multiplication de deux nombres décimaux

Un changement d'unité la ramène à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

7.2. 2. 4. Division exacte d'un nombre décimal par un nombre décimal

Les notions de division exacte et de quotient exact définies pour les nombres naturels a et b s'étendent aux nombres décimaux :

a et b étant entiers ou décimaux, le quotient exact de a par b, s'il existe, est le nombre entier ou décimal dont le produit par b est égal à a.
Si on représente ce quotient exact par $\square$, on a :

$$\square \times b = a$$
$$\text{ou} \quad b \times \square = a$$
$$\text{ou} \quad a : b = \square$$

Si b est un nombre naturel, la recherche du quotient exact se justifie en utilisant la propriété suivante que l'on vérifiera sur des exemples numériques : Si on multiplie l'un des facteurs par 10, 100, 1 000, ..., le produit est multiplié par 10, 100, 1 000, ...

Le cas où b est un nombre décimal se ramène au cas précédent.

On se limitera dans les exercices à des nombres simples. Il conviendra de remarquer que le quotient exact tel qu'il a été défini n'existe pas toujours.

7.2. 2. 5. Quotient approché

Le sens des expressions quotient à 1 ; 0,1 ; 0,01 près pourra être précisé à l'occasion d'exercices.

Remarque : Des exercices sur les relations numériques, du même type que ceux présentés dans le paragraphe 5, pourront être effectués en prenant des listes de nombres décimaux. Les opérateurs numériques pourront également utiliser des nombres décimaux.

8. **Résolution de problèmes.**

La classe avec sa vie propre, l'enseignement que l'on y donne en toutes matières, le monde extérieur fourniront de nombreuses occasions d'exercer, à chaque niveau et selon les possibilités des enfants, cette activité privilégiée qu'est la résolution des problèmes, qu'ils soient numériques ou non numériques.

Les thèmes seront des plus divers. Ils permettront en particulier une certaine initiation des élèves à la vie courante de leur époque, que l'enseignement élémentaire se doit de leur donner. Toutefois, les situations retenues dans ce domaine correspondront aux préoccupations et aux intérêts réels des enfants. Elles seront, suivant les cas, soit des motivations pour l'introduction de notions nouvelles, soit des applications de propriétés ou de relations préalablement étudiées par les élèves.

Il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement.

Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés.

Les élèves doivent apprendre à passer d'une situation à un schéma mathématique qui la décrit ; inversement, un bon exercice consiste à imaginer des situations décrites par un schéma donné.

C'est dans de telles activités que s'affermit la pensée mathématique des élèves et qu'ils prennent mieux conscience du pouvoir qu'elle leur donne sur le monde extérieur.

2e partie. — Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques

L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices doivent, en même temps, aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à l'*observation* mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût des travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire*. L'emploi des instruments (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique, sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets.

On reconnaît :

— que deux lignes droites sont perpendiculaires ou forment un angle droit par un pliage convenable ou à l'aide de l'équerre ;

— que deux lignes droites sont parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre ;

— qu'un polygone découpé dans du carton épais et rigide est convexe par exemple en l'entourant d'un élastique et constatant que cet élastique est en contact avec tous les sommets.

Pour un polygone, on peut s'intéresser aux propriétés suivantes : convexité, nombre de côtés, nombre de sommets, longueur de côtés, existence de côtés parallèles, etc.

Les enfants ayant construit différents polygones, ils pourront les classer selon l'une ou l'autre de ces propriétés : ainsi, s'il s'agit de quadrilatères, ils distingueront, par exemple, les parallélogrammes et, parmi ceux-ci, les rectangles, les losanges. Ils découvriront ainsi que les carrés sont les quadrilatères qui ont la propriété d'être à la fois des rectangles et des losanges.

Une autre direction de travail peut être la fabrication de plans : plan de la classe, de la cour de l'école, du quartier, etc. Chez les enfants les plus jeunes, on peut s'intéresser surtout à la disposition des objets les uns par rapport aux autres. L'utilisation des mesures permettra ensuite l'exécution de plans à une échelle donnée.

Le repérage sur une droite ou sur un quadrillage pourra servir de thème à des exercices divers.

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, etc.), on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre, au nombre des sommets, à celui des arêtes, à leur disposition relative.

Les résultats de ces recherches seront utilisées par les enfants en travail manuel pour construire de tels objets géométriques, en carton par exemple.

3e partie. — Mesures

1. Le *mot mesure* a, dans la langue usuelle, des acceptions diverses qu'il est important de distinguer.

Exemple :

Je mesure la table. - La table mesure 3 mètres.

Prendre les mesures d'un vêtement.

Le service des Poids et Mesures.

Les enfants ont déjà entendu de telles expressions. Ils les utilisent. Ils continueront à le faire dans le langage courant mais la signification mathématique du mot *mesure* devra être introduite

Extraits du rapport sur le séminaire de Royaumont (déc 1959) - Mathématiques nouvelles - éditions OECE - (ANNEXE 7)

L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE

367. L'arithmétique — ou plus exactement le calcul — est envisagée traditionnellement comme un instrument indispensable dans la vie courante et les affaires. [L'enseignement de cette matière consiste donc essentiellement à faire assimiler par les élèves, d'une manière routinière et mécanique, un certain nombre de faits et de règles. Les conséquences psychologiques de l'enseignement donné à l'école primaire et l'évolution des objectifs scolaires dans le sens d'un développement des concepts et des modes de pensée (en même temps que de l'habileté opératoire) doivent avoir pour conséquence une réforme de l'enseignement de l'arithmétique. L'acquisition des connaissances doit être le résultat d'une compréhension née d'une expérimentation bien conduite et d'une prise de conscience personnelle, le plus souvent à la suite de la manipulation d'objets matériels, d'un genre ou d'un autre.]

368. C'est ainsi qu'il faut amener l'enfant à cette notion abstraite qu'est la *propriété d'un ensemble* que nous appelons le *nombre*. Pour en arriver à cette abstraction, il convient de faire appel aux concepts — mais pas nécessairement aux vocables — d'ensembles, de sous-ensembles, de correspondance et d'ordre. Mais de quelque langage qu'on se serve, ces concepts doivent être enseignés, dès le début, d'une manière correcte. Un élément indispensable de cet enseignement précoce est la compréhension et l'emploi d'un système de numération décimal.

369. En partant de ce système de numération — et en s'appuyant sur l'emploi intuitif des lois de commutativité, d'associativité et de distributivité — toutes les opérations sur les nombres entiers, les fractions ordinaires et les fractions décimales peuvent être enseignées d'une manière logique, et non plus comme une suite de tours de magie. Dans cet enseignement l'usage de modèles est essentiel au départ, mais il faut soigneusement éviter de substituer le modèle à l'arithmétique (comme d'ailleurs aux connaissances mathématiques qui seront acquises par la suite). Comme certaines notions s'apprennent par des généralisations, des abstractions et des représentations symboliques, ces *concepts* serviront de base aux acquisitions ultérieures.

370. Les enfants doivent apprendre à calculer suffisamment vite et correctement — ainsi que l'exige la vie quotidienne, quand on est adulte ; mais on évitera les calculs correspondant à des exemples d'une complication superflue. La plupart des élèves peuvent se rendre maîtres de cette technique au cours des 5 ou 6 premières années de leur scolarité. Dès le début de la 5e année, et au cours de quelques-unes des années suivantes, les enfants doués pourront s'adonner à l'étude des lois numériques concernant les nombres pairs et impairs, les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers, le plus grand commun diviseur, le plus petit commun multiple, et les systèmes de numération de base autre que dix.

371. Ensuite pourront être étudiés les moyennes statistiques, des exemples simples de classes (mod. m), les suites de nombres (pairs, impairs, premiers, carrés parfaits, etc.), la résolution des équations : $ax - by = 0$ ou $ax - by = 1$ quand a et b sont des nombres entiers ou des fractions, et les tables d'addition et de multiplication (de base quelconque). Ces études devront assurément être dirigées par un professeur qui comprenne toutes les lois mathématiques qu'elles font intervenir, ainsi que leurs rapports avec l'étude ultérieure des mathématiques. Enfin, les généralisations de ces lois à l'aide des symboles littéraux peuvent servir d'introduction pratique à l'algèbre.

Points de désaccord

372. Les participants à la session d'étude ont exprimé sur certains points des divergences et des hésitations, qui n'allaient pas cependant jusqu'à mettre en cause les objectifs lointains assignés à l'enseignement de l'arithmétique. Parmi les points qui ont provoqué ces désaccords figuraient :

- la prise de contact précoce avec les nombres négatifs, comme un complément des nombres entiers et des fractions ;
- le calcul des racines carrées, de préférence à l'emploi d'une table de ces racines ;
- l'emploi de symboles tels que : $8 + 1{,}7 + 2$, etc., comme nouvelles définitions du nombre 9, plutôt que comme opérations ;
- l'emploi des machines à calculer aux lieu et place du calcul manuel ;
- et l'abus des cubes, des bâtonnets et des coloris.

373. On s'est accordé pour reconnaître que l'enseignement de l'arithmétique doit mettre la structure de celle-ci en évidence, en insistant sur l'application des lois générales et en faisant une place plus large au rôle joué par les nombres 0 et 1. L'enseignement doit être donné de telle façon que tout ce qui est appris par l'élève serve de fondement à ce qu'il apprendra par la suite ; mais il est entendu qu'à ce stade primaire on y parviendra d'une manière seulement implicite. Le temps a malheureusement fait défaut pour étudier comment l'extension de l'arithmétique peut permettre d'y inclure les nombres rationnels, puis les nombres réels ; l'enseignement de ces deux questions réclame cependant une étude approfondie.

ANNEXE 8 - 1 -

Programmes et instructions officielles du CE.

I. OBJECTIFS

L'ordre dans lequel sont présentés les objectifs et instructions qui suivent ne constitue ni un ordre chronologique pour le travail dans les classes ni une progression.

1. ÉCRIRE ET NOMMER LES NOMBRES

Maîtriser l'usage et les modes de fonctionnement de la numération écrite et orale des nombres naturels.

Savoir désigner un nombre par des écritures additives, multiplicatives, soustractives... Savoir reconnaître et traduire des situations faisant intervenir les écritures ci-dessus.

Maîtriser l'utilisation et le sens de l'égalité en travaillant sur des écritures différentes désignant le même nombre.

2. COMPARER LES NOMBRES

Savoir comparer les nombres écrits dans le système de numération habituel ; découvrir et manipuler les règles correspondantes.

Savoir ranger des nombres dans l'ordre croissant ou décroissant et savoir construire des suites de nombres croissantes ou décroissantes.

Savoir comparer des nombres écrits sous les différentes formes obtenues en 1.

3. CALCULER SUR LES NOMBRES

Pour construire les techniques opératoires, savoir transformer les écritures additives, multiplicatives et soustractives en utilisant les propriétés des opérations, savoir utiliser les parenthèses.

Savoir évaluer l'ordre de grandeur d'un résultat. Encadrements.

Elaborer des techniques opératoires (mentales ou écrites) pour l'addition, la multiplication, la soustraction.

Parmi les relations numériques savoir reconnaître les fonctions qui, à un nombre naturel, associent $n + a$ ou $n \times a$ (a étant un nombre naturel) et leurs réciproques ; savoir utiliser leurs propriétés.

Savoir analyser et traiter quelques problèmes faisant intervenir les opérations et fonctions étudiées.

Savoir reconnaître des situations relevant de la division ; savoir déterminer par des méthodes empiriques le quotient et le reste.

Savoir calculer mentalement chaque fois que c'est possible.

4. REPÉRER ET MESURER

Savoir repérer les cases ou les nœuds d'un quadrillage et savoir utiliser ces repérages dans des activités diverses.

Savoir classer et ranger des objets divers (rectilignes ou non) selon leur longueur par comparaison directe ou indirecte.

Découvrir l'intérêt des mesures.

Savoir se donner des procédés de mesurage, connaître les unités usuelles du système légal ; savoir construire et utiliser des règles graduées.

Savoir classer et ranger des objets selon leur masse en utilisant divers instruments, connaître les unités usuelles du système légal.

Savoir traiter divers problèmes simples liés à la pratique de la mesure.

Ces objectifs seront visés à travers les activités relevant des activités mathématiques comme des activités d'éveil.

5. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Manipuler, classer, construire, agencer des solides divers.

Manipuler, classer, construire, agencer des figures planes diverses (lignes ou surfaces).

Savoir utiliser pliage, découpage, papier quadrillé, papier calque, règle, équerre, compas, bandes de papier, et autres instruments de dessin pour étudier, construire ou reproduire des figures planes.

II. INSTRUCTIONS PÉDAGOGIQUES ET TYPES D'ACTIVITÉS

Au cycle élémentaire encore plus qu'au cycle préparatoire, les activités mathématiques quelles qu'elles soient doivent entre autres choses permettre aux enfants de développer des attitudes de recherche. C'est pourquoi on privilégiera les démarches pédagogiques à travers lesquelles les élèves sont toujours confrontés à des situations qu'ils doivent traiter. Il peut s'agir de situations conçues et proposées par l'enseignant qui exigent, soit l'introduction de nouvelles notions ou de nouvelles techniques, soit le réinvestissement de notions ou de techniques travaillées antérieurement dans des situations différentes. Chaque situation constitue alors un point de départ qui motive psychologiquement et légitime intellectuellement la construction par l'enfant de nouveaux apprentissages et une étape qui permet de vérifier de quels outils les élèves disposent effectivement. Mais il peut également s'agir de « situations problèmes » beaucoup plus ouvertes, élaborées par l'enseignant ou par les élèves à propos desquelles la recherche peut s'exercer dans de multiples directions.

Ainsi les apprentissages strictement mathématiques effectués dans la tranche horaire prévue à cet effet doivent permettre aux élèves d'exercer leur imagination et leur raisonnement tout autant que les situations complexes construites dans le cadre d'autres activités, en particulier les activités d'éveil, où l'outil mathématique peut être requis en raison de son efficacité.

Enfin de telles démarches trouveront tout leur sens dans le travail collectif ou le travail de groupe qui (plus aisément que le travail individuel) contraint les enfants à expliciter leurs objectifs et les étapes de leur recherche, à valider leurs résultats, à communiquer leurs procédures de travail. Ce sera l'occasion pour la classe de s'approprier activement le raisonnement et le langage mathématique, l'occasion pour l'enseignant de percevoir non seulement les réussites et les échecs mais aussi ce qui les produit.

1. ÉCRIRE, NOMMER ET COMPARER LES NOMBRES

Pour désigner les nombres les enfants pourront bien souvent avoir recours à des expressions longues et complexes telles que celles qui sont présentées au paragraphe 1.2 ci-dessous. En effet :

D'une part elles peuvent être construites et utilisées par les enfants bien avant que ceux-ci sachent les réduire (lorsque la technique des opérations correspondantes n'est pas encore maîtrisée par exemple), c'est-à-dire avant que les enfants puissent déterminer l'écriture usuelle (exemple : pour une collection d'objets rangés en ligne et colonnes, à raison de 18 par ligne et 23 par colonne, un enfant du C. E. 1 pourra immédiatement écrire le nombre d'objets 18×23 ou 23×18, et ce, bien avant de pouvoir l'écrire 414 - écriture usuelle) ;

D'autre part ces expressions apportent d'autres informations que l'écriture usuelle.

Cela sera donc l'occasion d'une étude de ces écritures pour elles-mêmes, sans que soit nécessairement envisagée leur réduction.

La numération, ou étude des écritures usuelles des nombres, n'est pas un préalable aux autres activités numériques ou opératoires, elle en est une composante.

1.1 NUMÉRATION

L'étude de la numération entreprise au C. P. sera reprise et prolongée. Au cours de ce travail, il est nécessaire de dépasser les manipulations du type groupement ou échange qui peuvent devenir un obstacle à des procédures plus rapides et il faut permettre aux enfants de travailler directement sur les écritures (par exemple : comparaison directe de nombres entre eux sans recourir aux collections).

L'étude de la numération au cycle élémentaire, a pour objectif d'accroître la maîtrise du système de numération habituel et de ses règles de fonctionnement. Pour la numération écrite, on ne fixera pas a priori une limite quant à la taille des nombres pour que la réitération de ces règles puisse s'exercer suffisamment. En conséquence, on sera amené à faire écrire des nombres dont la lecture n'est pas assurée (et que l'on peut toujours nommer, en les épelant, par exemple).

Les règles de comparaison des nombres en numération écrite devront être utilisées dans les cas les plus divers. On pourra, en particulier, demander aux enfants de placer et intercaler des écritures de nombres sur une droite ou une ligne (la graduation obtenue étant régulière ou non).

En ce qui concerne la numération orale, son étude sera conçue non comme une simple lecture des nombres écrits, mais aussi comme une occasion de réfléchir sur la façon dont sont construits les noms des nombres. Cependant il ne serait pas opportun de procéder à une analyse systématique et approfondie de la façon dont sont construits les noms des nombres au moment où ces noms sont introduits et où les enfants commencent à les mémoriser. Cette analyse sera menée avec profit ultérieurement lorsque les enfants maîtriseront les écritures présentées au paragraphe ci-dessous.

1.2 ÉCRITURES ADDITIVES, MULTIPLICATIVES ET SOUSTRACTIVES

Le nombre d'éléments d'une collection peut être donné sous la forme usuelle habituelle (exemple : 125). Mais dans certains cas, il peut être plus intéressant d'utiliser pour le désigner d'autres types d'écritures, par exemple :

Ecritures additives (exemples : $100 + 20 + 5$ ou $110 + 5$ ou $50 + 30 + 25 + 10 + 10$) dans le cas d'un fractionnement d'une collection.

Ecritures multiplicatives (exemples : 25×5 ; $7 \times 6 \times 15$) dans le cas de collections d'objets rangés en lignes et colonnes, dans des situations de dénombrement.

Ecritures soustractives (exemple : $150 - 28$) :

Dans le cas d'une collection fractionnée en deux parties pour exprimer le nombre d'éléments de l'une d'entre elles ;

Dans le cas où l'on veut exprimer l'écart entre deux nombres.

Dans ces deux cas on fera la liaison avec la résolution de $a + . = b$.

Eventuellement (si le maître le juge possible ou utile) écritures exponentielles (exemples : 3^2, 5^3, 10^n) dans le cas de collections obtenues par réitération d'une règle du type doubler ou tripler, ou quadrupler ou décupler... (c'est le cas par exemple des différents groupements obtenus en numération de position), et dans le souci de simplifier certaines écritures multiplicatives (exemple : $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$; $10 \times 10 \times 10 = 10^3$).

Ecritures composées à partir des précédentes, par exemple :

$(20 - 15) \times 6$; $(10 \times 12) + (5 \times 12)$; $(3 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (8 \times 10) + 4$.

Ici, les enfants devront prendre conscience de la nécessité ou non d'utiliser des parenthèses :

Dans le cas où l'écriture met en jeu une seule opération, l'usage des parenthèses ne s'imposera que pour des opérations non associatives. Exemples : $18 + 27 + 36 + 42$ mais $124 - (42 - 28)$;

Dans le cas où l'écriture met en jeu deux opérations, l'utilisation de parenthèses est indispensable.

On privilégiera tout particulièrement en vue de l'élaboration de techniques opératoires, et en liaison avec la numération, les expressions du type :

$30\,000 + 2\,000 + 300 + 40 + 7$

$(32 \times 1\,000) + (3 \times 100) + 40 + 7$ (lien avec la numération orale), et éventuellement :

$(3 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10) + 7$.

L'obtention de plusieurs écritures pour un même nombre permet de renforcer l'utilisation du signe « égal » (placé entre deux désignations différentes d'un même nombre). A partir de telles écritures on peut toujours

en obtenir de nouvelles par des transformations (réductions partielles, mais aussi allongement). Ces transformations mettent en œuvre certaines propriétés des opérations que les enfants utilisent spontanément ou qu'ils découvriront progressivement à partir de situations et d'exemples numériques convenablement choisis.

Exemples de transformations :

$8 + 7 + 12 + 23 + 41 + 32$
$20 + 30 + 73$
$50 + 73$

124×28
$124 \times (20 + 8)$
$(124 \times 20) + (124 \times 8)$

$38 + 53$
$30 + 8 + 50 + 3$
$80 + 11$

$123 - 78$
$125 - 80$

Ce qui peut être transformé de plusieurs façons :

$120 - 75$		
$115 - 70$	ou	$145 - 100$
$100 - 55$		45

On pourra utiliser avec les élèves soit les arbres de calcul

$20 + 30 + 73$
$50 + 73$

soit les égalités :

$20 + 30 + 73 = (20 + 30) + 73$
$20 + 30 + 73 = 50 + 73$

Les exemples ci-dessus montrent au lecteur comment le choix judicieux, pour l'enfant, de stratégies (pas forcément explicitées) peut conduire à la réduction complète de l'expression c'est-à-dire à l'obtention de l'écriture usuelle. Cette réduction peut être motivée par des exercices de comparaison rapide.

Dans certains cas particuliers, la comparaison peut être faite directement, là encore sont mises en œuvre certaines propriétés des opérations. Exemples :

Sommes à comparer :
$12 + 24 + 16 + 78$ et $16 + 78 + 24 + 12$;
$2 + 7 + 5 + 6$ et $3 + 3 + 4 + 11$.

Produits à comparer :
325×38 et 325×47.

Différences à comparer :
$1\,243 - 475$ et $1\,240 - 475$.

Dans d'autres cas, pour comparer les nombres, il est plus économique de transformer les expressions qui les désignent et les réduire à l'écriture la plus courte, l'écriture usuelle ; sur ces écritures s'exerceront alors les règles de comparaison dégagées lors de l'étude de la numération.

Exemple : soit à comparer :

78 + 137 + 42 et 17 + 192 + 58 ;
137 × 68 et 285 × 32.

Ici le meilleur moyen pour comparer, c'est d'abord de réduire complètement les expressions, c'est-à-dire de calculer.

C'est ainsi que peut se poser le problème des techniques opératoires.

Au cours des transformations de nombreuses égalités telles que 7 + 8 = 15 ; 6 × 9 = 54 ; 7 = 16 — 9 sont utilisées.

L'obtention de ces types d'égalités sera systématisée et donnera lieu à l'élaboration progressive de répertoires qui pourront se présenter ainsi :

5	24	18	36	10
1 × 5 5 × 1	6 × 4 4 × 6 3 × 8 12 × 2	6 × 3 3 × 6 1 × 18 18 × 1	6 × 6	2 × 5 5 × 2 1 × 10 10 × 1

Ces répertoires seront aussi organisés en tables de Pythagore.

La construction de tables de Pythagore sera l'occasion de dégager le fait que, pour chaque opération, à tout couple de naturels est associé un naturel au plus (aspect fonction de deux variables).

Par ailleurs dans cette même construction on utilisera au maximum certaines propriétés des opérations ce qui pourra conduire à l'explicitation de quelques-unes d'entre elles.

Exemples :

Si 56 = 7 × 8 alors 56 = 8 × 7.

(Se traduira par une symétrie de la table par rapport à une diagonale.)

Si l'on sait que 6 × 7 = 42 et que 3 × 7 = 21, on peut en déduire 9 × 7 = 42 + 21 donc 9 × 7 = 63.

0 × 1 = 0 ; 0 × 3 = 0 ; 0 × 8 = 0 ; ...
0 + 3 = 3 ; 0 + 4 = 4 ; 0 + 5 = 5 ; ...
1 × 2 = 2 ; 1 × 3 = 3 ; 1 × 8 = 8 ; ...

(Rôles remarquables du 0 et du 1.)

Dès l'obtention des premières égalités un effort de mémorisation sera demandé aux enfants. Il est essentiel qu'ils parviennent à mémoriser rapidement et sûrement les résultats figurant dans les différentes tables de Pythagore.

2. CALCULER SUR LES NOMBRES

2.1 TECHNIQUES OPÉRATOIRES
(addition, multiplication, soustraction)

L'élaboration de techniques opératoires, par les enfants, pourra s'effectuer à partir de manipulations ou de représentations.

La justification de ces techniques nécessite un travail de transformation d'écritures ; à cet effet, il est indispensable que les enfants sachent quelles sont les transformations licites, c'est-à-dire sachent mettre en œuvre certaines propriétés des opérations.

Exemple :

235 × 47

235 × (40 + 7)

(200 + 30 + 5) × (40 + 7)

[(200 + 30 + 5) × 7] + [(200 + 30 + 5) × 40]

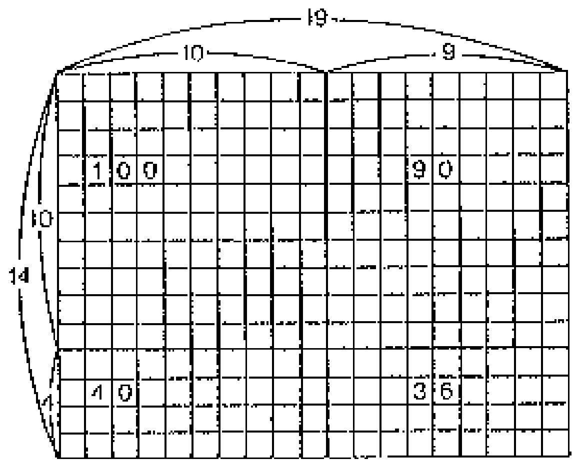
Une telle suite de transformations peut permettre de justifier des techniques de multiplication. Dans cet exemple sont intervenues, l'associativité et la commutativité de l'addition, la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Ces propriétés ne feront pas l'objet d'une étude systématique. On pourra les mettre en évidence soit lors de la construction de tables de Pythagore (cf. paragraphe 1.2) ; soit à l'occasion de l'élaboration de techniques, dans des situations qui leur confèrent une signification.

Par exemple, pour la distributivité de la multiplication sur l'addition, il est possible de l'approcher au cours d'activités de dénombrement des cases d'un quadrillage rectangulaire, alors que les enfants procèdent par découpage selon les lignes ou les colonnes, activités dont le but à moyen terme est une technique de multiplication.

La situation ci-dessous peut donner lieu aux écritures suivantes :

14 × 19 = (10 + 4) × 19
= (10 + 4) × (10 + 9)
= 100 + 90 + 40 + 36



Avant d'aboutir à la technique habituelle on pourra pour chaque opération envisager d'autres techniques qui peuvent constituer des étapes intermédiaires.

Par exemple : le découpage du quadrillage tel qu'il est défini ci-dessus constitue un procédé de calcul du produit 14 X 19, et, en ce sens peut être considéré comme une première technique de multiplication.

Il s'agit en fait de permettre aux enfants de s'approprier, en l'élaborant eux-mêmes, une méthode de calcul qui s'affinera progressivement, et non de leur faire apprendre le mécanisme d'une technique unique.

Cette phase d'apprentissage ainsi conçue peut être d'une extrême richesse : elle constitue un lieu privilégié de réinvestissement des notions acquises ou en cours d'acquisition concernant le numérique et plus particulièrement la numération.

Elle pourra même être l'occasion de nouveaux apprentissages (par exemple : règles de multiplication par une puissance de dix).

Il peut être intéressant aussi de comparer plusieurs techniques pour une même opération, ceci permettra de dégager les caractères spécifiques de chacune d'elles.

La maîtrise des techniques opératoires devra être parallèlement assurée en base dix. Par ailleurs, il est indispensable que des exercices entretiennent constamment cette maîtrise, au-delà de la phase de découverte et de première assimilation.

En ce qui concerne la soustraction, le fait de calculer une différence par addition, constitue une technique qui a l'avantage de ne pas exiger des enfants d'autres compétences que celles requises pour l'addition. Si la disposition initiale (directement dérivée de a + . = b) est $\begin{array}{r} a \\ + \;.\; \\ \hline b \end{array}$ il conviendra d'aboutir, au moins en fin de cycle élémentaire, à la disposition habituelle $\begin{array}{r} b \\ -\,a\;. \\ \hline \end{array}$ sans que pour autant la technique de calcul soit modifiée.

Remarque : les techniques mentales de calcul doivent être travaillées parallèlement aux techniques écrites. Dans tous les cas, les enfants ne devraient recourir aux techniques écrites qu'après s'être assurés qu'ils ne peuvent pas obtenir mentalement le résultat.

2.2 LES RELATIONS NUMÉRIQUES

Le rôle que peuvent jouer les relations numériques au niveau du calcul mental est très intéressant. Mais leur étude à l'école élémentaire est surtout justifiée par le fait que la connaissance de certaines fonctions numériques et de leurs propriétés permet aux enfants de mieux comprendre et résoudre de nombreuses situations tant au cycle élémentaire (par exemple, approche de la division) qu'au cycle moyen (par exemple proportionnalité).

En conséquence, lors de l'étude des fonctions numériques dans N : $n \longrightarrow n + a$; $n \longrightarrow n \times a$ et leurs réciproques, on mettra en évidence, les propriétés de chacune des familles de fonctions.

Au cycle élémentaire seront travaillées :

Les propriétés liées à l'ordre. Exemple : une liste de naturels rangés dans l'ordre croissant étant donnée 3, 6, 18, 19, 20, 31, 200, 4302, la fonction « retrancher 3 » associe à chaque naturel de cette liste un naturel (appelé image du précédent). On constate que les naturels ainsi obtenus, 0 (image de 3), 3 (image de 6), 15 (image de 18), 16, 17, 28, 197 et 4299 sont rangés dans l'ordre croissant eux aussi. La fonction conserve l'ordre.

Les propriétés liées aux écarts :

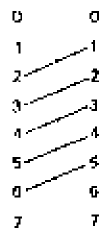
Exemple 1 : 3, 6, 18, 27, 31, 206, 4302 ont respectivement pour image 0, 3, 15, 24, 28, 203, 4299 par la fonction « à retrancher 3 ». L'écart entre 6 et 206 est 200, il est égal à l'écart entre 3 et 203 (leurs images) ; et il en est de même quels que soient les nombres concernés. Dans ce cas la fonction conserve les écarts ;

Exemple 2 : 3, 6, 18, 31 ont respectivement pour image 60, 120, 360, 540, 620 par la fonction « à multiplier par 20 ». L'écart entre 3 et 18 est 15, celui entre 60 et 360 est 300, les écarts sont ici multipliés par 20.

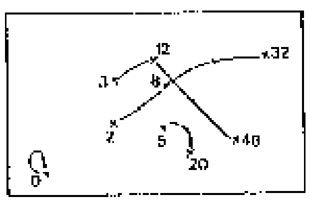
Les propriétés de linéarité (proportionnalité) caractéristiques des fonctions linéaires (n ⟶ n × a, leurs réciproques, et leurs composées), même si elles peuvent être sous-jacentes à des manipulations au cycle élémentaire, ne seront mises en évidence qu'au cycle moyen.

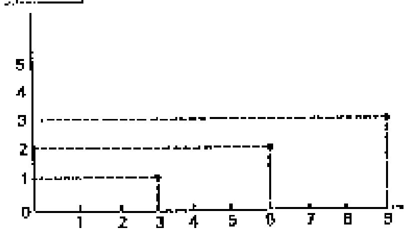
L'étude de telles propriétés suppose que les relations numériques soient perçues par les enfants comme des familles de couples de nombres (n, p), n étant un naturel quelconque et p le nombre qui lui est associé (son image) par la relation.

A cet effet différentes représentations des relations peuvent être utilisées. Exemples :



3	9
4	12
12	36
25	75
28	84
150	450





Le choix de la représentation utilisée dépendra, le plus souvent, de la situation et l'étude de ces représentations ne saurait constituer une fin en soi.

Pour désigner ces fonctions numériques on préférera selon les cas :

Des notations du type :

a 3 ou aj. 3... pour la fonction ajouter 3 dans N ;

r 3 ou ret. 3... pour la fonction retrancher 3 dans N ;

m 3 ou mult. 3... pour la fonction multiplier par 3 dans N ;

d 3 ou div. 3... pour la fonction diviser par 3 dans N.

(Ces notations présentent l'avantage de réserver exclusivement l'usage des signes +, ×, — et :, signes opératoires, à l'écriture de sommes, produits, différences et quotients exacts.)

Ou des notations du type :

n ⟶ n + a ou $\square \longrightarrow \square + a$ (aj/a) ;

n ⟶ n × a ou $\square \longrightarrow \square \times a$ (mult. a) ;

n ⟶ n — a ou $\square \longrightarrow \square - a$ (ret. a) ;

n ⟶ n : a ou $\square \longrightarrow \square : a$ (div. a).

On privilégiera tout particulièrement l'étude des familles de multiples (recherche de nouveaux multiples d'un nombre à partir de ceux qui sont déjà mémorisés, recherche de multiples d'un nombre voisin d'un nombre donné, encadrements) ; ceci en vue de la division.

Des relations numériques autres que les précédentes seront rencontrées à propos de situations variées, et notamment en liaison avec les activités d'éveil (tarifs postaux, relation entre la taille et le poids d'un individu, nombre de tours de manège en fonction de la « somme » disponible...).

La composition des relations numériques ne fera pas l'objet d'une étude systématique au cycle élémentaire, mais pourra néanmoins être envisagée dans certains cas simples de situations problèmes par exemple lors de leur résolution par calcul.

Les activités de calcul mental et rapide seront considérablement enrichies par l'utilisation des fonctions numériques et de leurs propriétés, par exemple : ajouter 127 à 159 ce peut être ajouter 1 puis ajouter 126 ou ajouter 130 puis retrancher 3.

Pour calculer l'écart entre 186 et 261, c'est-à-dire pour « aller » de 186 à 261 on peut successivement ajouter 4 puis ajouter 10, puis ajouter 61 ; 261 — 186 = 4 + 10 + 61 = 75.

Pour calculer 25 × 15 alors que l'on sait que 15 × 15 = 225 on peut raisonner ainsi l'écart entre 25 et 15 étant 10 il sera 150 entre 25 × 15 et 15 × 15, donc 25 × 15 = 375.

On réservera pour le cycle moyen l'étude des problèmes posés par les nombres qui n'ont pas d'image pour une fonction donnée.

2.3 APPROCHE DE LA DIVISION

Dans les situations relevant de la division que l'on étudiera, on ne se limitera pas, et cela dès le début, aux cas de diviseurs ou de quotients inférieurs à 10.

On se bornera à des méthodes empiriques de calcul du quotient et du reste à l'élaboration desquelles les enfants participeront. Que ces méthodes procèdent par encadrement du dividende entre multiples du diviseur, ou par additions ou soustractions successives, elles seront validées et utilisées sans que soit imposée une technique unique et une disposition particulière.

L'étude de la technique de la division sera poursuivie et parachevée au cycle moyen.

2.4 CALCUL MENTAL, ORDRE DE GRANDEUR, ENCADREMENT

Il est essentiel que les enfants acquièrent des procédures de calcul mental. A cet effet celui-ci sera pratiqué régulièrement.

Ces procédures seront dégagées et validées en liaison avec l'étude des propriétés des opérations et des fonctions numériques. Elles seront réinvesties en toutes occasions, notamment pour la détermination de l'ordre de grandeur ou l'encadrement d'un résultat.

2.5 LES PROBLÈMES

Les problèmes au cycle élémentaire pourront être envisagés selon trois points de vue :

1° On considérera d'abord que chaque nouvel outil mathématique peut se construire et trouver sa signification au travers de l'exploitation d'une ou plusieurs « situations-problèmes » convenablement choisies.

Ainsi l'ensemble des activités mathématiques auxquelles sont confrontés les enfants au cours des apprentissages peut être considéré comme une suite de « problèmes » particuliers, choisis par l'enseignant pour permettre le meilleur accès à la notion ou à l'activité opératoire visée.

Par exemple, on n'apprendra pas la technique de la multiplication en tant que telle mais on essayera de faire découvrir l'intérêt (voire la nécessité) des transformations qui la caractérisent comme système de résolution d'une « situation-problème » spécifique (cf. paragraphe 2.1 : trouver l'écriture usuelle du nombre de cases d'un tableau rectangulaire de 14 lignes et 19 colonnes).

2° D'autre part, les « situations-problèmes » seront le moyen pour les enfants tout au long de l'apprentissage de réinvestir, c'est-à-dire de généraliser et affiner les acquisitions antérieures, pour le maître de contrôler ces acquisitions de savoirs et de savoir-faire.

3° Enfin, il semble souhaitable que le problème puisse être aussi, dès le cycle élémentaire, l'occasion d'une exploitation plus libre de situations diverses, mais surtout plus complexes, moins épurées que celles sur lesquelles les apprentissages se seront effectués.

L'enfant devrait pouvoir y mettre en œuvre son pouvoir créatif en même temps que la rigueur et la sûreté de son raisonnement.

Alors travailler sur un « problème » pourrait être l'occasion pour les enfants :

De définir dans une situation une ou plusieurs directions de recherche ;

De compléter éventuellement celles-ci et de s'assurer de la possibilité de répondre à l'ensemble des questions que l'on s'est posées ;

D'organiser et de traiter ces données pour obtenir les réponses ;

De valider les réponses ;

De communiquer les résultats ;

Et éventuellement de réfléchir sur la démarche suivie en la comparant à celles qui ont été construites à l'occasion d'autres explorations de situations-problèmes.

Outre l'intérêt proprement mathématique de telles activités, celles-ci doivent pouvoir constituer le trait d'union, le plus efficace, avec l'ensemble des activités d'éveil (par l'exploration des divers domaines de la réalité physique ou sociale qu'elles impliquent).

3. REPÉRER ET MESURER

3.1 ACTIVITÉS SUR QUADRILLAGE

Les quadrillages permettent une organisation du plan : tout point, tout nœud ou toute case du plan peut y être repéré dès que l'on a désigné les lignes et les colonnes (exemple : situer un monument d'une ville sur un plan). Par ailleurs, la résolution de nombreux problèmes peut être facilitée si l'on se limite à utiliser l'ensemble des « nœuds » d'un réseau par exemple, tracés divers, reproduction de figures, figures symétriques, déduites par translation, agrandissement de figures, représentations graphiques de fonctions, calculs de distances. Enfin, on y retrouve évidemment des activités de désignation déjà pratiquées au cycle préparatoire : codage et décodage de cheminement, par exemple.

3.2 MESURAGE

3.2.1. Activités de comparaison et de mesurage :

On pourra proposer des activités où les enfants sont amenés à comparer des objets selon de multiples critères. Un travail privilégié peut être mené à propos de la longueur, car c'est une grandeur familière aux enfants et dont l'approche est facilitée par la multiplicité des expériences antérieures. Pour la masse, on proposera des activités (manipulations, comparaison, utilisation de balance) qui fourniront un registre d'expériences sur lequel s'appuyer ultérieurement. Si l'occasion se présente, on pourra de la même façon exploiter des activités relatives à d'autres grandeurs (capacités, surfaces, durées, prix, etc.).

3.2.2 Construction et utilisation d'instruments :

A propos de la longueur se pose facilement le problème de la construction d'instruments de mesure. Construire des règles graduées (avec unité arbitraire) apparaîtra comme un moyen économique qui évite les manipulations correspondant aux reports successifs de l'unité en permettant une lecture directe. La construction de telles règles permettra aussi de réfléchir sur la façon dont sont construites les règles graduées usuelles et autres instruments de mesure de longueur et d'assurer une bonne connaissance de quelques unités usuelles.

Construire des instruments de mesures de masse pose des problèmes qui ne seront pas abordés au cycle élémentaire. Cependant on donnera aux enfants l'occasion d'utiliser les différents instruments courants (balances, peson à ressort, etc.) et de renforcer leur connaissance des unités usuelles.

Remarque : certaines activités ne relèvent pas spécifiquement des mathématiques, bien que traditionnellement proposées dans les programmes ; par exemple, la lecture de l'heure, ne doit pas être dissociée de la notion de durée mise en place au cours des activités d'éveil.

3.3 SITUATIONS-PROBLÈMES

Face à de nombreuses situations-problèmes, le recours à des procédures de mesurage (dénombrement y compris) est la seule façon pour les enfants de dépasser la simple observation et de traiter des situations multiples par le calcul afin d'obtenir de nouvelles informations. Le travail sur la mesure est ainsi au confluent des mathématiques et des activités d'éveil scientifique (sciences physiques, naturelles, économiques, démographiques, etc.).

En particulier, on ne négligera pas tous les problèmes faisant intervenir la monnaie (manipuler et connaître les instruments monétaires, évaluer un achat, rendre la monnaie, etc.).

4. GÉOMÉTRIE

Les activités géométriques contribuent à la formation de la pensée logique au même titre que les activités numériques, mais leur objectif propre est double :

D'une part , elles doivent donner des moyens pour décrire, analyser, structurer, agencer des objets, considérés isolément ou dans les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets dans l'espace ou le plan ;

D'autre part, elles doivent faire acquérir des pratiques instrumentales utiles dans de très nombreuses activités de la vie scolaire et indispensables aux constructions que nécessite l'objectif précédent.

Dans tous les cas, l'accent sera mis sur la démarche plus encore que sur les résultats. C'est pourquoi on présentera les activités géométriques sous forme de situations ouvertes complexes : manipulation d'objets divers,

jeux, dessins, constructions, pliages, découpages, etc. Les situations-problèmes définies en 2.5 pourront constituer des occasions particulièrement riches.

On y retrouvera une démarche de même nature :

Découverte des objets dans des activités de construction, de transformation ou d'agencement ;

Prise de conscience de la multiplicité des modes d'approche, comparaison des diverses procédures utilisées par les enfants ;

Description et explicitation de ces procédures dans des situations de communication exigeant l'élaboration d'un langage commun apte à désigner les objets et les actions. C'est ainsi que pourra être précisée la signification géométrique de certains termes du langage courant (face, arête, sommet, côté, retournement, glissement, etc.), de quelques propriétés usuelles (parallélisme, orthogonalité) ainsi que les noms de quelques polyèdres et polygones.

Une telle démarche suppose que l'on travaille d'abord sur des objets qui, bien que géométriquement complexes, sont plus proches de l'expérience des enfants : on va ainsi d'un travail dans l'espace à un travail dans le plan. Parmi les types d'activités possibles, on pourra retenir plus particulièrement :

Des classements qui permettent aux enfants de dégager, par observation et comparaison, certaines propriétés. Par exemple, pour les solides lors d'essais d'empilement, ils pourront s'intéresser à la planéité des faces, ce qui les conduira à isoler les polyèdres (solides uniquement bordés par des faces planes) et à réfléchir sur leurs caractéristiques (nombre de faces, arêtes, sommets, etc.). De même, pour les formes planes, ils pourront distinguer les différents polygones et les classer selon divers critères (nombre de côtés, de sommets, longueur des côtés, présence de côtés parallèles ou perpendiculaires, etc.). On pourra s'intéresser plus particulièrement aux carrés, losanges, parallélogrammes, rectangles, triangles ;

Des assemblages de polyèdres ou de polygones (puzzles dans le plan et l'espace, mosaïques, pavages, etc.). C'est à partir d'activités de ce type qu'on peut espérer faire atteindre aux enfants une certaine maîtrise des formes et de leur organisation, ce que la simple observation ne saurait permettre. Ces activités pourront motiver les classements cités précédemment ;

Des constructions qui amèneront les enfants à préciser leurs analyses ; par exemple, ils pourront constater que pour construire un carré il ne suffit pas d'avoir remarqué que les quatre côtés ont la même longueur. Il faut souligner ici l'importance que revêt l'action de construction, qui oblige les enfants à anticiper sur la réalisation de l'objet mais qui leur permet aussi de contrôler les prévisions qu'ils ont pu faire et au besoin de les modifier, sans nécessairement recourir au maître. Ainsi les enfants pourront construire avec des matériaux divers (pâte à modeler, carton, baguette, etc.).

ANNEXE 8 - 2

Programmes et instructions officielles du CM.

MATHEMATIQUES

I. OBJECTIFS

Au cycle moyen, comme aux cycles précédents, les activités mathématiques doivent permettre aux enfants :

De réorganiser, d'enrichir et d'approfondir des connaissances antérieures *(dans le domaine des nombres naturels, par exemple)* ;

D'acquérir de nouvelles connaissances *(dans le domaine des nombres décimaux, de la division, par exemple)* ;

D'accumuler des expériences qui serviront de support à des formalisations ultérieures *(dans le domaine de la géométrie, des nombres décimaux, par exemple)* ;

De développer des savoir-faire et des comportements *(procédures de recherche, de preuve...)* dans tous les domaines.

L'ordre dans lequel sont présentés les objectifs qui suivent ne constitue ni un ordre chronologique pour le travail dans les classes, ni une progression. Il appartient aux maîtres d'établir, pour chacune des rubriques mentionnées (qui comportent de nombreuses interférences), une programmation portant sur les deux années du cycle moyen, par référence à ces objectifs qui doivent être atteints à la fin de la scolarité primaire.

1. SITUATIONS - PROBLÈMES

Dans des situations, vécues ou décrites, savoir :

Associer une question qu'on se pose, ou qui est posée, et l'information pertinente qui lui correspond ;

Organiser et exploiter cette information ;

Communiquer les résultats obtenus et la démarche suivie, et en établir la validité.

2. ÉCRIRE, NOMMER ET COMPARER LES NOMBRES NATURELS

2.1 Maîtriser l'usage et le fonctionnement des règles de la numération écrite et de celles de la numération orale.

2.2 Savoir :

Comparer les nombres naturels désignés sous les diverses formes utilisées au cycle élémentaire.

Les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre).

3. ÉCRIRE, NOMMER ET COMPARER LES NOMBRES DÉCIMAUX

3.1 Prendre conscience, dans des situations appropriées, de la nécessité d'étendre le domaine du calcul par l'introduction de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres qui s'écrivent sous la forme de fractions simples.

3.2 Savoir :

Utiliser correctement les règles usuelles d'écritures des nombres décimaux.

Désigner un nombre décimal par des écritures additives, multiplicatives, soustractives et fractionnaires et passer d'une écriture à une autre.

Reconnaître sous des écritures différentes le même nombre décimal.

3.3 Savoir comparer les nombres décimaux :

Les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre).

Intercaler un décimal entre deux décimaux.

Encadrer un décimal par deux décimaux et, en particulier, par deux naturels consécutifs.

N. B. — L'étude des nombres décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au collège.

4. CALCULER SUR LES NOMBRES

4.1 Savoir :

Reconnaître, analyser et résoudre des situations relevant des diverses opérations sur les nombres ; donner un sens aux opérations sur les nombres décimaux.

Organiser et effectuer un calcul mettant en jeu l'addition, la multiplication, la soustraction des nombres naturels et décimaux ; élaborer et mettre en œuvre des techniques de calcul correspondant à ces opérations sur les décimaux.

Dégager, à partir de situations relevant de la division des nombres naturels, les notions de quotient entier et de reste :

Evaluer l'ordre de grandeur du quotient, par encadrement ;

Elaborer une technique de calcul (en organisant les méthodes empiriques utilisées dès le cycle élémentaire) et la mettre en œuvre.

Elaborer et mettre en œuvre une technique de calcul des quotients décimaux approchés de deux naturels.

N. B. — Les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux ne constituent pas un objectif du cycle moyen.

4.2 Savoir élaborer et mettre en œuvre des procédures mentales de calcul sur les nombres naturels et décimaux.

4.3 Elaborer des procédures de calcul approché sur les naturels et les décimaux et savoir :

Evaluer l'ordre de grandeur et trouver des encadrements du résultat d'un calcul.

S'assurer de la vraisemblance d'un résultat.

4.4 Savoir expliciter et comparer des procédures de résolution (raisonnement et modalités de calcul).

5. REPRÉSENTER ET UTILISER DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

5.1 Dans des situations variées, savoir élaborer et/ou interpréter des descriptions (orales, écrites ou graphiques, — conventionnelles ou non) de relations numériques.

5.2 Savoir :

Reconnaître, utiliser et représenter les fonctions qui, à un nombre n (naturel ou décimal), associent $n + a$ ou $n \times a$ (a étant un naturel ou un décimal) et leurs réciproques.

Utiliser leurs propriétés (sans formalisation).

5.3 Savoir reconnaître, organiser et traiter des situations relevant des fonctions numériques, celles citées ci-dessus (en particulier, celles qui relèvent de la proportionnalité) et d'autres.

6. MESURER

Savoir :

6.1 Construire et utiliser des systèmes de mesure pour les grandeurs étudiées (cf. § 6.2, 6.3 et 6.5 ci-après) :

Exprimer par un nombre ou par un encadrement le résultat d'un mesurage ;

Utiliser les unités usuelles du système légal.

6.2 Utiliser correctement divers instruments de mesure de longueur ou de masse :

Exprimer les résultats à l'aide des unités adaptées aux objets mesurés.

Reconnaître ou construire un objet de longueur ou de masse donnée.

Calculer sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de masse.

6.3 Mesurer un intervalle de temps et calculer sur les nombres exprimant des durées.

6.4 Comparer des angles.

6.5 Classer et ranger, par comparaison directe ou indirecte, des objets selon leur aire, leur volume.

Utiliser les relations qu'entretiennent entre elles les unités du système légal pour longueur, aire, volume.

Déterminer :
L'aire d'un rectangle, d'un triangle ;
Le volume d'un pavé droit ;
L'aire ou le volume d'un objet donné en utilisant un formulaire.

6.6 Traiter quelques problèmes simples liés à la pratique de la mesure.

7. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

7.1 Savoir :

Pour différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes) :
Les reproduire ;
Les décrire et les représenter ;
Les construire à partir d'une description ou d'une représentation.

Pour quelques objets géométriques, construire les transformés par des transformations ponctuelles simples (par exemple : *la figure symétrique, par rapport à une droite, d'une figure donnée).*

7.2 A cet effet :

Choisir et utiliser un instrument.

Mettre au point ou utiliser des techniques de reproduction.

Mettre en œuvre des procédés permettant d'identifier et de construire des parallèles, des perpendiculaires.

Reporter une distance, un angle.

II. INSTRUCTIONS PÉDAGOGIQUES

D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur les expériences dont disposent les élèves.

1. SITUATIONS-PROBLÈMES

Les problèmes peuvent être envisagés selon trois points de vue :

Situations-problèmes utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques ;

Situations-problèmes permettant aux enfants de réinvestir des acquis antérieurs, d'en percevoir les limites d'utilisation (situation contre-exemple) et au maître d'en contrôler le degré de maîtrise ;

Situations-problèmes plus complexes, plus globales dans lesquelles l'enfant devrait pouvoir mettre en œuvre son pouvoir créatif et affiner la rigueur et la sûreté de son raisonnement.

Ces trois aspects doivent être exploités pour tous les thèmes du programme. Cependant, le cycle moyen se prête particulièrement à des activités de type « réinvestissement » ou « situations-complexes », la quantité d'outils mathématiques disponibles étant plus étendue qu'au cycle précédent. Ces activités peuvent ou non s'appuyer sur des données numériques.

Il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes (même en multipliant les exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à le faire. Un apprentissage spécifique, d'ordre méthodologique, est nécessaire. Les objectifs de cet apprentissage sont le plus souvent présents, simultanément, dans les situations proposées aux enfants. Il y a néanmoins intérêt à travailler plus particulièrement tel ou tel d'entre eux dans certaines séquences, selon les perspectives suggérées ci-dessous.

1.1 RECHERCHER, SÉLECTIONNER ET ORGANISER L'INFORMATION :

Les enfants éprouvent souvent des difficultés pour analyser une situation où des informations sont données et une question posée (les informations

fournies sont-elles toutes nécessaires ? Sont-elles suffisantes ? Comment les coordonner et les réorganiser ? etc.). Aussi, les maîtres proposeront-ils aux enfants des situations impliquant de leur part la collecte, la constitution et l'organisation des données grâce auxquelles ils pourront répondre à la question. Ce peut être :

Une question posée à partir d'une situation effectivement rencontrée ou en projet (par exemple : *l'organisation d'une sortie ; la construction d'une maquette ; etc.*). Les enfants doivent réunir et choisir les informations dont ils estiment avoir besoin et rechercher les valeurs numériques correspondantes ;

Une question posée à partir d'une documentation *(textes écrits, dépliants d'information, films, photos, graphiques...)* fournissant en général une information surabondante par rapport à la question. Les enfants doivent alors sélectionner, organiser et exploiter les informations pertinentes.

Dans ces deux cas, le choix des informations se fait, en fonction du type de résolution envisagée, en traduisant la question posée en un ensemble de sous-questions. Les premières informations collectées peuvent se révéler insuffisantes ou non pertinentes au cours de la résolution : une nouvelle collecte ou un nouveau tri sont alors nécessaires.

1.2 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES :

Dans la résolution d'un problème, un grand nombre d'enfants procèdent au hasard, effectuent n'importe quelle opération, ou choisissent le résultat qui leur semble le mieux adapté après plusieurs essais, ou encore traitent une petite partie du problème sans se préoccuper de l'enchaînement avec le reste.

Le maître favorisera la recherche d'une démarche raisonnée. Il pourra, par exemple :

Dissocier, dans certaines activités, les démarches et les calculs : un groupe d'enfants joue le rôle de centre de calcul en effectuant (éventuellement à l'aide d'une calculatrice) tous les calculs demandés par les autres groupes qui se consacrent alors exclusivement à la recherche des procédures de résolution ;

Proposer des problèmes dont le contexte, la formulation, les nombres sont très différents, mais qui — sans qu'il s'agisse de familles de problèmes types — relèvent d'une même procédure générale de résolution ; alors celle-ci s'élucidera plus facilement et pourra, éventuellement, se traduire sous la forme d'un organigramme simple, élaboré par les élèves.

Pour un même problème, les procédures de résolution peuvent être diverses, notamment en fonction des outils mathématiques disponibles selon les élèves. On s'appuiera sur cette diversité pour confronter les différentes propositions des enfants : les étapes du raisonnement ; la possibilité d'effectuer mentalement certains calculs ; la technique écrite nécessitée pour d'autres calculs ; le caractère suffisant, dans certains cas, d'une estimation approchée du résultat.

1.3 VALIDER LES SOLUTIONS :

Quand les enfants proposent une solution, ils sont souvent très peu sûrs de sa validité. Il est très important de développer chez eux l'aptitude à prouver ce qu'ils avancent : selon les cas, par une argumentation de type mathématique, par la mise en évidence d'un contre exemple, ou par la confrontation avec la réalité. On s'efforcera de développer ces différents types de validation, celle-ci devant toujours rester objective, c'est-à-dire ne pas reposer uniquement sur l'approbation ou la parole du maître.

1.4 COMMUNIQUER LES DÉMARCHES ET LES RÉSULTATS :

Dans une activité de résolution de problème, il est important que les enfants s'expriment à différents moments du travail et pas seulement lors de la présentation des résultats.

Le travail par groupes est particulièrement propice aux échanges : à l'intérieur du groupe (recherche des informations, choix de la procédure, de la présentation, etc.) ; entre les groupes (communication de pistes de recherche, demande ou apport d'aide) ; au niveau de la classe (explicitation, confrontation et validation des démarches et des résultats). Ces échanges permettent de faire évoluer l'analyse que les enfants font de la situation et les procédures de résolution qu'ils envisagent de mettre en œuvre. Lors d'un travail individuel, l'échange peut prendre la forme d'un dialogue (entre deux élèves qui confrontent leurs démarches ; entre un élève et le maître, à des fins d'évaluation).

Cette communication (avec ses diverses modalités) est un élément important de l'activité de résolution de problèmes. Elle peut même constituer l'objectif majeur de certaines séquences.

Le maître évitera de stéréotyper la mise en forme de la démarche ou des résultats. La forme doit, au contraire, s'adapter à la situation et à l'interlocuteur, selon les moments ou les activités : part de l'oral et de l'écrit, du langage courant et du langage mathématique ; détail de l'explication ; présentation ; etc.

2. ÉCRIRE, NOMMER ET COMPARER LES NOMBRES NATURELS

L'étude de la numération, entreprise au cycle préparatoire et continuée au cycle élémentaire, a pour objectif au cycle moyen de consolider et d'étendre les connaissances acquises en numération écrite et orale. On pourra faire avec profit le parallèle avec la désignation des durées (numération complexe) qui relève de règles de construction analogues.

2.1 SYSTÈMES DE DÉSIGNATION ORALE ET ÉCRITE DES NOMBRES :

2.1.1 Désignations orales :

Travailler sur un domaine numérique plus vaste (« grands nombres ») permet une réflexion, qui n'a guère été possible jusqu'alors, sur les règles de construction des noms des nombres, différentes de celles de la numération écrite.

Il suffit de dix chiffres pour écrire les nombres si grands soient-ils ; il faut beaucoup plus de mots pour les désigner (oralement ou par écrit). On fera observer les différences et les relations entre les deux modes de désignation. Par exemple :

Il y a des mots-clés qui renseignent sur la longueur de l'écriture chiffrée *(le mot « million » rappelle que le nombre écrit en chiffres comporte au moins 7 chiffres).*

Traduire le nom des nombres qu'on entend par leur écriture chiffrée (et vice-versa) permet de mieux comprendre les correspondances entre les deux systèmes :

Treize millions cinq cent sept mille quatre-vingt douze correspond à :

$(13 \times 1\,000\,000) + [(5 \times 100) + 7] \times 1\,000) + (4 \times 20) + 12$

ou :

$(13 \times 1\,000\,000) + (507 \times 1\,000) + 92$

ou :

$(13 \times 10^6) + (507 \times 10^3) + 92$

c'est-à-dire $(13 \times 1\,000^2) + (507 \times 1\,000) + 92$,

ce qui met en évidence le rôle joué par mille et ses puissances pour l'écriture et la lecture des « grands nombres ».

2.1.2 Désignations écrites :

L'objectif du cycle moyen est d'assurer chez les enfants une bonne maîtrise du fonctionnement de notre système de numération (positionnel, à base dix). Pour cela, le maître proposera :

Des exercices fréquents de changements et d'utilisation de différentes écritures liées :

Au codage décimal des nombres. Exemple :

$$\begin{aligned} 257\,024 &= 200\,000 + 50\,000 + 7\,000 + 20 + 4 \\ &= (2 \times 100\,000) + (5 \times 10\,000) + (7 \times 1\,000) + (2 \times 10) + 4 \\ &= (2 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10) + 4\,; \end{aligned}$$

A des questions du type : « *combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?* Exemple : *dans 7 024, il y a 70 centaines car* $7\,024 = (70 \times 100) + 24$.

Des activités conduisant à confronter notre système de numération à d'autres systèmes (numération romaine, numérations complexes, etc.).

2.1.3 Numérations complexes :

Cette étude sera conduite avec profit en parallèle avec l'étude de notre numération décimale aussi bien orale qu'écrite.

En numération sexagésimale, la lecture est cohérente avec l'écriture (ex. : *3 heures, 24 minutes 45 secondes est codé 03 24 45 sur les horloges digitales)*, ce qui n'est pas toujours le cas dans notre numération (Exemple : « *3 cent 4 vingt 7* » *pour 387).*

Par analogie, on pourra associer à la lecture d'un nombre une écriture telle que :

million *mille*

$\boxed{013}$ $\boxed{507}$ $\boxed{092}$

Les exercices de conversion consolident le rôle joué par la base dans notre système de numération :

Exemple : *2 jours 3 h 8 min* $\longrightarrow (2 \times 24 \times 60) + (3 \times 60) + 8$
2 m 3 dm 8 cm $\longrightarrow (2 \times 10 \times 10) + (3 \times 10) + 8$

Il en va de même pour des exercices oraux ou écrits consistant par exemple à :

Donner la suite des nombres à partir d'un nombre donné, ou la suite des instants de seconde en seconde (minute en minute) à partir d'un instant donné ;

Compter de 2 en 2, de 5 en 5, ou de 5 en 5 secondes, de 5 en 5 minutes, de 15 en 15 secondes, de 30 en 30 minutes, etc. ;

Compter ou décompter de 10 en 10, de 100 en 100, ou de 60 en 60 secondes, 60 en 60 minutes.

La reprise de techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication : cf. § 4.1.1) et les calculs sur les durées, effectués de manière empirique (cf. § 6.3), seront une nouvelle occasion d'expliciter la structure de notre système de numération.

2.2 COMPARAISON DE NOMBRES :

En prolongement d'activités abordées au cycle élémentaire, le maître proposera des exercices de comparaison mettant en jeu des écritures additives, soustractives, multiplicatives, portant aussi bien sur les désignations écrites qu'orales et confrontées à la comparaison des désignations complexes. Par exemple :

Situer des instants, ou des nombres, sur une ligne graduée ou non ;

Intercaler un instant, un nombre ;

Encadrer un instant, un nombre (en particulier encadrer un nombre naturel par des multiples consécutifs ou des puissances consécutives de dix) ; rechercher la borne la plus proche.

La comparaison de grands nombres peut s'appuyer sur un rapprochement entre la numération orale et la numération complexe. Exemple :

Pour comparer 5 h 22 min 46 s et 3 h 59 s, il suffit de comparer 5 et 3.

Pour comparer 18 422 et 5 769 (lorsque ces nombres sont donnés oralement), il suffit de comparer 18 (mille) et 5 (mille).

3. ÉCRIRE, NOMMER, COMPARER LES NOMBRES DÉCIMAUX

3.1 DE NOUVEAUX NOMBRES :

3.1.1 A l'issue du cycle élémentaire, les seuls nombres connus sont les nombres naturels. Diverses situations permettront aux enfants de prendre conscience de la nécessité de disposer d'autres nombres. Ainsi :

3.1.1.1 Certaines relations numériques précédemment étudiées ne sont pas partout définies. Ainsi, la fonction « retrancher 15 » dans $\mathbb{N}$ n'est pas définie pour 0, 1, 2... 14 ; la fonction « diviser par 100 » dans $\mathbb{N}$ n'est pas définie pour 22, pour 1 110, etc.

Pour étendre la définition de ces fonctions, on sera amené à introduire, au collège, de nouveaux nombres (selon le cas : entiers négatifs ou nombres rationnels).

L'ensemble des nombres décimaux, étudié au cycle moyen, est tel que les fonctions « diviser par 10 », « diviser par 100 », « diviser par 1 000 », etc. y sont partout définies.

3.1.1.2 Lorsqu'on veut exprimer la mesure de la longueur d'un objet avec une unité choisie, l'ensemble des nombres naturels est peu satisfaisant, ne permettant pas de transmettre une information précise dans la plupart des cas. (Des objets de longueur nettement différente risquent d'avoir la même mesure : « entre 7 et 8 » par exemple).

3.1.1.3 Il est utile de représenter l'ensemble des nombres naturels à l'aide de points d'une droite graduée. Mais de nombreux points ne correspondent à aucun nombre naturel. On peut chercher à affecter un nombre à d'autres points de la droite ; par exemple : *au milieu du segment défini par le « point 102 » et le « point 103 ».*

3.1.1.4. Certaines situations de partage amènent à prendre conscience de l'insuffisance des nombres naturels (exemple : *partager 8 en 5 ou 1 en 3)*, ce qui conduit à introduire des fractions. L'étude des nombres décimaux apparaît alors comme celle des nombres qui :

Peuvent s'écrire sous la forme de fractions décimales ($\frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1{,}6$) ;

Permettront, ultérieurement, d'approcher par encadrement d'autres fractions ($0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$ ou $0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$, etc.).

3.1.2 Les maîtres choisiront celle (ou celles) de ces situations qui leur paraissent aider le mieux à prendre conscience de la nécessité d'introduire de nouveaux nombres. Ces situations ne sont pas équivalentes car elles privilégient plus ou moins tel ou tel aspect de l'étude des nombres décimaux : il conviendra de s'assurer qu'aucun des objectifs n'a finalement été négligé.

Certes, l'ensemble des décimaux ne permet pas de décrire ou traduire toutes les situations auxquelles les enfants sont susceptibles d'être confrontés. Il permet cependant d'approcher d'aussi près qu'on le veut les nombres (non décimaux) qui interviennent alors.

3.1.3 En même temps que de nouveaux nombres sont introduits, il faut les désigner, par écrit et oralement, les organiser en prolongeant l'ordre et les opérations connues dans l'ensemble des nombres naturels : ainsi *3,23 < 4,4 ou 8,06 < 9 ; 1,07 + 23,4 ; 18,2 — 13,5 ; 3,2 × 7 ; 4,5 × 0,13* ont alors un sens.

Le mode d'introduction retenu pour les nombres décimaux détermine en grande partie le choix des situations conduisant à ces prolongements. Les différentes rubriques (désignation, ordre, opérations) ne peuvent être séparées dans la progression pédagogique. (Par exemple, les désignations des nombres décimaux évoluent au fur et à mesure que la connaissance de l'ordre et des opérations s'enrichit.)

3.1.4 L'objectif assigné au cycle moyen concerne essentiellement les nombres décimaux. Cependant, à l'issue de l'école élémentaire, les enfants doivent connaître un certain nombre de fractions simples :

Celles-ci ont pu être rencontrées lors de l'introduction de nouveaux nombres (cf. § 3.1.1.4) ;

Une phrase telle que « *j'ai pris les trois-quarts des quantités indiquées* », acquerra sa signification grâce à l'utilisation des fonctions numériques et de leurs composées (cf. § 5) ;

Les indications $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ portées sur un verre mesureur ont le même statut que l'indication 1 (écritures de nombres qui permettent d'exprimer la mesure d'une quantité de liquide, le litre étant pris pour unité).

Les enfants doivent connaître la signification de ces fractions simples et savoir les situer par rapport aux nombres décimaux. Les désignations usuelles de « l'heure » fourniront à ce sujet un champ d'investigation important.

3.2 ÉCRIRE ET LIRE LES NOMBRES DÉCIMAUX :

Il est important que les enfants connaissent de nombreuses écritures des nombres décimaux. Par exemple :

7,23 ; 7,230 ; 07,23 ; 7 + 0,23 ; 7 + 0,2 + 0,03 ;

7 + (2 × 0,1) + (3 × 0,01) ;

éventuellement :

$$8 - 0{,}77 \; ; \; 10 - 2{,}77 \; ; \; 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} \; ; \; 7 + \frac{23}{100} \; ; \; \frac{723}{100} \; ;$$

ces écritures désignant toujours le même nombre.

Elles évoquent des aspects particuliers de la connaissance de ces nombres, ce qui prolonge les activités du cycle élémentaire concernant les nombres naturels. L'écriture *7 + 0,23* qui isole la partie entière de la partie décimale est particulièrement importante dans les calculs.

De la même façon, plusieurs lectures sont possibles. On peut dire tout simplement : « *sept virgule vingt-trois* » ; *zéro virgule zéro douze* » ; « *cinq virgule zéro, zéro, zéro trois* ». On peut aussi se servir de la numération décimale pour nommer les nombres : « *7 unités 23 centièmes* » ou « *7 unités 2 dixièmes 3 centièmes* » ; « *zéro unité douze millièmes* » ou simplement « *douze millièmes* » ; « *5 unités 3 dix millièmes* ». (Ces dernières lectures vont de pair avec une bonne compréhension des décimaux et de leurs écritures : elles diminuent les risques d'erreur.)

3.3 COMPARER LES NOMBRES DÉCIMAUX :

L'un des aspects le plus neuf et le plus important de cet ensemble de nombres est la façon dont il est ordonné.

Entre deux nombres décimaux, il y en a toujours une infinité d'autres. Les réflexes acquis à propos des nombres naturels ne conviennent plus :

7,013 a une écriture plus longue que 7,3 et désigne néanmoins un nombre plus petit ;

On peut trouver le nombre qui est juste avant 109 dans l'ensemble des nombres naturels tandis que ce problème n'a plus de signification dans l'ensemble des nombres décimaux.

Les lectures usuelles aussi peuvent être sources d'erreurs : « *dix-sept virgule trois* » *est un nombre plus grand que* « *dix-sept virgule douze* ».

Un travail approfondi doit donc être fait sur l'ordre de grandeurs des nombres décimaux. Ainsi :

7,013 est :
Entre 7,01 et 7,02 ;
Entre 7 et 7,1 mais beaucoup plus près de 7 ;
Un tout petit peu plus grand que 7.

7,3 est entre 7 et 7 et demi, plus près de 7,5 que de 7.

Ces commentaires peuvent s'accompagner d'une représentation par les points d'une droite graduée où des graduations de plus en plus fines permettent de localiser des nombres très divers. Pour intercaler des nombres entre *7,05 et 7,06* par exemple, les enfants doivent passer sur une graduation plus fine, ce qui se traduit par un allongement des écritures.

3.4 UTILISER LES NOMBRES DÉCIMAUX :

Au-delà des situations d'introduction, les enfants devront savoir reconnaître et traduire des situations faisant intervenir des écritures telles que

$a + b$, $a \times b$, $a - b$ et des phrases telles que $a < b$ lorsque a et b désignent des nombres décimaux.

L'étude de telles situations, très diverses, est l'occasion de mettre en œuvre l'ensemble des connaissances concernant les nombres décimaux, mais aussi d'en renforcer, voire d'en élargir la signification.

Dès le cycle élémentaire, avant l'étude des décimaux, les enfants ont fréquenté des écritures à virgule, notamment dans des situations problèmes *(3,50 F ; 12,50 m)*. Ils les interprètent initialement comme des écritures complexes *(3 francs et 50 centimes ; 12 mètres et 50 centimètres)*. Il convient d'assurer la liaison entre ces écritures et les nombres décimaux.

Connaître les nombres décimaux n'interdit pas, dans certaines situations, d'utiliser des désignations complexes qui renvoient à un sens pratique : *« deux kilogrammes quatre cent cinquante »* plutôt que *« deux kilogrammes quarante-cinq »*. Cependant, s'il s'agit d'effectuer un calcul, on travaillera avec l'écriture *2,45* (de même que pour facturer un temps de réparation, un garagiste remplace *2 h 45 mn* par *2,75*).

4. CALCULER SUR LES NOMBRES

Calculer sur les nombres, ce n'est pas seulement obtenir un résultat exact ou approché. Ce peut être aussi remplacer un calcul par un autre. *Par exemple, pour calculer 157 × 49, on peut déterminer 7 693, par écrit ou mentalement, en posant l'opération ou en remplaçant 157 × 49 par (157 × 50) — 157 ou encore, prévoir que ce produit est proche de 160 × 50 = 8 000.*

Les diverses procédures sont le plus souvent intimement liées. Par exemple, lorsqu'on effectue par écrit une division posée, calcul approché (estimation du nombre de chiffres du quotient, recherche de chacun de ces chiffres, etc.) et calcul exact interviennent alternativement. De même, tout calcul mental peut s'accompagner de traces écrites et tout calcul écrit utilise des phases de calcul mental. Il convient donc de ne pas donner un sens restrictif à ces expressions bien qu'il soit nécessaire d'envisager des exercices spécifiques de calcul mental ou de calcul écrit.

Pour le calcul écrit comme pour le calcul mental, les séquences pédagogiques viseront, suivant les cas, l'élaboration ou l'explicitation de techniques, l'entretien systématique de techniques déjà mises en place, ou leur réinvestissement.

4.1 CALCUL ÉCRIT :

4.1.1 Addition, multiplication, soustraction des nombres naturels ou décimaux :

Au cycle élémentaire, des techniques ont été mises en place pour les nombres naturels. Au cycle moyen, il convient de faire réfléchir sur ces

techniques et de prévoir des exercices d'entretien. (La technique mise en jeu n'est pas nécessairement la même pour tous les enfants.) D'autre part, il est nécessaire d'assurer et de consolider, pour ces opérations, la mémorisation des résultats élémentaires (que les enfants peuvent organiser, par exemple, en tables de Pythagore).

Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière.

L'étude de la multiplication de deux nombres décimaux débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a \times b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle.

Certains calculs écrits doivent pouvoir être effectués en ligne. Par exemple : *347 + 1 271 ; 565 × 7 000 ; 286 × 0,3 ; 44 — 7,2*. Il convient de ne pas négliger la pratique des procédures de calcul mental mises ainsi en jeu.

4.1.2 Division :

L'étude de la division est l'occasion d'une réorganisation des acquis sur l'addition, la multiplication, la soustraction et l'ordre des nombres : la mise en place des techniques nécessite l'utilisation combinée de ces acquis.

C'est en faisant évoluer des techniques intermédiaires, dont certaines ont déjà été découvertes au C. E. 2, que l'on accédera à des techniques codifiées qui devront être ensuite parfaitement maîtrisées par les enfants. La progression ne repose pas alors sur un allongement progressif des écritures des diviseurs (d'abord à un chiffre, puis à deux chiffres, etc.), mais sur une recherche de procédures de plus en plus économiques.

On étudiera d'abord la division euclidienne (détermination du quotient à une unité près et du reste) dans l'ensemble des nombres naturels, puis on prolongera cette étude à l'ensemble des nombres décimaux.

4.1.2.1 *Division euclidienne dans* $\mathbb{N}$.

Dans l'étude de situations appropriées, les enfants mettent en œuvre des techniques empiriques variées :

Recherche d'encadrements du dividende par deux multiples du diviseur, encadrements de plus en plus fins jusqu'à trouver l'encadrement minimum (exemple : $70 \times 8 < 623 < 80 \times 8$ ... $77 \times 8 < 623 < 78 \times 8$) ;

Recherche de multiples du diviseur, de plus en plus grands jusqu'à atteindre celui qui est immédiatement inférieur au dividende ;

Recherche du reste en retranchant successivement du dividende le diviseur ou des multiples du diviseur.

Ces diverses procédures, souvent utilisées simultanément par les enfants d'une même classe, conduiront à la mise en place de techniques mentales de calcul du quotient et du reste, à des techniques écrites en ligne et à la technique habituelle dès lors que l'on souhaite économiser les calculs et les disposer efficacement.

Pour la division comme pour les autres opérations, on n'est pas toujours tenu de poser l'opération. Par exemple, *pour diviser 948 par 70, on peut écrire :*

$$948 = 700 + 248 = 700 + 210 + 38$$
$$= (70 \times 10) + (70 \times 3) + 38$$

d'où l'on déduit, par simple lecture, que *le quotient est 10 + 3 = 13 et le reste 38.*

Ce calcul en ligne exige, outre la compréhension de ce que veut dire « diviser », que l'on sache trouver mentalement des multiples d'un nombre, et la différence entre deux nombres. Cette technique permet de déterminer rapidement le reste de la division d'un nombre quel qu'il soit par un nombre tel que *8 ; 70 ; 300.* Les élèves seront invités à l'utiliser toutes les fois que la situation le permet.

Remarque. — Il est d'usage d'exiger des enfants qu'ils ne posent pas les soustractions successives. Or cette pratique nécessite un entraînement spécifique important sans apporter d'économie de temps : elle surcharge inutilement la *mémoire*, risque de masquer le processus de soustractions successives et rend plus difficile la localisation d'une erreur éventuelle. Il apparaît donc souhaitable de laisser poser les soustractions aux enfants tant que la nécessité s'en fait sentir.

4.1.2.2 *Prolongement à* $\mathbb{D}$ *de la division.*

Ce prolongement suppose différentes étapes.

L'une d'entre elles consiste à obtenir un quotient décimal dans la division de deux entiers naturels. Nombreuses sont les situations qui requièrent un résultat de cette nature et à partir desquelles engager la recherche de procédures appropriées. Il doit s'agir essentiellement de prolongements — qui doivent être justifiés — des techniques antérieurement maîtrisées.

La division de deux nombres décimaux ne fera pas l'objet d'un travail systématique au cycle moyen. Cependant dans des situations où elle est rendue nécessaire, il sera demandé aux élèves de tenter de construire et de justifier des procédures conduisant à l'obtention d'un résultat. Une activité préalable, pour faciliter l'élaboration d'un certain type de procédure, consiste (notamment en liaison avec certaines des activités proposées au § 5) en la recherche de couples dividende-diviseur conduisant au même quotient. Par exemple, *les quotients de 12 par 5, de 24 par 10, de 36 par 15, de 3,6 par 1,5 sont égaux.*

4.2 CALCUL MENTAL :

4.2.1 L'objectif du calcul mental est que les enfants soient capables d'effectuer toute une gamme de calculs, sans pour autant qu'ils aient appris à associer de façon stéréotypée une méthode donnée à un type de calcul donné.

4.2.2 Les **séances quotidiennes** de calcul mental prendront des formes variées : la consigne peut être écrite ou orale ; l'exercice peut, ou non, se référer à des situations (vécues ou évoquées) ; les enfants peuvent avoir le droit d'écrire des résultats intermédiaires, ou pas.

Selon la forme adoptée, les exercices sollicitent des types d'attention et de mémoire différents dont il convient de ne négliger aucun.

L'explicitation des différentes démarches sera plus ou moins développée suivant l'objectif assigné à la séance : élaboration ou entretien. Un enfant doit pouvoir rendre compte de sa démarche, la communication étant éventuellement facilitée par diverses représentations, par des écritures avec parenthèses, par des arbres de calcul, etc.

La discussion des diverses méthodes employées n'a pas pour but de valoriser l'une d'entre elles : **il n'y a pas une bonne méthode** pour un exercice donné, l'appréciation variant en fonction de l'exemple précis et, pour chaque enfant, des outils mathématiques disponibles au moment où l'exercice est proposé. Dans cette phase d'explicitation et de confrontation, chaque enfant pourra choisir les procédures qui lui paraissent les plus adaptées pour lui.

4.3 CALCUL APPROCHÉ :

Le calcul approché doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique, quels que soient les objectifs qu'on lui assigne : estimation d'un résultat avant, après ou sans avoir effectué une opération ; évaluation d'une dépense ou d'une consommation en situation vécue ou évoquée, etc.

4.3.1 Sa mise en œuvre requiert des aptitudes particulières : entre autres, savoir choisir les nombres à substituer à ceux qui interviennent dans le calcul. Ce choix s'appuie sur une bonne connaissance notamment du lien entre opérations et ordre, qui permet d'apprécier, en anticipant, la simplicité des calculs à effectuer sur les nouveaux nombres retenus ; le choix d'un « voisin » d'un nombre n'est pas seulement lié à ce nombre, mais aussi au calcul à effectuer.

Par exemple, le nombre qu'on substituera à 1 250 ne sera pas le même selon que l'on veut estimer :

La somme de 1 250 et 27 812 ;

Celle de 1 250 et 37 ;

Ou le produit de 1 250 par 12, etc.

4.3.2 Les exercices systématiques de calcul approchés seront l'occasion de faire expliciter oralement ou par écrit, comparer et apprécier, par les enfants eux-mêmes, les différentes procédures qu'ils ont utilisées et les solutions qu'ils proposent, cela dans le même esprit que pour les problèmes (cf. § 1.4) et le calcul mental (cf. § 4.2.2).

4.3.3 **Calcul approché et calcul exact :**

Il ne suffit pas de savoir effectuer un calcul, il est essentiel de pouvoir en contrôler la vraisemblance. Les « preuves » habituellement utilisées ne permettent pas d'atteindre cet objectif. Contrôler la vraisemblance du résultat d'une opération, c'est surtout évaluer l'ordre de grandeur de ce résultat. Cette évaluation est l'occasion de mettre en œuvre des procédures mentales de calcul approché.

En particulier, pour les calculs portant sur les nombres décimaux, cette évaluation se ramène le plus souvent à un calcul sur des nombres naturels choisis convenablement. Par exemple :

731,42 + 58,07 devra avoir un résultat voisin de 790 (730 + 60) ou de 800 (700 + 100) ;

8,37 × 21,2 aura un résultat voisin de 168 (8 × 21) ou de 160 (8 × 20) ;

0,072 × 3,8 aura un résultat voisin de 0,28 (0,07 × 4 = 28 × 0,01) ou plus petit que 0,38 (0,1 × 3,8).

Ces exemples soulignent l'importance en ce domaine du travail sur la partie entière d'un nombre décimal ou, — pour les nombres ayant une partie entière nulle, — sur les nombres décimaux qui s'écrivent avec un seul chiffre significatif.

4.4 CALCUL NUMÉRIQUE ET PROBLÈMES :

Dans la résolution d'un problème, chaque enfant ayant déterminé les calculs à effectuer choisira, pour ce faire, la ou les procédures — mentales et/ou écrites — en rapport avec ses connaissances. Les différentes procédures employées — en ce qui concerne les démarches de résolution et les modalités de calcul — pourront être explicitées et confrontées (cf. § 1.4, 4.1.2 et 4.3.2).

5. REPRÉSENTER ET UTILISER DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

5.1 De nombreuses situations rencontrées en classe ou hors de la classe, et en particulier au cours des activités d'éveil, conduisent à constater et à expliciter une correspondance entre deux ensembles de données numériques (par exemple : *achat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal ; etc.).*

L'analyse de telles situations et la résolution des problèmes qu'elles posent (qui appelle le plus souvent la détermination de nouvelles données

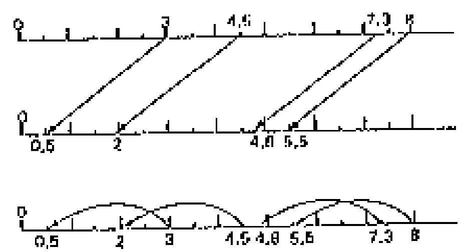
numériques) peuvent être conduites grâce à l'utilisation de représentations et/ou de propriétés de certaines fonctions numériques. On se contentera, avec les élèves du cycle moyen, de faire découvrir et exploiter, sur des exemples variés et adaptés, de telles représentations et propriétés : il ne peut, certes, s'agir que d'une première approche de la notion de fonction numérique dont l'étude théorique plus formelle relève en effet de l'enseignement du second degré.

5.2 Ainsi, à partir de situations aussi variées que possible, les élèves seront amenés à :

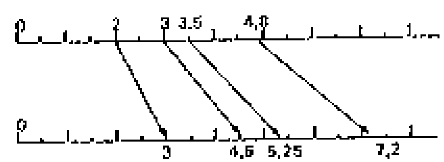
5.2.1 **Représenter ces situations sous différentes formes** (tableaux de nombres, graphiques, etc.) ou, à l'inverse, interpréter et exploiter de telles représentations, et, pour ce faire, identifier les couples d'éléments associés, la fonction numérique étant ainsi perçue comme une famille de tels couples.

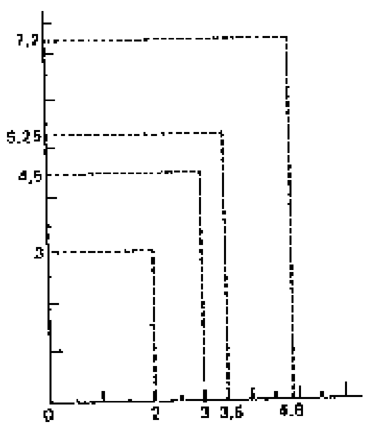
Par exemple :

3	4,5	7,3	8
0,5	2	4,8	5,5
(3 ; 0,5)	(4,5 ; 2)	(7,3 ; 4,8)	(2 ; 5,5)



2	3	3,5	4,8
3	4,5	5,25	7,2
(2 ; 3)	(3 ; 4,5)	(3,5 ; 5,25)	(4,8 ; 7,2)





Si certaines représentations sont privilégiées dans l'enseignement des mathématiques (tableaux, diagrammes, graphiques...), il est important que les élèves aient interprété et élaboré d'autres modes de représentations rencontrés en activité d'éveil et dans l'environnement (histogrammes, portions de disques, formulaires, etc.).

5.2.2 Reconnaître, à propos d'une situation donnée la fonction mise en jeu et l'exploiter pour résoudre certains des problèmes posés par cette situation.

5.2.3 Désigner certaines des fonctions rencontrées. On pourra utiliser des notations du type :

aj. 3 ou $n \longmapsto n + 3$
mult. 1,5 ou $n \longmapsto n \times 1{,}5$
ret. 2,5 ou $n \longmapsto n - 2{,}5$
div. 4 ou $n \longmapsto n : 4$

le dernier type étant finalement privilégié, et pouvant même donner lieu à une notation telle que :

$n \longmapsto (n \times 1{,}35) + 5$

pour désigner, par exemple, la fonction qui correspond au tarif d'une course en taxi (compte-tenu de la valeur constante de la prise en charge), ou encore au poids total d'un récipient contenant un volume variable de liquide.

5.3 Dans des situations constituant des exemples et des contre-exemples :

5.3.1 On retrouvera les propriétés liées à l'ordre ou celles liées aux écarts, déjà rencontrées au cycle élémentaire à propos des nombres naturels.

5.3.2 On s'attachera à mettre en évidence et à utiliser la proportionnalité, propriété caractéristique des fonctions $n \longmapsto n \times a$, a étant un naturel ou un décimal, voire une fraction simple.

Ainsi, dans le tableau suivant, résultant par exemple de l'analyse d'une situation, la proportionnalité est vérifiée :

2	2,5	4	4,5	7	8	9
5	6,25	10	11,25	17,5	20	22,5

On remarque en effet que :

— *si à 2 correspond 5* / *et à 2,5 correspond 6,25* } *alors à (2 + 2,5) correspond (5 + 6,25)*

— *si à 4,5 correspond 11,25, alors à (2 × 4,5) correspond (2 × 11,25)*

Dès lors, en utilisant ces propriétés, on peut trouver le nombre :

Qui correspond à *5 : 2 × 6,25 correspondant* à *2 × 2,5* ou *17,5 — 5, correspondant* à *7 — 2*

Qui correspond à *14 : 2 × 17,5 correspondant* à *2 × 7*, ou *(3 × 10) + 5, correspondant à (3 × 4) + 2, etc.*

De telles propriétés seront utilisées, par exemple pour compléter un tableau, sans qu'il soit nécessaire de déterminer, ni de désigner la fonction mise en jeu (ou encore le coefficient de proportionnalité). Elles ne sauraient être étudiées pour elles-mêmes : elles seront découvertes et utilisées, sans formalisation, lors de l'étude de situations appropriées. Elles interviennent dans l'analyse et la résolution de problèmes d'échelle, de conversion, de pourcentage, etc. et plus généralement des problèmes résolus autrefois par la règle de trois.

5.3.3 Il importe toutefois que les élèves sachent reconnaître l'existence de la proportionnalité, et ceci bien qu'en général un seul couple de nombres leur soit fourni. *Par exemple : « 2 cm sur la carte représentent 2,5 km sur le terrain. Quelle est la distance qui, sur le terrain, correspond à 6 cm sur la carte ? »*

Des expériences préalables ont dû permettre de constater que les distances sur le terrain et sur la carte sont proportionnelles. Les élèves peuvent alors déterminer que :

Le correspondant de 6 = 2 × 3 (en cm) est 2,5 × 3 (en km), sans qu'il soit ici nécessaire d'expliciter le coefficient de proportionnalité (en l'occurrence « l'échelle »).

Ainsi, c'est le plus souvent l'analyse de la situation qui permet à l'élève de reconnaître l'existence ou non de la proportionnalité.

5.4 La composition des fonctions numériques ne fera pas non plus l'objet d'une étude systématique.

Elle pourra être envisagée à l'occasion de certaines résolutions de problèmes (exemple : « *prendre les* $\frac{3}{15}$ »). On devra alors constater que les résultats ne sont pas toujours indépendants de l'ordre des calculs ; *tous les nombres qui ont une image par « mult. 3 suivi de div. 15 » n'en ont pas nécessairement par « div. 15 suivi de mult. 3 »*.

Elle peut également permettre d'enrichir ou d'expliciter certaines procédures de calcul mental *(par exemple, pour multiplier par 2,5 on peut multiplier par 10 puis diviser par 4)*, ou favoriser l'explication de certains calculs sur les nombres décimaux *(ainsi, « mult. 3,761 » revient à composer « mult. 3 761 » et « div. 1 000 »)*.

6. MESURER

6.1 LES ACTIVITÉS DE MESURAGE à l'école élémentaire ont pour objectif essentiel de développer chez les élèves la capacité à résoudre des problèmes pratiques liés à la mesure, tels que de nombreuses situations de la vie courante, en classe ou hors de la classe, en offrent l'occasion.

Enquête ministérielle de 1982.

ANNEXE -9-

X A 2 - APPLICATION DES REGLES DE LA NUMERATION DECIMALE

Effectue ces opérations sans les poser.

222,2 − 100 =

3 320 × 10 × 10 =

54,60 × 1000 =

8 006 : 100 =

0,1034 : 10 =

122,2	1.
332 000	2.
54 600	3.
80,06	4.
0,01034	5.

A 7 - SOUSTRACTION ET MULTIPLICATION A TROUS

Ecris le chiffre qu'il faut mettre sur chaque point pour que les opérations soient exactes:

a)

```
  4572
- 1.1.
  .8.4
```

b)

```
     .02
   × .5
  ------
   .3.1.
   .0.
  ------
  11...
```

a) 7 8 2 5	1.
b) 5 . 2 5	2.
2 . 8 4	3.
addition finale	4.
11 2 5 6	

B 1 - CALCUL MENTAL

Dire : "Vous allez faire un exercice de calcul rapide. Vous ne devez pas poser les opérations, ni sur votre feuille, ni sur votre brouillon, ni sur la table. Si une opération vous embarrasse, ne vous y attardez pas, passez à la suivante. Vous ne pourrez peut-être pas tout faire dans le temps qui vous est donné. Cela ne fait rien, tâchez seulement d'aller le plus loin possible. Vous indiquerez les réponses comme cela a été fait pour l'exemple. Avez-vous bien compris ? COMMENCEZ".

Ex : 35 + 15 = 50

56 − 20 =

195 + 205 =

45 × 0,2 =

3,845 × 100 =

37,5 + 12,2 =

170 × 0,5 =

14 : 20 =

Le tiers de 210 est égal à

36	1.
400	2.
9	3.
384,5	4.
50	5.
35	6.
0,7	7.
70	8.

B 4 B – ASSOCIATIVITE DE L'ADDITION DES ENTIERS

3) Regardons ensemble l'exemple sur la feuille : M = 5 + 14
et
N = 5 + 10 + ...

On cherche le nombre qu'il faut mettre sur les pointillés de telle sorte que N soit égal à M.

Quel est ce nombre ? C'est quatre. Ecrivez-le sur les pointillés. On voit que ce n'est pas nécessaire de faire le calcul 5 + 14 ; il est plus rapide d'inscrire directement ce qu'il faut ajouter à 10 pour faire 14.
Vous allez faire des exercices semblables.

ex. M = 5 + 14
N = 5 + 10 + ...

A = 77 + 34 + 21
B = ... + 7 + 34 + 20 + 1

C = 12 × 71
D = 3 × 71 × ....

E = 5 + 27 + 15
F = 5 + 34 + 15 + ...

G = 24 × 15
H = 3 × 5 × ... × 3

F = 15	4

B 6 – ROLE DE ZERO ET DE UN DANS LA MULTIPLICATION DES ENTIERS

Cette chaîne d'opérations donne le résultat zéro. Complétez cette chaîne.
(laisser deux minutes).

$$7 \times \boxed{} \qquad \boxed{} - 2$$
$$\boxed{} + 5 \qquad 8 - \boxed{}$$
$$\underbrace{12 \quad \times \quad \boxed{}}_{0}$$

branche gauche 1,7.	1.
branche droite 6,8,0.	2.

B 4 B – ECRITURES ADDITIVES OU MULTIPLICATIVES D'UN NOMBRE ENTIER

5) Regardons ensemble l'exemple sur la feuille : M = 5 + 14
et
N = 5 + 10 + ...

On cherche le nombre qu'il faut mettre sur les pointillés de telle sorte que N soit égal à M.

Quel est ce nombre ? C'est quatre. Ecrivez-le sur les pointillés. On voit que ce n'est pas nécessaire de faire le calcul 5 + 14 ; il est plus rapide d'inscrire directement ce qu'il faut ajouter à 10 pour faire 14.
Vous allez faire des exercices semblables.

ex : M = 5 + 14
N = 5 + 10 + ...

A = 77 + 34 + 21
B = ... + 7 + 34 + 20 + 1

C = 12 × 71
D = 3 × 71 × .....

E = 5 + 27 + 35
F = 5 + 34 + 45 + ...

G = 24 × 15
H = 3 × 5 × .... × 3

N = 4	1.
B = 70	2.
D = 4	3.
H = 8	4.

CH2 - Résultats - réussite attendue par les enseignants.

Résultats moyens observés (en pourcentages)

	Réussite attendue par les enseignants	Résultats des élèves: Réussite Totale code 1	Réussite Partielle code 2	Echec code 9	Absence de réponse code 0
A_2 APPLICATION DES REGLES DE LA NUMERATION DECIMALE					
1. Soustraire 100 d'un décimal	73,7	72,6	–	24.5	2,8
2. Multiplier un entier par 10 x 10	67,1	73.7	–	23,1	3,2
3. Multiplier un décimal par 1000	68,7	50,8	–	44,9	4,3
4. Diviser un entier par 100	51,8	46,7	–	43,0	10,3
5. Diviser par 10 un décimal inférieur à 1	36,4	29,4	–	55,1	15,5
B_{4B} ECRITURES ADDITIVES OU MULTIPLICATIVES D'UN NOMBRE ENTIER					
1. Ecriture additive d'un nombre	83,5	95,1	–	0,6	4,3
2. « « « «	68,8	73,7	–	21,2	5,1
3. Ecriture multiplicative d'un nombre	39,1	40,2	–	42,0	17,8
5. « « « «	41,7	28,6	–	43,6	27,8
A_7 SOUSTRACTION ET MULTIPLICATION A TROUS					
1. Soustraction	57,6	58,2	–	37,7	4,1
2. Multiplication : découverte du multiplicande	49,6	67,5	–	17,7	14,8
3. Multiplication : découverte du multiplicateur	39,7	59,5	–	19,6	20,9
4. Multiplication : addition finale	41,7	55,7	6,9	14,7	22,8
B_1 CALCUL MENTAL					
1. Différence d'un entier à deux chiffres et d'un multiple de 10	83,8	90,7	–	9,0	0,3
2. Somme de deux multiples de 5	77,5	86,6	–	13,2	0,2
3. Produit d'un multiple de 5 par 0,2	55,3	39,1	–	55,3	5,6
4. Produit d'un décimal par 100	61,6	56,2	–	38,2	5,6
5. Addition de deux décimaux dont la somme est un multiple de 10	59,6	63,4	–	32,9	3,6
6. Produit d'un multiple de 10 par 0,5	43,7	40,1	–	47,3	12,6
7. Quotient d'un entier pair par 20	33,8	40,9	–	33,5	25,5
8. Tiers d'un multiple de 30	35,7	34,7	–	19,6	45,7

2. OPÉRATIONS.

Résultats moyens observés (en pourcentages)

	Réussite attendue par les enseignants	Résultats des élèves : Réussite Totale code 1	Réussite Partielle code 2	Echec code 9	Absence de réponse code 0
B_{4A} POSE ET RÉALISATION D'UNE ADDITION DE DÉCIMAUX					
4. Poser l'addition	69.8	92.9	–	5.8	1.4
5. Effectuer l'addition	61.1	64.7	11.2	22.7	1.4
B_{4B} ASSOCIATIVITÉ DE L'ADDITION DES ENTIERS	50.3	55.6	–	36.9	7.6
B_6 ROLE DE ZÉRO ET UN DANS LA MULTIPLICATION DES ENTIERS					
1. Rôle de un	46.4	62.0	–	30.1	7.9
2. Rôle de zéro	38.1	53.7	–	31.1	15.2

6ème Résultats et réussite attendue par les enseignants

	Réussite attendue par les enseignants	Résultats des élèves : Réussite Totale code 1	Réussite Partielle code 2	Echec code 9	Absence de réponse code 0
A_2 APPLICATION DES REGLES DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE					
1. Soustraire 100 d'un décimal	75,7	75,3	–	22,7	2,0
2. Multiplier un entier par 10 x 10	74,9	82,0	–	16,5	1,4
3. Multiplier un décimal par 1000	70,9	64,6	–	33,4	2,0
4. Diviser un entier par 100	70,0	65,9	–	29,9	4,2
5. Diviser par 10 un décimal inférieur à 1	55,7	48,2	–	45,7	6,1
B_{4B} ECRITURES ADDITIVES OU MULTIPLICATIVES D'UN NOMBRE ENTIER					
1. Écriture additive d'un nombre	78,5	94,2	–	0,8	4,9
2. « « « «	71,7	77,8	–	18,9	3,4
3. Écriture multiplicative d'un nombre	57,1	57,9	–	29,2	12,9
5. « « « «	52,8	59,2	–	22,0	18,8

Résultats moyens observés (en pourcentages)

	Réussite attendue par les enseignants	Résultats des élèves — Réussite Totale code 1	Réussite Partielle code 2	Echec code 9	Absence de réponse code 0
B_{4B} ASSOCIATIVITE ET COMMUTATIVITE DE L'ADDITION DES ENTIERS					
4. Associativité et commutativité de l'addition des entiers	50,5	59,5	–	34,4	6,1
B_6 ROLE DE ZERO ET UN DANS LA MULTIPLICATION DES ENTIERS					
1. Rôle de un	57,2	68,5	–	26,5	5,0
2. Rôle de zéro	54,0	61,7	–	30,3	8,0
A_7 SOUSTRACTION ET MULTIPLICATION A TROUS					
1. Soustraction	67,6	69,9		28,4	1,7
2. Multiplication : découverte du multiplicande	61,8	79,7	–	13,9	6,4
3. Multiplication : découverte du multiplicateur	54,3	72,8	–	17,9	9,3
4. Multiplication : addition finale	57,0	69,6	3,6	16,2	10,6
B_1 CALCUL MENTAL					
1. Différence d'un entier à deux chiffres et d'un multiple de 10	84,4	92,5	–	7,3	0,3
2. Somme de deux multiples de 5	78,9	88,5	–	11,4	0,1
3. Produit d'un multiple de 5 par 0,2	59,8	51,5	–	44,5	3,9
4. Produit d'un décimal par 100	73,7	67,1	–	30,1	2,9
5. Addition de deux décimaux dont la somme est un multiple de 10	66,1	66,4	–	31,5	2,2
6. Produit d'un multiple de 10 par 0,5	54,3	50,4	–	41,6	8,1
7. Quotient d'un entier pair par 20	47,1	57,8	–	29,0	13,2
8. Tiers d'un multiple de 30	57,3	49,2	–	19,3	31,5

Opinions des enseignants de 6e

Opinions exprimées (en pourcentages)

NR	indispensable 1	très utile 2	utile 3	peu utile 4	inutile 5	cote moyen	
							A_2 APPLICATION DES REGLES DE LA NUMERATION DECIMALE
3,8	57,8	16,1	19,0	3,3	0	1,66	1. Soustraire 100 d'un décimal supérieur à 100.
3,8	48,5	27,4	17,8	2,5	0	1,73	2. Multiplier un entier par 10 x 10.
3,8	55,3	29,5	11,0	0,4	0	1,54	3. Multiplier un décimal par 1000.
3,8	51,1	32,5	12,2	0,4	0	1,60	4. Diviser un entier supérieur à 1000 par 100.
3,8	37,1	33,8	22,0	2,9	0,4	1,91	5. Diviser par 10 un décimal inférieur à 1.
							B_{4b} ECRITURE ADDITIVE OU MULTIPLICATIVE D'UN NOMBRE ENTIER.
4,6	19,9	46,4	27,0	2,1	0	2,11	1. Utiliser les propriétés d'associativité de l'addition.
4,6	19,9	43,5	29,9	2,1	0	2,15	2. Utiliser les propriétés d'associativité de la multiplication.

OPÉRATIONS

NR	indispensable 1	très utile 2	utile 3	peu utile 4	inutile 5	cote moyen	
							A_7 SOUSTRACTION ET MULTIPLICATION A TROUS.
3,8	8,9	33,0	39,2	14,3	0,8	2,64	1. Retrouver par le raisonnement le mécanisme opératoire d'une soustraction avec retenues.
3,8	6,8	32,1	38,0	18,9	0,4	2,73	2. Retrouver par le raisonnement le mécanisme opératoire d'une multiplication.
							B_1 CALCUL MENTAL
4,6	76,8	15,7	2,5	0,4	0	1,23	1. Additionner et soustraire des entiers.
4,6	45,6	39,7	9,7	0,4	0	1,63	2. Additionner deux décimaux dont la somme des parties décimales est l'unité.
4,6	40,5	37,2	16,9	0,8	0	1,76	3. Multiplier un entier par un décimal.
4,6	46,9	32,1	15,6	0,4	0,4	1,69	4. Diviser deux entiers très simples.
4,6	19,9	38,9	30,3	6,3	0	2,24	5. Evaluer le tiers (entier) d'un nombre.

B 4a POSE ET REALISATION D'UNE ADDITION DE DECIMAUX.

2. Poser l'addition de trois nombres décimaux.

3. Effectuer l'opération.

B 4b ASSOCIATIVITE DE L'ADDITION DES ENTIERS.

1. Utiliser les propriétés d'associativité de l'addition.

B 6 ROLE DE 0 ET 1 DANS LA MULTIPLICATION DES ENTIERS.

1. Dans une chaîne opératoire, utiliser la propriété de 1 dans un produit.

2. Utiliser les propriétés de 0 dans un produit et dans une différence du type $a - x = 0$.

B 4a 2.	4,6	79,3	12,7	2,6	0	0,8	1,22
B 4a 3.	4,6	80,2	11,0	3,0	0,4	0,8	1,22
B 4b 1.	4,6	49,9	16,4	27,0	2,1	0	2,11
B 6 1.	4,6	37,6	25,8	25,3	5,9	0,8	2,02
B 6 2.	4,6	37,6	25,8	24,5	7,1	0,4	2,02

Opinions des maîtres de CM2

Opinions exprimées (en pourcentages)

	NR	Indispensable 1	Très utile 2	Utile 3	Peu utile 4	Inutile 5	Code moyen
A 2 APPLICATION DES REGLES DE LA NUMERATION DECIMALE.							
1. Soustraire 100 d'un décimal supérieur à 100.	-	56,7	19,7	21,3	2,4	-	1,69
2. Multiplier un entier par 10 x 10.	-	61,4	25,2	10,2	3,1	-	1,55
3. Multiplier un décimal par 1000.	-	66,1	21,3	11,8	0,8	-	1,47
4. Diviser un entier supérieur à 1000 par 100.	-	65,4	20,5	11,8	2,4	-	1,51
5. Diviser par 10 un décimal inférieur à 1.	-	39,4	27,6	24,4	8,7	-	2,00
B 4b ECRITURE ADDITIVE OU MULTIPLICATIVE D'UN NOMBRE ENTIER.							
1. Utiliser les propriétés d'associativité de l'addition.	-	27,6	44,9	24,4	3,1	-	2,03
2. Utiliser les propriétés d'associativité de la multiplication.	-	22,0	49,6	25,2	3,1	-	2,09

OPÉRATIONS

Opinions exprimées (en pourcentages)

	NR	Indispensable 1	Très utile 2	Utile 3	Peu utile 4	Inutile 5	Code moyen
A 7 SOUSTRACTION ET MULTIPLICATION A TROUS.							
1. Retrouver par le raisonnement le mécanisme opératoire d'une soustraction avec retenues.	–	19,7	30,7	33,9	13,4	2,4	2,50
2. Retrouver par le raisonnement le mécanisme opératoire d'une multiplication.	–	20,5	25,2	36,2	15,0	3,1	2,55
B 1 CALCUL MENTAL							
1. Additionner et soustraire des entiers.	–	79,5	15,7	3,9	–	0,8	1,26
2. Additionner deux décimaux dont la somme des parties décimales est l'unité.	–	52,0	33,1	13,4	0,8	0,8	1,65
3. Multiplier un entier par un décimal.	0,8	44,1	31,5	22,0	1,6	–	1,81
4. Diviser deux entiers très simples.	0,8	50,4	37,8	10,2	0,8	–	1,62
5. Evaluer le tiers (entier) d'un nombre.	0,8	40,9	42,5	13,4	1,6	0,8	1,78
B 4b ASSOCIATIVITE ET COMMUTATIVITE DE L'ADDITION DES ENTIERS.							
1. Utiliser les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition.	–	27,6	44,9	24,4	3,1	–	2,03
B 6 ROLE DE 0 ET 1 DANS LA MULTIPLICATION DES ENTIERS.							
1. Dans une chaîne opératoire, utiliser la propriété de 1 dans un produit.	–	40,2	35,4	21,3	3,1	–	1,87
2. Utiliser les propriétés de 0 dans un produit et dans une différence du type $a - x = 0$.	–	39,4	36,2	20,5	3,1	0,8	1,89

ANNEXES PORTANT SUR LE DEUXIEME CHAPITRE

ANNEXE 1 : DOCUMENTS ET TRAVAUX CONSULTÉS

[1] Jacques LECOCQ - La multiplication des naturels à l'école élémentaire - brochure de l'A.P.M.E.P. Elem Math II.

[2] J. VIENNOT et M. ARTIGUE - Quelques reflexions à propos de la multiplication - Revue GRAND N - CNDP de Grenoble - numéro spécial CE -

[3] M. ARTIGUE - F. COLMEZ - R. DOUADY - M.J. PERRIN - J. ROBINET - Nombres à l'école élémentaire - Brochure n°46 de l'I.R.E.M de Paris VII

[4] J. ROGALSKI - A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire - Cahier n°12 de didactiques des mathématiques - I.R.E.M de Paris VII

[5] J. ROGALSKI - Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité (analyse des effets macroscopiques de l'enseignement) - Cahier n°13 de didactique des mathématiques - IREM de Paris VII

[6] G. DERAMECOURT - film R.T.S - Répertoire multiplicatif - Atelier de Pédagogie.

[7] D. DELOR - film R.T.S - Algorithme de la multiplication - Atelier de Pédagogie.

[8] G. DERAMECOURT - La multiplication au CE. IREM de Bordeaux.

[9] D. COQUIN-VIENNOT - Algorithme et sous-algorithme - Etude du calcul d'un produit par la méthode à l'italienne - mémoire de DEA - I.REM. de Bordeaux.

[10] G. BROUSSEAU - M. BOURGEOIS - C. PEZE - La multiplication au CE - cahier n°10 sur l'enseignement des mathématiques - IR.E.M. de Bordeaux

[11] N. BROUSSEAU - L. VILLEDIEU - E. FAUCON - G. BROUSSEAU - R. BANNE - J. MAYSONNAVE - Opérations au CM1 - Cahier n°12 sur l'enseignement des mathématiques - I.R.E.M. de Bordeaux.

[12] G. BROUSSEAU - L'associativité : l'associativité de la multiplication des entiers naturels - cahier n°2 sur l'enseignement élémentaire des mathématiques - IR.E.M de Bordeaux.

[13] G. BROUSSEAU - Recherche sur le calcul numérique à l'école élémentaire - cahier n°8 sur l'enseignement élémentaire des mathématiques - IREM de Bordeaux.

[14] G. BROUSSEAU et M. BOURGEOIS - Technique de la multiplication - cahier n°5 sur l'enseignement élémentaire des mathématiques - IREM de Bordeaux.

[15] Construction de formules dans (N, x) au CE1 - D. DELOR et G. VINRIC cahier n°13 sur l'enseignement des mathématiques - IREM de Bordeau

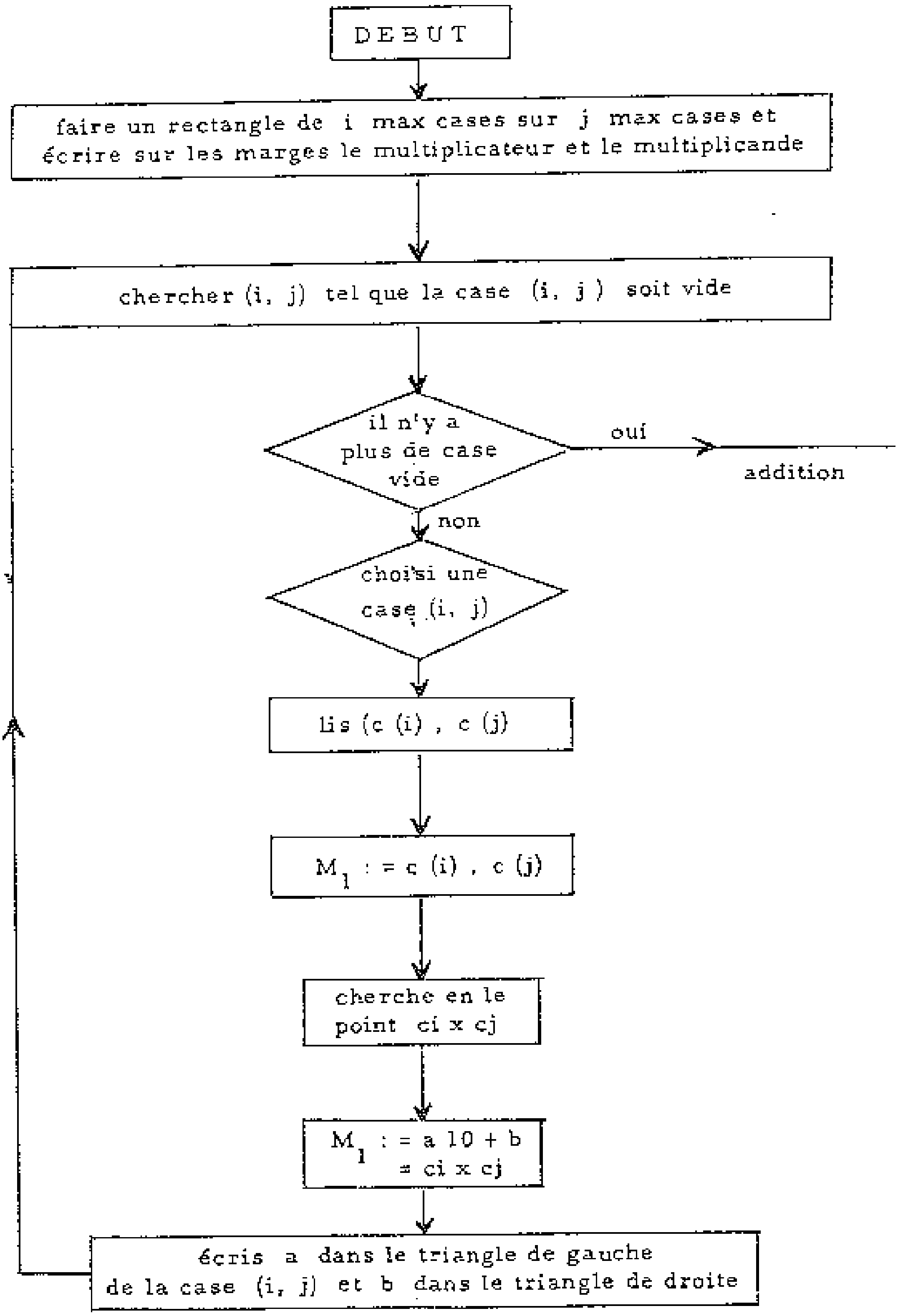
[16] G. BROUSSEAU - Note sur l'apprentissage des opérations dans N - Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels - cahier n°13 A l'enseignement élémentaire des mathématiques - I.R.E.M de Bordeaux.

[17] J. PAINCHAULT - Produit de deux naturels et multiplication au CE1 et au CE2. I.R.E.M de Grenoble - Revue Grand N - CNDP de Grenoble - Numéro spécial CE

LA MULTIPLICATION dans ℕ

Ordinogramme 3

Algorithme "per gélosia"

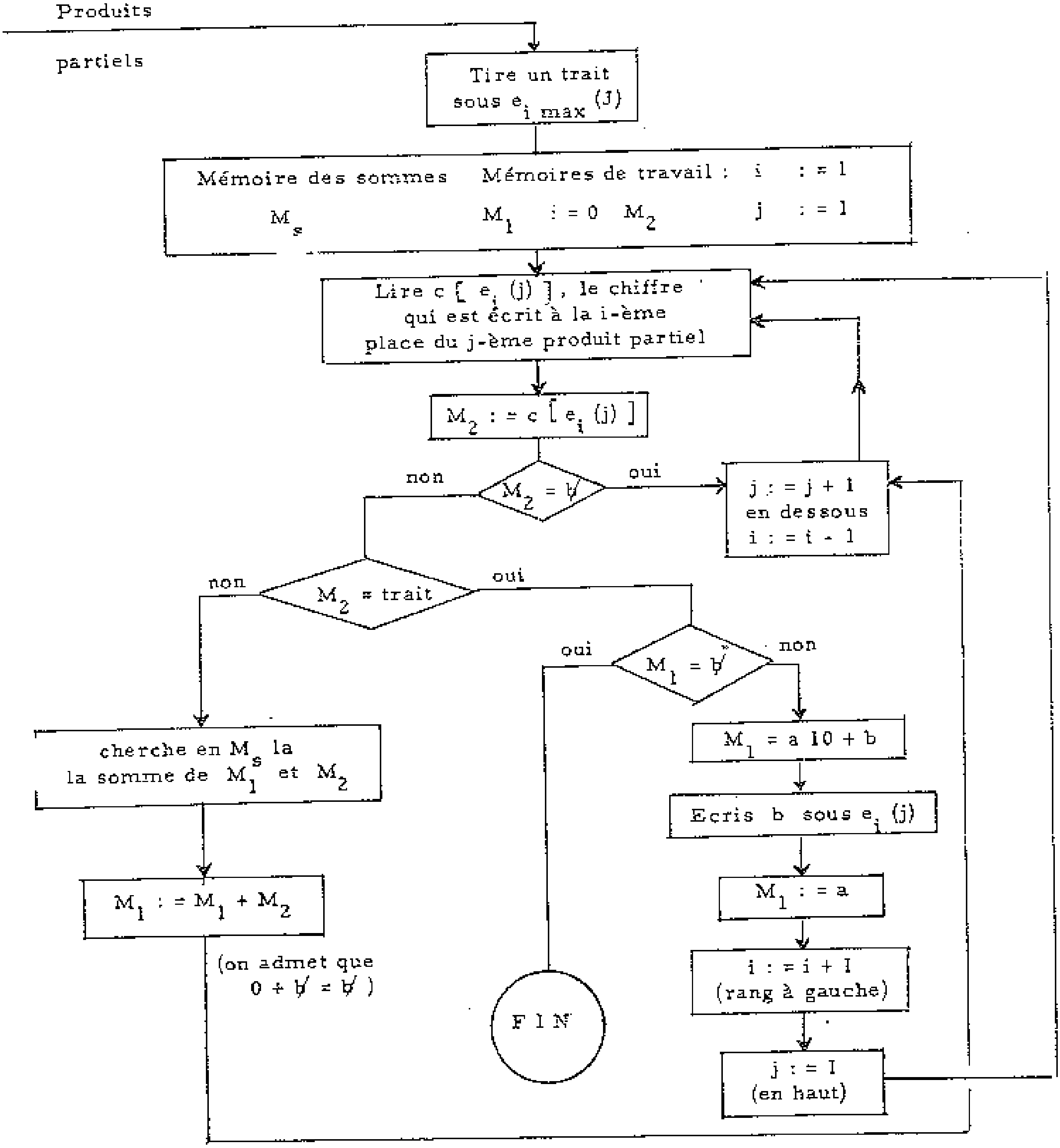


LA MULTIPLICATION

dans $\mathbb{N}$

Ordinogramme 2 : Addition

Produits partiels

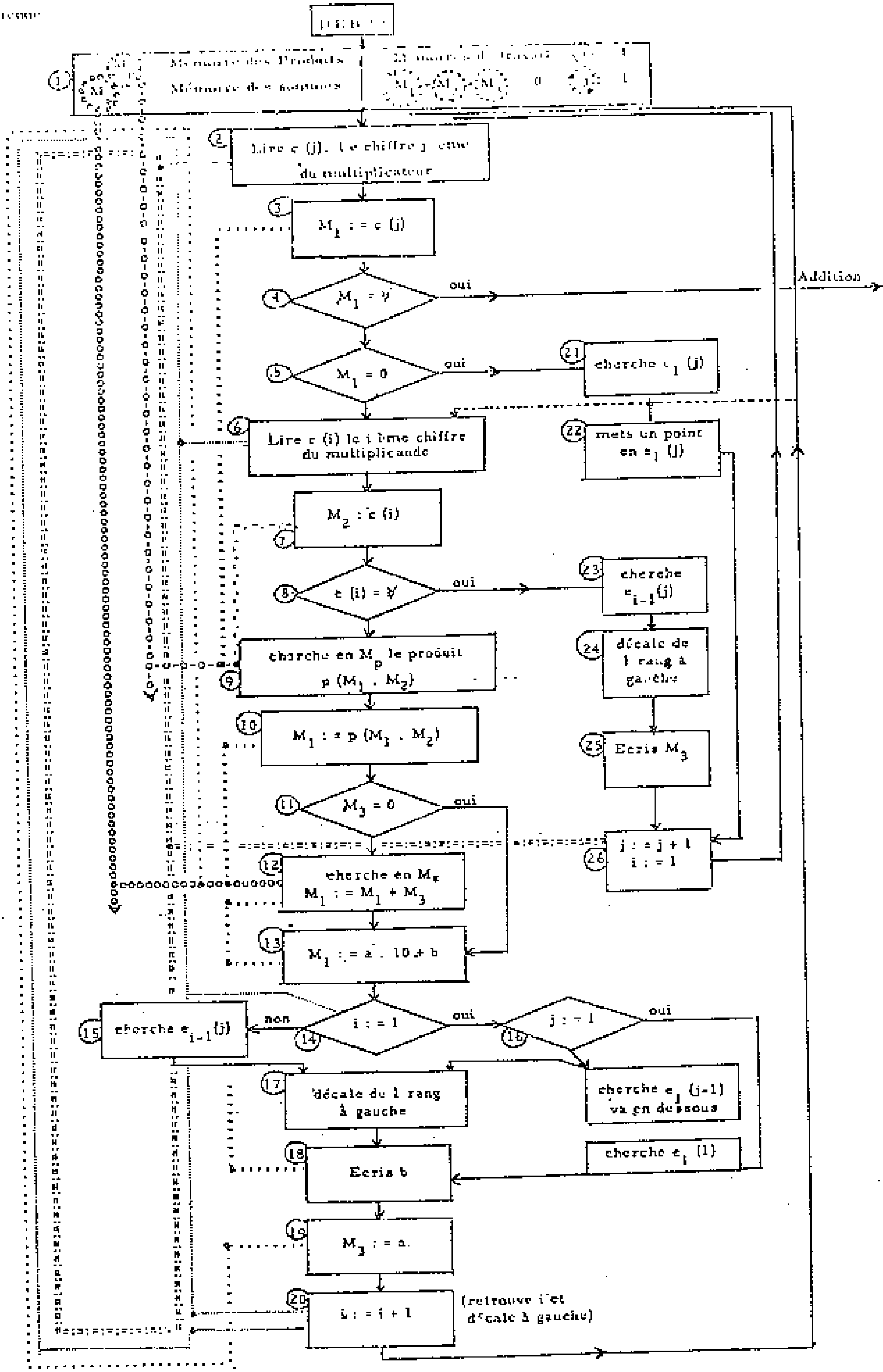


LA MULTIPLICATION

dans N

algorithme à l'italienne

Ordinogramme 1 Produits Partiels



e_i (j) : place du i ème chiffre du j ème produit partiel