i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

ANALYSE NON STANDARD ET ENSEIGNEMENT

PAR M. ARTIGUE
V. GAUTHERON
E. ISAMBERT

cahier de didactique des mathématiques

numéro 15

"In the fall of 1960, it occurred to me that the concepts of contemporary mathematical logic are capable of providing a suitable framework for the development of the differential and integral calculus by means of infinitely small and infinitely large numbers".

A. Robinson (Non Standard Analysis)

L'analyse non standard nous libère d'une frustation : l'interdiction de manipuler ces objets malpropres que sont les infiniment petits, qui nous est imposée actuellement en mathématiques, dès notre plus jeune âge, (toute transgression de ce tabou pouvant entraîner des lésions irréversibles !). Et pourtant, il y a environ trois siècles, infiniment petits et infiniment grands furent intimement liés à la naissance du calcul différentiel et intégral et aujourd'hui même, les physiciens et autres utilisateurs des mathématiques n'hésitent guère à les employer (sous forme de quantités élémentaires, variations infimes...) dans la mise en équation de leurs problèmes.

Pourquoi cette évolution ? Pourquoi l'analyse non standard permet-elle de lever le tabou ? Et ne permet-elle que cela ? Pourquoi a t-il fallu attendre trois siècles pour que soit élaborée une théorisation satisfaisante du calcul infinitésimal ? C'est à ces questions que nous essayons d'apporter des éléments de réponse dans les trois premiers chapitres de cette brochure.

Dans le quatrième nous rendrons compte d'un enseignement d'analyse non standard qui a été organisé à Paris 7 en DEUG SSM (Sciences et Structures de la Matière) en 1983-1984.

Chapitre I : UN PEU D'HISTOIRE

A la fin du 17ème siècle, une théorie générale de la différentiation et de l'intégration se met en place, avec les travaux (indépendants et concurrents) de Newton et Leibnitz; les approches de ces deux mathématiciens sont sensiblement différentes :

Celle de Newton, à travers la notion de "derniers rapports", peut s'interpréter en terme de limites : "the ultimate ratios in which quantities vanish are not really the ratios of ultimate quantities, but the limits toward which the ratios of quantities, decreasing without limit, always approach ; and to they can never pass nor attain before the quantities are diminished indefinitely".

Celle de Leibnitz est basée sur les infiniment petits différentiels du premier ordre et d'ordres supérieurs et résulte de l'application à ces objets géométriques de règles découvertes antérieurement sur le calcul des différences et sommes successives de suites de nombres. Ces règles, alliées à la règle d'omission des infiniment petits relatifs ("toutes les fois que sont rapprochées dans une addition ou une soustraction, des grandeurs incomparables, les petites sont négligeables par rapport aux grandes" écrit Leibnitz dans "Histoire et Origine du calcul différentiel" [24]), permettent d'algébriser et d'algorithmiser le fonctionnement des différentielles.

Le statut de ces infiniment petits chez Leibnitz n'est pas toujours très clair. Il souligne la différence existant entre le calcul différentiel qu'il a introduit et les manipulations d'infiniment petits ou d'indivisibles utilisées par ses prédécesseurs : Fermat ou Cavalieri, par exemple. Il semble également qu'il tende à considérer les infiniments petits et grands comme des éléments idéaux, fictions utiles pour la recherche et le calcul, jouant un peu en analyse le rôle que jouent les imaginaires dans les résolutions d'équations algébriques.

Mais il ne se préoccupe pas de définir de manière complète, les règles d'emploi de ces nouveaux nombres. En vertu d'un principe de régularité général, il estime que les infiniment petits et grands doivent obéir aux mêmes règles et lois que les réels ordinaires. Ceci ne l'empêche pas d'ailleurs de définir des "grandeurs incomparables" comme des grandeurs telles que "l'une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne saurait excéder l'autre" ([25]), et ce en contradiction flagrante avec le principe d'Archimède qui affirme que : Etant donnés deux nombres strictement positifs, a et b, a étant inférieur à b, il existe toujours un multiple entier de a qui surpasse b.

Et ceux qui, à l'époque, essaieront de fonder plus solidement le nouveau calcul infinitésimal de Leibnitz, n'arriveront pas plus à surmonter la contradiction inhérente au principe de régularité. Ainsi de l'Hospital écrit en 1715 dans "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" ([19]).

"Définition 1 : On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; et au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent..."

"Définition 2 : La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la différence..." (lire différentielle) puis pose la règle suivante :

"I Demande ou supposition. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même... " qui correspond à la règle déjà citée d'omission des infiniment petits relatifs.

Ainsi donc, deux quantités peuvent être à la fois distinctes et confondues, chose troublante si l'on attribue à "confondu" le sens "d'égal".

Cette absence de fondations solides (et il faudra attendre plusieurs siècles pour que, les développements de la logique mathématique aidant, ou puisse élaborer des théories satisfaisantes !) fera du calcul infinitésimal, un calcul extrêmement pratique, algorithmisé, permettant de distinguer ce qui est négligeable de ce qui ne l'est pas, mais aussi un rien pifométrique : la reconnaissance du bien-fondé des manipulations y est le fruit d'un consensus tenant plus du droit coutumier que de la loi écrite.

Et, bien qu'il soit abondamment et fructueusement utilisé pendant tout le dix-huitième siècle, il sera l'objet de critiques virulentes.

Notons, cependant, que l'approche Newtonienne, à l'époque tout aussi contestable, ne sera pas épargnée non plus ! (voir par exemple les écrits de Berkeley ([5]). Ces critiques conduiront, dès la fin du dix-huitième siècle, divers mathématiciens à chercher des solutions de rechange :

par exemple, Lagrange avec les développements de Taylor des fonctions, d'Alembert avec les limites. Ce dernier écrit dans l'Encyclopédie Méthodique à l'article "Différentielle" : "Ainsi la métaphysique de l'infini et des quantités infiniment petites, plus grandes ou plus petitesles unes que les autres est totalement inutile en calcul différentiel. On se sert du terme infiniment petit pour abréger les expressions. Nous ne dirons donc pas avec bien des géomètres qu'une quantité est infiniment petite, non avant qu'elle s'évanouisse, non après qu'elle est évanouie, mais dans l'instant même où elle s'évanouit ; car que veut dire une définition si fausse, cent fois plus obscure que ce que l'on veut définir. Nous dirons qu'il n'y a point dans le calcul différentiel de quantités infiniment petites...". Pour lui, "la théorie des limites est à la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel". Mais il faut noter aussi que la notion de limite chez d'Alembert est encore imparfaite puisque selon lui :

"On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche".

En fait, il faut attendre Cauchy et son cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1821) ([9]) pour que les fondements de l'analyse tels que nous les connaissons tous en termes de limites soient clairement institués.

Mais il faut souligner que les infiniment petits ne sont pas bannis des textes de Cauchy que ce soit au niveau des définitions ou des démonstrations. Cauchy les définit :

"Lorsque les valeurs successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser en dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce que l'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite".

Il les utilise dans la définition de la continuité :

"Une fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même".

Mais en 1844, dans son "Mémoire sur l'Analyse Infinitésimale" ([10]), il les réduira à un rôle essentiellement heuristique :

"Pour écarter complètement l'idée que les formules employées dans le calcul différentiel sont des formules approximatives, et non des formules rigoureusement exactes ; il me paraît important de considérer les différentielles comme des quantités finies, en les distinguant soigneusement des accroissements infiniment petits des variables. La considération de ces derniers accroissements peut et doit être employée comme moyen de découverte dans la recherche des formules ou dans l'établissement des théorèmes. Mais alors le calculateur se sert d'infiniment petits comme d'intermédiaires qui doivent le conduire à la connaissance des relations qui subsistent entre les quantités finies et jamais, à mon avis, des quantités infiniment petites ne doivent être admises dans les équations finales où leur présence deviendrait sans objet et sans utilité."

Avec les successeurs de Cauchy, Bolzano, Weierstrass , en particulier, les techniques et concepts liés à l'utilisation des limites se développent, et les formalisations prennent la forme que nous leur connaissons aujourd'hui. Les infiniment petits, même s'ils restent des moyens commodes pour s'exprimer, tombent en désuétude. Robinson (cf ([35]) cite un certain nombre de textes parus de 1850 à 1960, cherchant à les définir ou justifier leur emploi, mais il est clair que, pour la communauté mathématique, ces objets constituent en quelque sorte des survivances archaïques, des outils de "physiciens"...

Une modification radicale intervient avec la publication en 1966 du livre de A. Robinson intitulé "Non Standard Analysis" qui deviendra la bible des Nonstandardistes. ([35])

Logicien mais aussi physicien théoricien, A. Robinson, entrevoit dès le début des années soixante, que les concepts et méthodes de la logique mathématique contemporaine peuvent fournir une base solide au développement du calcul différentiel et intégral au moyen d'infiniment petits et grands et donne une première conférence sur le sujet à l'Université de Princeton en Novembre 1960.

Dans son livre, après une construction logique basée sur une théorie des types (et dont le moins que l'on puisse dire est qu'elle n'est pas d'accès facile !) il développe dans un langage non-standard, non seulement les éléments du calcul différentiel et intégral, mais aussi ceux de la topologie générale, de la mesure et de l'intégration, des fonctions d'une variable réelle ou complexe, des espaces vectoriels, des groupes topologiques et des groupes de lie, du calcul des variations, des distributions...

Magré la difficulté d'accès et malgré la méfiance voire l'hostilité de nombreux mathématiciens (voyant là uniquement la réhabilitation inutile voire même dangereuse d'outils archaïques dont l'absence n'a gêné en rien la progression des mathématiques depuis plus d'un siècle), le développement de l'analyse non standard sera relativement rapide, qu'il s'agisse :

-d'applications à diverses branches des mathématiques, en particulier l'étude des systèmes stochastiques et des systèmes différentiels mais aussi d'applications à la physique, à l'économie, aux sciences sociales (Cf. Bibliographie).

-de recherches portant sur les fondements de l'analyse non-standard, par exemple les travaux de K.Hrbacek ([20 - 21]) E. Nelson ([30]), développant des approches axiomatiques (cf. paragraphe II B et Annexe 2).

-de recherches visant à "simplifier" la construction de Robinson, en vue de l'utilisation de l'Analyse non standard, dans l'enseignement à un niveau élémentaire, par exemple les travaux de H.J. Keisler ([22], [23]) de J.M Henle et E.M Kleinberg ([18]), (cf. paragraphe IV), D. Tall ([40 - 43]).

Ainsi, dès 1971, H.J. Keisler publie un manuel intitulé : "Elementary Calculus : An approach using infinitesimals" et dès 1973-1974, ce manuel sert de texte de référence pour une expérience d'enseignement de première année universitaire, réalisée dans cinq écoles de la région de Chicago. Cette expérience donne lieu à une évaluation réalisée par K.A. Sullivan ([38 - 39]) au moyen de deux questionnaires : l'un destiné aux enseignants et l'autre aux étudiants. Les résultats du questionnaire étudiant ne montrent pas de différences importantes de performances entre non-standardistes et standardistes, mais de meilleures capacités chez les premiers à interpréter certains formalismes mathématiques (notations différentielles - relations intégrales - volume, par exemple). Les résultats du questionnaire enseignant (cf. annexe 3) semblent montrer, que la quasi-totalité des 11 enseignants concernés tirent un bilan très positif de l'expérience et sont prêts à poursuivre dans cette direction.

Comme le conclut K.A. Sullivan, ce n'est pas la solution miracle, mais c'est une approche du "Calculus" qui s'est révélée intéressante et viable.

Malgré ces résultats encourageants, les expériences d'enseignement, à un niveau élémentaire, de l'analyse non standard, sont restées jusqu'à ces dernières années, ponctuelles et isolées.

La parution en 1976, d'un deuxième ouvrage de H.J. Keisler, donne même lieu à une critique virulente de E. Bishop dans le Bulletin of the American Mathematical Society ([6]); selon Bishop, Keisler achève l'oeuvre entreprise par les mathématiques modernes : convaincre les étudiants que les mathématiques ne sont que "an esoteric and meaningless excercise in technique", détaché de toute réalité.

Ces critiques s'opposent aux déclarations des partisans de l'analyse non standard, qui, eux, affirment au contraire avec force sa simplicité et son caractère intuitif. Par exemple J.M. Henle et E.M. Kleinberg écrivent dans la préface à leur ouvrage :

"Thus, we were led to the ε/δ approach to calculus, an approach that, although totally precise and rigourous, was a disaster for students to learn and teachers to teach... A most natural place for Robinson's insight is a next (and possibly final) point in the evolution of the teaching of calculus. We can now develop calculus using infinitesimals and enjoy all of their simplicity and intuitive power, yet at the same time work in a mathematically precise and rigorous atmosphere. This approach, although quite new, has been used at a number of universities with remarkable success."

En France, plus spécialement, que se passe-t-il ?

A. Robinson donne des conférences au Collège de France vers 1964 mais elles n'ont pas un grand retentissement.

Quelques conférences d'introduction ont lieu, ici et là, à partir des années 70, mais peu d'enseignements sont organisés. Citons ceux dont nous avons eu connaissance :

- de 1969 à 1971 : Cours de logique avec introduction de l'A.N.S. -Strasbourg- (G. Reeb)
- à partir de 1971 : Cours de troisième cycle d'A.N.S. -Strasbourg- (G. Reeb)
- de 1979 à 1982 : Seminaire -Mulhouse-
- à partir de 1982 : Cours de troisième cycle d'A.N.S. -Mulhouse-

-de 1982 à 1983 : Cours de logique de maîtrise avec introduction de l'A.N.S. -Paris-Nord- (J. Benabou)

-de 1982 à 1983 : Séminaire de troisième cycle d'A.N.S. -Paris- (J. Benabou)

-de 1983 à 1984 : Cours de troisième cycle d'A.N.S. -Poitiers- (G. Wallet) sur le sujet "Analyse non standard et perturbations d'équations différentielles"

-de 1984 à 1985 : Analyse non standard et enseignement élémentaire - Groupe IREM -Poitiers- (G. Wallet)

-de 1983 à 1984 : Cours de troisième cycle d'analyse non standard -Nice- (E. Benoit)

-de 1983 à 1984 : Cours d'A.N.S., option de DEUG SSM 1ère année -Paris 7- (A. Chenciner)

Comme on peut le remarquer, tous ces enseignements sauf le dernier se situent à un niveau élevé, pratiquement celui de la recherche.

Et effectivement, c'est par la recherche qui se développe essentiellement* à Mulhouse et à Strasbourg, sous l'impulsion de G. Reeb que l'Analyse non standard va effectuer sa percée en France.

Plus de dix thèses d'état sont soutenues entre 1980 et 1984, quatre la seule année de 1981 (portant sur l'utilisation de l'A.N.S. dans l'étude des systèmes différentiels).

Ces travaux sont exposés au séminaire Bourbaki par P. Cartier en 1981. Un volume de Lecture Notes in Mathematics consacré à l'A.N.S. sort la même année (R. Lutz et M. Goze [28]).

En 1983, la troisième rencontre de géométrie du Schnepfenried est, en hommage à G. Reeb, partiellement consacrée à des exposés dans ce domaine qui sont repris dans une publication de la Société Mathématique de France (Astérisque [2]).

En 1983 encore, un article de vulgarisation de J. Harthong ([17]) paraît dans la revue, "La Recherche".

Enfin, en 1984, une école d'été intitulée : "Analyse non standard et représentation du réel" est organisée à Oran, où travaille actuellement une équipe de recherche importante, formée de coopérants ** et d'Algériens.

Bref, en un mot, il semble difficile de continuer à ignorer, à l'heure actuelle l'analyse non standard.

* citons également L. Haddad à Clermont-Ferrand, D. Richard et C. Charreton à Lyon, C. Reder à Bordeaux, C. Lobry à Nice

** un certain nombre venant de l'équipe Strasbourgeoise

Mais ceci ne permet pas de répondre pour autant aux questions cruciales suivantes :

-Quel profit un mathématicien classique peut-il tirer de l'analyse non standard ?

-Quelle place convient-il d'accorder à ce domaine dans l'enseignement des mathématiques ?

Pour tenter d'y voir plus clair, il nous faut quitter le domaine des généralités et entrer dans le vif du sujet.

Chapitre II : LES FONDEMENTS DE L'ANALYSE NON STANDARD

"On trouve la phrase suivante à des centaines d'exemplaires (sous la plume de Leibnitz, Euler, Vëronèse, Abel, Cauchy, Carnot, Galois (sic)... :

"Un réel positif est infiniment petit s'il est majoré par tout réel donné positif".

Si on lit cette phrase (...) en ne tenant pas compte du mot "donné" alors on conclut selon l'idée reçue "Tout cela est absurde" !

Mais ce donné (ou assigné, fixé, selon les auteurs) a un sens et les auteurs de ce temps n'écrivaient pas sans réfléchir ; alors c'est une autre histoire, la phrase devient cohérente et riche".

(G. Reeb - correspondance)

A/Approche du problème

Toute construction "moderne" de l'Analyse Non Standard doit répondre à certains critères :

-elle doit assurer l'existence de nombres infinitésimaux et infiniment grands, accompagnés de règles précises de manipulation.

-ces règles doivent lever les contradictions apparentes telles que celle qu'évoque la citation ci-dessus.

-on ne doit pas modifier les résultats de l'Analyse classique.

Ainsi, on devra donner un contenu précis à la distinction, pressentie par les auteurs en question, entre deux sortes d'objets : ceux (nombres, ensembles...) qu'on appelle standard (que les anciens préfiguraient sous les termes de nombres donnés, assignables etc...) et les autres (non-standard).

On voudra donc disposer de réels positifs inférieurs à tous les réels standard strictement positifs ; c'est ce qu'on appellera des infinitésimaux ou infiniment petits. De la même façon, on appellera entiers (ou réels) infiniment grands des entiers (ou réels) supérieurs à tous les entiers standard.

Ces nouveaux (?) objets vont transformer la pratique de l'analyse essentiellement de la manière suivante : par exemple, les phrases du type :

"pour tout entier M donné (!), on peut choisir un entier $N > M$ tel que $P(N)$"

(pour fixer les idées, $P(N)$ pourrait être la propriété "N est pair" ou bien "N est un nombre premier") seront remplacées par :

"prenons un entier infiniment grand (donc plus grand que tout M standard)satisfaisant la propriété P".

A la notion d'infini potentiel (on peut toujours "aller plus loin", prendre des entiers "aussi grands que l'on veut") est substituée une notion d'infini actuel (les nombres infinis existent , on peut en parler et les manipuler, les faire entrer dans des calculs).

Cette notion se généralisera de la manière suivante :

Si $B(x,y)$ est une relation binaire quelconque, on appellera objet idéal pour B un x tel que, pour tout y standard, on ait $B(x,y)$ ($B(x,y)$ peut être par exemple la relation "$x > y$ et x est premier", comme dans le cas précédent).

Bien sûr, un tel objet idéal ne peut exister que si toutes les propositions de la forme $B(x, y_i)$ (où $(y_i)_{i \in I}$ serait une famille décrivant les objets standard) sont logiquement compatibles entre elles ; comme toute contradiction ne peut venir que d'un nombre fini de telles formules (une démonstration a toujours un nombre fini d'hypothèses !), on n'exigera l'existence d'éléments idéaux que pour les relations ayant la propriété suivante dite de "concourance", qui assure une telle compatibilité :

"Pour tout ensemble fini $y_1,\ldots y_n$ d'objets donnés standard, on peut choisir un x tel qu'on ait simultanément $B(x,y_1),\ldots B(x,y_n)$"
(par exemple, la relation choisie ci-dessus est concourante, car tout ensemble fini d'entiers peut être majoré par un nombre premier).

La possibilité de remplacer la phrase ci-dessus par :

"prenons un x tel que pour tout y standard on ait $B(x,y)$"
c'est-à-dire l'existence d'objets idéaux pour les relations concourantes, sera appelé principe d'idéalisation ; ce principe joue un rôle capital dans toutes les présentations de l'Analyse Non Standard.

Il y a essentiellement deux conceptions des fondements de l'Analyse Non Standard, qui conduisent heureusement à des pratiques très voisines ; en particulier, elles amèneront à manipuler des "objets idéaux" (nombres infinitésimaux, infiniment grands, etc...) obéissant (presque) aux mêmes règles.

La première conception, dûe principalement à Abraham Robinson ([35]), est de nature sémantique, ou constructive ; il s'agit de "construire" des éléments non-standard (par exemple pour $\mathbb{R}$) en partant du point de vue que l'ensemble ($\mathbb{R}$ par exemple) que l'on "connait déjà" ne contient que des éléments standard.

La deuxième conception, basée essentiellement sur les travaux d'Edward Nelson([30])fixe les règles d'utilisation des nouvelles <u>notions</u> introduites, sans préciser si on rajoute ou non de nouveaux <u>éléments</u>. Certains exégètes pensent même qu'elle traduit bien la conviction que des entiers infiniment grands <u>préexistent</u> dans $\mathbb{N}$ (donc aussi des infinitésimaux dans $\mathbb{R}$) et l'illustrent par la formule :

"Les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$". (G. Reeb [33]).

Donnons un peu plus de détails sur chacune de ces deux approches.

<u>B/L'approche sémantique de Robinson</u>

Pour chaque problème particulier auquel on a envie d'appliquer les méthodes non-standard, on commence par cerner un langage précis, des axiomes et des structures qui en sont le cadre ; par exemple, pour étudier les suites de réels, on a besoin des opérations et de la relation d'ordre usuelles de $\mathbb{R}$, des axiomes de corps ordonné complet archimédien, et de l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même (avec $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, et les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) - certains domaines nécessiteront des structures plus compliquées, comportant de nombreux types d'objets (par exemple la topologie générale, l'analyse fonctionnelle...).

A partir d'une telle structure, que l'on notera $\mathfrak{M}$, on en construit une extension $^*\mathfrak{M}$, par un procédé qui assure que le principe d'idéalisation soit réalisé, lorsque dans $^*\mathfrak{M}$ on considère comme éléments standard ceux de $\mathfrak{M}$, et que toutes les propriétés de $\mathfrak{M}$, exprimables dans le langage choisi, soient conservées par $^*\mathfrak{M}$.

<u>Remarque</u> :

Plus précisément, $^*\mathfrak{M}$ est une "ultrapuissance" de $\mathfrak{M}$: $^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^I/\mathcal{U}$, où I est un certain ensemble d'indices et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur I.

Les éléments de $^*\mathfrak{M}$ sont alors les classes d'équivalence de

$(x_i)_{i \in I}$, modulo la relation : "$(x_i) \simeq (y_i)$ si et seulement si $\{i \in I \ / \ x_i = y_i\}$ est un élément de l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$.

On sait qu'alors $^*\mathfrak{M}$ est une "extension élémentaire" de $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire que les formules à paramètres dans $\mathfrak{M}$, vraies dans $\mathfrak{M}$, le sont aussi dans $^*\mathfrak{M}$.

En choisissant convenablement I et $\mathfrak{U}$ (il ne suffit pas que $\mathfrak{U}$ soit "non trivial") on garantit que $^*\mathfrak{M}$ satisfait le principe d'idéalisation.

Si on prend $I = \mathbb{N}$ et $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$, on obtiendra comme éléments "infinitésimaux" de $^*\mathbb{R}$, les classes d'équivalences de suites de réels, tendand vers 0 suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ (remarquer l'analogie avec la notion d'infiniment petit chez Cauchy).

En fait, on peut réaliser cette construction avec un ultrafiltre non trivial quelconque sur $\mathbb{N}$; on n'obtient alors qu'une partie de la puissance de l'Analyse Non Standard, mais suffisamment pour permettre de présenter agréablement la plupart des notions d'analyse enseignées au niveau du 1er cycle de l'Université - c'est le point de vue adopté par Henle et Kleinberg ([18]).

C/ L'approche axiomatique de Nelson (théorie IST)

Au lieu de faire une construction particulière pour chaque application, on se place une fois pour toutes dans le cadre du langage et des axiomes de la théorie ZFC (*) (théorie des ensembles de Zermelo Frankael, avec l'axiome du choix - cf. annexe 2).

Tous les objets manipulés sont alors considérés comme des ensembles ; les seuls symboles de relation du langage sont " $\in$ " et " = " ; les nombres entiers sont des ensembles : 0 est l'ensemble $\emptyset$, 1 est $\{\emptyset\}$, 2 est $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$,... et par induction n est égal à l'ensemble $\{0,1,\ldots n-1\}$; les réels sont assimilés aux parties de $\mathbb{N}$, les fonctions sont des ensembles de couples, etc...

Aux deux symboles de relation déjà existant dans le langage de ZFC, on rajoute un nouveau symbole de relation à une place, le prédicat st( ), qui n'est pas définissable dans le langage de ZFC (st(x) se prononcera " x est standard"). On obtient ainsi un nouveau langage, celui de IST.

(*) On appelle "théorie" un ensemble d'axiomes formulés dans un même langage.

Trois nouveaux "schémas d'axiomes" vont réglementer l'emploi de ce nouveau symbole ; quelques définitions préliminaires sont nécessaires pour les énoncer :

On va distinguer différentes sortes de formules dans le langage de IST (nous ne cherchons pas ici à définir rigoureusement la notion générale de formule d'un langage).

- Si Φ est une formule du langage de ZFC, c'est-à-dire est écrite sans utiliser le prédicat st( ), on dit qu'elle est <u>interne</u> ; sinon on dit qu'elle est <u>externe</u>.
  <u>Exemple</u> : la phrase " f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ " peut être exprimée par une formule interne, c'est-à-dire construite avec les symboles " $\in$ " et " = ", des variables (en particulier la variable "f") et des symboles logiques ("et", "ou", "non" , et les quantificateurs "$\forall$" et "$\exists$"). Au contraire, la phrase " n est infiniment grand " ne peut s'exprimer, dans le langage de IST, qu'en utilisant le prédicat st( ), c'est-à-dire par une formule externe - par exemple " $n \in \mathbb{N}$ et $\forall$ x { (x $\in \mathbb{N}$ et st(x) $\Longrightarrow$ n > x }"

En pratique, on peut dire que toute proposition n'utilisant que des notions "classiques", peut s'exprimer par une formule interne

- Une formule peut, de plus, être écrite en utilisant des constantes (ou paramètres) désignant certains objets, standard ou non ; si ces objets sont tous standard (c'est-à-dire que, pour eux, le prédicat st( ) est vrai (*)) et si Φ est une formule interne, on dira que Φ est une formule <u>standard</u>.
  <u>Exemple</u> : " n_0 est un entier " s'exprime par une formule <u>interne</u>, contenant le paramètre n_0 ; mais, suivant que n_0 désigne un entier standard, ou un entier infiniment grand, la formule sera standard ou non.

<u>Notations</u> : on écrira

$\forall^{st}x\ldots$ pour $\forall x\,[\ \mathrm{st}(x) \Longrightarrow \ldots]$ ("pour tout x standard ...")
$\exists^{st}x\ldots$ pour $\exists x\,[\ \mathrm{st}(x)$ et $\ldots]$ ("il existe x standard tel que ...")
$\forall^{stf}x\ldots$ pour $\forall x\,[$ ("x fini" et $\mathrm{st}(x)\ ) \Longrightarrow \ldots]$
("pour tout x standard fini ...")

(*) pour le lecteur logicien : on sous-entend ici qu'on se place dans une réalisation donnée du langage de IST

Pour toute formule A, on notera A^{st} la formule obtenue en remplaçant dans A tous les " $\forall$ " par des " $\forall^{st}$ " et tous les " $\exists$ " par des " $\exists^{st}$ " - c'est la "restriction aux objets standard" de la formule A

Nota :

La phrase "x fini" ci-dessus désigne une formule interne, exprimant que toute injection de x dans lui-même est une bijection (ce qui est une définition usuelle des ensembles finis, dans la théorie ZFC).

Précisons maintenant les trois schémas d'axiomes qui, rajoutés à ceux de ZFC, constitueront la théorie IST.

i) Schéma de Transfert (T)

Pour toute formule standard A, on se donne pour axiome l'équivalence entre A et A^{st} (*)

Autrement dit, pour vérifier qu'une formule standard est vraie, il suffit de s'assurer que sa restriction aux objets standard est vraie.

Conséquence :

Si une formule standard définit un objet unique, cet objet sera lui-même forcément standard (car $\exists !\, x\, A(x)$ est équivalent à $\exists^{st} !\, x\, A(x)$) donc, par exemple, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, 3, 1984, ¶ , la fonction sinus etc... sont des objets standard (ce qui n'empêche pas $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$, par exemple, de contenir des éléments non standard !).

Pour la même raison, si f est une fonction standard, et si x est standard, f(x) est nécessairement standard. Par exemple, la fonction "cardinal d'un ensemble" est standard (elle est définie par une formule interne, sans paramètres, donc standard) ; donc tout ensemble fini standard aura pour cardinal un entier standard.

Remarque :

En fait, il suffit de se donner au départ, pour toute formule standard A(x), l'axiome $\forall^{st} x A(x) \Longrightarrow \forall x A(x)$ - le reste s'en déduira par induction sur le nombre de quantificateurs de A.

(*) l'ensemble des formules standard A étant infini, on obtient donc ainsi un ensemble infini d'axiomes - c'est ce que l'on nomme un "schéma d'axiomes"

ii) Schéma d'idéalisation (I)

Pour toute formule interne B(x,y), on pose pour axiome l'équivalence entre "B est une relation binaire concourante" (* *) ce qui s'écrit :

$$\forall^{stf} z \, \exists x \; \forall y \in z \; B(x,y)$$

et "il existe un élément idéal pour B" ce qui s'écrit :

$$\exists x \; \forall^{st} y \; B(x,y)$$

Remarque :

On peut penser B, par exemple, comme une relation d'ordre. Cet axiome exprime alors l'équivalence entre "tout ensemble fini standard est majoré" et "il existe un élément qui majore tous les standard à la fois" ; remarquer l'analogie avec l'axiome de Zorn - c'est sans doute une des raisons pour lesquelles certaines démonstrations qui, classiquement, nécessitent l'axiome du choix, "paraissent" s'en passer en Analyse Non Standard.

Une conséquence importante de ce schéma est l'existence d'entiers infiniment grands dans $\mathbb{N}$: il suffit de l'appliquer à la formule B(x,y) qui signifie :

" $x \in \mathbb{N}$ et $x > y$ "

iii) Schéma de standardisation (S)

Soient C(z) une formule du langage de IST (interne ou externe) et x un ensemble standard.

Alors, la "collection" $X=\{ z \in x \,/\, C(z) \}$ n'est pas forcément un ensemble au sens de ZFC (c'est-à-dire qu'il n'est pas forcément vrai que

$$\exists y \quad \forall z \,[\, z \in y \Longleftrightarrow (z \in x \text{ et } C(z)\,)\,]$$

(voir Ch. III, B pour un exemple)
-cependant les axiomes de ZFC assurent l'existence d'un tel y si C est une formule interne ; même si x est un ensemble, il n'est pas forcément standard (par exemple : $\{ n \in \mathbb{N} \,/\, n < M \}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, qui n'est standard que si M désigne un entier standard).

(* *) Voir § 1

Le schéma (S) affirme l'existence d'un <u>ensemble standard</u>, noté ^sX (le "standardisé" de X) qui contient exactement les mêmes éléments standard que la collection X.

Pour chaque formule C(z) du langage de IST, on posera donc l'axiome :

$$\forall^{st} x\, \exists^{st} y\, \forall^{st} z\, [\ z \in y \Leftrightarrow (z \in x \text{ et } C(z)\ )\ ]$$

Exemples :

Si $X= \{x \in \mathbb{N}\ /\ st(x)\ \}$ (collection des entiers standard) alors $^sX = \mathbb{N}$ (qui contient tous les entiers, standard ou non)

Si $X= \{x \in \mathbb{N}\ /\ \text{non } st(x)\ \}$ (collection des entiers non standard) alors $^sX = \emptyset$.

Les exemples ci-dessus montrent qu'on n'a pas forcément $X \subset {^sX}$, ni $^sX \subset X$.

D/Rapport entre les deux points de vue

Une partie importante du travail de Nelson consiste à démontrer que la théorie IST est consistante (pourvu que ZFC le soit) ; en d'autres termes, en espérant que ZFC ne contient pas de contradictions, il montre que IST n'en apporte pas de nouvelles.

Pour ce faire, partant d'un modèle supposé de ZFC (*), il utilise une construction analogue à celle de Robinson, avec des techniques un peu plus sophistiquées (ultralimites au lieu d'ultrapuissances...), pour obtenir un modèle de IST (en considérant comme standard les éléments de l' "ancien" modèle).

Inversement, la construction de Robinson, appliquée à un modèle de ZFC, donnerait "presque" IST (au sens où le schéma (I) ne s'appliquerait qu'aux formules <u>standard</u>, au lieu de toutes les formules <u>internes</u>).

(*) Un modèle d'une théorie est une structure dans laquelle on a donné un sens aux symboles du langage de la théorie en question (on dit "interprété" ces symboles) de manière à satisfaire les axiomes de la théorie ; on démontre un "théorème de complétude", qui affirme que si une théorie ne contient pas de contradiction, alors elle possède un modèle. Notons aussi qu'on ne <u>peut pas</u> montrer que ZFC ne contient pas de contradiction (à moins de l'admettre déjà pour une théorie encore plus forte) - et cela se démontre !

En fait, en même temps que la "consistance relative" de IST, Nelson montre que cette théorie est une <u>extension conservative</u> de ZFC, c'est-à-dire que toute formule interne qui peut être prouvée au moyen des axiomes de IST, peut l'être en n'utilisant que ceux de ZFC ; ou encore : tout théorème dont l'énoncé n'emploie que des mots des mathématiques "classiques", et qu'on arrivera à démontrer en ayant recours à l'Analyse Non Standard, pourrait se démontrer sans utiliser celle-ci.

Inversement, tous les résultats démontrés en mathématiques "classiques" restent bien sûr valables en Analyse Non Standard.

On peut dire en somme que le point de vue de Nelson consiste, par rapport à celui de Robinson, à "oublier" comment on fait la construction des objets non standard (construction qui a été faite une fois pour toutes), et à démarrer au moment où ces objets sont "déjà là" ; tout ce qu'on retient, ce sont les règles de manipulations des nouvelles notions (de même qu'on oublie comment a été construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, quand on manipule les réels ; on ne retient qu'un certain nombre de propriétés de $\mathbb{R}$, établies une fois pour toutes).

C'est dans ce cadre que nous nous placerons, dans le chapitre suivant.

Chapitre III : LA PRATIQUE DE L'ANALYSE NON STANDARD *

Nous allons voir dans ce chapitre comment l'A.N.S. peut influencer notre vision intuitive des concepts mathématiques classiques, mais aussi offrir de nouveaux objets d'étude aux mathématiques, et enfin apporter de nouvelles méthodes pour rendre compte de certains phénomènes concrets (physiques, biologiques....).

Le mathématicien qui utilise l'A.N.S. voit donc s'offrir à lui deux directions possibles de travail :

.soit porter un nouveau regard sur des notions classiques, simplifier les démonstrations de théorèmes connus, et éventuellement démontrer de nouveaux théorèmes classiques. (i.e. standard).

.soit développer l'A.N.S. en tant que telle, explorer des notions typiquement non standard, sans chercher forcément à retraduire en langage classique les résultats obtenus.

En réalité, ces deux activités s'interpénètrent joyeusement, entre autres pour les raisons suivantes :

-beaucoup de notions classiques ont un correspondant non standard, souvent plus simple à formuler, mais les deux notions ne coïncident que si on les applique à des objets standard (on va le voir tout à l'heure avec la notion de continuité). On peut alors utiliser cette notion pour retrouver des propriétés classiques. **

-d'autre part, il existe des "principes de permanence ", dont un aperçu est donné en annexe, qui permettent de tirer des conséquences standard de résultats non standard. Ces principes sont liés à la manipulation des ensembles externes, c'est-à-dire les collections qui ne sont pas des ensembles de Z.F.C.

Les conséquences prennent souvent la forme de théorèmes d'existence ; par exemple, on montre que si une propriété interne est vérifiée par <u>tous</u> les entiers infiniment grands, elle l'est aussi par <u>certains</u> entiers standard.

(*) Beaucoup de passages de ce chapitre s'inspirent du cours de F. Diener ([14])

(**) Nelson exhibe un algorithme qui permet de retraduire en langage classique tout énoncé non standard; ce qui ne veut pas dire que la traduction obtenue soit toujours un résultat intéressant.

En dehors de l'intérêt théorique de cette discipline, l'A.N.S. permet de modéliser certains phénomènes constatés par l'expérience (mathématique, physique...), dans lesquels interviennent des paramètres d'ordres de grandeur différents : songez par exemple aux battements qui apparaissent quand deux sons ont des fréquences très voisines ; on pourrait modéliser cette situation en supposant ces fréquences infiniment grandes par rapport à leur différence.

L'A.N.S. permet aussi de rendre compte de sauts qualitatifs dans certains phénomènes, là ou les mathématiques traditionnelles ne laissent apparaître que des différences quantitatives.

Elle permet enfin de décrire en termes mathématiques les différents aspects que peut revêtir un même phénomène, selon l'échelle à laquelle on l'observe : pensez aux tableaux de Seurat !.

Nous sommes à présent en mesure de présenter quelques notions ou résultats d'A.N.S. proprement dite. Les paragraphes qui suivent seront un peu plus techniques, et devraient préciser les idées.

A-Ensembles finis

On a vu que les théorèmes classiques restent bien sûr valables en A.N.S ; de même, les définitions des notions classiques (i.e. obtenues par des formules standard) garderont tout leur sens.

Il faut cependant, en utilisant l'A.N.S., changer le contenu intuitif que l'on a l'habitude d'associer à certaines notions : voyons ce qu'il en est de la notion d'ensemble fini.

Par définition, un ensemble E est fini si toute injection de E dans E est une bijection. On sait qu'un ensemble E est fini si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1,2,3,..,N\}$.

Si par exemple ω est un entier infiniment grand, c'est-à-dire plus grand que tout entier standard (on a vu qu'il en existe !), l'ensemble $\{1,2,...,\omega\}$ est un ensemble fini.

Théorème

Un ensemble E est standard et fini si et seulement si tous ses éléments sont standard.

Ce théorème est une conséquence de l'axiome d'idéalisation appliqué à la relation

$$B\ (x,y) = (x \in E \text{ et } x \neq y)$$

On en déduit que tout ensemble infini, standard ou non, contient des éléments non standard.

Remarquons à ce propos que tout ensemble standard non vide contient des éléments standard, et que tout ensemble non standard contient des éléments non standard.

Le résultat suivant est plus surprenant :

Théorème

Pour tout ensemble E, il existe un ensemble fini F contenant tous les standard de E.

Démonstration : appliquer l'axiome d'idéalisation à la relation $B\ (f,y) = (F \text{ est fini et } y \in F)$. (*)

Exemples

- Si $E = \mathbb{N}$, l'ensemble $F = \{0,1,\dots,\omega\}$ est fini et contient tous les entiers standard.
- Si $E = [0,1]$, la description de l'ensemble F est un peu plus délicate. Cependant, considérons l'ensemble fini $\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{\omega},\ \dots,\ x_i = \frac{i}{\omega},\ \dots,\ x_\omega = 1\}$; chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, de longueur $\frac{1}{\omega}$, contient au plus un réel standard, car la distance de deux réels standard distincts ne peut être inférieure à $\frac{1}{\omega}$). Cela donne une idée d'un ensemble fini F contenant tous les standard de $[0,1]$. F contiendra bien sûr aussi des tas d'éléments non standard !.

B-Vocabulaire - Description non standard de $\mathbb{R}$.

Il convient maintenant, en vue d'étudier des notions non standard d'analyse élémentaire (continuités, dérivabilités, suites, etc...), de préciser la structure non standard de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$.

(*) Et encore plus surprenant : "Il existe un ensemble fini contenant tous les standard".

On a vu que le schéma I assure l'existence d'entiers non standard, appelés infiniment grands, et supérieurs à tout entier standard.

Nous désignerons souvent par ω un tel entier.

.On dit qu'un réel est <u>infiniment grand</u> (i.g.) s'il est supérieur à tout entier standard. Un tel réel est assurément non standard.

.Un réel est <u>limité</u> si sa valeur absolue n'est pas infiniment grande. Un tel réel peut être standard ou non.

.Un réel est <u>infiniment petit</u> (i.p.) si sa valeur absolue est inférieure à tout réel standard positif. Un tel réel est non standard s'il n'est pas nul. Il en existe, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$

.Deux réels sont équivalents ($x \sim y$) si leur différence est infiniment petite. Il est facile de voir que c'est une relation d'équivalence ; chaque classe contient au plus un réel standard.

-On montre sans difficulté les "formules" que le bon sens suggère, du type :

$$\text{i.g.} \times \text{i.g.} = \text{i.g.}$$
$$\text{i.p} \pm \text{i.p.} = \text{i.p.}$$
$$\text{i.p.} \times \text{limité} = \text{i.p.}$$
$$\sqrt{\text{i.g.}} = \text{i.g.}$$
$$\text{i.p.} \times \text{i.g.} = ? \quad \text{etc...}$$

-D'autre part, on voit facilement par transfert que le produit, la somme, le quotient, etc..., de deux réels standard est un réel standard, ainsi que tout nombre défini de manière unique, par une formule standard, à partir d'un ou plusieurs réels standard.

-Il y a bien sûr des réels non standard équivalents à chaque réel standard x_0, par exemple $x_0 + \frac{1}{\omega}$.

Inversement, on peut montrer que si x est un réel <u>limité</u>, il existe un et un seul réel standard, noté ${}^{o}x$, équivalent à x (${}^{o}x$ se prononce l'ombre de x).

L'unicité du nombre ${}^{o}x$ est immédiate. Pour établir son existence, on vérifie que l'ensemble ${}^{S}\{ t \in \mathbb{R} \; ; \; t \leqslant x\}$, standard par définition, a une borne supérieure , ${}^{o}x$, qui répond à la question.

Remarquons qu'on utilise ici le fait que $\mathbb{R}$ est complet, et de fait, l'ombre d'un rationnel non standard limité n'est pas forcément un rationnel : $(1 + \frac{1}{\omega})^{\omega}$, qui est rationnel, a pour ombre le réel transcendant e.

Exercice :

Montrer les formules du type ${}^{o}x \times {}^{o}y = {}^{o}xy$

Halo d'un réel

Pour tout $x \in R$, on note $\mathrm{Hal}\ (x) = \{y \in \mathbb{R} ; y \sim x\}$

Hal (x) est défini par une formule externe, car la définition du signe $\sim$ utilise le prédicat st. Ici, on peut montrer que Hal (x) n'est effectivement pas un ensemble au sens de ZFC : on dit que c'est un ensemble externe.

Montrons par exemple que Hal (0), la collection des infiniment petits, n'est pas un ensemble interne (c.a.d. un ensemble au sens de Z F C).

Si c'en était un, Hal (0) serait un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré par 1, et aurait donc une borne supérieure . On aurait alors

$.\varepsilon > 0$ (car $\frac{1}{\omega} \in \mathrm{Hal}\ (0)$ et $\frac{1}{\omega} > 0$) donc $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < 2\varepsilon$

.Si $\varepsilon \in \mathrm{Hal}\ (0), \varepsilon \sim 0$, donc $2\varepsilon \sim 0$

.Si $\varepsilon \notin \mathrm{Hal}\ (0)$, $\frac{\varepsilon}{2}$ non plus

Dans tous les cas, on obtient une contradiction en supposant que ε est la borne supérieure de Hal (0).

Remarque

Si x est limité, ${}^{s}\mathrm{Hal}\ (x) = \{{}^{o}x\}$

Si x n'est pas limité, ${}^{s}\mathrm{Hal}\ (x) = \emptyset$

C-Continuité et compacité en A.N.S.

Théorème 1 (critère non standard de continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction standard et x_0 un réel standard alors f continue en $x_0 \Longleftrightarrow \forall \delta \sim 0,\ f\ (x_0 + \delta) \sim f(x_0)$

Remarque :

Ce critère rend très bien compte de l'idée intuitive qu'on essaie de formaliser : une fonction est continue si, lorsqu'on ne fait varier qu'un tout petit peu la variable, la valeur de la fonction varie très peu elle-aussi. (voir la définition donnée par Cauchy dans le Chapitre I).

$\Longrightarrow$ Si f est continue, on a en particulier :

$$\forall^{st}\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ \ \forall x \{ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$$

d'où par transfert :

$$\forall^{st}\ \varepsilon > 0\ \ \exists^{st} \eta > 0\ \forall x \{ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$$

Si donc $|x - x_0| = \delta$ est infiniment petit, $|f(x) - f(x_0)|$ est plus petit que tout ε standard, donc infiniment petit.

$\Longleftarrow$ On déduit de l'hypothèse que :

$$\forall^{st} \varepsilon, \exists \eta > 0\ \ \forall\ x \{ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$$

(en effet, il suffit de prendre $\eta \sim 0$)

On en déduit la continuité par transfert.

Théorème 2 : Critère non standard de continuité uniforme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction standard alors f uniformément continue sur $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\ x, \forall \delta \sim 0,\ f(x + \delta) \sim f(x)$

La démonstration est du même genre que la précédente.

Attention

Si l'on n'y regarde pas de près, on pourrait avoir l'impression, d'après l'énoncé de ces deux théorèmes, que la continuité en tout point entraine la continuité uniforme. Que cela nous incite à l'indulgence vis à vis de ceux de nos étudiants qui ont du mal à voir la différence entre ces deux notions dans leur formalisation classique !

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

On a toujours $f(x + \delta) - f(x) = 2\delta x + \delta$

Supposons δ infiniment petit.

- Si x est standard, donc limité, $2\delta x + \delta^2$ est infiniment petit. Le théorème 1 nous assure alors que f est continue en tout point standard.
- Si $x = \frac{1}{\delta}$, $2\delta x + \delta^2$ est plus grand que 2, donc n'est pas infiniment petit. Le théorème 2 nous dit que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Donnons maintenant un joli <u>critère non standard de compacité</u>, qui peut se généraliser sans difficulté aux espaces métriques.

<u>Théorème 3</u>

Soit A un sous-ensemble standard de $\mathbb{R}$. A est compact si et seulement si tout élément de A est limité et a son ombre dans A.

Nous n'en donnons pas la démonstration, mais elle n'est pas difficile.

Notons que l'hypothèse "A standard" est essentielle :

$A = [\varepsilon, 1]$ est compact, mais ${}^o\varepsilon \notin A$ si $\varepsilon \sim 0$

Ces différents critères permettent <u>de simplifier la démonstration</u> de beaucoup de théorèmes classiques : Démontrons par exemple que

<u>Théorème</u> :

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue

<u>Démonstration</u> :

Soit A un compact et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Par transfert, on peut supposer A et f standard. Il faut montrer que si x et y sont deux réels tels que $x \sim y$, on a $f(x) \sim f(y)$.

Puisque A est compact, x et y ont dans A une ombre commune, ${}^ox$, qui est standard, et ${}^ox \sim x \sim y$.

D'après le théorème 1, on a $f({}^ox) \sim f(x)$ et $f({}^ox) \sim f(y)$, d'où le résultat.

Les énoncés des théorèmes 1 et 2 nous incitent à nous demander ce que deviennent ces critères si f ou x ne sont pas standard. Il va s'agir alors <u>d'étudier une notion typiquement non standard</u> et nous sommes conduits à poser :

<u>Définition</u>

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est S - continue en x si et seulement si

$$\forall \delta \sim 0 \quad f(x + \delta) \sim f(x)$$

Si f est une fonction non standard, la continuité et la S - continuité en un point x (même standard) sont des notions bien distinctes :

.La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{\varepsilon}$ est continue en 0 (c'est une fonction linéaire !) mais n'est pas S - continue, car

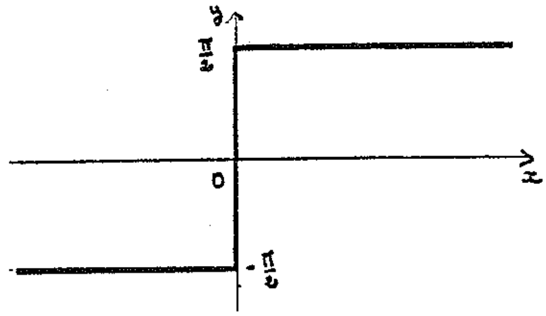
$f(0) = 0$ et $f(\varepsilon) = 1$

.Par contre, la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_2(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ f_2(x) = \varepsilon \text{ si } x > 0 \end{cases}$

n'est pas continue en 0, mais est S - continue

.La fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_3(x) = \text{Arctg}\ \frac{x}{\varepsilon}$, elle, est continue

sans être S-continue.
Son graphe ressemble au
dessin ci-contre



Mais prenons garde : ce qu'on croit voir (deux demi-droites et un segment vertical) n'est pas le graphe lui-même, mais son ombre (c'est-à-dire le standardisé de son halo). D'ailleurs, ce n'est pas le graphe d'une fonction.

.Par contre, le graphe de la fonction f_2 définie plus haut a pour ombre l'axe des x, graphe de la fonction nulle, car la fonction f_2 est infiniment proche de la fonction nulle.

En fait, pour qu'il existe une fonction standard infiniment proche (tout au moins aux points limités) d'une fonction f donnée, il faut au moins que f prenne des valeurs limitées aux points limités.

Ceci nous amène à poser :

<u>Définition</u>

Une fonction f est de classe S° si elle est S - continue et prend des valeurs limitées aux points limités.

On peut alors démontrer le résultat non-standard suivant, qui s'apparente au théorème classique d'Ascoli:

<u>Théorème de l'ombre continue</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe S°, alors il existe une fonction standard continue ${}^{s}f$ telle que, pour tout x limité, on ait ${}^{s}f(x) \sim f(x)$.

<u>Exemples</u>

$-f(x) = \varepsilon x$ $\qquad {}^{s}f(x) = 0$

$-f(x) = \varepsilon E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ($E(x)$ partie entière de x) : ${}^{s}f(x) = x$

Ce théorème permet de démontrer certains théorèmes d'existence classiques. Par exemple, pour démontrer le théorème d'existence d'une solution d'une équation différentielle, on construit une fonction f non standard, en escalier à marches infiniment petites, qui est de classe S°, puis on montre que ${}^{s}f$ est la solution cherchée.

D-Exemple d'application: Modélisation d'un champ par un champ Lent - Rapide

Nous allons maintenant essayer de montrer, de façon moins rigoureuse, comment l'A.N.S. permet de modéliser certaines situations où des phénomènes bien visibles mais difficiles à définir ne peuvent s'expliquer en analyse classique que par des passages à la limite laborieux. Nous consacrerons ce paragraphe aux trajectoires d'équations différentielles.

Premier exemple

La figure 1 (page 29) montre le tracé par ordinateur des solutions de l'équation différentielle.

$$\frac{dy}{dx} = -10\,(y^2 + x)$$

On remarque, par exemple, que les trajectoires issues d'un point situé au dessus de la parabole semblent tomber verticalement sur la parabole, puis la suivre jusqu'à son sommet, et ensuite recommencer à tomber tout droit : cela semble presque mettre en défaut le théorème d'unicité ! (c'est ce que nous appelons un phénomène de fleuve).

Pourtant, le champ associé à cette équation est topologiquement trivial, et la théorie classique des systèmes dynamiques montre qu'un difféomorphisme d'un compact de $\mathbb{R}^2$ envoie ces trajectoires sur une famille de droites parallèles.

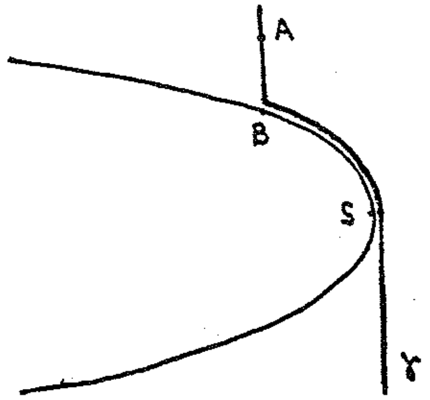
Que se passe-t-il donc au voisinage de la parabole ?

Les techniques non standard permettent d'étudier les solutions de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon}\,(y^2 + x) \qquad \varepsilon \sim 0$$

En dehors du halo(*) de la courbe d'équation $y^2 + x = 0$, les vecteurs du champ associé sont quasi-verticaux(*) et de module infiniment grand.

(*) L'analyse non standard permet de donner un sens précis et simple à ces notions intuitives.



il est facile de voir alors que la trajectoire γ passant par le point A (voir schéma) reste infiniment proche (tout au moins aux points limités) de la courbe formée de deux demi-verticales et de la portion de parabole située entre B et le sommet S.

Des techniques spécifiques à l'A.N.S. permettent d'évaluer en fonction de ε l'erreur commise en approximant γ par cette courbe : au voisinage d'un point tel que C, cette erreur δ est de l'ordre de ε (c.a.d. que $\frac{\delta}{\varepsilon}$ n'est ni infiniment petit ni infiniment grand). Pour savoir ce qui se passe dans le halo de S, on utilise la technique de <u>loupe</u>, c'est-à-dire une homothétie de centre S et de rapport infiniment grand (autrement dit, on observe le même phénomène à une échelle différente). On montre alors ([4]) que l'erreur est de l'ordre de $\varepsilon^{2/3}$.

Cette étude donne déjà une idée assez fidèle du comportement des solutions de $\dot{y} = -10\,(y^2 + x)$.

Une des morales de ceci, c'est que l'A.N.S. est un outil qui permet de décrire qualitativement des phénomènes quantitatifs dus à la présence de paramètres de valeurs très différentes (ici, $10 \gg 1$), et où l'utilisateur percevra un changement de nature.

La mécanique nous en fournit un autre exemple :

<u>Pendule à grand frottement</u>

L'étude du mouvement d'un pendule à frottement linéaire se ramène à étudier (dans l'espace des phases) les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -w^2 \sin x - \rho y \end{cases}$$

Ici, x désigne l'angle que forme l'axe du pendule avec la verticale descendante, y la vitesse angulaire et ρ le coefficient de frottement.

La figure 4 (page 31) montre le tracé de ses trajectoires pour $p = 4w$.

Le point A correspond à un équilibre stable, et B à un équilibre instable.

Il existe une trajectoire particulière asymptote à A et B : elle correspond au mouvement où le pendule, partant de l'équilibre instable B (pendule laché de la position haute avec une vitesse nulle), vient rejoindre l'équilibre stable.

On voudrait interpréter le fait, bien visible sur la figure, que les autres trajectoires, après avoir décrit un segment à peu près vertical, viennent se concentrer tout près de cette trajectoire particulière.

Pour modeliser ce problème grâce aux techniques de l'A.N.S., on suppose ρ infiniment grand. Mais alors, le mouvement particulier décrit ci-dessus sera décrit à une vitesse infiniment petite.

On est donc amené à changer l'échelle des temps ; en posant $\tau = \dfrac{t}{\rho}$, le système devient

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \rho^2 (- w^2 \sin x - y) \end{cases}$$

et on peut l'interpréter ainsi :

-La trajectoire joignant l'équilibre instable à l'équilibre stable à pour ombre la courbe

$$y = w^2 \sin x$$

-Si maintenant on se donne des conditions initiales -position et vitesse- quelconques (quand même limitées), la vitesse du pendule va changer, en un temps infiniment court, pour atteindre une vitesse infiniment voisine de celle qu'aurait le pendule, à la même position, au cours du mouvement particulier décrit ci-dessus; pendant ce temps, la position du pendule ne va varier qu'infiniment peu. Ensuite, le mouvement restera infiniment proche (en position et vitesse) de ce mouvement particulier pour finalement tendre vers l'équilibre stable.

Ce phénomène est difficile à exprimer en n'utilisant qu'un vocabulaire classique, mais la description qu'on vient d'en faire rend bien compte de l'allure du mouvement pour des valeurs de ρ raisonnablement grandes.

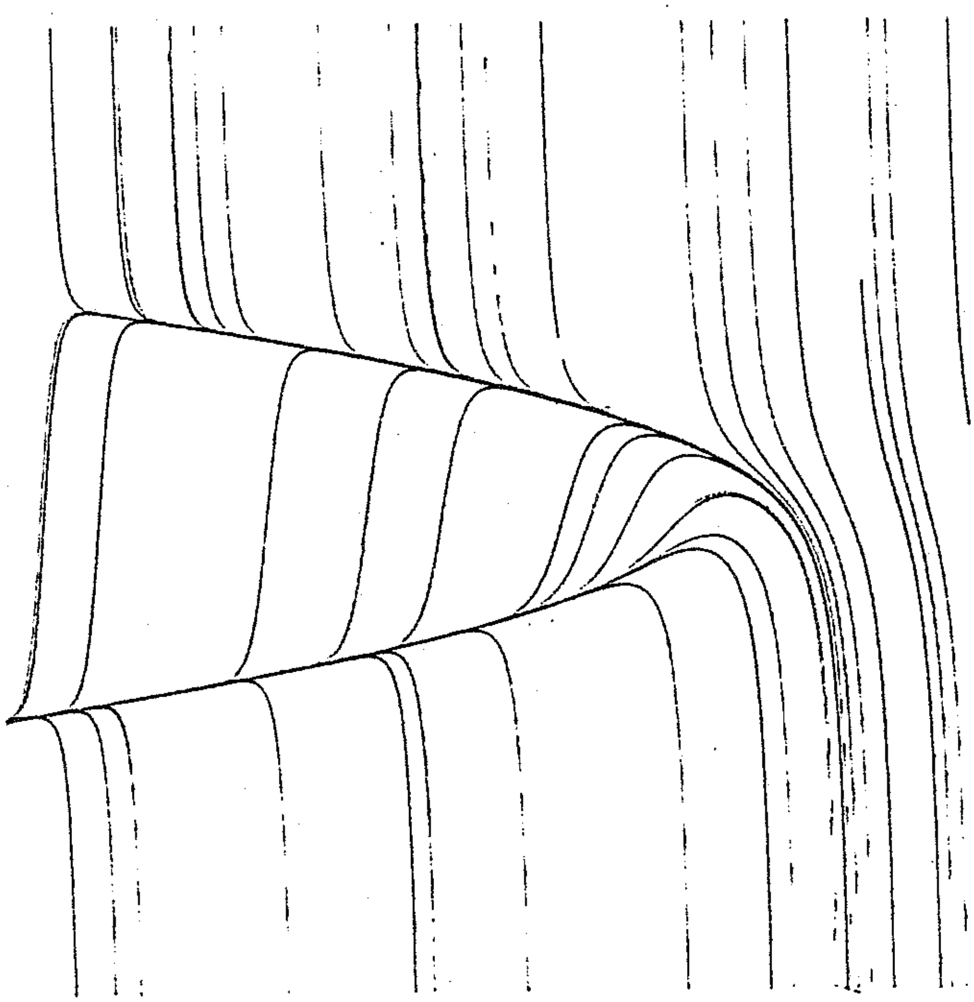


figure 1

Trajectoires de l'équation $\frac{dy}{dx} = -10\,(y^2 + x)$

On remarque le fleuve au voisinage de la parabole $x = -y^2$

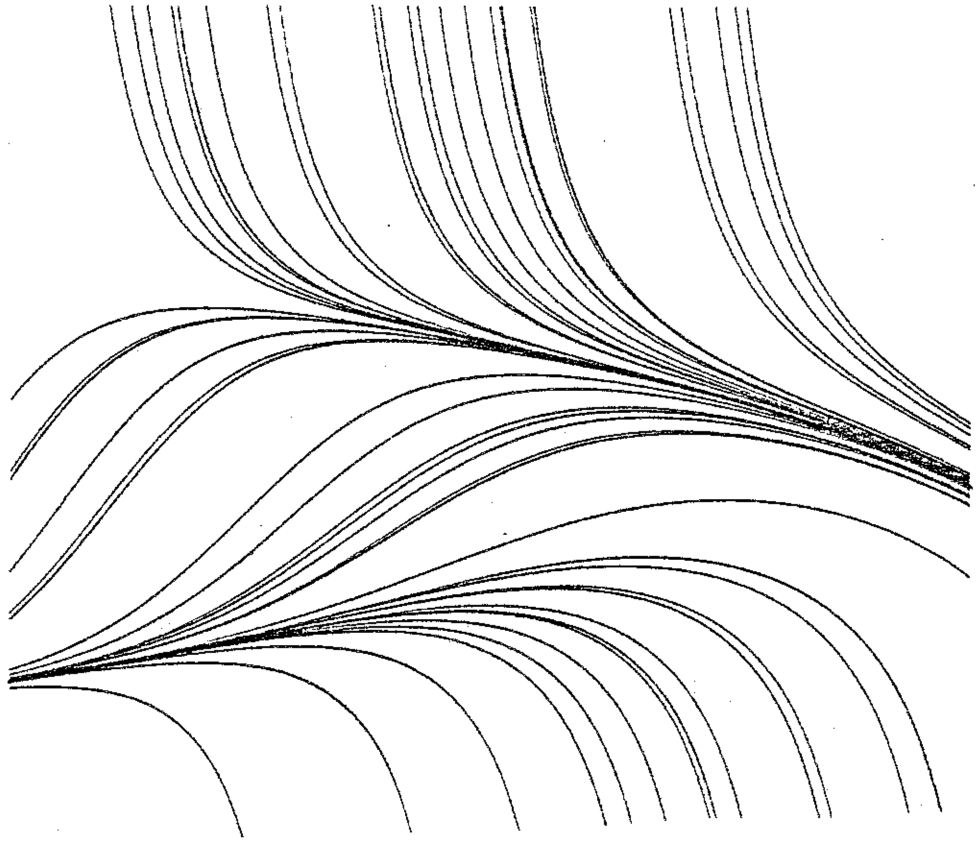


figure 2 : $\frac{dy}{dx} = -(y^2 + x)$

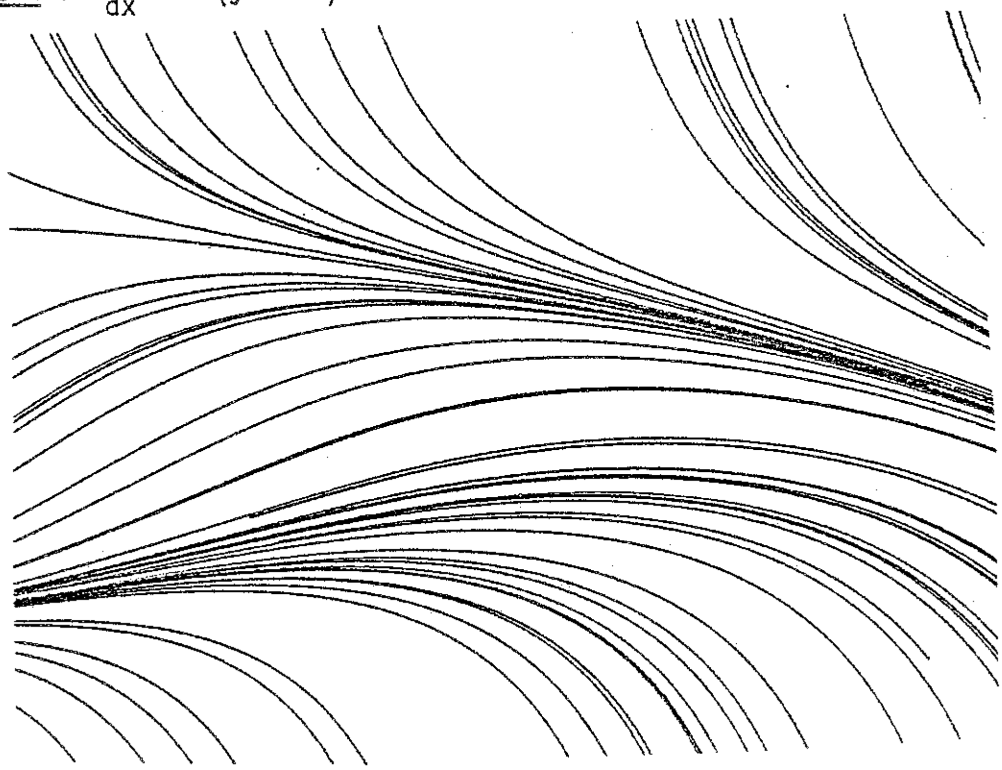


figure 3 : $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(y^2 + x)$

Le fleuve de la figure 1 disparaît

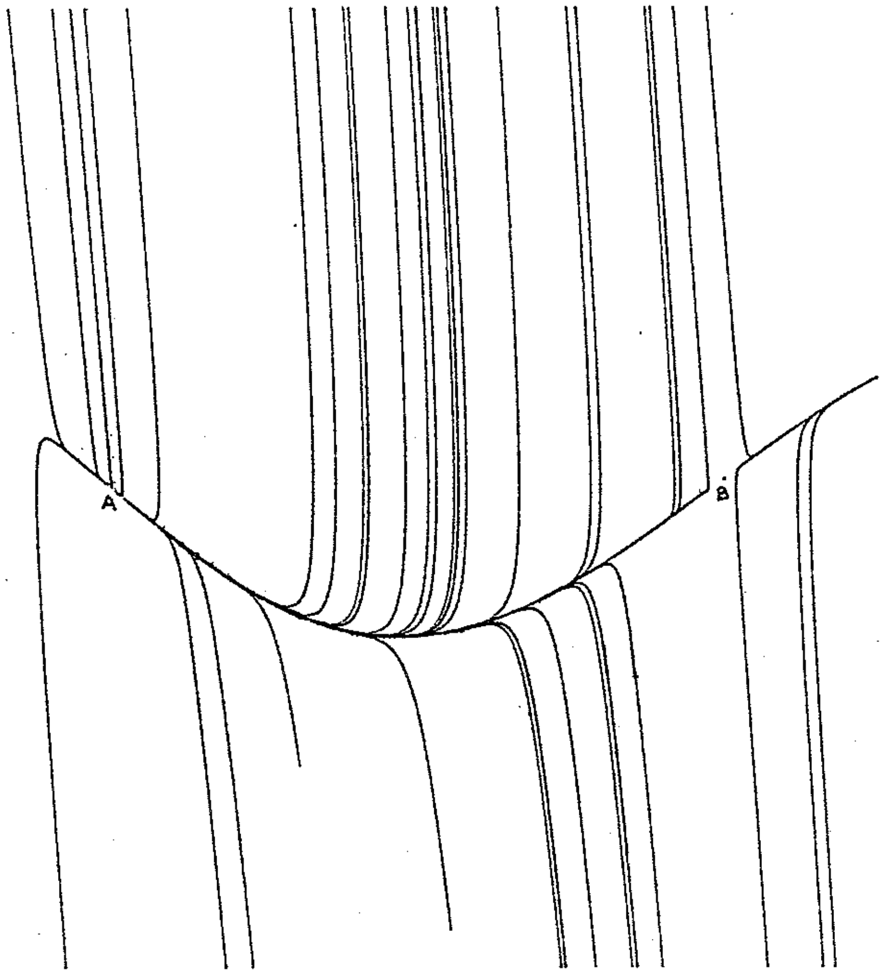


figure 4 : Pendule à grand frottement

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - 4y \end{cases}$$

Le fleuve est au voisinage de la courbe :

$$y = -\frac{\sin x}{4}$$

figure 5

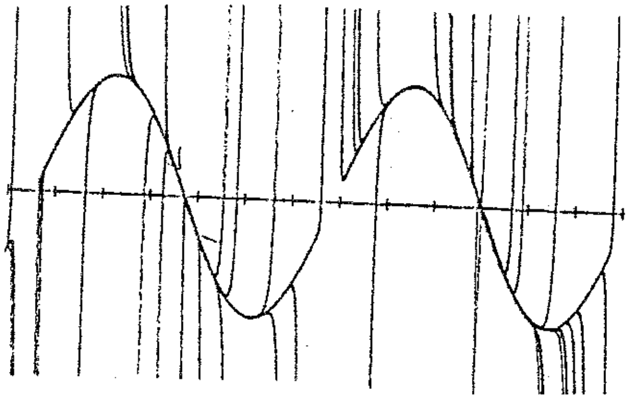


figure 6

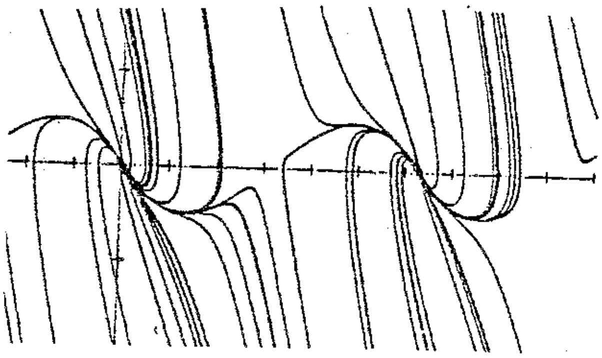
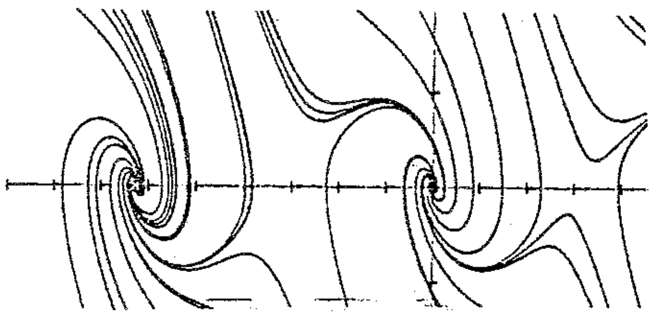


figure 7



Pendule avec frottement

$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\sin x - \rho y$

fig 5 : $\rho = 4$ fig 6 : $\rho = 2$ fig 7 : $\rho = 1$

Le fleuve disparaît lorsque ρ diminue.

Chapitre IV : ANALYSE NON STANDARD ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Pour l'instant, les appréciations concernant les rapports que pourraient entretenir Analyse Non Standard et Enseignement des Mathématiques sont essentiellement du registre de l'opinion. Et ceci est normal si l'on considère que peu d'expériences d'enseignement de l'A.N.S. ont fait l'objet d'évaluations sérieuses. De plus le fait que l'A.N.S. permette de renouer avec une pratique dont l'abandon à suscité de nombreuses polémiques rend les réactions souvent passionnelles.

Les questions qui se posent sont nombreuses :

Faut-il enseigner l'Analyse Non Standard ? oui ? Pourquoi ? non ? Pourquoi ?

Si l'on répond oui, faut-il l'enseigner en complément de l'analyse classique ou à la place, à des étudiants déjà avancés ou à des débutants ?

A partir de quel niveau est-ce possible ? A quel niveau est-ce le plus profitable ?

Quel type d'approche vaut-il mieux choisir : sémantique ou axiomatique ?

Quel est le bagage logique réellement nécessaire ? A partir de quel niveau devient-il accessible à un coût intéressant ?

Toutes ces questions s'enchevêtrent bien sûr joyeusement.

Les partisans de l'analyse non standard insistent sur les problèmes posés par l'enseignement classique de l'analyse et voient dans l'A.N.S, d'une part un moyen de l'amener en douceur, sans violer les conceptions "spontanées" des étudiants, d'autre part un moyen de restaurer une certaine unité avec les pratiques enseignées dans les disciplines où les mathématiques sont des outils, comme la physique.

Ils ne prétendent pas que l'on puisse à tout jamais se passer des ε et des η, comme en témoigne la citation suivante extraite du cours de F. Diener à l'Université d'Oran :

" Ceci n'est pas un préambule à un discours tendant à suggérer de jeter dans je ne sais quelle poubelle la définition en (ε, η) de la continuité, par exemple : nous savons trop bien l'utilité de cette définition de la continuité dans des contextes, il est vrai, d'un niveau bien plus élevé (analyse fonctionnelle) que celui où la notion de fonction continue est généralement enseignée. Par contre, par l'introduction des nouvelles caractérisations, on peut ménager des paliers intermédiaires dans l'enseignement de notions nouvelles : pour apprendre ce qu'est une fonction continue, on s'initie d'abord à la notion sur des fonctions standard ($t \to t^2 + 3$, $t \to \sin t$, ou au contraire $t \to |t|$) à l'aide de la caractérisation infinitésimale. On acquiert ainsi l'intuition de la notion de fonction continue, acquisition à laquelle se borne l'ambition de l'enseignement élémentaire de la continuité. Cette intuition acquise il est alors possible, didactiquement, d'aborder la définition (ε, η) et ses difficultés spécifiques (découpage d'epsilon en quatre etc...). Cette démarche a en outre l'avantage suivant : elle se prête à une <u>démonstration</u> de l'équivalence (pour les fonctions standard) des deux définitions."

Les adversaires de l'analyse non standard insistent sur le bagage logique nécessaire à l'enseignement de l'A.N.S. et sur le caractère abstrait des objets construits. Ils craignent qu'en développant les deux approches, on ne sème la confusion et que l'on fabrique finalement des étudiants ne sachant manier correctement ni l'une, ni l'autre. Face à ces risques, ils préfèrent enseigner classiquement, ce qui après tout n'est pas si difficile que ça (cf. [6]).

Soyons francs, nous ne trancherons ici ni en faveur d'un point de vue, ni en faveur de l'autre. Nous allons simplement essayer de déterminer quelles informations on peut tirer à ce sujet d'un enseignement qui a été organisé par A. Chenciner , en 1983-1984, à l'Université Paris 7, en première année de DEUG SSM.

Nous nous baserons sur l'analyse des copies de l'examen final, qu'il a eu la gentillesse de nous communiquer.

A/Organisation de l'enseignement

L'enseignement était un enseignement optionnel de DEUG première année, les étudiants suivant parallèlement un cours d'analyse classique. Il fonctionnait en cours-TD intégrés (2 séances hebdomadaires de deux heures pendant un semestre).

Le livre de référence de cet enseignement était : "Infinitesimal Calculus" de J.M. Henle et de E.M. Kleinberg, déjà cité.

Emaillé de commentaires et de citations historiques savoureuses, ce livre particulièrement bien rédigé, (que nous n'hésitons pas à conseiller comme première lecture à quiconque veut s'initier en douceur à l'A.N.S.) présente une approche, dans le style de Robinson, mais notablement simplifiée.

Nous allons essayer d'en présenter très brièvement le contenu.

Le chapitre I constitue un chapitre d'introduction. Il essaie de présenter, à propos de problèmes de tangentes et d'aires, et en relation avec l'histoire du calcul différentiel et intégral, l'esprit de l'analyse infinitésimale, de donner une idée de ses méthodes, de sa puissance, de sa beauté. Les auteurs sont enthousiastes :

"The power and beauty of this method, compared to the theory of limits is sometimes astonishing. As Leibniz knew, the method of infinitesimals is the easy, natural way to attack these problems, while the theory of limits represents the lengths to which mathematiciens were willing to go to avoid them", écrivent-ils .11 avant de conclure en mettant l'accent sur le point essentiel à la cohérence de l'entreprise : la nécessité de préciser la notion de formule :

"The most important part of our work will be to guarantee that formulas that work for reals, also work for hyperreals, including infinitesimals. To accomplish this, we will have to have a very good idea of what we mean by "formula" and this is where the techniques of mathematical logic will come in. Earlier mathematiciens who attempted to built the hyperreals were defeated by this idea... It was only with the concept of a mathematical language that Robinson was able to bring order out of chaos".

Dans le chapitre II, on présente avec de nombreux exemples ce qu'est un langage du premier ordre et une interprétation d'un tel langage. On précise également le langage L qui sera utilisé dans la suite à propos des nombres réels. Il est défini comme suit :

- -symboles de constantes : un pour chaque nombre réel
- -symboles de variables : x_1, x_2,.... a, b, c, ...
- -symboles de fonctions : un pour chaque fonction sur les réels, donc en particulier pour les quatre opérations

(+, x, -, $\div$)

-symboles de relation : un pour chaque relation sur les réels, donc en particulier pour l'égalité et l'ordre.

-les connecteurs et les quantificateurs (les quantifications ne pouvant porter que sur des variables du langage).

Dans le chapitre III, les hyperréels sont définis, d'abord sur un mode axiomatique :

"Definition : A structure S is a hyperreal number system if it has the following three properties :

1. S contains the real number system. By this we mean not only that all real numbers are in S, but also that every function and relation defined on reals is also defined on numbers in S.

2. S contains an infinitesimal that is, there is a number ⊙ in S such what ⊙ > o and yet ⊙ < r for every positive real number r.

3. The same sentences of L are true in both S and $\mathbb{R}$."

puis sur un mode "constructiviste".* Pour ce faire, on admet l'existence d'un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ et un tel ultrafiltre $\mathcal{U}$ étant choisi, on construit un système de nombres hyperréels noté $\mathbb{HR}$ en considérant les suites de réels et en prenant le quotient de cet ensemble par la relation d'équivalence associée à l'ultrafiltre :

$$f \sim g \iff \{ n \in \mathbb{N} \ / \ f(n) = g(n) \} \in \mathcal{U}$$

* Il faut noter que cette construction est encore plus simple que celle de J.H. Keisler qui passait au quotient à partir de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Il faut noter aussi qu'elle n'est constructive qu'entre guillemets" puisqu'on ne peut exhiber d'ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. De plus, si dans tous les cas, la suite $(1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots)$ correspond à un hyperréel infiniment petit, suivant le choix de l'ultrafiltre, c'est-à-dire suivant que l'ensemble des pairs appartienne ou non à l'ultrafiltre, la suite $(1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots)$ correspondra, elle, soit à un infiniment petit, soit à un entier infiniment grand.

Comme on le voit immédiatement, $\mathbb{R}$ se plonge naturellement dans $H\mathbb{R}$, la classe associée au réel r étant celle de la suite constante de valeur r et les infiniments petits ne sont autres que les classes d'équivalence des suites de limite 0.

Il s'agit ensuite de démontrer que le système ainsi construit satisfait les axiomes 1, 2, 3. Ceci passe par l'interprétation des symboles de fonction et de relation de L dans $H\mathbb{R}$. Elle se fait "naturellement" c'est-à-dire en posant :

-pour un symbole de relation R à k places, f un symbole de fonction à k variables, $r_1,..r_k$ des hyperréesl et $U_1...U_k$ des suites représentant ces hyperréels :
$f(r_1,.., r_k)$ est l'hyperréel dont un représentant est la suite de terme général $f(U_1\ (n),..., U_k\ (n))$
$R(r_1,... r_k)$ est vraie si et seulement si $\{ n \mid (U_1\ (n),...U_k\ (n))$ vraie dans $\mathbb{R}\} \in \mathcal{U}$

On montre bien sûr que ceci est indépendant des représentants choisis.

Le chapitre IV, est consacré à la structure de la droite hyperréelle. On y montre en particulier que tout hyperréel fini (limité dans le langage de Nelson) est infiniment proche d'un réel standard et d'un seul. La démonstration est "constructiviste": on tronque le développement décimal de l'hyperréel aux décimales d'ordre standard.

Le chapitre V, est consacré à la continuité.

Le chapitre VI, traite du calcul intégral. Il faut noter que les définitions données rendent compte tout à fait de la pratique physicienne usuelle du découpage en tranches élémentaires pour les calculs d'aire et de volume, et la légitiment :

En effet, f* étant une fonction définie sur a, b et $x_1...x_n$ une subdivision de $[a, b]$ de pas Δx on pose :

$$S_a^b\ f(x)\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x + f(b)\ q \qquad (q = b - x_n)$$

Cette fonction de x se prolonge aux hyperréels donc aux infiniment petits et par définition f sera dite intégrale sur $[a, b]$ si et seulement si :

---

* Note : f est une fonction standard de R dans R, a, b, des nombres réels ; en d'autres termes f, a, b, correspondent à des symboles du langage L.

$\int_a^b f(x)\,dx$ est fini et a la même partie standard pour tout infiniment petit dx. C'est cette partie standard commune qui sera l'intégrale.

Ainsi donc, quand on coupe en tranches infiniment petites, la somme obtenue n'est en général pas égale à l'intégrale mais elle n'en diffère que d'un infiniment petit.

Le chapitre VII, traite, lui, du calcul différentiel. Encore une fois, la définition non standard de la dérivée constitue une traduction tout à fait rigoureuse des pratiques usuelles des utilisateurs non mathématiciens puisque :

si f est une fonction définie au voisinage du réel b, f est dérivable en b si et seulement si :

$$\frac{f(b + dx) - f(b)}{dx} \text{ est fini et à même partie standard}$$

pour tout infiniment petit dx. C'est cette partie standard qui sera la dérivée de f au point b.

Le chapitre VIII, est consacré au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

Le chapitre IX, traite des suites et séries, la définition non-standard de la convergence des suites étant :

Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel a si et seulement si $U_N \sim a$ pour tout entier infiniment grand N.

Le chapitre X, traite de la formule de Taylor et des séries entières.

Le chapitre XI, est consacré à la topologie de $\mathbb{R}$ (notions d'ouvert, de fermé, de compact, de connexe). Les auteurs y démontrent également les théorèmes classiques sur les fonctions continues et uniformément continues.

Enfin, dans le dernier chapitre, le XII, ils établissent l'équivalence entre les définitions classiques et les définitions non-standard.

Ces quelques précisions sur le manuel de référence de l'enseignement étant données, venons-en au texte de l'examen et à l'analyse des copies des étudiants.

B/Texte de l'examen - Analyse des copies

L'examen est formé de 6 questions indépendantes (cf. texte page suivante) et nous procèderons d'abord à une analyse question par question.

Question 1

A priori, seule la phrase n°2 peut-être écrite dans le langage L :

- la phrase 1 fait intervenir une quantification sur des fonctions, or L ne permet pas de telles quantifications.
- les phrases 3 et 4 font intervenir les notions "d'infiniment petits" et "d'ombre" qui ne s'expriment pas dans L.

Ces justifications sont celles que l'on attend des étudiants. Remarquons simplement, même s'il est hors de question, dans un cours d'initiation à l'A.N.S., de se lancer dans de telles subtilités, que, de manière générale, il n'est pas aisé de prouver réellement qu'un énoncé qui n'est pas écrit dans un langage L n'a pas d'équivalent dans ce langage. De telles preuves sont le plus souvent indirectes : on suppose que l'énoncé a un équivalent dans le langage et on aboutit à une contradiction. Par exemple, ici

- si $\sim$ pouvait s'exprimer dans L $\exists x (x \sim 0 \text{ et } x \neq 0)$, vrai dans $H\mathbb{R}$, serait vrai dans $\mathbb{R}$
- si l'ombre pouvait s'exprimer dans L, alors $\sim$ s'exprimerait dans L puisque :

$$\forall x\ \forall y\ [x \sim y \Leftrightarrow [x - y] = 0]$$

Pour l'analyse des réponses, nous distinguerons les réponses elles-mêmes des justifications qui les accompagnent :

	réponse juste	réponse fausse	non traité
phrase 1	12	10	2
phrase 2	22	1	1
phrase 3	18	5	1
phrase 4	15	8	1
phrase 3 et phrase 4	13	10	1

NN 119 - A. CHENCINER

ANALYSE NON STANDARD Examen de Juin 1984.

EXAMEN TERMINAL

Durée : 3 heures

1) Les phrases suivantes peuvent-elles être écrites dans le langage L ?

.-Toute fonction continue définie sur un intervalle fermé borné est majorée.

.-Il existe un point x dans l'intervalle $[0,2\pi]$ tel que $\sin x = 0{,}53$

.-1,5 n'est pas infiniment petit

.-Tout hyperréel de l'intervalle $[0,1]$ possède une ombre qui appartient à cet intervalle

2) Si N est un entier infiniment grand, $\frac{N}{2}$ est-il entier ?

3) Soient x et y deux hyperréels non infiniment grands ; on note $[x]$ et $[y]$ leurs ombres respectives. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

.- $(x \geqslant y) \rightarrow ([x] \geqslant [y])$

.- $(x > y) \rightarrow ([x] > [y])$

.- $([x] \geqslant [y]) \rightarrow (x \geqslant y)$

- $([x] > [y]) \rightarrow (x > y)$

4) Montrer que si x est infiniment petit, il en est de même de $x \log x$.

5) Soit f une fonction réelle. On suppose que quel que soit l'hyperréel x, f(x) n'est pas infiniment grand.

.- (i) Montrer qu'il existe un réel M tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$

.- (ii) En déduire que $\forall x \in {}^{*}\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$

6) On considère la suite $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4\ldots$ Que peut-on dire de cette suite pour les valeurs infiniment grandes de l'indice ?

Notons de plus que 7 élèves donnent des réponses différentes pour les phrases 3 et 4, et que 6 élèves ont toutes les réponses exactes.

Erreurs dans les réponses :

-pour la phrase 1 : 9 étudiants écrivent l'énoncé pour une fonction f fixée, oubliant la quantification
2 quantifient sur f
1 essaie de démontrer l'énoncé

-pour la phrase 2 : la seule erreur commise consiste à dire que $x \in [0, 2\pi]$ ne peut pas s'écrire dans L, car $\in$ n'est pas un symbole de L. On tombe là dans les subtilités citées plus haut " $x \in [0, 2\pi]$ " n'est pas un énoncé de L mais il est équivalent à " $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ " qui, lui, est dans L.

-pour les phrases 3 et 4 : la plupart des erreurs proviennent d'écritures contenant les symboles $\sim$, [ ] ou ⊚ * (9 expressions de ce type sont écrites, nettement plus contenant [ ] que contenant $\sim$). Il y a aussi 2 traductions fausses de la phrase 3 ($\exists x \; 0 < x < 1{,}5$) et un élève qui démontre que les deux phrases sont vraies.

Justifications (pour les réponses exactes)

-pour la phrase 1, les justifications avancées sont celles attendues du type : "On ne peut pas quantifier des fonctions dans L" parfois maladroitement exprimées :

"Dans le langage L, on ne peut pas considérer un ensemble de fonctions" (3 élèves).

Une seule justification est hors de propos : "La continuité n'a pas de sens pour les hyperréels non-standard".

-pour la phrase 2, tous les étudiants sauf un (qui essaie de démontrer l'énoncé) formalisent : $\exists x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ et $\sin(x) = 0{,}53)$

* Le symbole ⊚ est utilisé dans le manuel de référence pour désigner un infiniment petit.

-pour les phrases 3 et 4, les justifications avancées sont essentiellement de deux types :

a) celles qui s'appuient sur le fait que les notions d'infiniment petit et d'ombre ne sont pas exprimables dans L (explicité 24 fois)

b) celles qui s'appuient sur l'impossibilité de traduire la notion de réel ou d'hyperréel dans L (explicité 12 fois)

Exemples :

"On ne peut pas définir ombre dans L"
"On ne peut pas traduire infiniment petit dans L"
"Les notions d'infiniment petit et d'ombre nécessitent la notion de standard et de non-standard, de réel et d'hyperréel or on ne dispose pas de mots dans le langage L pour les distinguer"
"La notion d'infiniment petit fait intervenir de par sa définition (plus petit que tout réel positif), le terme "réel" ce qui n'est pas possible dans L"
"Hyperréel n'est pas traduisible dans L"
"On ne peut utiliser de constantes hyperréelles dans L"
"C'est le mot hyperréel qui gâche tout"

Notons que dans le cas présent, dans l'énoncé 4, le terme "hyperréel" ne gâche rien du tout , "tout hyperréel de l'intervalle $[0, 1]$"

s'écrivant :

$\forall x \; 0 \leqslant x \leqslant 1$ (cette formule suivant que l'on se place dans $\mathbb{R}$ ou dans $H\mathbb{R}$ signifiant : pour tout réel (resp. tout hyperréel) de $[0,1]$)

De ce fait, suivant leur formulation, certains arguments de type b seront soit discutables, soit franchement inacceptables.

Enfin, trois élèves font intervenir le fait que "$\in$" n'appartient pas au langage L et un semble confondre les notions "d'exprimable dans L" et de "vrai".

En conclusion, les réponses à cette question montrent des connaissances certaines chez la majorité des étudiants concernant le langage L.

Ceci est important, les difficultés d'ordre logique ayant souvent été considérées comme un obstacle majeur pour les étudiants débutants.

Les erreurs, le plus souvent, ne sont pas grossières : il n'y a que deux quantifications sur f dans la phrase 1,* très peu d'énoncés écrits avec le symbole $\sim$ sont dits appartenir à L.

On a l'impression que les erreurs, les difficultés d'expression concernent plutôt des points délicats que l'on ne peut espérer maîtriser dans une initiation de ce type :

- problèmes posés par les concepts dérivés comme l'ombre (ou $\sim$ n'est pas explicite)
- problèmes posés par l'équivalence d'énoncés
- problèmes posés par le fait qu'un énoncé de L à 2 interprétations possibles : l'une dans $\mathbb{R}$, l'autre dans H $\mathbb{R}$.

* Notons que l'oubli de la quantification sur f correspond à la pratique mathématique usuelle où ce type de quantification reste implicite.
Ex : théorème : l'image d'un compact par une fonction continue est un compact, la démonstration commençant par :
soit f une fonction continue et k un compact...

Notons également que l'on peut distinguer parmi les formules qui n'appartiennent pas à L deux types :

- le type 1 constitué par celles qui sont des formules de mathématiques classiques,
- le type 2 constitué par celles qui font appel au prédicat non-standard où à des prédicats dérivés (équivalence, ombre, ...).

Certaines réponses produites pourraient aussi traduire le fait que le critère essentiel de rejet d'une formule hors de L, pour les étudiants, est la reconnaissance de son appartenance en type 2 (ce serait effectivement le critère si l'on se plaçait dans une perspective Nelsoniènne).

Question 2

On peut s'attendre à priori pour cette question à 2 types de justifications correctes, les unes "constructives", les autres formelles.

En effet, on peut exhiber des entiers infiniment grands pairs et impairs, par exemple N_1 et N_2, N_1 étant la classe d'équivalence de la suite (0, 2, 4, ... 2n, ...), N_2 étant la classe d'équivalence de la suite (1, 3, 5, ... 2n + 1, ...), ou même plus simplement, sans recourir à la définition des hyperréels, 2N et 2N + 1, pour N entier infiniment grand.

On peut aussi exprimer dans L des propriétés des entiers, propriétés qui interprétées dans H ℝ, conduiront à l'existence d'entiers infiniment grands pairs ou impairs, par exemple :

- l'alternance pair, impair
- le fait qu'il existe des entiers pairs ou impairs aussi grands que l'on veut

Par contre une conception naïve des entiers infiniment grands pourrait conduire à des réponses erronées comme : Pour tout entier infiniment grand N, $\frac{N}{2}$ est entier car si N est infiniment grand, on peut toujours le partager en deux.

Tous les élèves sauf 3 donnent la réponse exacte : " $\frac{N}{2}$ n'est pas nécessairement entier". Un n'aborde pas la question, un affirme que $\frac{N}{2}$ est toujours entier, le troisième affirme que l'énoncé est faux car l'appartenance n'étant pas un symbole de L, il ne peut être écrit dans L.

Pour ce qui est des justifications, on en distingue essentiellement trois types :

type A : Grossièrement, elles consistent à dire : $\frac{N}{2}$ est entier si et seulement si N est pair.
C'est vrai dans $\mathbb{R}$, donc c'est vrai dans H $\mathbb{R}$ et il existe des infiniment grands impairs.

type B : Elles reposent sur l'idée que l'alternance pair-impair vraie dans $\mathbb{R}$, se prolonge à H $\mathbb{R}$.

type C : Elles exhibent un infiniment grand impair : 2N + 1 pour N entier infiniment grand.

La répartition entre les trois types étant :

8 pour le type A, 7 pour le type B, 6 pour le type C.

Citons en quelques exemples :

"$\exists x(I(x) \wedge \neg I(\frac{x}{2}))$" est une phrase de L vraie dans R, donc vraie dans H $\mathbb{R}$..." (le prédicat I correspondant à l'appartenance à $\mathbb{N}$)

"Soit N un entier infiniment grand, 2N l'est aussi comme 2N + 1 or $\frac{2N+1}{2} = N + \frac{1}{2}$. Or N est entier mais $\frac{1}{2}$ ne l'est pas donc si N est entier, $\frac{N}{2}$ ne l'est pas toujours".

"Notons $I(n) =$ " $n \in \mathbb{N}$" et $J(n) =$ " $n \notin \mathbb{N}$ "

$\forall n, I(n), (I(2n+1) \wedge J(\frac{2n+1}{2}))$ (1)

La phrase (1) est écrite dans L. Elle est vraie dans $\mathbb{R}$ donc elle est vraie dans H $\mathbb{R}$, donc si N est un entier infiniment grand, $\frac{2N+1}{2}$ lui n'est plus un entier".

"Supposons $\frac{N}{2}$ entier infiniment grand, c'es-à-dire N infiniment grand pair, par contre N + 1 est toujours un entier infiniment grand mais $\frac{N+1}{2}$ n'est plus un entier".

A la lecture des copies, une chose est frappante : la référence constante au langage L (même dans le cas de justifications constructives).

18 étudiants sur 23 écrivent explicitement qu'une propriété plus ou moins formalisée, est une propriété du langage L, donc que puisqu'elle est vraie dans $\mathbb{R}$, elle est vraie dans H $\mathbb{R}$.

Malheureusement, la propriété choisie ne permet pas nécessairement de conclure, par exemple s'il s'agit de :

" $\exists x \left(I(x) \wedge \neg I\left(\frac{x}{2}\right) \right)$ " $I(x)$ signifiant $x \in \mathbb{N}$

Il semble, à ce propos, qu'un certain nombre d'étudiants perçoivent l'extension à H $\mathbb{R}$ comme une extension à H $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$: la propriété d'existence d'entiers impairs est vraie dans $\mathbb{R}$, dire qu'elle est vraie dans H $\mathbb{R}$, c'est dire qu'il existe des entiers infiniment grands impairs.

Il faut signaler également qu'une seule copie utilise la signification des hyperréels en termes de suite :

"Soit N un entier infiniment grand

$N = (a_i)\ i \in \mathbb{N}$ soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i$ est un entier $\}$

A est un ensemble gros

si $A' = \{i \in N \mid a_i$ est pair $\}$

A' ou $\complement A'$ appartient à l'ensemble des parties grosses de N

$\frac{N}{2}$ est entier ou ne l'est pas suivant le choix de l'ultrafiltre."

Mais plutôt que de poursuivre dans cette direction, l'étudiant concerné revient alors à une justification de type A.

$\boxed{\text{Question 3}}$

Notons que (3) est la réciproque de (1) et qu'à l'interversion de x et y près, (2) et (4) sont les contraposées de (3) et (1).

Les réponses correctes sont : Vrai - Faux - Faux - Vrai

Les résultats sont les suivants :

VFFV	VFVV	VFVF	VVFV	FVFV	VVVØ
15	3	2	2	1	1

(ø : pas de réponse)

Cette question est donc bien réussie. Les justifications ne sont pas toujours données. Elles sont souvent assez lourdes, algébriques, avec de multiples disjonctions de cas (4 élèves seulement représentent la droite hyperréelle).

Parmi les erreurs, citons :

(1) - $\begin{cases} x \geqslant y \Rightarrow [x] \geqslant [y] & \text{est vrai} \\ x = y \Rightarrow [x] \simeq [y] & \text{est vrai} \end{cases}$

donc $x > y \Rightarrow [x] > [y]$ est vrai

(2) - $[x] \geqslant [y] \Rightarrow x \geqslant y$ est un énoncé vrai dans $\mathbb{R}$, donc dans $H\mathbb{R}$

(3) - $x \neq y \Rightarrow [x] \neq [y]$ car l'ombre est unique.

$\boxed{\text{Question 4}}$

Si l'on suppose connu le résultat classique : $\lim\limits_{x \to 0+} x\log(x) = 0$ (4) n'est autre que l'expression non standard de ce résultat.

Quelles sont les réponses des étudiants ?

3 élèves n'abordent pas l'exercice,

11 donnent une démonstration correcte :

- -1 seul en utilisant la limite,
- -9 en prolongeant la fonction par continuité en 0 et en reconnaissant le critère non-standard de la continuité, ce qui peut paraître curieux.
- -1 en faisant un raisonnement complexe mais intéressant, que nous résumons : .f est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$

  .par continuité, il s'ensuit que f prend toutes les valeurs réelles de $]-\frac{1}{e}, 0[$ lorsque x décrit $]0, \frac{1}{e}[$

  .si $x \simeq 0$ $\forall y \in]0, \frac{1}{e}[\cap \mathbb{R}$ $0 < x < y$

  donc $\forall y \in]0, \frac{1}{e}[\cap \mathbb{R}$ $f(y) < f(x) < 0$

  et $\forall z \in]-\frac{1}{e}, 0[\cap \mathbb{R}$ $z < f(x) < 0$ soit $f(x) \sim 0$

Les erreurs sont variées et ne concernent pas toutes l'analyse non standard (erreurs dans les manipulations d'inégalités, erreurs sur la limite en 0 de la fonction logarithme...).

Pour ce qui est de l'analyse non standard, nous avons retenu :

(1) -un transfert illégal*: l'énoncé $x \sim 0 \Rightarrow x\log x \sim 0$ est vrai dans $\mathbb{R}$ donc dans H $\mathbb{R}$.

(2) -une dichotomie illicite : si x est infiniment petit, log x est soit infiniment petit, soit réel.

(3) -l'affirmation qu'un nombre inférieur à un nombre infiniment petit est lui aussi infiniment petit : $x\log x < x$ donc $x\log x \sim 0$

(4) -l'oubli que l'ombre d'un nombre positif strict peut-être nulle : **

si $x > o$ $\log ([x])$ est limité et par continuité

$\log x \sim \log ([x])$ donc $x\log x \sim x \log ([x]) \sim o$ si $x \sim o$

Ainsi donc, environ la moitié des étudiants reconnaissent là, la définition non standard de la limite, via celle de la continuité, qui leur est sans doute plus familière. L'autre moitié essaie de démontrer le résultat demandé, le plus souvent sans utiliser le fait que $\lim_{x \to 0} x\log x = 0$, et presque tous échouent.

On peut se demander pourquoi ils ne font pas intervenir cette limite dans la démonstration, car l'expérience montre que c'est une des limites connues de la plupart des étudiants. Est-ce parce qu'ils ne le jugent pas utile, est-ce parce qu'ils se l'interdisent ?

$\boxed{\text{Question 5}}$

La démonstration attendue nous semble être la suivante :

Puisque pour tout hyperréel x, f(x) n'est pas infiniment grand, l'énoncé :

$\exists y \ \forall x \ \ f(x) \leq y$ est vrai dans H $\mathbb{R}$: il suffit de choisir y infiniment grand.

Comme f est une fonction réelle, cet énoncé est un énoncé de L donc il est vrai aussi dans $\mathbb{R}$ d'où (i).

* L'élève ayant fait cette erreur avait parfaitement réussi les questions précédentes.

** Correspondant à une question 3 réussie et correctement justifiée.

Choisissons un tel M réel: l'énoncé $\forall x\ f(x) \leqslant M$, écrit dans L, est vrai dans $\mathbb{R}$ donc dans $H\mathbb{R}$ d'où (ii)

En fait, cet exercice revient donc à montrer que, pour une fonction réelle, on a l'équivalence suivante :

$$\forall x \in H\mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant y \Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H\mathbb{R}\ f(x) \leqslant y \quad *$$

ou, en d'autres termes que, dans l'énoncé :

$\forall x \in H\mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant y$ on peut intervertir les quantifications $\forall$ et $\exists$

La résolution de cet exercice exige non seulement que l'on sache ce qu'est le langage L, mais aussi que l'on sache jouer avec les deux interprétations naturelles de ce langage : dans $\mathbb{R}$ et dans $H\mathbb{R}$.

Il sera donc intéressant de rapprocher les résultats à cet exercice de ceux aux questions 1 et 2.

D'autre part, il est bien connu des enseignants que l'alternance des quantificateurs pose d'énormes problèmes aux étudiants débutants.

On peut se demander comment elle est perçue dans cet exercice où l'on montre justement que l'interversion est possible.

<u>Réponses des étudiants</u> :

	Question i	Question ii	Question i + ii
Juste	11	16	10
Faux	12	5	11
Non abordé	1	3	3

* Note : Si l'on utilisait l'axiomatique Nelsonnienne, on ne serait pas obligé ici de procéder en deux temps.
En effet $\exists y\ \forall x f(x) \leqslant y$ étant vrai et standard, par transfert on en déduirait immédiatement :

$$\exists^{st} y \quad \forall x \quad f(x) \leqslant y$$

-toutes les réponses correctes sont conformes à la démonstration attendue, par exemple :

" $\exists M \ \forall x \ f(x) \leq M$ est une phrase écrite dans le langage L et qui est vraie dans H $\mathbb{R}$. Il suffit de prendre pour M un infiniment grand positif, (cela provient du fait que f(x) est limité pour $\forall x$ hyperréel) donc $\exists M \ \forall x \ f(x) \leqslant M$ est vraie dans $\mathbb{R}$.

On en déduit un M réel qui majore f(x) pour x réel

$\forall x \ f(x) \leqslant M$ est une phrase de L où M est une constante réelle, est vraie dans $\mathbb{R}$ donc dans H $\mathbb{R}$. On en déduit

$$\forall x \in H\mathbb{R} \quad f(x) \leqslant \underset{= \text{réel}}{M}$$ "

-quant aux erreurs, pour la question i), 6 sont du type interversion (EQ) de quantificateurs, par exemple :

" i) $\forall x \ \exists M \ f(x) \leq M$

cette phrase est vraie dans H $\mathbb{R}$ (et écrite dans L) car f(x) n'est pas infiniment grand, il suffit donc de choisir M infiniment grand, donc vrai dans $\mathbb{R}$.

On a bien $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M \quad f(x) \leqslant M$

ii) on fixe M réel, on sait d'après (i) que la phrase $\forall x$ $f(x) \leqslant M$ est vraie dans $\mathbb{R}$.

Donc puisqu'elle est écrite dans L, elle est vrai dans H $\mathbb{R}$.

On a donc $\forall x \in H\mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$"

La plupart des étudiants, comme dans l'exemple cité, prennent M infiniment grand, mais il semble que pour eux, les deux énoncés :

$\forall x \ \exists M \ f(x) \leqslant M$ ou et $\exists M \ \forall x \ f(x) \leqslant M$ soient synonymes.

(E2) -2 arrivent à l'énoncé $\exists M \ \forall x \ f(x) \leqslant M$ en disant que l'on a $f(x) < x$ pour x infiniment grand, donc, par permanence pour x réel assez grand d'où l'existence d'un M tel que $f(x) \leqslant M$.

(E3) -1 écrit que cet énoncé découle directement des hypothèses.

(E4) -1 que f est majorée par un réel car, puisque elle est réelle et non infiniment grande, elle a une limite réelle.

(E5) -2 donnent des justifications incompréhensibles.

Pour la question ii), les erreurs sont beaucoup moins nombreuses, 16 étudiants passant sans problème de l'interprétation dans $\mathbb{R}$ à celle dans H $\mathbb{R}$.

Notons que 3 des 5 erreurs commises consistent à reprendre M infiniment grand au lieu du M réel que l'on vient d'obtenir et à effectuer donc un transfert illégal, l'énoncé $\forall x \quad f(x) \leqslant M$ n'étant pas dans L.

Ainsi donc la plupart des erreurs commises ne tiennent pas à la difficulté que nous avions signalée au début : la nécessité de jouer avec les deux interprétations de L, mais à la non-reconnaissance de la différence entre $\forall \exists$ et $\exists \forall$, difficulté tout à fait standard.

Question 6

La question 6 est ouverte, mais on pourrait s'attendre à des réponses du type suivant :

Soit n un entier standard, la suite donnée est définie par :

-si $n = 2p \quad U_n = \frac{1}{p+1}$

-si $n = 2p + 1 \quad U_n = p+1$

Cette définition est encore valable pour N entier infiniment grand donc :

-si N est un entier infiniment grand pair, $U_N \sim 0$
-Si N " " " impair, U_N infiniment grand

Ceci est l'expression non standard des deux faits suivants :

-la sous-suite des termes d'indice pair tend vers 0.

-la sous-suite des termes d'indice impair tend vers l'infini.

ou à des réponses procédant en sens inverse : du standard au non-standard.

Que répondent exactement les étudiants et sous quelle forme en particulier traduisent-ils la convergence et la divergence des sous-suites ?

-7 élèves n'abordent pas l'exercice.

Parmi les 17 restant :

-5 commettent des erreurs grossières (confusion suite, série, suite convergente ou divergente suivant l'indice où l'on s'arrête, suite de limite finie car l'écart entre deux termes successifs diminue, suite tendant vers $+\infty$).

-2 mentionnent des oscillations de plus en plus grandes, par exemple :

"Pour les valeurs infiniment grandes de l'indice, la suite oscille entre des valeurs alternativement de plus en plus grandes et de plus en plus petites".

-10 font intervenir explicitement les deux sous-suites des termes d'indices pairs et impairs.

Parmi ces 10 ;

* 6 disent que les valeurs seront alternativement infiniment grandes et infiniment petites, en précisant ou non les limites.
* 1 donne juste les limites des sous-suites.
* 1 donne une formulation mixte (U_{2N} tend vers 0 , $U_{2N}+1$ devient infiniment grand).
* 1 représente les deux sous-suites comme des hyperréels l'un infiniment petit, l'autre infiniment grand (il avait déjà utilisé des ultrafiltres dans la question 2).
* 1 se préoccupe de savoir si les formules qu'il obtient sont vraies pour N infiniment grand, et ceci obtenu, ne conclut pas.

-Un étudiant procède du standard au non-standard :

"On peut extraire de cette suite deux sous-suites, l'un formé avec les indices pairs et l'autre avec les indices impairs.
On a la première $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ qui tend vers 0 et donc qui pour les valeurs infiniment grandes de l'indice prend des valeurs infiniment petites.
La seconde 1, 2, 3, 4, ... tend vers l'infini et donc pour des valeurs infiniment grandes de l'indice prend des valeurs infiniment grandes".

Il faut noter de plus, le mélange qui existe dans certaines copies entre les formulations non-standard de la convergence de type statique, et les formulations dynamiques usuelles :

"Quand $n \longrightarrow N$, hyperréel infiniment grand, $\frac{Un+1}{Un}$ n'est pas finie".

"Donc, $\forall N$, N infiniment grand, le terme d'indice N tend vers $+\infty$ "

"Les Vn, à partir d'un certain rang pour n, seront infiniment petits, les Wn infiniment grands"

"Pour des valeurs infiniment grandes de l'indice, $U_{2N} \to 0$"

"La suite 1, $1, \frac{1}{2}$, $2, \frac{1}{3}$ ... tend vers $+\infty$, donc pour N infiniment grand, $U_N \to +\infty$"

Et même dans les cas où l'imbrication est moins forte, très souvent le statique et le dynamique se côtoient.

Résultats globaux étudiant par étudiant

Après cette présentation des résultats question par question, nous donnons dans le tableau ci-après les résultats globaux étudiant par étudiant. Les codes utilisés font référence à l'analyse qui précède et sont à décoder de la façon suivante :

-Dans toutes les questions, le symbole $\emptyset$ désigne l'absence de réponse

-<u>Question 1</u> : Colonne 1 : codage des réponses phrase par phrase (+ réponse juste, — réponse fausse)

Colonnes 2 à 4 : codage des justifications phrase par phrase (+ justification acceptable,-justification inacceptable.

Les types de justifications sont de plus précisés :

- -les types a et b sont ceux dégagés dans l'analyse des réponses.
- -D signifie : essai de démonstration des énoncés.
- -F signifie : énoncé écrit pour une fonction f fixée (phrase 1)
- -$\forall$ signifie : quantification sur la fonction f (phrase 1)
- -$\in$ correspond au rejet de L parce que le symbole " $\in$ " n'est pas dans L.
- -E correspond à l'écriture d'un énoncé standard erronné (phrases 3, 4).

-[ ] , $\sim$, ⊚ correspondent à l'écriture d'un énoncé contenant ces symboles.

-V code la confusion apparente entre "exprimable dans L" et "Vrai".

-<u>Question 2</u> : Colonne 1 : réussite ou échec
Colonne 2 : type de justification

-les lettres A, B, C font référence aux types introduits dans l'analyse des réponses.

-la lettre L code la référence au langage : L^- désignant une référence faible du type "c'est vrai dans $\mathbb{R}$ donc dans H $\mathbb{R}$", L correspondant à la justification de cette affirmation par la mention de l'appartenance de l'énoncé concerné à L.

-U fait référence à l'utilisation d'ultrafiltres.

-F code la réponse fausse : l'énoncé est vrai.

-P code une tentative qui n'aboutit pas de recherche d'un énoncé de L, vrai dans $\mathbb{R}$, qui permettrait de conclure.

-<u>Question 3</u> :

La colonne fournit le codage des réponses:réussite/échec. Nous n'avons pas tenu compte des justifications. Les nombres (1), (2) et (3) font référence aux erreurs citées dans l'analyse des réponses.

-<u>Question 4</u> : Colonne 1 : réussite/échec
Colonne 2 : méthode utilisée

Les erreurs 1, 2, 3, 4 correspondent à celles citées dans l'analyse des réponses.

-<u>Question 5</u> : Colonne 1 : réussite/échec à i)

EQ, E2, E3, E4, E5 correspondent aux erreurs répertoriées

Colonne 2 : réussite/échec à ii)

$E\infty$ est l'erreur consistant à reprendre M infiniment grand.

-<u>Question 6</u> : Colonne 1 : réussite/échec
Colonne 2 : types de réponses

EG signifie erreur grossière, les informations entre parenthèses précisent ces erreurs.

$\sim o, \infty g$ correspond aux réponses prévoyant des valeurs alternativement infiniment grandes et infiniment petites.

$\to o, \to \infty$ correspond à la donnée des limites des sous-suites.

$H\mathbb{R}$ correspond à la représentation des sous-suites par des hyperréels.

Quelques commentaires

Ce tableau complète à notre avis utilement les informations fournies par l'analyse précédente.

Il montre des écarts très importants entre les étudiants (en première approximation on a envie d'opposer par exemple le groupe formé de OM, LE, TRA, HE, PAG, LE, SA, CL, dont les résultats sont très faibles, au groupe formé de AU, NO, PU, CA, MA).

Il montre aussi que, même si des erreurs subsistent, tous les étudiants sauf les huit premiers cités semblent avoir tiré profit de cet enseignement.

Par exemple, BEN et TH qui sont parmi ceux qui réussissent globalement moins de la moitié des exercices, justifient parfaitement la non-appartenance des phrases 3 et 4 à L dans l'exercice 1 et réussissent l'exercice 5 qui exige un bon maniement de L et de ses deux interprétations naturelles.

Si l'on se rappelle qu'il s'agissait là d'un enseignement optionnel, ces résultats nous semblent devoir être considérés comme très encourageants.

Etudiants	Question 1 réponses	justifications				Question 2 réussite/échec type de réponse		Question 3 réponses	R/E	Question 4 type de réponse	Question 5 i)	ii)	R/E	Question 6
OM	- + - -	-D	-D	-D	-D	-	A	+ + - -	-	Limite en 1	- E5	-	-	EG
PU	+ + + +	+	+	+a	+a	+	C, L	+ - + + (1)	-	Erreurs inégalités, limites	+	+	+	∿ o, ∞g
MA	- + + +	-F	+	+ab	-b	+	B, L^-	+ + + +	+	Limite	-EQ	+	+	∿ o, ∞g, limites
DE	- + + +	-F	+	+a	+b	+	B, L	+ + + +	∅	∅	-EQ	+	+	Limites, ∿ o, ∞ g
BEL	+ + + -	+	+	+a	-[ ]	+	B, L^-	+ + + +	+	Continuité	-EQ	+	∅	∅
CA	+ + + +	+	+	+a	+a	+	C, L	+ + + +	-	Erreur 1	+	+	+	→ o, ∞g
PAT	∅ ∅ ∅ ∅	∅	∅	∅	∅	+	C	+ + + +	+	Raisonnement complexe	+	+	∅	∅
PH	+ + + +	+	+	+a	+b	+	C, L	+ + + +	-	Erreur 4	+	$-E_{\infty}$	∿	Formule
TO	+ + - -	+	+	-E	- ∿	- ∿	A, L	+ + (2) +	+	Continuité	+	+	+	∿ o, ∞g
LE	- + - -	-V	+	-[ ]	-[ ]	-	A, L	+ + - +	-	Erreur limite	-E2	+	-	Oscillations
TRA	- + + -	-F	+	+b	-[ ]	-	P, L	+ + - +	+	Continuité	-EQ	-EQ	-	Oscillations divergence
HE	- + + +	-F	+	+a	-b	-	A, L^-	+ + + +	-	Erreur 2	-EQ	-EQ	-	EG (→ ∞)
BEN	- + + +	-F	+	+a	+a	-	F, L	- - + +	-	Erreur 3	+	+	-	EG (→ ℓ)
PAG	- + + +	-F	+	aV	abV	-	A	+ + + +	-	Erreur 3	-E4	$-E_{\infty}$	-	EG (CV ou DV)
LE	+ + + -	+	+	+a	-[ ]	-	A, L^-	+ + + +	∅	∅	-E2	∅	∅	∅
SA	+ - - +	+	-∈	-⊙	-∈	+	B	+ - + +	-	Inachevé	∅	∅	-	EG (suite - série)
TH	- + + +	-F	+	+a	+a	∅	∅	+ + - -	+	Continuité	+	+	∅	∅
NO.	+ + + +	+	+	+a	-b	+	C, L	+ + + +	+	Continuité	+	+	+	∿ o, ∞g, limites
TRE	+ + - +	+	+	-E	-b	+	B, L^-	+ + + +	-	Inachevé	-E3	+	+	∿ o, ∞g
RI	+ + + -	+	+	+a	-[ ]	+	B	+ + + +	∅	∅	+	+	∅	∅
CH	+ + + +	-	+	+ab	+a	+	A, L	+ - - ∅ (3)	+	Continuité	+	+	∅	∅

PAL	∅ + + -	∅	+	+a	-[ ]	+	B, L	+ + + +	+	Continuité	-EQ	∅	-	→ o, → ∞
CL	- + + +	-∀	+	-∈	-∈	-	∈, L	+ + - +	+	Continuité	-E5	+	∅	∅
AU	+ + + +	+	+	+ab	+ab		A+U, L	+ + + +	+	Continuité	+	+	+	H ℝ

Conclusion

En conclusion de cette analyse, examinons quelles réponses elle peut apporter à un certain nombre des questions posées plus haut.

L'examen des copies montre qu'au cours de cet enseignement, un certain nombre de choses ont été acquises :

- l'extension de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{HR}$ semble se faire sans conflit, les étudiants ayant la vision (correcte) de chaque réel entouré d'un intervalle d'hyperréels infiniment proches de celui-ci, plus une infinité d'hyperréels supérieurs à tous les réels en valeur absolue.
  On ne rencontre que deux fois dans les copies la trichotomie erronée "un hyperréel est, soit réel, soit infiniment petit, soit infiniment grand".
- les notions formelles de langage, formule, interprétation d'une même formule sur des domaines différents ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{HR}$) sont utilisées sans réticences. Les étudiants ne reviennent pratiquement jamais à la représentation des hyperréels en termes de suites - sauf un qui le fait systématiquement, avec un succès mitigé - (pas plus d'ailleurs qu'ils ne reviennent aux suites de Cauchy pour manipuler les réels !) ; avec juste raison, ils préfèrent se ramener à l'application d'un certain nombre de principes (comme celui du Transfert) conjointement à la vision intuitive décrite plus haut.

Ce qui paraît encore flou, c'est la distinction entre les énoncés non standard (ou externes, pour employer le vocabulaire de Nelson) et ceux qui ne sont pas dans le langage L donné (où on ne peut pas, par exemple, quantifier sur les fonctions) - mais il faut dire que même le livre qui a inspiré cet enseignement n'insiste guère sur cette difficulté.

Il semble donc que l'analyse des copies ne confirme pas les objections souvent formulées, concernant le caractère abstrait et formel des objets (non standard) introduits, et la nécessité d'assimiler en plus de l'analyse quelques notions de Logique Elémentaire.

Les erreurs les plus fréquentes ne tiennent pas au caractère spécifique de l'A.N.S., mais sont les mêmes que chez de nombreux étudiants "standard" : mauvaise utilisation des majorations et minorations, mauvaises inversions de quantificateurs, erreurs de raisonnement...).

Ne demandons cependant pas à cette analyse plus de réponses qu'elle ne peut fournir : rappelons que les étudiants suivaient parallèlement à ce certificat optionnel un enseignement "standard" d'Analyse - et que l'A.N.S. vient donc pour eux en complément des notions classiques. D'autre part, et sans doute en grande partie à cause du caractère "complémentaire" de cet enseignement, tous les exercices (à l'exception peut-être du 6 (*)) testent plus l'acquisition des notions typiquement non standard, que l'aide que celles-ci pourraient apporter à la résolution de problèmes standard.

On peut dire, pour résumer le bilan de cette tentative, que pour les questions auxquelles elle peut apporter une réponse, celle-ci semble plutôt positive et encourageante.

Tout ceci nous amène à formuler quelques réflexions :

L'Analyse classique se fonde sur les techniques de majoration et minoration, sur <u>l'absence</u> d'infinitésimaux (on prouve souvent que $x = y$ en montrant que $\forall \varepsilon > 0\ |x - y| < \varepsilon$, ce qui représente un certain détour pour l'esprit (* *)), et sur la compréhension et le maniement d'énoncés comportant des alternances de quantificateurs - en particulier il est indispensable de savoir correctement, et au bon moment, énoncer et comprendre la <u>négation</u> de formules compliquées, qu'il s'agisse de faire une démonstration par l'absurde ou de trouver un contre-exemple ; une autre difficulté du même ordre vient de la nécessité de changer à bon escient le nom des variables quantifiées dans un énoncé : songer par exemple à la démonstration de la proposition "La composée de 2 fonctions continues

(*) Notons qu'un exercice comparable figure dans un test proposé par B. Cornu à des étudiants de divers niveaux (cf. [11]) : "Voici une suite de nombres réels : 4.1, 2.9, 4.01, 2.99, 4.001, 2.999... Ecrivez les 4 termes suivants. A votre avis cette suite a-t-elle une limite, deux limites, pas de limites ?" En DEUG A, 19 étudiants sur les 28 interrogés répondent que la suite diverge, 6 qu'elle a 2 limites. En DEUG B, 13 sur 57 estiment qu'elle a 2 limites.

(* *) Ceci n'est pas complètement évident, comme en témoignent de récentes recherches en didactique : à la question "Déterminer l'ensemble A, où $A = \{ x \in \mathbb{R} \ /\ \forall \varepsilon > 0\ |x| < \varepsilon \}$" A. Robert et F. Boschet obtiennent 24 % de réponses correctes en début de DEUG (cf. [34]). Parallèlement, à la question "Que peut-on dire de x et y si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|x - y| < \varepsilon$", B. Cornu obtient 6 réponses correctes sur 50 en DEUG A (3 sur 12 en licence !) avec, comme il le souligne, des réponses d'esprit tout à fait non standard tendant à résister aux explications de l'enseignant, évoquant la possibilité que " x et y soient très très proches, sans être tout à fait égaux " (cf. [11]).

est continue" (le " η " relatif à l'une des fonctions devient un " ε " pour l'autre).

Ces techniques sont en général très mal maîtrisées par les étudiants débutant en DEUG, et ceci constitue un facteur d'échec très important (cf. [34] p. ex.).

Face à ces problèmes, l'enseignement de l'A.N.S. sous une forme simplifiée pourrait présenter quelques avantages.

Par exemple, les définitions non standard suppriment en général au moins un étage de quantificateurs par rapport aux définitions classiques - en particulier la formulation des notions essentielles de limite et de continuité est particulièrement simple, outre le fait qu'elle semble plus proche des conceptions spontanées des étudiants (cf. [11] et [42]).

Ces définitions deviennent de ce fait beaucoup plus utilisables dans la pratique, alors que jusqu'à présent en première année on est quasiment amené à bannir les exercices nécessitant le retour aux définitions, considérés comme trop difficiles, au profit d'exercices d'application d'un certain nombre de règles de "préservation" (la somme de 2 fonctions continues est continue etc...) et de techniques calculatoires (développements limités, intégration etc...).

Citons deux exemples qui nous paraissent éloquents :

- Imaginez la démonstration classique de la proposition "Soient u_n et v_n deux suites de réels convergentes, ayant pour limites respectives les réels a et b ; alors la suite $w_n = u_n\, v_n$ converge vers le produit ab" (il faut penser à une certaine façon d'écrire la différence $ab - u_n\, v_n$).

  Comparez à la démonstration non standard : il suffit de montrer que, quand n est infiniment grand, $u_n\, v_n \sim ab$. Or dans ce cas $u_n = a + \varepsilon$, et $v_n = b + \varepsilon'$ (ε, ε' infinitésimaux) donc $u_n\, v_n = ab + a\varepsilon' + b\varepsilon + \varepsilon\varepsilon' \sim ab$ (*)

(*) Dans l'optique de IST, on raisonnerait un peu différemment : soit à démontrer le théorème "Si deux suites convergent, etc..." ; comme cet énoncé est standard, on peut commencer la démonstration en supposant les 2 suites standard ; alors leurs limites le seront nécessairement aussi.

-Imaginez la démonstration classique de la proposition "Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie quand $|x| \to \infty$; alors f est bornée". (Il faut penser à séparer $\mathbb{R}$ en deux domaines, l'un compact sur lequel f atteint ses bornes, et l'autre sur lequel $f(x)$ est assez proche de sa limite).

Comparez à la démonstration non standard :

Soit L la limite de f quand $|x| \to \infty$ (c'est un réel) ; alors

-ou bien $|x|$ est infiniment grand, et $f(x) \sim L$

-ou bien x est limité ; soit alors $[x]$ l'ombre de x ; puisque f est continue en $[x]$ et $x \simeq [x]$, on a $f(x) \sim f([x])$

Dans tous les cas, $f(x)$ est limité ; donc $\mathbb{HR}$ vérifie $\exists M\ \forall x\ |f(x)| \leqslant M$ (il suffit de prendre M infiniment grand) et par transfert cette formule est vraie dans $\mathbb{R}$ - CQFD.

On notera qu'ici la séparation des cas (entre les x finis et infinis) est beaucoup plus naturelle que dans la démonstration standard, et que la démonstration se fait ici <u>directement</u> à partir des définitions (non standard) de limite et continuité.

Nous ne ferons ici qu'évoquer l'avantage qu'il y aurait à "autoriser" en cours de Mathématiques un langage plus cohérent avec celui des physiciens (notamment en ce qui concerne le calcul différentiel et intégral, et la vision intuitive conduisant à la mise en équation des problèmes).

L'expérience que nous venons de décrire est, à notre connaissance, la première menée en France à ce niveau. Pour contribuer encore à rendre le débat moins passionnel, il serait souhaitable que d'autres tentatives soient organisées dans un avenir proche, accompagnées d'évaluations systématiques en cours d'année ; notamment il faudrait tenter de présenter l'Analyse en DEUG à partir de l'A.N.S. - les techniques en " $\varepsilon - \eta$ " ne venant que plus tard - en élaborant des tests permettant réellement de comparer les performances des étudiants à l'issue de cet enseignement avec celles d'étudiants "classiques".

Soulignons pour finir que nous ne pouvons accorder qu'une confiance limitée à nos propres réactions pour nous guider en cette matière, puisque nous avons navigué en sens inverse, n'abordant l'A.N.S. qu'après une longue traversée de l'analyse classique.

Annexe 1 : ENSEMBLES EXTERNES ET PRINCIPES DE PERMANENCE

Parmi les collections de réels définies par une formule externe, il y en a dont on sait démontrer que ce ne sont pas des ensembles au sens de ZFC : On a vu (Ch. II § B) que c'est le cas de

$$\mathrm{Hal}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \sim 0\}$$

Lorsque l'on sait démontrer que le fait de considérer une collection de réels comme un ensemble interne (i.e. un ensemble de ZFC) conduit à une contradiction, on dit que c'est un <u>ensemble externe</u>. Ceci ne constitue pas à proprement parler une définition des ensembles externes, mais permet de prouver que certaines collections en sont :

La collection A des entiers standard est externe, car sinon cela contredirait la propriété de récurrence :

$$[A \subset \mathbb{N} \text{ et } 0 \in \mathbb{N} \text{ et } (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)] \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

C'est aussi le cas de l'ensemble des entiers (ou réels) infiniment grands, de celui des réels limités, etc...

<u>Remarque</u>

Un ensemble défini par une formule externe peut-être interne, ou même stantard :

ex : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \sim 0 \text{ et st } (x)\}$ est standard.

<u>Les principes de permanence</u> sont basés sur l'évidence suivante :

Si l'on sait que l'ensemble des éléments vérifiant une propriété P est d'un certain type, et que l'on connait un ensemble A dont les éléments vérifient P, qui n'est pas de ce type, alors:

$$\{x \; ; \; P(x)\} \supsetneq A$$

<u>Premier principe de permanence : Principe de Cauchy</u>

Il est basé sur la remarque qu'un ensemble externe n'est pas interne.

Si donc I est interne et E externe, alors

$$I \subseteq E \Rightarrow I \subsetneq E$$
$$E \subseteq I \Rightarrow E \subsetneq I$$

Cette remarque constitue le premier principe de permanence, dit principe de Cauchy. Voyons comment on l'utilise dans la pratique :

Soit F une formule <u>interne</u> à une variable libre, alors $\{x \in \mathbb{R};\ F(x)\}$ est un ensemble interne. Si l'on montre par exemple que F est vérifiée par tous les réels infiniment petits, on peut en déduire qu'il existe des nombres non infinitésimaux qui vérifient F : en effet, l'ensemble interne $\{x \in \mathbb{R};\ F(x)\}$ n'est pas confondu avec l'ensemble externe $\mathrm{Hal}(0) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \sim 0\}$.

Pour voir comment on applique ce type de raisonnement, nous donnons ci-dessous une démonstration non standard d'un résultat classique : le critère de Cauchy pour les suites.

Nous aurons besoin, pour ce faire, des caractérisations non standard suivantes.

<u>Lemme 1</u>

Soit (u_n) une suite réelle standard, alors:

(u_n) converge vers $\ell \Leftrightarrow \ell$ est standard et, $\forall \omega$ i.g., $u_\omega \sim \ell$

Ce lemme se démontre de façon analogue au critère de continuité des fonctions standard (voir Ch. III, § C)

<u>Lemme 2</u>

Soit (u_n) une suite réelle standard, alors :

(u_n) suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall\, \omega_1, \omega_2$ i.g. $u_{\omega_1} \sim u_{\omega_2}$

Ce lemme se démontre sans difficulté par transfert.

Passons alors à la démonstration du critère de Cauchy, qui justifie le nom donné au premier principe de permanence.

<u>Critère de Cauchy (Théorème classique)</u>

Une suite réelle (u_n) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

<u>Démonstration (non standard)</u>

Par transfert, il suffit de faire la démonstration pour les suites (u_n) standard.

$\Longrightarrow$ C'est une conséquence immédiate de la transitivité de la relation $\sim$, via les lemmes 1 et 2 ci-dessus.

$\Longleftarrow$ Soit (u_n) une suite standard et ω un entier infiniment grand ; montrons d'abord que u_ω est limité.

Considérons l'ensemble $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; |u_n - u_\omega| < 1\}$. Λ est un ensemble interne, car $F(n) = (n \in \mathbb{N}$ et $|u_n - u_\omega| < 1)$ est une formule interne. D'autre part, si ω_1 est i.g., $u_\omega \sim u_{\omega_1}$ par hypothèse, donc $\omega_1 \in \Lambda$.

L'ensemble interne Λ, contenant l'ensemble externe des entiers infiniment grands, le contient strictement ; il contient donc un entier standard u_{n_0}.

u_{n_0} est standard donc limité. Donc u_ω est limité.

Posons alors $\ell = {}^\circ u_\omega$; ℓ est standard par définition et pour tout ω' i.g., on a $u_{\omega'} \sim u_\omega \sim \ell$.

Le lemme 1 nous dit alors que (u_n) converge vers ℓ.(*)

Halos et Galaxies ; Principe de Fehrele

Définition, on appelle Halo un ensemble de la forme $H = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ st(n)}} A_n$

où (A_n) est une suite strictement décroissante d'ensembles internes.

Un Halo est un ensemble externe : en effet, si H était interne, $\{n \; ; \; H \subset A_n\}$ serait un ensemble interne, alors que c'est l'ensemble externe des entiers standard .

. Si f est une fonction d'un ensemble interne E dans $\mathbb{R}$, alors $\{x \in E ; f(x) \sim 0\}$ est un Halo si il est externe ; ceci nous fournit beaucoup d'exemples de Halos, par exemple :

$$\mathrm{Hal}(0) = H_1 = \{ x \in \mathbb{R} \; ; \; x \sim 0\}$$

$$H_2 = \{ x \in \mathbb{R} \; ; \; x \text{ infiniment grand}\}$$

$$H_3 = \{ x \in \mathbb{R} \; ; \; \frac{x}{\varepsilon} \sim 0\}$$

On appelle Galaxie le complémentaire d'un Halo dans un ensemble interne. Si g est une fonction d'un ensemble interne E dans $\mathbb{R}$, alors $\{x \in E \; ; \; g(x)$ limité$\}$ est une galaxie si c'est un ensemble externe.

Exemples de galaxies :

$G = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x$ limité$\}$, appelé galaxie principale de $\mathbb{R}$.

$G_1 = G - \mathrm{Hal}(0)$, ensemble des réels appréciables.

$G_2 = G \cap \mathbb{N}$, ensemble des entiers standards.

(*) Cette démonstration se généralise sans difficulté aux espaces métriques, fournissant ainsi un critère non standard de complétude (exercice : énoncer ce critère).

Principe de Fehrele

Aucun halo n'est une galaxie.

Ceci constitue un second principe de permanence. En l'appliquant comme on l'a fait du principe de Cauchy, on montre facilement le résultat suivant, un des classiques de l'A.N.S.

Lemme de Robinson

Soit (u_n) une suite réelle ; si, pour tout n standard $u_n \sim 0$, il existe ω i.g. tel que $u_\omega \sim 0$.

Démonstration

Le Halo $H = \{n \; ; \; u_n \sim 0\}$ ne peut être confondu avec la galaxie des entiers standard.

La manipulation des ensembles externes est délicate, car ils n'obéissent en général pas aux théorèmes classiques : par exemple, Hal(0) est une "partie" de $\mathbb{R}$, majorée par 1, mais qui ne possède pas de borne supérieure : c'est même comme cela que l'on montre que c'est bien un ensemble externe.

On peut cependant y effectuer les opérations élémentaires (réunion, intersection, complémentaire), et leur étude fait toute la richesse de l'A.N.S.

L'annexe suivante donne une théorie (NZFC) dont les axiomes donnent des règles précises sur la manipulation des ensembles externes.

Cependant il semble qu'actuellement le système de Nelson soit le plus utilisé pour les applications en Analyse, les principes du type de ceux qu'on vient de décrire étant suffisants pour le traitement de ces "monstres" que sont les ensembles externes.

Annexe 2 : LA THEORIE DES ENSEMBLES DE ZERMELO-FRANKAEL (ZF) ET QUELQUES THEORIES AXIOMATIQUES NON STANDARD.

A/Théories ZF, ZFC et Z

Le langage de ZF est constitué des symboles de relation binaire $\in$ et $=$, de variables $(x, y, z, u, v...)$, et des symboles logiques (et, non, $\forall$, $\exists$ ...).

Les axiomes de ZF s'énoncent ainsi :

Axiome d'extensionnalité

$$\forall x\ \forall y\ [\, x = y \Longleftrightarrow \forall z\ (z \in x \Longleftrightarrow z \in y)]$$

Il exprime que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Axiome de l'ensemble vide

$$\exists x\ \ \forall y\ \ y \notin x$$

Cet x, unique d'après l'axiome précédent, est noté $\emptyset$

Axiome de la paire

$$\forall x\ \ \forall y\ \exists z\ \ \forall u\ [\, u \in z \Longleftrightarrow (u = x \text{ ou } u = y)\ ]$$

Il exprime l'existence, pour deux ensembles x et y quelconques, de la paire $z = \{x\ ,\ y\}$ (unique d'après l'axiome d'extensionnalité).

Si $x = y$, on note simplement $z = \{x\}$

Axiome de la réunion

$$\forall x\ \ \exists z\ \ \forall u\ [\, u \in z \Longleftrightarrow \exists y\ (y \in x \text{ et } u \in y)\ ]$$

Il exprime l'existence, pour tout ensemble x, d'un ensemble z qui est la réunion de tous les éléments y de x (les éléments de z sont ceux qui appartiennent à un des éléments de x). On notera alors $z = \bigcup_{y \in x} y$ et si x est la paire $\{\ a\ ,\ b\ \}$, on notera $z = a \cup b$ (remarquer que toutes ces notations sont des abréviations commodes, et non de nouveaux symboles du langage de ZFC ; chaque formule qui les emploie peut-être remplacée par une formule, en général beaucoup plus compliquée, n'utilisant que les symboles donnés au départ).

Axiome de l'ensemble des parties

$$\forall x\ \ \exists z\ \ \forall y\ [\, y \in z \Longleftrightarrow \forall u\ (u \in y \Longrightarrow u \in x)\ ]$$

Il exprime l'existence, pour tout ensemble x, d'un ensemble z dont les éléments sont les parties y de x (c'est-à-dire les ensembles dont tous les éléments appartiennent à x). On notera $z = \mathcal{P}(x)$.

Schéma de remplacement

Pour chaque formule F(x,y) du langage, on écrit que la propriété $\forall x\ \exists ! y\ F(x,y)$ (si cette propriété est vérifiée, on dit que F est une "relation fonctionnelle") implique :

$$\forall a\ \ \exists z\ \ \forall y\ [\, y \in z \Longleftrightarrow \exists x\ (x \in a \text{ et } F(x,y)\ )\ ]$$

autrement dit, que pour tout ensemble a il existe un z qui est l'ensemble des "images" par F des éléments de a.

Axiome de l'infini

$$\exists z\ [\emptyset \in z \text{ et } \forall x\ (x \in z \implies x \cup \{x\} \in z)]$$

On rappelle (voir Ch. II § C) que $\emptyset$ est l'entier 0, que 1 est l'ensemble $\{\emptyset\}$, 2 est $\{\emptyset , \{\emptyset\} \}$ ... et n + 1 est égal à $n \cup \{n\}$

L'axiome de l'infini affirme qu'il existe un ensemble qui contient 0, et qui contient n+i dès qu'il contient n. Il a comme conséquence l'existence de l'ensemble $\mathbb{N}$ (qui est le "plus petit" z - au sens de la relation $\subseteq$ - vérifiant la propriété ci-dessus).

On obtient ainsi la théorie de Zermelo-Frankael, à laquelle on peut éventuellement (sans apporter de nouvelles contradictions - voir note du Ch. II § D) rajouter l'axiome du choix, pour obtenir la théorie ZFC.

Axiome du choix

Cet axiome exprime l'existence, pour tout ensemble x, d'une fonction f qui "choisit" un élément dans chaque partie non vide de x (c'est-à-dire d'une fonction f de $\mathcal{P}(x) - \{\emptyset\}$dans x, telle que pour tout $y \in \mathcal{P}(x) - \{\emptyset\}$ on ait $f(y) \in y$).

Notons qu'une fonction est un ensemble f de couples (x,y), tels que $\forall x\ \ \forall y\ \ \forall y'\ [(x,y) \in f \text{ et } (x,y') \in f \implies y = y']$ - le couple (x,y) étant représenté ici par l'ensemble $\{ \{x\} , \{x,y\} \}$.

Au lieu du schéma de remplacement, on peut se donner le schéma plus faible suivant (on obtient alors la théorie de Zermelo, notée (Z)) :

Schéma de compréhension

Pour chaque formule C (z) du langage, on se donne l'axiome

$$\forall x\ \ \exists z\ \ \forall y\ [y \in z \iff (y \in x \text{ et } C\ (z)\ )\ ]$$

Cet axiome affirme l'existence, pour tout ensemble x, de l'ensemble $z = \{ y \in z \ / \ C(z) \}$

On montre que la théorie (Z) est strictement plus faible que (ZF), autrement dit que le Schéma de Compréhension se démontre avec les axiomes de (ZF), tandis que le Schéma de Remplacement n'est pas une conséquence des axiomes de (Z).

B/La théorie NZFC (K. Hrbacek).

Dans la théorie (IST) de Nelson, aucune règle n'est donnée pour la manipulation des ensembles externes, qui en fait, pour cette théorie, ne sont pas des ensembles du tout ; en particulier, on ne peut pas écrire, dans le langage, de formules où les quantificateurs portent sur les ensembles externes.

Karel Hrbacek ([20-21]) propose une théorie non standard des ensembles, notée NZFC (N pour "non standard") dans laquelle les ensembles externes sont considérés comme de véritables ensembles, les axiomes de NZFC précisant les règles auxquelles leur maniement doit se plier :

Le langage $\mathcal{NL}$ de NZFC est obtenu en rajoutant au langage $\mathcal{L}$ de ZF, <u>deux</u> prédicats à une place : le prédicat st ( ), comme dans IST, et le prédicat supplémentaire $\mathcal{I}$ ( ) (où $\mathcal{I}$ (x) se lit "x est interne").

On définit alors $\forall^{\mathcal{I}}x$, $\exists^{\mathcal{I}}x$, $A^{\mathcal{I}}$(où A est une formule de $\mathcal{NL}$) de manière analogue à $\forall^{st} x$, $\exists^{st}x$, A^{st} (cf. Ch. II § C).

Les axiomes de NZFC sont les suivants :

- les axiomes de ZFC, restreints aux objets standard (c'est-à-dire les formules A^{st}, pour chaque axiome A de ZFC)
- $\forall x$ ($st(x) \Rightarrow \mathcal{I}(x)$) (les ensembles standard sont internes)
- $\forall x\ \forall y\ [(\mathcal{I}(x)$ et $y \in x) \Rightarrow \mathcal{I}(y)]$ (les éléments d'un ensemble interne sont internes)

Enfin, trois principes, analogues aux schémas de IST :

- <u>Schéma de plongement</u> (analogue à (T) : pour toute formule A standard on a $A^{\mathcal{I}} \Leftrightarrow A^{st}$ (où le terme "formule standard" a le même sens que dans IST)
- <u>Schéma de saturation</u> : (analogue à (I) : pour toute formule de $\mathcal{L}$, on a l'axiome :
$\forall^{st}a\ [\ (\forall^{st} z \in a)\ (\exists^{st}x)\ (\forall y \in z\ B^{st}(x,y)\ ) \Rightarrow (\exists^{\mathcal{I}}x)$
$(\forall^{st}y \in a)\ B^{\mathcal{I}}(x,y)\ ]$
(ce qui diffère essentiellement du (I) de Nelson, c'est que la propriété de "concourance", et l'existence d'un élément idéal pour B, ne portent qu'à <u>l'intérieur d'un ensemble standard</u>).
- <u>Axiome de standardisation</u> (analogue à (S))
$\forall x\ \exists^{st}z\ \ \forall^{st}y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in z)$ (ici, le standardisé z existe pour <u>tout ensemble externe</u>, et pas seulement comme dans (S) pour ceux qui sont délimités par une formule à l'intérieur d'un ensemble standard ; remarquons aussi que la possibilité de quantifier sur les ensembles externes permet ici d'exprimer en une seule formule ce qui nécessitait un schéma dans le cas de IST).

De même que Nelson, Hrbacek montre que NZFC est une extension conservative de ZFC (mais sa démonstration est nettement plus difficile que dans le cas de IST - cf. [20]).

Pour certaines applications de l'A.N.S., notamment en théorie de la mesure, où on doit manipuler des familles d'ensembles externes, la théorie NZFC peut se révéler plus commode que IST.

C/Les "Principes de Connaissance" de J. Benabou

J. Benabou propose d'analyser le contenu intuitif des mots "standard" et "non standard" en termes de connaissance : les objets standard sont ceux qui sont "connus", les non standard sont "inconnus" - il est naturel alors de penser que la classe des objets connus, bien que non clairement délimitée (donc n'ayant pas droit au statut d'ensemble à part entière), est contenue dans un ensemble fini ; de même on peut considérer qu'une fonction est connue, si pour chaque objet connu de son domaine, on connaît son image. S'appuyant sur le caractère naturel de ces justifications, l'auteur rajoute à ZFC les trois "Principes de connaissance" suivants :

Ces principes sont volontairement énoncés de manière non formelle, dans le but de fournir une présentation de l'A.N.S. faisant le moins possible appel aux notions de Logique Mathématique (c'est la présentation adoptée dans son séminaire de 82-83 cf. Ch. I).(*)

Voici la traduction de ces principes en "style ZFC"

1 - (identique au schéma de Transfert) Pour toute formule $A(y)$ standard, on pose que $\exists y \quad A(y) \Longrightarrow \exists^{st} y \quad A(y)$

2 - (principe de Finitude)

Il existe un ensemble fini F, tel que $\forall^{st} x \; (x \in F)$

3 - (principe d'économie)

Soient X et Y deux ensembles standard, $F(x,y)$ une relation (interne ou externe) telle que $\forall^{st} x \in X \; \exists^{st}! y \in Y \; F(x,y)$ (F est une relation fonctionnelle entre les éléments standard de X et ceux de Y)

Alors il existe une fonction standard f unique, qui prolonge F à X tout entier - ce qui s'écrit :

$\exists^{st}! f$ (" f est une fonction de domaine X " et $\forall^{st} x \in X \; \forall y$ $(y = f(x) \Longrightarrow F(x,y)$).

(*) Son enseignement de maîtrise, en revanche, commence par développer les outils logiques nécessaires à une présentation rigoureuse de IST. Il nous a déclaré que, malgré des résultats encourageants pour certains étudiants, il regrettait que ce choix ne lui ait pas laissé plus de temps pour développer l'A.N.S. en tant que telle.

On démontre que ce système d'axiomes est équivalent à celui de Nelson. J. Benabou souligne que la plupart des applications connues de l'Analyse Non Standard n'utilisent pas toute la force du "principe de Finitude", mais plutôt la forme plus faible suivante :

Pour tout X standard, il existe F fini, tel que $F \subseteq X$ et $\forall^{st} x \in X \ (x \in F)$.

Ce dernier principe est à rapprocher du "schéma de saturation" de Hrbacek, le principe "fort" de Finitude correspondant au schéma d'Idéalisation de Nelson.

D/Les axiomes de Keisler pour les Hyperréels

Dans son livre "Elementary Calculus", destiné à l'enseignement [23], J. Keisler fonde le calcul infinitésimal dans $\mathbb{R}$ sur la construction d'un sur-corps $H\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ (appelé ensemble des "hyperréels" - pour un même vocabulaire et une construction analogue, bien que plus simple, cf. Ch. IV). En fait, une fois cette construction opérée, il montre que la structure obtenue satisfait certaines propriétés, dont tous ses autres résultats découlent ; on peut donc considérer la liste suivante comme une axiomatique pour les réels non standard :

- $\mathbb{R}$ et $H\mathbb{R}$ sont des corps ordonnés, avec $\mathbb{R} \subset H\mathbb{R}$, les opérations et la relation d'ordre de $H\mathbb{R}$ prolongeant celles de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ satisfait $\forall a \ \exists n \in \mathbb{N} \ a < n$ (ici $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il s'agit de l'ensemble des entiers <u>standard</u> ; cet axiome indique donc que $\mathbb{R}$ est archimédien).
- $\mathbb{R}$ et $H\mathbb{R}$ satisfont $\forall a > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists b > 0 \quad b^n = a$
- $H\mathbb{R}$ satisfait $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \ \ (a > 0 \implies \varepsilon < a)$ (il existe un hyperréel infinitésimal) et $\forall x \ [(\forall a \in \mathbb{R} \ |x| > a)$ ou $(\exists ! \ \bar{x} \in \mathbb{R} \ \ \forall a \in \mathbb{R} \ \ a > 0 \implies |x - \bar{x}| < a)]$ (tout hyperréel est, soit infiniment grand, soit infiniment proche d'un réel unique).
- Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ possède dans $H\mathbb{R}^n$ un "prolongement naturel" f^* (en particulier les opérations de corps et la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ sont les prolongements naturels de celles de $\mathbb{R}$).
- Si deux systèmes finis d'équations et inéquations ont les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$, ils ont les mêmes solutions dans $H\mathbb{R}$ (modulo le remplacement des f^* dans ces systèmes).

Annexe 3 : RESULTATS DU QUESTIONNAIRE ENSEIGNANT - K. SULLIVAN - (Extrait de [39]).

TABLE 4: *Instructor Questionnaire: Part One*

(−2 strongly disagree, −1 disagree, but not strongly, 0 neither agree nor disagree, 1 agree, but nor strongly, 2 strongly agree)

The responses below refer to the experimental classes.

	−2	−1	0	1	2
1. The students had a problem with accepting axioms for the hyperreal numbers.	3	4	1	4	
2. The students seemed to find "infinitely small" a natural concept.		1	2	4	5
3. The time that must be used for nonstandard material makes it difficult to cover topics that ought to be included in a 1st year course.	8	2	1	1	
4. The course seemed to give the students a better feeling for the historical development of mathematics than a standard course.	1	3	3	4	1
5. I think that a student who has had two semesters of nonstandard calculus will be at a disadvantage in a standard 3rd semester calculus course.	6	4	1	1	
6. I enjoyed teaching calculus using this approach.			2	2	8
7. I probably should not have tried to teach the course without a better background in nonstandard analysis.	9	1	1	1	
8. I feel that the experience of teaching calculus from the infinitesimal approach will enrich my future teaching of calculus.			1	5	6
9. I am afraid that the introduction of infinitesimals left the students confused about the real numbers.	4	6		2	
10. I would prefer to use the nonstandard approach the next time I teach calculus.		2	1	4	5

Instructor Questionnaire: Part Two

(S Standard, NS Nonstandard, ND No Difference)

The instructors indicated which approach seemed to them to have the advantage or that neither approach seemed to have an advantage over the other.

	S	NS	ND
1. The students learn the basic concepts of calculus more easily.		8	4
2. The students seem to be more "turned on."		5	7
3. The proofs are easier to explain and closer to intuition.	1	10	1
4. The students find it easier to formulate their questions.		2	9
5. The students end up with a better understanding of the basic concepts of calculus.		5	7

Bibliographie

[1] J. D'Alembert : "Encyclopédie méthodique" - Article "Différentielle"

[2] Astérisque : " IIIe rencontre de géométrie du Schnepfenried - Volume 2" - S.M.F. n°109.110 -1983-

[3] R. Bebbouchi : "Equations différentielles ordinaires - Troisième ordre avec perturbation singulière et non unicité d'un point de vue non classique" - Thèse d'état - Université de Strasbourg -1982-

[4] E. Benoit : "Systèmes lents-rapides en dimension 3" - Thèse d'état Université de Nice -1984-

[5] G. Berkeley : "The Analyst" Collected works - Volume 4 - A.A Luce et T.E Jessop ed. Londres -1951-

[6] E. Bishop : "Review of "Elementary Calculus" by H.J Keisler" Bull Am. Math. Soc. - Volume 83 - p. 205.208 -1977-

[7] J.L Callot : "Bifurcation d'un portrait de phase pour des équations différentielles du second ordre" - Thèse d'état - Université de Strasbourg -1981-

[8] P. Cartier : "Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non standard" - Séminaire Bourbaki n°580 -1981-

[9] A. Cauchy : "Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique 1ère partie - Analyse algébrique" - Oeuvres complètes - Série 2 - Tome 3 - Gauthier Villars -1847-

[10] A. Cauchy : "Mémoire sur l'Analyse infinitésimale" - Oeuvres complètes Série 2 - Tome 13

[11] B. Cornu : "Apprentissage de la notion de limite - Conceptions et Limites" - Thèse de troisième cycle - Université de Grenoble I -1983-

[12] M. Diener : "Etude Générique des Canards" Thèse d'état - Université de Strasbourg -1981-

[13] F. Diener : "Méthode du plan d'observabilité" - Thèse d'état - Université de Strasbourg -1981-

[14] F. Diener : "Cours d'Analyse non standard" Université d'Oran -1983-

[15] J. Harthong : "Le Moïse" - Publication IRMA - Université de Strasbourg -1980-

[16] J. Harthong : "Etude microscopique de phénomènes périodiques" - Thèse d'état - Strasbourg -1981-

[17] J. Harthong : "L'Analyse Non Standard" - La Recherche n°148 - Volume 14 - p. 1194.1201 -1983-

[18] J.M Henle et E.M Kleinberg : "Infinitésimal Calculus" - MIT Press - Cambridge -1979-

[19] G.F.A. de l'Hôpital : "Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes" - 2e ed - Paris -1715-

[20] K. Hrbacek : "Axiomatic foundations for nonstandard analysis, Fund. Math" - Volume 98 - p. 1 - 19 -1978-

[21] K. Hrbacek : "Non Standard set theory" - Am. Math. Monthly - Volume 86 (8) p. 659.677 -1979-

[22] H.J Keisler : "Elementary Calculus : An approach using infinitesimals" Pruidle - Weber and schmidt - Boston -1971-

[23] H.J Keisler : "Elementary Calculus" - Prindle - Weber and schmidt Boston -1976-

[24] G.W Leibnitz : "Histoire et origine du calcul différentiel" - Traduction de R. Szeftet - Zylberbaum - Cahiers de Fontenay n°1 Philosophie -1975-

[25] G.W Leibnitz : "Leibnitz à l'Hôpital - Juin 14124" Mathematische Schriften I Gerhardt - Volume 2 -1850- p. 287.289

[26] C. Lobry : "Mathématiques non classiques, mathématiques appliquées ?" Publications A.A.I - Bordeaux - n°8106 -1981-

[27] C. Lobry : "Burning gross and floating corks" Lecture notes in control and Information Sciences - n°39 -1982-

[28] R. Lutz et M. Goze : "Non standard analysis : a practical guide with applications" Lecture Notes in Math - n°881 - Springer -

[29] W.A.J Luxembourg :

[30] E. Nelson : "Internal set theory - a new approach to nonstandard analysis" - Brell - Am - Math - Soc. 83 p. 1165.98 -1977-

[31] C. Reder : "Sur la représentation mathématique de mécanismes de diffusion - réaction" - Thèse d'état - Université de Bordeaux -1984-

[32] G. Reeb : "Séance débat sur l'Analyse Non Standard" - Gazette des Mathématiciens - Volume 8 - p. 8.14 -1977-

[33] G. Reeb : "La mathématique non standard, vieille de soixante ans" ? Publications IRMA - Strasbourg -1978-

[34] A. Robert et F. Boschet : "Acquisition des premiers concepts d'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de première année de DEUG" - Cahier de didactique n°7 - IREM - Paris Sud -1984-

[35] A. Robinson : "Non standard Analysis" - North Holland -1966- (2em ed. 1974)

[36] T. Seri : "Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes" - Thèse d'état - Université de Mulhouse -1983-

[37] K.D Strayen et W.A.J Luxembourg : "An introduction to the theory of infinitesimals" Académie Press - New York -1976-

[38] K.A Sullivan : "Doctoral dissertation" - Université of Wisconsin - Madison -1974-

[39] K.A Sullivan : "The teaching of elementary calculus using the non standard approach" - Am. Math. Monthly - p.370.375 -1976-

[40] D.O Tall : "The calculus of leibniz - an alternative modern approach" Mathematical Intelligencer - Volume 2 p. 54.55 -1979-

[41] D.O Tall : "Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes" Mathematical Gazette - Volume 64 p.22.49 -1980-

[42] D.O Tall : "Intuitive infinitesimals in the calculus" Communication présentée à l'ICME IV - Berkeley -1980-

[43] A. Troesch : "Etude qualitative des systèmes différentiels - une approche basée sur l'analyse non standard" - Thèse d'état - Strasbourg -1981-