

RAPPORTS ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE (DEBUTS DE L'ANALYSE SUR $\mathbb{R}$)
FASCICULE 0 : CONNAISSANCE DES ELEVES SUR LES DEBUTS DE L'ANALYSE
SUR $\mathbb{R}$ A LA FIN DES ETUDES SCIENTIFIQUES SECONDAIRES FRANCAISES.

PAR A. ROBERT

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
18.

Deux types de préoccupations nous ont amené à faire passer au début de l'année 84-85 un prétest sur les connaissances en analyse et tout au long de l'année divers post test, à un certain nombre d'étudiants scientifiques venant de passer le baccalauréat⁽¹⁾. D'abord une interrogation conjoncturelle : de nouveaux programmes ont été mis en place depuis 8 ans dans la scolarité secondaire, et les premières générations ayant eu l'intégralité de ces nouveaux programmes ont passé le bac en juin 1984 (à condition de n'avoir pas redoublé depuis la bème). Nous voulions donc examiner les résultats, en particulier en comparant à des résultats à un prétest presque identique passé l'an dernier mais par une population plus restreinte (1 section de DEUG, 1 classe de Math. Sup. C).

Ensuite ce prétest prend place dans une démarche à plus long terme d'étude de l'acquisition des connaissances en analyse (réelle), et particulièrement d'investigation des rapports enseignement-apprentissage. Notre objectif était de déterminer certains profils d'étudiants (grâce aux résultats au prétest) et de comparer ensuite, "à prérequis égal" si on peut dire, les effets d'enseignements différents sur les procédures utilisées dans divers exercices d'analyse proposés au cours de l'année, ceci pour nous faire une idée sur certaines de nos hypothèses⁽²⁾ pouvant déboucher sur des améliorations de l'enseignement.

Dans cet article, nous allons donner les résultats que nous avons obtenus sur le prétest. Nous présentons d'abord le prétest, puis nous en donnons une analyse des réponses question par question (qualitative et quantitative) pour terminer par un certain nombre de constats globaux.

(1) Etudiants inscrits à l'Université en DEUG scientifique SSM, étudiants en classes préparatoires aux grandes écoles (math. sup. et math. sup. C (ou agro)) - 2 sections de DEUG, 4 math. sup., 2 math. sup. C.

(2) cf. Robert [4], [5]

I - LE PRETEST ET LES CONDITIONS DE PASSATION.

Voici le texte des dix questions composant le prétest, proposé en principe dès la première séance de cours aux étudiants, à faire en une heure environ, avec les nous (à cause du suivi prévu) mais pas nécessairement noté. Notons qu'il n'est pas tout à fait équivalent de travailler dans une classe de 40 élèves, sous l'oeil vigilant du professeur, et de composer en amphi à 180.⁽¹⁾ Nous ne pouvons cependant pas tenir compte de ces influences; cela ne ferait qu'accentuer légèrement l'écart entre les populations selon toutes vraies- blances.

Dans certains groupes la question 8) a été posée comme ci-dessous, une rectification ayant été oubliée. Ce texte pouvait prêter à confusion sur la nature de j; de fait, ce qui change en DEUG⁽²⁾ c'est la proportion des non-abordés par rapport au total des étudiants (plus de non abordés dans la version "officielle", un peu plus de procédures erronées dans l'autre); par contre en Sup.⁽²⁾ cela ne produit aucun changement. Globalement nous n'avons pas tenu compte de cette légère fluctuation.

Nous allons maintenant détailler les exercices proposés dans ce texte.

(1) ce qui est le cas pour les 2 sections de DEUG.

(2) dans la section (resp. la classe) concernée.

1. Représenter dans le plan

$A = \{(x,y) ; x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R} ; |x-1| < 1\}$.

2. Soient deux réels a et b vérifiant

$-1 < a < 4, \quad -3 < b < -1 ;$

donner un encadrement de $(a-b)$ et de $\frac{a}{b}$.

3. Soit a un nombre réel ; les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

i) $a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

ii) $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

iii) $a = 3 \Leftrightarrow a^2 = 9$

iv) $a \neq 3 \Rightarrow a^2 \neq 9$

Même question avec les assertions suivantes :

i) $\sqrt{4} = \pm 2$

ii) $\sqrt{4} = 2$

iii) $\sqrt{4} = -2$

iv) $\sqrt{4} = |2|$

v) $\sqrt{4} = |-2|$

4. On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$ (où n entier strictement positif). Cet ensemble est-il minoré ? majoré ? Justifier.

5. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ sur $]1,2[$

et $f(x) = |x|$, sinon. Cette application est-elle croissante ? Résoudre $f(x) = 1$.

6. Définir les nombres rationnels ; citer deux nombres irrationnels.

7. Soit (P) la proposition suivante : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n$;

Ecrire sa négation. Laquelle des deux propositions (P), non (P) est vraie ?

8. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes :

a) $\forall j (j \in \{1,2,3\}), \exists a (a \in \mathbb{R}), f_j(a) = 1$.

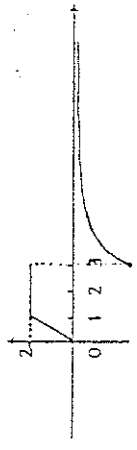
b) $\exists j (j \in \{1,2,3\}), \forall a (a \in \mathbb{R}), f_j(a) = 1$.

c) $\exists a (a \in \mathbb{R}), \forall j (j \in \{1,2,3\}), f_j(a) = 1$.

9. Ecrire à l'aide de quantificateurs ($\forall, \exists$) la phrase suivante, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels :

"Tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contient un élément de la suite".

10. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est le suivant :



En quels points f est-elle continue ? f est-elle dérivable ?

Quelle est l'allure du graphe de la fonction dérivée ?

Les questions avaient été choisies initialement pour repérer si certains "savoir-faire" supposés acquis (ou en voie de l'être) en fin de terminale (C et D), le sont effectivement et, le cas échéant, si certaines hiérarchies entre les acquisitions peuvent être décelées. Rappelons que nous n'avons fait porter nos investigations que sur l'analyse.

Les connaissances testées sont les suivantes (1) :

a) Propriétés élémentaires des réels et utilisation de symboles simples ($\sqrt{\cdot}, | \cdot |$)

(application de règles numériques)

* Mise en fonctionnement des inégalités (ajouter un même nombre aux 2 membres, les multiplier par un même nombre) par le biais d'une résolution d'inégalités (1)) et de l'encadrement d'une différence et d'un quotient connaissant un encadrement des deux réels initiaux (2)).

* Manipulation de $\{ \cdot \}$ (avec son interprétation) (1), 5), 3)).

* Connaissance de la définition des racines carrées (avec ou sans la notation $\sqrt{\cdot}$) (3)).

b) Connaissance d'une définition des rationnels et d'exemples d'irrationnels (6))

c) Propriétés élémentaires des fonctions numériques réelles (applications de définitions, traductions graphiques).

* Connaissance de la notion de fonction croissante (5)).

* Reconnaissance graphique des notions de continuité et dérivabilité (passage du cadre graphique au cadre numérique). (10)).

d) L'ordre sur $\mathbb{R}$

* Savoir exhiber un minorant et un majorant pour un ensemble borné très simple de nombres réels. (4)).

e) Utilisation explicite de langage symbolique élaboré (2) [langage propositionnel et quantificateurs]

* Compréhension de " $\Rightarrow$ " et " $\Leftrightarrow$ " (3)).

* Interprétation d'une phrase en langage symbolique (compréhension) (7)).

* Mise en langage symbolique d'une phrase en langage naturel (formalisation) (9))

(1) sans qu'il y ait toujours bijection entre un exercice et une (seule) connaissance citée.

(2) ces connaissances ne sont pas (ou plus) toutes explicitement au programme de terminale

f) Utilisation de représentations graphiques

- * Dessin d'un ensemble de $\mathbb{R}^2$ [passage du cadre numérique au cadre graphique] (1).
- * Traduction graphique de propriétés de fonctions énoncées en langage symbolique [passage du cadre symbolique au cadre graphique] (8).
- * Représentation graphique (non demandée mais utile) d'une fonction quasi-élémentaire [passage du cadre numérique au cadre graphique] (5).
- * Représentation graphique de la dérivée d'une fonction connue par son graphe (propriétés qualitatives des graphes) (10).

Quelques remarques

Un certain nombre des connaissances citées ne sont pas "algorithmisables" en ce sens qu'il n'existe pas une suite de calculs régis par des règles menant déductivement au résultat : il en est ainsi de toute propriété faisant intervenir plusieurs cadres, des propriétés qualitatives, des propriétés liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ (autres que la mise en fonctionnement des inégalités) et généralement des propriétés hors cadre numérique. Même si certains algorithmes peuvent s'avérer très difficiles (encadrement d'un quotient par exemple) et certaines représentations graphiques (par exemple) très faciles, on peut s'attendre à ce que ce soit les connaissances non associées à des mises en algorithmes qui soient les moins assurées (cf. articles précédents), en particulier des types e) et f); soulignons à ce sujet que les nouveaux programmes devraient renforcer cette tendance en ce qui concerne le langage symbolique élaboré mais favoriser au contraire l'utilisation des graphiques.

Nous allons voir effectivement que si les connaissances de type e) ne sont pas des acquis à la sortie des terminales (ce qui est normal vu les programmes), il en est de même de la mise en fonctionnement des inégalités sur $\mathbb{R}$.

II - ANALYSE QUALITATIVE (1) DES REPONSES QUESTION PAR QUESTION [2 sections DEUG -

6 math. sup.]

1. La première question

Deux types de difficultés sont rencontrés : la résolution en x de l'inéquation $|x-1| < \frac{1}{2}$ et la représentation graphique de l'ensemble des couples (x,y) tels que $|x-1| < \frac{1}{2}$. Dans les erreurs portant sur la résolution de l'inéquation donnée, on trouve surtout des erreurs de calcul, du type $-\frac{1}{2} + 1 = +\frac{3}{2}$ par exemple, et quelquefois une erreur sur la valeur absolue à savoir $|x-1| = -x-1$. Plus de la moitié des étudiants, qu'ils soient en DEUG ou en classe préparatoire, ont résolu correctement et explicitement l'inéquation. Par contre les dessins, corrects pour au moins 2/3 des étudiants de classe préparatoire (si ce n'est plus de 90 % dans certaines classes), s'avèrent faux pour de nombreux élèves de DEUG (au moins 50 %) qui, au lieu de représenter l'ensemble des couples (x,y) introduisent, le plus souvent subrepticement, une fonction, par exemple $y = |x-1|$, et représentent alors l'ensemble des (x,y) (par exemple), tels que $y = |x-1|$ et $|x-1| < \frac{1}{2}$. Signalons que cette question avait été proposée en 1983-84 à une population de DEUG analogue à une partie de notre actuelle population de DEUG. Malgré les changements de programme, il n'y a pas d'amélioration des résultats mais une partie des étudiants, ayant redoublé au moins une fois, n'ont pas complètement eu le nouveau cursus; les autres semblent conditionnés aux seules représentations graphiques de fonctions.

2. La deuxième question

- a) La procédure erronée la plus fréquente consiste évidemment à retrancher membre à membre les deux inégalités pour obtenir l'encadrement de $(a-b)$, ce qui donne $2 < a-b < 5$ (procédure dite grossière ou P.G). Quelques procédures erronées différentes sont rencontrées, qui participent fondamentalement de cette même erreur, semble-t-il; ainsi trouve-t-on $-4 < a-b < 5$ par exemple, ou bien $-4 < a-b < 3$, et on reconnaît là une addition (partielle éventuellement) membre à membre. Si l'encadrement correct est donné par au moins deux tiers des étudiants de classe préparatoire (de 59 % à 89 % selon les classes), le taux chute à la moitié en DEUG (de 48 % à 54 % selon les amphis), les procédures grossières s'avérant le fait de un

(1) Si des résultats quantitatifs sont donnés, par exemple des pourcentages de réponses correctes, ils sont calculés sur le total des étudiants concernés ayant abordé la question, sauf précision explicite du contraire.

tiers de ces derniers environ. Précisons : les procédures grossières sont très largement le fait des étudiants ayant obtenu le bac D; ainsi dans une des sections de DEUG, 75 % des auteurs non redoublants de cette procédure viennent de D, alors que les D ne représentent que 41 % de non-redoublants. L'année dernière on avait posé la question suivante :

Si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$, est-ce que $x_1 - x_2 \leq y_1 - y_2$?

Les pourcentages de réussite en DEUG dépassaient 80 %, ce qui prouve bien que c'est en fonctionnement et pas au niveau de la récitation de la règle qu'il y a un problème.

- b) On a comparé, pour une section de DEUG, les traitements additif et multiplicatif des inégalités, en répertoriant les procédures de chaque étudiant au premier exercice et à l'encadrement de (a-b) :
- (les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne) :

encadrement de l'exercice (a-b)	$0 < a-b < 7$	Faux	Total
$1 < x \leq \frac{3}{2}$ (explicite)	54	37	101
Faux	9	12	21
Total	73	49	122

On constate une différence significative : ceux qui n'ont pas réussi à établir que $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ont moins d'une chance sur deux d'aboutir à l'encadrement de (a-b) (traitement multiplicatif) alors que les autres réussissent à 64 %. Il y a là vraisemblablement une hiérarchie entre les deux traitements d'inégalités, l'acquisition du traitement additif étant antérieur à l'autre.

- c) L'encadrement de $\frac{a}{b}$ s'est avéré très difficile, aucun étudiant (ou presque !) d'ailleurs ne s'est apparemment inquiété de son résultat en essayant de voir s'il était compatible avec les valeurs trouvées pour $\frac{a}{b}$ en donnant à a et b les valeurs limites... Mis à part la procédure grossière consistant à diviser membre à membre les inégalités ($\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < -4$) et, pour certains seulement, à changer ensuite le sens des inégalités vu l'absurdité obtenue, on a trouvé une procédure où, partant de l'inégalité correcte $-1 < \frac{1}{b} < -\frac{1}{3}$, on multiplie (explicitement ou non) par a en oubliant (peut-être) que a peut être négatif; on obtient $-4 < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$, ou bien $-\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < 1$ selon les

copies (1). Des mélanges de division des bornes et de changement de sens d'inégalités (justifiés ou non), permettent aussi d'expliquer des résultats moins fréquents comme $\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$, ou $-1 < \frac{a}{b} < \frac{4}{3}$ ou $-4 < \frac{a}{b} < 3$ etc... bien que ce dernier résultat soit d'une certaine façon correcte, nous ne l'avons pas comptabilisé dans les réponses justes, vu l'environnement. Visiblement seuls des algorithmes partiels de manipulation des inégalités fonctionnent, plus ou moins bien, et avec dérapage éventuel en cours de résolution - même si une première fois on a correctement appliqué la règle (cf. complexité). De plus, la plupart du temps le résultat correct est donné sans démonstration, donc on ne peut pas savoir la procédure suivie. Le résultat pratique de ces manipulations sans aucun contrôle du sens c'est que le meilleur score obtenu en classe préparatoire est de 27 % de réussites (sur les abordés) - avec seulement 7 % dans le moins bon cas en DEUG. On peut se demander si une telle complexité peut être gérée sans recours au sens (cf. bornes, ou raisonnements directs).

3. La troisième question

Elle est tirée d'un test proposé par M. Galbraith (2), avec une rédaction différente. Outre la connaissance des symboles $\sqrt{\quad}$ et $||$, la résolution correcte nécessite une bonne compréhension du signe $\Rightarrow$ et nous voulions évaluer les disfonctionnements de ce dernier signe en comparant les réponses aux deux parties de la question.

- a) Dans le premier groupe de "vrai ou faux", c'est essentiellement le dernier point qui est mal résolu; il est difficile cependant de déterminer s'il s'agit d'une étourderie ou d'une erreur profonde (logique) d'autant plus que les réponses ne sont pas toujours justifiées (3). Signalons que c'est le deuxième point qui est le plus mal résolu après le iv), avec la même difficulté d'interprétation. Le pourcentage de réponses correctes au premier groupe varie de 69 % à 82 % en Sup., 53 à 69 % en Agro, et il est de 56 % dans la section de DEUG où le détail des réponses a été fourni.

- (1) par exemple on peut avoir $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} < -\frac{1}{b} < 1 \\ -4 < -a < 1 \end{array} \right. \Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < 1$

- (2) cf. E.S.M. Vol.

- (3) Quelques étudiants nous ont expliqué qu'ils avaient pensé que "P $\Rightarrow$ Q" entraîne "non P $\Rightarrow$ non Q" pour le iv). Peut-être certains ont-ils appliqué "P $\Rightarrow$ Q" $\Rightarrow$ "Q $\Rightarrow$ P" ?

b) Dans le deuxième groupe de "vrai ou faux", il faut signaler deux positions erronées très différentes. Certains considèrent le i) juste et toutes leurs autres réponses en découlent de manière cohérente. Il y a d'ailleurs des commentaires chez certains sur une telle égalité qui leur pose un problème d'interprétation. Est-ce que cela veut dire 2 ou -2 ? Le "ou" est-il exclusif? D'autres étudiants ont pu confondre la réponse $\sqrt{x^2} = \pm x$ avec le cas présent. D'autres, enfin, admettent que i) est vrai mais aussi iv) et v) ce qui n'est pas cohérent en apparence.

c) Ont répondu juste à la fois aux deux groupes de "vrai ou faux" de 43 % à 71 % d'étudiants de classe préparatoire et de 34 % à 43 % d'étudiants de DEUG : il n'y a pas de discontinuité entre les fourchettes !

4. La quatrième question

Malgré notre demande explicite de justification, les réponses ont été plus ou moins éloquentes. Nous avons considéré comme juste une réponse du type $1 < 1 + \frac{1}{n} < 2$, ou "l'ensemble est minoré par 1 et majoré par 2" et comme non exacte une réponse du type "l'ensemble est minoré et majoré". Cependant il reste dans ces réponses une part d'ambiguïté. En particulier parmi les procédures plus explicites de justification, il y en a une, assez fréquente, qui consiste à dire que, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, l'ensemble est minoré par 1, sans qu'il soit fait référence à la décroissance de la suite. Dans certaines copies par contre les deux arguments sont utilisés et il n'y a plus de doute. Ce qui est plus troublant c'est que dans d'autres copies l'argument $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ est utilisé pour conclure que la suite et donc l'ensemble sont majorés par 1. En somme tout peut se passer comme si

pour les uns l'existence de la limite s'accompagnait d'une décroissance "automatique" (ou provoquée par la demande) et pour les autres d'une croissance "automatique" (1). Vraisemblablement les étudiants se partagent en plusieurs groupes et pour les uns le modèle monotone a fonctionné, pas pour les autres. Dans le doute nous avons attribué à tous la réponse correcte, ce qui majore peut-être le résultat global (entre 73 % et 100 % de réponses correctes avec plus de 88 % en classe préparatoire).

En ce qui concerne la majoration, la procédure erronée la plus fréquente consiste à dire que pour n tendant vers 0 $1 + \frac{1}{n}$ tend vers l'infini ($P \infty$) et donc que l'ensemble n'est pas majoré. Il en résulte entre 69 % et 82 % de réponses correctes en classe préparatoire et autour de 54 % en DEUG.

(1) Il faudrait inverser l'ordre des deux questions dans la moitié des copies pour en avoir le cœur net !

L'année dernière les pourcentages correspondants étaient de 70 % et 65 % pour minoré et majoré, la procédure $P \infty$ semble donc avoir fait des progrès en DEUG.

5. La cinquième question

Elle est bien résolue, comme l'année dernière d'ailleurs, par au moins 70 % des étudiants en ce qui concerne la non croissance et 82 % des étudiants en ce qui concerne la résolution de $f(x) = 1$. Quelques remarques :

a) Souvent les étudiants ne répondent pas "l'application n'est pas croissante" mais détaillent, sans commentaire, son sens de variation sur $\mathbb{R}$. Nous avons estimé ces réponses justes. Par contre, certains déclarent que f n'est pas croissante parce qu'elle est constante sur $]1,2[$ - nous ne l'avons pas retenu comme réponse juste. D'autres exhibent correctement deux valeurs x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$.

Enfin la seule autre procédure erronée consiste à dire que l'application décroît sur $[-\infty, 1]$. Il y a toujours aussi peu de dessins que l'année dernière.

b) La plupart du temps les deux solutions sont données sans vérification de ce que x n'appartient pas à $]1,2[$. Signalons enfin que même s'il y a un dessin, cas très rare, il n'est pas nécessairement utilisé pour résoudre $f(x) = 1$!

6. La sixième question

Là encore certaines définitions des rationnels données par les étudiants sont ambiguës.

Par exemple on trouve des réponses du type "les rationnels sont les nombres qui s'écrivent sous forme de fractions"; mais dans une autre copie figure un exemple de fraction $\frac{a}{b}$, avec la précision $a, b \in \mathbb{N}$... Un certain nombre de définitions sont très confuses ou pas assez précises (par exemple on fait allusion à un développement décimal périodique sans qu'il soit précisé que c'est à partir d'un certain rang seulement). Quelquefois il est oublié les rationnels négatifs (un rationnel est un quotient de deux entiers) ou la condition du dénominateur non nul. En ce qui concerne les exemples d'irrationnels, les erreurs portent sur des rationnels comme 0,333... , et des nombres complexes (i par exemple). Au moins un étudiant sur deux est capable de donner deux irrationnels réels.

Notons que ces chiffres sont proches de ceux de l'an dernier pour cette question.

7. La septième question

Là encore les pourcentages de réussite entre cette année et l'an dernier ont peu évolué. Aussi dans une section de DEUG il y a eu 31 % de réponses justes pour la négation cette année et en 83-84, 64 % en 83-84 et 58 % cette année pour savoir laquelle des deux propositions est vraie.

On retrouve une grande variété de techniques de négation, depuis l'utilisation du "A" ou du " $\forall n \notin \mathbb{N}$ " jusqu'à la négation correcte [mais l'inégalité devant être stricte peut rester large], en passant par le recopiage des deux premiers termes et la négation du dernier ou réciproquement ...

Peu d'étudiants pensent que les deux propositions sont vraies ou fausses, un certain nombre considère que la deuxième est vraie même si elle n'est pas écrite correctement et la majorité des erreurs consiste à penser que c'est (P) qui est vrai [P.V.]. Les justifications, encore une fois, ne figurent pas toujours, ce qui empêche une exploitation très poussée.

Ces sont les seules questions où les étudiants de classe préparatoire et de DEUG se valent.

8. La huitième question

Elle est relativement peu abordée.

Signalons d'abord qu'un certain nombre d'étudiants décrivent les représentations graphiques demandées sans les dessiner effectivement.

Par ailleurs, les dessins peuvent présenter des ambiguïtés. Ainsi en b) le dessin de la droite $y = 1$ avec une annotation (fj) au-dessus est-il correct ou veut-il dire que f_1, f_2 et f_3 ont cette courbe représentative ? Nous avons toujours opté pour l'interprétation à l'avantage des étudiants dans les cas douteux.

Cela étant, on trouve toujours la non prise en compte de l'ordre des quantificateurs dans une proposition avec entre 25 % et 55 % de réussite en a) en classe préparatoire et entre 11 % et 43 % en DEUG; les questions b) et c) sont mieux traitées (entre 76 % et 95 % de réussite en préparatoire, autour de 68 % en DEUG pour b, entre 56 % et 84 % de réussite en prépa., entre 40 % et 71 % en DEUG pour la question c). Relativement la question a) est mieux traitée que l'an dernier et les questions b) et c) moins bien.

9. La neuvième question

On retrouve les trois types de formulation - usuel ($\exists n, u_n \in I$)
- intermédiaire ($\exists u_n, u_n \in I$)
- primitif ($\exists x, x \in (u), x \in I$)

Il y a quelques confusions " n, u_n " et un certain nombre de copies où l'on a pu attribuer un type de formulation mais où la traduction globale est complètement fautive. Par exemple " $\forall n, u_n \in [ab]$ " ou " $\forall u_n, \exists I, u_n \in I$ " ...

Le pourcentage⁽¹⁾ de formulations usuelles varie de 38 % à 58 % en classe préparatoire, 38 % à 41 % en agro, de 44 % à 58 % en sup.) et de 12 % à 27 % en DEUG. Il y a là une discontinuité dans les fourchettes qui marque une réelle différence entre les publics.

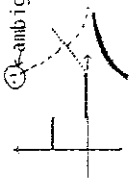
En ce qui concerne les formulations intermédiaires les pourcentages varient de 13 % à 38 %, avec autour de 25 % en DEUG; enfin les formulations primitives sont le fait de 17 % environ des étudiants de tous les groupes sauf d'une des sections de DEUG (28 %).

10. La dixième question

Quelquefois moins abordée (parce que placée en dernier), la question de la continuité de f est cependant réussie (par plus de deux tiers des étudiants).

Par contre, il y a de grandes disparités dans les réponses sur la dérivabilité, le plus souvent les étudiants oublient la non dérivabilité au point 1 et, de temps en temps, écrivent (à tort) que f est non dérivable au point 2. On a encore trouvé un certain nombre de fois (essentiellement en DEUG) que f est dérivable là où elle est continue. Les réponses correctes s'échelonnent de 31 % à 59 % en sup. et de 23 % à 38 % en DEUG. Enfin le graphe de f est en général encore un tout petit peu moins bien réussi que la question précédente. Les erreurs concernent le dessin pour $x > 3$ où on a trouvé

les variantes
(dessinées en traits
plein, pointillé,
normal ...)



etc ... (de 35 % à 62 % de réussites en Sup. et de 19 % à 26 % en DEUG)

(1) Pour cette question les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants concernés.

III - LES RESULTATS - QUELQUES COMPARAISONS SUIVANT L'ENSEIGNEMENT SUIVI.

a) Voici le tableau résumant les résultats obtenus par les étudiants des six classes préparatoires (4 Math.Sup. et 2 Math. Sup. C [ou Agro], d'un amphi de DEUG en 83-84 (pour les questions où c'est possible) et de 2 sections de DEUG de 84-85, (Paris 6, Paris 7).

Nous y joignons un 2ème tableau donnant le détail par groupes puis par série de bac d'une des 2 sections de DEUG, pour montrer l'hétérogénéité des groupes et insister par là-même sur le fait que 25 n'est pas un "grand nombre" pour notre échantillon et notre problème.

[illegible]

23. POURCENTAGES COMPTÉS SUR LE TOTAL DES ÉTUDIANTS AVANT AJOUT DE LA QUESTION

ÉTÉRIENTIELS	POURCENTAGES DE RÉPONSES JUSTES	POURCENTAGES D'ERREUR	POURCENTAGES AU TOTAL
1	100	0	100
2	100	0	100
3	100	0	100
4	100	0	100
5	100	0	100
6	100	0	100
7	100	0	100
8	100	0	100
9	100	0	100
10	100	0	100
11	100	0	100
12	100	0	100
13	100	0	100
14	100	0	100
15	100	0	100
16	100	0	100
17	100	0	100
18	100	0	100
19	100	0	100
20	100	0	100
21	100	0	100
22	100	0	100
23	100	0	100
24	100	0	100
25	100	0	100
26	100	0	100
27	100	0	100
28	100	0	100
29	100	0	100
30	100	0	100
31	100	0	100
32	100	0	100
33	100	0	100
34	100	0	100
35	100	0	100
36	100	0	100
37	100	0	100
38	100	0	100
39	100	0	100
40	100	0	100
41	100	0	100
42	100	0	100
43	100	0	100
44	100	0	100
45	100	0	100
46	100	0	100
47	100	0	100
48	100	0	100
49	100	0	100
50	100	0	100
51	100	0	100
52	100	0	100
53	100	0	100
54	100	0	100
55	100	0	100
56	100	0	100
57	100	0	100
58	100	0	100
59	100	0	100
60	100	0	100
61	100	0	100
62	100	0	100
63	100	0	100
64	100	0	100
65	100	0	100
66	100	0	100
67	100	0	100
68	100	0	100
69	100	0	100
70	100	0	100
71	100	0	100
72	100	0	100
73	100	0	100
74	100	0	100
75	100	0	100
76	100	0	100
77	100	0	100
78	100	0	100
79	100	0	100
80	100	0	100
81	100	0	100
82	100	0	100
83	100	0	100
84	100	0	100
85	100	0	100
86	100	0	100
87	100	0	100
88	100	0	100
89	100	0	100
90	100	0	100
91	100	0	100
92	100	0	100
93	100	0	100
94	100	0	100
95	100	0	100
96	100	0	100
97	100	0	100
98	100	0	100
99	100	0	100
100	100	0	100

(ou chloride
grau)

TABLEAU II

[illegible]

LES POURCENTAGES SONT CALCULÉS SUR LE TOTAL DES ÉTUDIANTS AVANT ABORDÉ LA QUESTION

ETAPES ET POURCENTAGES DE RÉPONSES (JUSTES) AU PRÉTEST

PAA GROUPES DANS UNE DES SECTIONS

ALL PATIENTS

DE DEVC

b) Commentaires

Les moyennes obtenues dans chaque classe ou groupe sont globalement, les suivantes :

Math. Sup	14; 13,7; 12,7; 12,5
Math. Sup C	11,7; 12,7
DEUG P.6	8,6; 11,1; 11; 11,2; 9,9; 10; moyenne générale : 10,3
DEUG P.7	8,5

Il est bien connu que ce ne sont pas les mêmes étudiants qui s'orientent vers les classes préparatoires ou l'Université, et d'ailleurs les étudiants de DEUG P.6 ont de "meilleurs" baccalauréats (uniquement séries C ou D) que ceux de P.7 (un tiers de séries F,G).

Ceci dit, plus que sur ces différences globales (bien connues) il est intéressant de se pencher sur des comparaisons entre classes comparables, ce que nous allons faire maintenant.

c) Les quatre math. Sup.

Les résultats sont comparables; cependant, la "fourchette" des réponses justes est d'une amplitude variant de 4 % à 34 %, ce qui nous amène à nuancer la lecture. En fait, il y a seulement trois questions où les pourcentages de réponses justes diffèrent de plus de 25 %, l'encadrement de (a-b) en 2) l'appréciation de la proposition (P) en 7) (vraie ou fausse) et la représentation graphique des trois fonctions qui coupent la droite $y = 1$ en 8).

On peut remarquer qu'il y a un rapport entre ces deux dernières, puisque ce qui compte dans les deux cas c'est de tenir compte de l'ordre des quantificateurs. Or on retrouve entre les classes le fait que les deux questions sont ou plutôt réussies ou plutôt ratées simultanément, ce qui est cohérent.

Il y a sept questions où les pourcentages de réponses justes diffèrent de 15 % au plus : la continuité de f en 10), la représentation graphique des trois fonctions qui se coupent en (a,1) et de celle qui vaut 1 (8)), les minorations et majorations de $(1 + \frac{1}{n})^4$ (4)) l'encadrement de $\frac{a}{b}$ (2)), la question 3), la résolution de $f = 1$ (5), la formulation usuelle (9) - ce sont des questions toutes bien réussies sauf l'encadrement de a/b , ce qui renforce le caractère acquis des propriétés correspondantes. Les autres pourcentages de réponses diffèrent de 19 à 21 %.

On peut se demander si on a là des effets d'enseignement antérieur, ou d'autres effets. Dans l'état actuel de notre travail, nous ne pouvons rien conclure de plus.

d) Math. Sup et Agro

Quelles sont les questions où se marquent les différences ?

D'abord le 3) - là les Agro ont des pourcentages de réussite globale plus proches de ceux des DEUG que de ceux des Math. Sup. Cependant ce n'est pas spécifiquement le deuxième groupe qui est plus réussi (absence de la difficulté des " $\Rightarrow$ " ou " $\Leftrightarrow$ "). Ceci dit les pourcentages de réussite de chaque groupe, séparément se rapprochent de ceux des Math. Sup., comme chez les DEUG d'ailleurs ! Il se fait donc que les connaissances mobilisées ($|$, $|$, $\sqrt{\quad}$, $+$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) sont trop fragiles pour qu'il n'y ait pas de déraillement, sans qu'on puisse discriminer entre les difficultés.

Deuxième question moins bien réussie par les Agro : les irrationnels ; là encore les pourcentages d'étudiants ayant cité deux irrationnels sont plus proches de ceux qu'on a rencontré en DEUG que de ceux qu'on a trouvé en Sup. Notons un peu moins de formulations usuelles, plus d'intermédiaires, sans décalages décisifs. Dernière différence notable : dérivabilité de la fonction : là encore on trouve les Agro semblables à certains DEUG et moins bons que les Sup. La même question se pose que précédemment : a-t-on là des effets d'enseignement ou d'autres effets ? Nous allons voir qu'on peut penser au moins partiellement à des effets de l'enseignement précédent et en particulier aux différences suivant les filières C ou D.

e) Les différences entre bac C et bac D

Nous avons cherché ces différences sur les étudiants d'une section de DEUG non redoublants : ils sont 133, dont 78 C (soit 59 %).

Un certain nombre de discriminations sont apparues. D'abord globalement la moyenne des C est de 11,6, celle des D de 7,7...

Où sont donc les différences ?

La première question est instructive à ce sujet. En effet si les C et les D réussissent dans les mêmes proportions en ce qui concerne l'obtention de $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, par contre il y a relativement beaucoup plus de D qui ne savent pas représenter graphiquement les couples (x, y) tels que $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$; ainsi, sur ceux qui ont réussi, parmi les non redoublants 77 % viennent de C (contre 59 % globalement !), alors que sur ceux qui obtiennent l'inégalité, 57 % viennent de C.

(1)

Autre différence notable : l'utilisation de la procédure "grossière" pour encadrer (a-b) : sur les 48 non redoublants concernés, 36 viennent de D et donc 25 % seulement de C... Faut-il y voir le résultat d'un enseignement en D

(1) déjà signalée

plus tourné vers l'acquisition d'automatismes simples ? Les différences dans le 3) sont moins accentuées, mais renforcent le constat de la supériorité des C en ce qui concerne le maintien des $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, "ou" : parmi les non redoublants, 69 % de ceux qui ont réussi le 3) viennent de C.

Nous nous sommes demandés si l'erreur " $n \rightarrow 0$ " dans le 4) serait discriminante : il n'en est par contre rien.

Beaucoup plus de dessins chez les C en 5) (parmi les très peu nombreux dessins) et de nouveau en 8) a) les C sont bien meilleurs : parmi les 23 ayant répondu correctement (avec un dessin) 18 C (78 %) ... Donc il y a supériorité nette des C dès qu'il y a graphique ou symbolisme, plus généralement donc "jeu de cadres" potentiel. N'y a-t-il pas là de quoi expliquer l'effet de ces prérequis sur l'acquisition ultérieure des connaissances ? Nous avons cherché si ces différences se confirmaient entre bac C/bac D d'une math. Sup. C (44 élèves dont 26 de C soit 59 %).

La première question montre que si les C et les D réussissent là aussi dans les mêmes proportions en ce qui concerne $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, beaucoup plus de D que de C ne savent pas faire le dessin, puisque, sur ceux qui ont réussi, 73 % viennent de C.

L'utilisation de la procédure grossière est caractéristique des D, là encore : (mais on en a une explication plus haut) 25 % seulement de ceux qui l'utilisent viennent de C ! Par contre, dans les questions 3), 8) a) et 4) rien de significatif... ce qui voudrait dire que les D qui passent en Sup. sont meilleurs par rapport à l'utilisation du symbolisme que ceux qui passent en DEUG, tout en gardant un "handicap" quant au cadre graphique... Toutefois sur les types de formulations, on constate des différences dans les différences : en DEUG plus de formulations usuelles chez les étudiants issus de C et moins de formulations fantaisistes ; en sup C par contre plus de formulations intermédiaires chez les étudiants issus de C...

Il faut reprendre cette étude sur des effectifs plus importants pour conclure.

CONCLUSION

Que peut-on donc dire, d'après notre prétest, des acquis en analyse à la première rentrée scolaire après le baccalauréat des étudiants s'étant dirigés vers des filières scientifiques ? Résumons d'abord ce qu'ils ne savent pas encore faire, du moins dans leur grande majorité : encadrer $\frac{a}{b}$ connaissant un encadrement de a et de b ; interpréter (et a fortiori nier) une proposition non simple en langage symbolique (dans le registre du calcul des prédicats).

Nous retrouvons les difficultés de mise en fonctionnement des inégalités sur $\mathbb{R}$ (en particulier pour le traitement multiplicatif) et celles de compréhension et manipulation du langage symbolique; ces dernières sont évidemment liées à un enseignement de moins en moins poussé de la formulation correspondante.

Ensuite nous pouvons rappeler ce qu'ils savent tous (ou au moins plus de 3/4 d'entre eux) faire : traiter additivement les inégalités sur $\mathbb{R}$, faire fonctionner les notions de minorant (d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) et de (dé)croissance des fonctions numériques, résoudre des équations très simples, interpréter la continuité sur un graphique, interpréter des propositions simples du langage symbolique. Autrement dit on peut "garantir" la connaissance d'un certain nombre de propriétés élémentaires des réels (y compris concernant l'ordre) et presque toutes les propriétés élémentaires des fonctions numériques réelles (dérivabilité non comprise) parmi les propriétés testées; par contre les acquis en ce qui concerne graphiques et langage symbolique sont limités.

Enfin les étudiants de math. sup., et dans une moindre mesure tous les élèves ayant passé le bac C, se distinguent par de meilleurs résultats (mais dans certaines limites, cf. ci-dessus) en ce qui concerne la mise en fonctionnement des inégalités (encadrement de $(a-b)$) et le langage symbolique (moins d'erreurs du style "comme $\lim_{n \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{n}) = +\infty \{1 + \frac{1}{n}\}$ non majoré; meilleurs résultats pour l'interprétation de la phrase donnée en langage symbolique 7), plus de formulations usuelles etc...); mais c'est dans la production de graphiques (cf. 1) et 10) c) que les différences sont le plus accentuées à l'avantage de ces étudiants.

En somme, il y a des acquis pour tous les étudiants (avec une petite supériorité pour les Math. Sup. ou les C) dans le cadre numérique; il y en a peu dans le cadre symbolique; et ce qui différencie le plus les étudiants concerne les acquis dans le cadre graphique (nettement moindres en DEUG et chez les étudiants issus de D en général).

Il reste à déterminer dans quelle mesure ces différences peuvent être attribuées à l'enseignement (et pas seulement aux élèves) et si en conséquence on pourrait améliorer pour ces élèves les rapports enseignement/apprentissage.

Bibliographie

- F. Boschet [1] Cours sur les suites numériques dans les cours de l'enseignement supérieur, thèse de 3^{ème} cycle, Université de PARIS VII (1982).
 R. Douady [1] Cahier de didactique des Math. n°3 (Paris 1983).
 Galbraith [1] The mathematical vitality of secondary mathematics graduate and prospective teachers a comparative study. E.S.M. Vol.13 n°1.
 A. Robert [1] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, thèse d'état, Université PARIS VII, (1982).
 [2] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3, n°3 (1983).
 [3] L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG Bulletin de l'APM n° 340 (1983).
 [4] et Boschet. L'acquisition des débuts de l'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de DEUG 1^{ère} année. Cahier de didactique des math. N°7 - IREM Paris Sud (1984).
 [5] Rapports enseignement-apprentissage (débuts de l'analyse sur $\mathbb{R}$) Cahier de didactique des mathématiques n°18₁ - IREM Paris Sud (1985).
 J. Robinet [1] Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur thèse d'état, Université PARIS VII (1984).
 [2] Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction, Recherches en didactique des mathématiques Volume 4 n°3 (1984).