i.r.e.m.
UNIVERSITE PARIS VII

HISTOIRE DE LA CONVERGENCE UNIFORME

J. ROBINET

cahier de didactique des mathématiques
numéro 9

HISTOIRE DE LA CONVERGENCE UNIFORME

(naissance d'un concept)

Notre propos en étudiant la genèse de la notion de convergence uniforme est, d'une part, de cerner l'état de la science au moment de son apparition, d'autre part, d'essayer de déterminer les problèmes où le concept s'est révélé et se révèle nécessaire.

Ensuite, en analysant ces problèmes qui ont présidé à l'introduction du concept, et surtout ceux pour lesquels la notion intervient obligatoirement, puis en faisant le point sur les connaissances réelles des étudiants dans le champ conceptuel contenant la convergence uniforme, nous essaierons de construire des situations où la convergence uniforme sera le concept nécessaire pour résoudre des problèmes qui auront un sens pour les étudiants. Cette construction sera faite, bien entendu, en s'appuyant sur l'arsenal théorique exposé dans les chapitres I (Voir cahiers de didactique).

Première étape 1821-1826.

1°) Analyse d'un théorème erroné.

En fait, on peut dire que la convergence uniforme apparait pour la première fois parce qu'elle serait nécessaire à la démonstration de deux théorèmes et qu'elle n'existe pas encore. En effet, on peut faire remonter son origine à deux théorèmes énoncés par Cauchy en 1821 dans son "Cours d'Analyse" à l'Ecole Royale Polytechnique. L'un est vrai mais n'est pas démontré, l'autre est vrai seulement dans des cas particuliers :

Premier théorème.

"Lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x sera convergente pour une valeur x différente de o, elle restera convergente si l'on vient à diminuer cette valeur numérique ou même à la faire décroître indéfiniment".

Cauchy note pour les séries convergentes $s = s_n + r_n$.

Deuxième théorème.

"Lorsque, les termes de la série renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes des fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi dans le voisinage de cette valeur particulière fonction continue de x".

Notre première idée est qu'en étudiant la démonstration de Cauchy, on va trouver sans peine la raison de l'erreur. Voici cette démonstration :

"... [s_n] est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions [s_n, s, r_n], lorsque l'on fait croître x d'une quantité infiniment petite. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite".

Soulignons les ambiguïtés de ces affirmations :

* $s_n(x+\alpha) - s_n(x)$ est infiniment petit "pour toutes les valeurs possibles de n"; comme cette affirmation est faite avant que l'on ait précisé que $r_n(x)$ et $r_n(x+\alpha)$ sont infiniment petits pour des valeurs considérables de n, cela laisserait supposer que la famille des s_n est implicitement considérée comme équicontinue. Cette hypothèse n'est bien sûr pas nécessaire, parce que, une fois n fixé assez grand pour que $r_n(x+\alpha)$ et $r_n(x)$ soient petits, on peut utiliser la continuité d'une seule des fonctions s_n.

* $r_n(x+\alpha) - r_n(x)$ "deviendra insensible en même temps que r_n"

Il y a ici un problème, et bien plus tard (en (1853)), Cauchy exhibera la série $\Sigma \frac{\sin(nx)}{n}$, et il montrera que dans un voisinage de o $r_n(o+\alpha)$ ne peut pas être petit en même temps que $r_n(o)$ parce que $r_n(\frac{1}{n})$ ne tend pas vers zéro. C'est donc le problème de contrôler r_n pour des valeurs voisines d'une valeur où il tend vers o. Pour utiliser une terminologie actuelle, il se pose un problème de "contrôle uniforme". D'ailleurs cette question peut être soulevée dans d'autres travaux de Cauchy. Etudions, par exemple, la définition de la continuité qu'il donne dans le chapitre II de son cours d'"Analyse algébrique" : ".....] si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites*, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même".

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutefois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit".

Cette définition peut être interprêtée, comme étant la définition de la continuité en un point, à cause de la phrase "entre deux limites de x, même très rapprochées", mais elle peut aussi être interprêtée comme étant la définition de la continuité uniforme sur un intervalle, cet intervalle pouvant éventuellement être très petit autour d'une valeur déterminée.

Il y a un autre point qui permet de penser que Cauchy n'y voyait pas très clair dans les notions d'uniformité : il démontre la continuité d'une fonction de plusieurs variables en utilisant la continuité par rapport à chacune des variables.

La confusion entre continuité et continuité uniforme sur un intervalle fermé borné ne peut bien entendu pas amener de catastrophes ; les fonctions de plusieurs variables utilisées à l'époque étaient presque toujours différentiables et donc continues (le premier contre-exemple est donné en 1870 par Thomae :

$$f(x,y)= \sin(4 \text{ Arctg } \frac{x}{y}) \text{ et } f(x,o) = f(o,o) = o).$$

2°) <u>Qu'est qui peut faire obstacle à la mise en place de la notion d'uniformité</u> ?

a) <u>La notion de fonction</u>.

---

* C'est à dire pour $a < x < b$.

C'est, peut être, la notion de fonction de l'époque de Cauchy qui fait obstacle à cette mise en place.

Rappelons* que c'est Leibniz qui introduisit le premier le mot "fonction", cela désignait pour lui des portions de droites dépendant d'un point d'une courbe (tangente, normale etc...). Jean Bernouilli reprend ce mot "fonction" pour désigner l'ordonnée du point d'une courbe. Euler définit variables et constantes, puis une fonction d'une variable comme "expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". Il introduira ensuite les "fonctions mécaniques" obtenues en traçant arbitrairement un graphe à main levée. On trouve donc deux notions en présence :

- celle d'expression analytique
- celle de correspondance arbitraire

A l'époque de Cauchy, Fourier commence à envisager des correspondances numériques arbitraires, mais le rapport entre les deux notions n'est encore pas complètement clair. Cauchy a bien dans l'idée d'énoncer des théorèmes vrais pour toutes les fonctions, et c'est pour cela qu'il introduit les concepts de continuité et de limite ; mais dans la pratique, il n'applique ses théorèmes qu'à une classe de fonctions, celle des fonctions analytiques. Il n'y a donc pour Cauchy, d'intéressantes, que les fonctions définies par des expressions analytiques sur des intervalles, donc s'intéresser au comportement d'une fonction en un point n'a pas de sens, sauf s'il s'agit d'un point singulier. Donc pour lui, si on contrôle bien une fonction en un point, elle est implicitement contrôlée de la même façon dans un voisinage de ce point, et il utilise sans le dire des propriétés d'analyticité.

---

* Nous résumons brièvement une partie de l'article "fonction" de l'Encyclopédia Universalis.

Une deuxième hypothèse : celle de Robinson et de Lakatos*. Robinson suggère qu'il y avait deux théories rivales du "continuum". D'une part la théorie des nombres réels de Weierstrass, d'autre part la théorie de Leibowiz du continu : le continu Archimédien étendu en un continu non Archimédien en ajoutant des nombres infiniment petits et infiniment grands. La théorie de Weierstrass a finalement prévalu parce qu'elle permet de démontrer tous les théorèmes de l'analyse en utilisant seulement les nombres réels. Robinson pense que les "variables réelles" de Cauchy prenaient en compte les réels de Weierstrass, et ces nombres qui diffèrent des réels d'un nombre infiniment petit ou d'un nombre infiniment grand ; et donc, pour lui, continuité et limites pour Cauchy sont seulement définies pour des suites tranfinies**, ces suites prenant leurs valeurs dans un continu très dense. Voici l'interprétation de la démonstration de Cauchy que donne Robinson :

> *"Interpreted in terms of non standard analysis, the argument runs as follows. Let* x_1 *be a standard number,* $a < x_1 < b$. *In order to prove that* $s(x)$ *is continuous at* x_1 *we attempt to show that* $s(x_1 + \alpha) - s(x_1)$ *is infinitesimal for all infinitesimal* α. *Now*
>
> (1) $s(x_1+\alpha)-s(x_1)=(s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1))+(r_n(x_1+\alpha)-r_n(x_1))$
>
> *Following Cauchy's argument we might be inclined to claim that the left hand side is infinitesimal since* $s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1)$ *is infinitesimal for all infinite* n. *However this is erroneous, for although* $r_n(x_1)$ *is infinitesimal for all infinite* n, $r_n(x_1+\alpha)$ *has to be infinitesimal only for sufficiently high infinite* n *; while* $s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1)$ *is infinitesimal only for all finite* n, *and hence, by one of our basic lemmas for sufficiently small infinite* n.
>
> *In order to prove that the left hand side of (1) is infinitesimal we have to ensure that there exists an* n *for which* $r_n(x_1+\alpha)$ *and* $s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1)$ *are infinitesimal simultaneously. Two natural alternatives offer themselves, (i) to assume that* $u_0(x)+u_1(x)+\ldots$ *is uniformly convergent in the interval* $a < x < b$, *so that* $r_n(x_1+\alpha)$ *is infinitesimal for all infinite* n, *or (ii) to assure that the family* $(s_n(x))$ *is equicontinuous in the interval, so that* $s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1)$ *is infinitesimal for all infinite* n *(Robinson [1966], p.272)."*

---

* Robinson (1966) Non Standard Analysis Amsterdam North.Holland.
Lakatos : "Cauchy and the continuum". Mathematical intelligencer. I (1978).

** C'est à dire encore définies pour les entiers infiniment grands.

Lakatos pense, lui, que l'interprétation de Robinson dans laquelle le continu de Cauchy est statique, c'est à dire fait de nombres standards ou non standards, n'est pas la meilleure. Il rappelle que Cauchy a pris comme contre exemple de son théorème la série $\Sigma \frac{\sin nx}{n}$, et qu'il a démontré que $r_n(\frac{1}{n})$ ne tend pas vers o lorsque n tend vers l'infini, et il en conclut :

"Now this is a curious argument. It shows that our Robinsonian interpretation of the Cauchy continuum was not quite correct. Cauchy's continuum (perhaps unlike Leibniz's) is not a set of actual points but as set of moving points. His "variables" are not Weierstrassian "variables" ; the latter can be eliminated without loss, since the Weierstrass theory of motion explains motion, change, variables in terms of an infinitistic algebra of actual quantities : this is one of its most important achievements. Not so Cauchy's theory, where "variable quantity" is not simply a manner of speech but a vital part of the theory. The "point" at which he shows that

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots$$

does not converge is a moving point $x = (1/n)$ *where* $n \to \infty$ *. The fact that the sequence does not converge at this moving point is in fact what later came to be known as the Gibbs-phenomenon and the corresponding condition (namely that* $\Sigma f_n(x)$ *is uniformly convergent in* I *if for all* (x_n) *in* I *the corresponding remainders* $r_n(x_n)$ *tend to zero) can be shown to be equivalent to Weierstrassian uniform convergence. But then "everywhere" in Cauchy's theorem does not mean "at all points, whether standard or non standard" as Robinson would have it, but "at all standard and at all Cauchy-wise moving points". So Cauchy's continuum is a rather "dynamic" one". Lakatos [1978], p.156.*

En fin de compte, Robinson et Lakatos, mettent en cause non pas la conception de fonction de Cauchy, mais sa conception de l'ensemble des réels (qui n'étaient pas encore construits). On peut raisonnablement penser que c'est la conjugaison de ces deux conceptions encore confuses qui font "obstacle" (au sens de Bachelard) à la mise en place des conditions d'uniformité.

2°) <u>Pourquoi Cauchy donne-t-il une démonstration du théorème</u> ?

En effet on peut rappeler qu'il était habituel à cette époque d'appliquer le "principe de Leibniz" ; dans l'exposition élémentaire des rpincipes de calculs supérieurs" de L'Huilier (1786), on trouve l'énoncé de ce principe : "si une quantité variable susceptible de limite jouit d'une certaine propriété, sa limite jouit de la même propriété". Les analystes avaient coûtume d'admettre un certain nombre de résultats qui leur permettaient de progresser, par exemple :

En 1817 Bolzano introduit le critère de Cauchy pour les séries, il en admet la réciproque, et de cette réciproque il déduit : "tout ensemble majoré de nombre admet une borne supérieure". (Il s'agit des nombres réels dont l'existence est implicite).

En 1821 Cauchy utilise, sans démonstration, les passages à la limite dans les inégalités.

Ceci rappelé, on peut faire quelques conjectures sur les raisons qui ont poussé Cauchy à donner une démonstration du théorème sur la continuité :

- Cauchy enseignait, il énonçait donc ses résultats devant des étudiants, et il avait à coeur de prouver ce qui, pour les mathématiciens de l'époque, allait de soi.

- Cauchy venait de mettre au point des outils sophistiqués : Continuité et convergence, il était important pour lui de montrer leur puissance. Il nous semble d'ailleurs que son but était de montrer que le nouveau cadre théorique qu'il définissait, lui permettait de redémonter les résultats d'Euler, et donc qu'il était efficace.

- Plus particulièrement, son cours de 1821 d'Analyse Algébrique vise la construction et l'étude des propriétés des fonctions transcendantes élémentaires, et il se sert explicitement du théorème sur la continuité, pour prouver que

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots$$

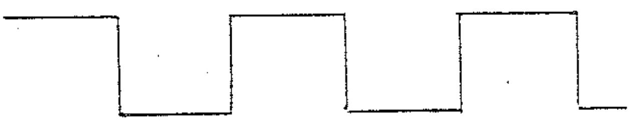
de cette égalité, il tire de nombreux résultats et en particulier la convergence de $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$ vers e^z .

3°) Les séries de Fourier.

En 1807, Fourier fait une communication orale à l'Académie des Sciences de Paris sur sa "Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides"* dont en 1808 Poisson fait connaître les résultats essentiels ; Fourier énonce le résultat suivant :

"La série cos x - 1/3 cos 3x + 1/5 cos 5x - 1/7 cos 7x + ... converge vers une fonction limite qui "appartient à une ligne qui ... est composées de droites séparées, dont chacune est parallèle à l'axe des x et égale à la demi-circonférence. Les parallèlles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe à la distance $\pi/4$, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne".

Des historiens comme Lakatos, dans"Proofs et réfutations" se posent la question de savoir si Cauchy était vraiment en mesure de reconnaitre la série de Fourier comme un contre-exemple à son théorème sur la continuité. On peut effectivement se le demander quand on sait que Fourier décrivait



comme étant le graphe de la limite. Ce dessin n'est bien entendu pas le graphe d'une fonction, mais il est trompeur, car il parait continu en un sens naïf (c'est à dire au sens d'Euler : "qui peut être tracé d'un seul trait".) Il faut donc pour l'analyser une conception très précise et très juste de ce qu'est une fonction et de ce qu'est la continuité. Cauchy avait certes dès 1821 une conception assez fine, mais lorsqu'il parle de fonction, il a vraisemblablement toujours dans l'idée ce que nous appelons les fonctions analytiques (c'est à dire les fonctions continues au sens d'Euler) et la fonction limite de Fourier peut paraître, dans un premier temps, appartenir à cette classe**. Il est donc possible qu'en 1821 Cauchy n'ait pas accordé suffisamment d'attention à la série de Fourier, pour y reconnaître un contre exemple à son théorème. La question reste ouverte.

DEUXIEME ETAPE 1826-1853.

1°) Prise de conscience de l'erreur.

Cette deuxième étape est caractérisée par le fait que dans la communauté mathématique, tout le monde est maintenant persuadé que le théorème

---

* Fourier publie ses résultats en 1822 dans sa "Théorie analytique de la chaleur".

** Soit des fonctions analytiques par morceaux, soit des fonctions dont le graphe est tracé sans lever la main.

de Cauchy est faux. Le 16 Janvier 1826, Abel écrit à son ami Holmboe, il attire son attention sur l'inexactitude du théorème de Cauchy, et il donne un contre-exemple (analogue à celui de Fourier) :

$\sin x - \sin 2x/2 + \ldots + (-1)^{n+1} \sin nx/n + \ldots$ qui est égale à $\pi/2$ si $o \leqslant x < \pi$ et à o si $x = \pi$. Il ajoute en plus : "on fait toute espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies ; mais est-ce permis ? Jamais de la vie. Où cela est-il démontré que l'on obtient la dérivée d'une série infinie en prenant la dérivée de chaque terme ? Il est facile de citer des exemples où cela n'est pas exact, par exemple :

$x/2 = \sin x - \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \ldots$, en prenant les dérivées on a : $1/2 = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots$ Résultat absolument faux car cette série est divergente !".

Abel s'est posé le problème de la continuité des séries de fontions, mais plutôt que d'essayer de trouver des conditions très générales de validité du théorème énoncé par Cauchy, il s'est placé dans le cadre plus restreint des séries entières (qui étaient d'ailleurs, rappelons le, les séries qui étaient visées par Cauchy) ; le théorème est vrai dans le cadre, mais la démonstration qu'en donne Abel comporte exactement la même erreur que celle de Cauchy. Il utilise implicitement la convergence uniforme. Cependant on peut constater qu'Abel reconnait les mérites des concepts de limite et de continuité introduits par Cauchy en les utilisant lui-même.

Les fondements de son travail n'étant pas remis en cause, on peut penser que Cauchy va essayer de rectifier son théorème. Le fait qu'il donne en 1826 une preuve de la convergence de certaines séries introduites par Fourier permet peut être d'étayer cette hypothèse. Sa démonstration est d'ailleurs fausse, car il utilise le fait que deux séries à termes quelconques sont de même nature si leurs termes généraux sont équivalents. Cette erreur est dénoncée par Dirichlet*, par contre, bien que Dirichlet démontre que des séries de fonctions continues convergent vers des fonctions discontinues, il ne mentionne pas que cela implique que le théorème de Cauchy est faux.

2°) <u>Premières tentatives de rectification du théorème</u>.

Fourier avait démontré de façon fort brillante** que la série

---

$\Sigma \, (-1)^{p} \, \frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}$ était convergente ; il avait de plus remarqué qu'au voisinage des points de discontinuité de la limite, la convergence était extrêmement lente.

En 1847, Seidel a lui aussi très soigneusement étudié la vitesse de convergence des séries de Fourier dont les sommes étaient discontinues au voisinage des points de discontinuité, il s'est aperçu qu'au voisinage de ces points la convergence est très lente ; Seidel dit de ces séries qu'elles convergent "aussi lentement que l'on veut". De façon indépendante, Stokes cherche dans la même direction, et il arrive à la conclusion que ces séries convergent "infiniment lentement". Seidel et Stokes démontrent que si les séries ne sont pas à convergence infiniment lente, alors le théorème de Cauchy est vrai. Stokes en montre la réciproque, alors que Seidel en donne un contre-exemple : $\Sigma \frac{x^{n}}{n!} = e^{x}$. La définition que Stockes donne de cette convergence infiniment lente lorsque x tend vers zéro est la suivante : "On dirait que la convergence devient infiniment lente si n, étant le nombre de termes qu'on doit prendre de façon que la somme des termes négligés soit en valeur absolue plus petite qu'une quantité e donnée qu'on peut prendre aussi petite que l'on veut, n croit indéfiniment, lorsque x décroit indéfiniment*". Stokes et Seidel ont bien repéré où était l'erreur dans la démonstration de Cauchy ; mais les définitions qu'ils ont alors proposées ne sont pas assez opératoires pour permettre des calculs aisés, et leur découverte est passée complètement inaperçue à leur époque.

3°) Rectification par Cauchy lui-même.

Cauchy, en 1853, pour corriger son théorème, donne la première définition opératoire de la convergence uniforme. Il fait d'abord remarquer que le théorème qu'il avait énoncé en 1821, c'est à dire 32 ans auparavant, donnait "lieu à quelques exceptions", il ajoute alors : "il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception".

Cauchy se donne une série de terme général u_n, il écrit $s_n = u_o + u_1 + \dots + u_{n-1}$, r_n est le reste de la série lorsqu'elle est convergente. $s_{n'} - s_n = u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$ (1), et il énonce : "Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande, on puisse rendre, pour toute les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (1), quel que soit n',

---

* Définition de Stokes citée par Gratham-Guinness.

et par suite le module de r_n inférieurs à un nombre aussi petit que l'on voudra". On reconnait énoncé ici le critère de Cauchy uniforme, mais Cauchy ne lui donne pas de nom spécifique, et il donne, après l'avoir démontré le théorème I : "Si les différents termes de la série $u_o, u_1, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$ sont des fonctions de la variable x, continues, par rapport à cette variable entre des limites données ; si, d'ailleurs, la somme $u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'}$ devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des entiers n et $n' > n$, la série sera convergente et la somme de la série sera, entre les limites données, fonction continue, de la variable x". Cauchy n'a pas trouvé nécessaire de caractériser par un nom cette sorte de convergence*, cela tendrait à nous faire penser que la propriété $\sup_x |u_n(x) + \ldots + u'_n(x)| < \varepsilon$ n'est pas, pour Cauchy, une propriété de l'ensemble des fonctions u_n, mais une propriété des valeurs prises par les u_n. Il semble que Cauchy ne puisse pas encore avoir l'idée d'étendre la notion de convergence des suites de nombres aux suites de fonctions ; en effet, sa notion des fonctions est très liée à leurs expressions algèbriques et donc une fonction reste, pour lui, un nombre $f(x)$ (même si celui-ci varie lorsque x décrit l'ensemble de définition), il ne s'agit pour lui que de convergence de suites de nombres, même s'il est contraint de rajouter des conditions "qui portent sur l'ensemble des valeurs prises par les fonctions dans un intervalle. Il n'a d'ailleurs pas l'idée de revoir les autres théorèmes qu'il a énoncés, en tenant compte de la condition qu'il a trouvé pour la continuité. En particulier, il affirme que si les f_n sont continues sur $[a,b]$ et convergent vers f continue alors

$\Sigma \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \Sigma f_n(x)d_x$ (1), sans ajouter de condition sur la convergence des f_n. Stokes répète cette erreur, et Rienmann, lui-même, énonce le théorème faux dans un cours inédit (rédigé par Hankel) sur la "théorie des fonctions complexes". Cela n'est pas tellement étonnant parce qu'on sait bien que la convergence uniforme est suffisante pour établir (1) mais qu'elle est loin d'être nécessaire ; et dans les domaines de fonctionnement habituels à l'époque de Cauchy, l'égalité (1) est valide sans qu'il y ait nécessairement convergence uniforme en effet pour exhiber une série (f_n) de fonctions numériques convergeantvers une fonction f intégrable et ne vérifiant pas (1), on va chercher une série telle que Σf_n converge uniformément sur tous les compacts de $]a,b[$, et telle que

---

$\sum\limits_{1}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)|\, dx$ diverge : $f_n(x) = e^{-nx} - 2\, e^{-2nx}$ sur $[\,o\,;\, +\infty\,[$ *

$\Sigma\, f_n$ converge normalement sur tout compact de $[\,o\,,\, +\infty\,[$, $\int_o^{+\infty} f_n(x)dx = o$

$\int_o^{+\infty} |f_n(x)|dx = \frac{1}{2n}$, $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n = + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est une fonction strictement positive

donc $\int_o^{+\infty} \sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x)dx > o$ et par conséquent (1) n'est pas vérifié.

Le concept de convergence uniforme est né, mais il n'a pas encore pris toute son importance, il n'a même pas de nom ; les mathématiciens n'ont pas encore pris conscience du fait qu'il s'agit d'une convergence essentiellement différente de la convergence point par point.

TROISIEME ETAPE 1853-1861.

Gudermann avait introduit ce qu'il appelait convergence uniforme de certaines séries dans un de ses cours à Munster ; il voulait spécifier par là que cette convergence était indépendante de certains paramètres. Weierstrass a été l'élève de Gudermann à Munster, et il n'est donc pas étonnant qu'en 1841, dans un article publié en 1894, il parle de séries entières qui "convergent uniformément", c'est à dire "quelque soit un nombre positif δ, on peut enlever de la série un nombre fini de termes de façon que le reste de la série, pour tous les x dans le domaine de convergence, soit plus petite en valeur absolue que δ". Cet article n'étant pas publié avant 1894, il n'a aucune influence ; et c'est dans son cours de 1861 (cours rédigé par Schwartz) qu'on trouve pour la première fois les idées de Weierstrass sur la convergence uniforme ** :

- Il commence par poser la question de savoir à quelle condition une série de fonction continues convergent vers une fonction continue. Il introduit alors la notion de convergence uniforme à l'aide du critère de Cauchy uniforme.

- Il donne la démonstration du théorème sur la continuité en "découpant les ε en 3", exactement comme on le fait actuellement dans les cours de DEUG. **

---

* Exemple fourni par J.L.Ovaert.

- Il énonce et démontre correctement pour la première fois le théorème sur la dérivabilité de la somme de séries de fonctions dérivables, et fait remarquer que cela répond à l'objection faite par Abel en 1826.

- Pour ce qui est du théorème sur l'intégrabilité de la somme d'une série de fonctions intégrables, nous avons le témoignage de Heine qui écrit en 1869 que Weierstrass est le premier à avoir démontré que la somme d'une série de fonctions intégrables est elle-même intégrable et que

$\Sigma \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \Sigma f_n(x)dx$ si sa convergence est uniforme*.

QUATRIEME ETAPE 1861-1906.

Il s'est passé quarante ans entre le moment ou Cauchy énonce un théorème faux et celui où Weierstrass énonce et démontre de façon très moderne les théorèmes liés à la convergence uniforme. Il semble qu'à l'époque de Cauchy, il était difficile aux mathématiciens, d'envisager une fonction f indépendamment de son écriture explicite, c'est à dire de f(x) (par exemple $\frac{1}{x^2+1}$ ou $1 - x + x^2 + \ldots$) ; la seule limite envisageable était donc $f = \lim f_n$ si et seulement si pour tout x $f(x) = \lim f_n(x)$. Ensuite, petit à petit, les fonctions commencent à être manipulées comme des objets mathématiques à part entière, c'est à dire sans faire référence explicitement à leur expression algébrique ou à leur comportement (variations, limites, etc...). On peut penser que cette évolution s'est faite grâce au développement de deux secteurs des mathémaques : d'une part le calcul des variations, d'autre part la théorie des ensembles.

Le calcul des variations est étudié dès le début du 18ème siècle par Euler et Lagrange. Euler cherche une fonction y qui rend extrêmale l'intégrale $I = F(x, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$, il montre qu'elle vérifie nécessairement "l'équation d'Euler".

Lagrange a l'idée de remplacer y(x) par y(x,t), il obtient ainsi I(t) et en écrivant I'(t) = 0, il retrouve l'équation d'Euler. A l'époque déjà, on sait bien qu'une solution y de l'équation d'Euler ne donne pas nécessairement un extremum relatif pour I. D'ailleurs la notion d'extremum relatif n'est pas claire, on se rend déjà compte que la notion de fonction

* P.Dugac rapporte dans sa monographie sur Weierstrass, qu'il a trouvé de propos dans "Über trigonométrische Reihen" de Heine. [Dug 1]

"voisine" d'une autre peut prendre plusieurs sens, le problème est donc déjà posé !

Durant tout le XIXème siècle, les analystes s'intéressent à l'étude des équations fonctionnelles : équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc... Dès 1824 Cauchy, travaillant sur l'existence des solutions d'équations différentielles commence à entrevoir la distinction entre propriétés locales et propriétés globales des fonctions (cet aspect est mis en évidence dans l'introduction de C.Gilain au livre "Augustin-Louis Cauchy. Equations différentielles"). Les remarques de Cauchy sont améliorées par Lipschitz dans "sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles", publié en 1876 en Français (en 1868 en Italien). C'est Picard qui met ces notions bien au point dans son traité d'analyse (tome II, paru en 1893).

Weierstrass n'est peut être pas très conscient de définir avec la convergence uniforme une convergence dans l'ensemble des fonctions, mais la condition qu'il introduit pour tout x avec $a < x < b$, montre qu'il envisage un comportement global sur $[a,b]$.

Vers la fin du XIXème siècle, la nécessité d'une nouvelle analyse commence à se faire sentir, une analyse qui traiterait les fonctions de fonctions. Dès 1887, Volterra, après Ascoli et Arzela, a l'idée d'appliquer les concepts du calcul infinitésimal aux "fonctions de ligne" (ce sont des F (f) où f est une fonction définie sur un intervalle, donc dont le graphe est une ligne). Il propose des notions de voisinage de lignes, de limite de suites de lignes, et il essaye d'étendre les notions de continuité et de dérivabilité, il ne fait cela que dans des cas très particuliers, mais l'idée est lancée ! Cet essai parait, a posteriori, bien audacieux quand on sait que les notions d'algèbre et de topologie, qui sont nécessaires à une telle construction, ne sont pas encore mises en place. Hadamard et Lévy* continuent les travaux de Volterra, ce sont eux qui introduisent les termes de fonctionnelles et d'analyse fonctionnelle mais leurs découvertes restent sans développement ultérieur**. L'ensemble des travaux de la fin du XIXème se caractérise par un manque de réussite dans la généralisation (l'état de l'analyse fonctionnelle à cette époque ressemble beaucoup à l'état de l'analyse classique juste avant Cauchy).

La théorie des ensembles, elle, est issue des travaux de Cantor et de Dedekind sur les ensembles de points, c'est à dire sur les parties de

*Hadamard(1865-1963)
Lévy(1886-1971)

**Dans ce domaine précis

$\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$. On en trouve les prémisses dans le livre de Dedekind "Que sont et que doivent être les nombres ?" paru en 1888, et dans les six mémoires de Cantor "Sur les ensembles infinis et linéaires de points" parus de 1878 à 1884. Le concept général d'ensemble est introduit dans "Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis" publiés de 1895 à 1897 par Cantor. Dans le paragraphe 2 de son livre, Dedekind reprend la définition de Dirichlet d'une application : "L'application f est une loi qui à tout élément déterminé s d'un ensemble S fait correspondre un élément bien déterminé f(s), image de s", et il montre pour la première fois l'utilité et l'importance de considérer les fonctions les plus générales.

C'est Fréchet qui va réussir la synthèse des différents courants précédents. Dans sa thèse publiée en 1906 et intitulée "Sur quelques points du calcul fonctionnel", il va éclaicir la notion, bien préoccupante pour les analystes, de fonctions voisines. Pour cela, Fréchet a l'idée de définir la proximité d'objets abstraits, cette définition pouvant ensuite s'appliquer à définir la proximité d'objets particuliers (points, fonctions, courbes, surfaces, etc...). Il considère un ensemble E, sur lequel est définie une distance, vérifiant trois propriétés dotn jouit la distance Euclidienne et dont Fréchet découvre qu'elles sont fondamentales :

°° $d(x,y) = o \Leftrightarrow x = y$

°° $d(y,x) = d(x,y)$ pour tous les couples (x,y).

°° Pour trois éléments quelconques x,y,z de E, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Le travail de Fréchet est remarquable, en effet, toutes les notions importantes d'analyse dans $\mathbb{R}^n$, telles que voisinages, limites, points d'accumulation, compacité, connexité etc..., peuvent être transférés dans ces espaces abstraits, qu'en langage moderne on appelle "espaces métriques". Cela résoud le problème de la proximité de deux fonctions, il suffit de définir des distances sur les ensembles de fonctions. Mais au contraire de $\mathbb{R}^n$ où toute les distances* amènent à la même notion de convergence (u_n converge vers u si et seulement si $\lim\limits_{n \to \infty} d(u_n,u)=o$) sur les ensembles de fonctions des distances différentes donnent des notions de convergence différentes, par exemple :
les fonctions continues sont limites de leurs séries de Fourier avec la distance $d_2(f,g)=(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt)^{1/2}$ et pas avec la distance $d(f,g)= \sup\limits_x |f(x)-g(x)|$ (qui est la distance liée à la convergence uniforme). Après

*Distances usuelles
(issues de normes)

les travaux de Fréchet, la convergence simple et la convergence uniforme apparaissent issues l'une d'une famille d'écarts et l'autre d'une distance définie sur l'ensemble des fonctions ; l'une est très localisée, l'autre est au contraire très globale ; (f_n) converge simplement vers f sur I si et seulement si pour tout x de I $\lim_{n \to \infty} (d(f_n(x), f(x)) = o$ (d distance sur R^n).

(f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(f_n,f) = o$ où $d(f_n,f) = \sup_{x \in I} |f_n(x)-f(x)|$.

Dès l'époque de Fréchet, on utilise de nombreuses distances sur les ensembles de fonctions, en particulier la distance d_2 que nous avons citée plus haut ; c'est l'écart quadratique moyen, issu des travaux de Sturm et Liouville. La mise au point des espaces topologiques les plus généraux et des espaces normés sont des raffinements qui n'amènent plus aucun progrès sur la notion de convergence uniforme stricto sensu :
par exemple, "Soit X un ensemble quelconque, Y un espace métrique et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X. Désignons par $f_1, \ldots f_n, \ldots$ des applications de X dans Y. On dit que les f_n convergent vers f sur tout $A \in \mathcal{A}$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$, la restriction des f_n à A convergent uniformément vers la restriction de f à A.

- si $\mathcal{A}$ = X, c'est la convergence uniforme sur X.
- si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de X réduites à un seul point, c'est la convergence simple.
- si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des compacts de X, on obtient la convergence uniforme sur tout compact"*.

Avec la thèse de Fréchet, nous cernons au plus près la notion de convergence uniforme, elle permet de décrire une certaine proximité dans un ensemble de fonctions. Les problèmes, qui se posent dorénavant aux mathématiciens, sont les choix de distance, ou de structure uniforme, qui expriment au mieux la proximité des fonctions selon le problème envisagé.

En résumé.

L'étude de la génèse historique de la notion de convergence uniforme nous a permis de repérer un certain hiatus.

Cauchy voulait légitimer certaines opérations que l'on faisait sur les séries : intégration, dérivation, interversions de passage à la limite etc...

* G.Choquet "Cours d'Analyse, tome II, Topologie" Masson.

Mais la notion de convergence simple est insuffisante pour cela, l'absence d'une autre notion l'a conduit à énoncer un théorème faux. Cauchy n'avait pas, en 1821, les outils qui lui auraient permis d'inventer une autre notion : à savoir l'idée et les moyens d'appliquer les concepts de l'analyse classique aux ensembles de fonctions. Pourtant, une lente évolution des idées a permis d'abord de corriger la démonstration fausse, mais c'était encore des considérations peu précises et peu susceptibles d'être généralisées (par exemple pour démontrer les théorèmes sur la dérivation ou sur l'intégration).

Ensuite des progrès dans les notions de convergences et de fonction permettent à Weierstrass de légitimer toutes les opérations sur les séries grâce à une notion presque actuelle de la convergence uniforme.

Le dernier pas est franchi lorsque Fréchet invente la notion d'espace métrique, il est alors patent que la notion de convergence uniforme est liée à une certaine proximité entre les fonctions, celle-ci étant définie par la distance : $d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x)-g(x)|$.

BIBLIOGRAPHIE pour le Chapitre V

BELHOSTE B. "Augustin Louis Cauchy" Pour la Science n°71, Paris (1984).

BOURBAKI N. Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann Paris (1969).

BROUSSEAU G. Petit panorama de la didactique des mathématiques. 2ème école d'été de didactique des mathématiques (1982).

CAUCHY A.L. Oeuvres Gauthier-Villars Paris (1882-1974).

CHEVALLARD Y. et JOSHUA M.A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. Recherche en didactique des Mathématiques Vol 3 n°1 (1982).

DHOMBRES J. Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction. Université de Nantes (à paraitre).

DIEUDONNE J. et alii Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann Paris (1978).

DIRICHLET P.G. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données Werke tome 1, Berlin Reinen 1889.

DUGAC P.
- Eléments d'analyse de Karl Wierstrass. Archive for history of exact sciences Vol 10 n°1-2 (1973).
- Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire. Thèse d'Etat Université Paris VI (1978).
- Sur les fondements de l'analyse au XIXè s. Université de Louvain (1980).
- Richard Dedekind et les fondements des mathématiques Vrin Paris (1976).

FOURIER J.B. Théorie analystique de la chaleur. Paris (Didot) (1822).

GILAIN C. Equations différentielles ordinaires d'A.L.Cauchy. Collection Academic Press (1983)

GRABINER J. L'âge de la rigueur MIT Press

GRATHAM GUINESS The development of foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. MIT Press (1970).

HOUZEL C., OVAERT J.L., RAYMOND F. SANSUC J.J Philisophie et calcul de l'infini Maspero Paris (1976).

LAKATOS
- Proof and refutations dans une traduction de N.Balacheff et J.M.Laborde (à paraitre).
- Cauchy and the Continuum, The mathematical intelligencer 1 (1978).

REVUZ A. et REVUZ G. Eléments de topologie APM Paris (1966).

ROBINSON A. Standard analysis - North-Holland (1980).

YOUSKHEVITCH Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXè s. APMEP fragment d'histoire des mathématiques n° 41 Paris (1981).

INTER-IREM Histoire des mathématiques et épistémologie n°18 IREM Lyon (1979).

INTER-IREM Enseignement de l'analyse n°20 - IREM Lyon (1981).

ENCYCLOPEDIA-UNIVERSALIS Tous les articles concernant l'analyse et les analysetes du XVIIIè, XIXè et début du XXè s.