

i.re.m.

UNIVERSITE PARIS VII

MODELISATION ET REPRODUCTIBILITE
EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR MICHELE ARTIGUE

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
8

L'étude de la reproductibilité des situations didactiques va passer par diverses modélisations concurrentes de ces dernières. Il s'agit dans ce chapitre, en quelque sorte de planter le décor.

Pour ce faire, nous devons, en premier lieu, préciser le sens que nous donnerons au terme de "modèle" : pour nous, comme l'écrit S. Bachelard [1], le modèle constitue "un intermédiaire à qui nous délégons la fonction de connaissance, plus précisément de réduction de l'encore énigmatique en présence d'un champ d'études dont l'accès pour des raisons diverses nous est difficile".

De part sa position d'intermédiaire, le modèle est impliqué dans une relation ternaire avec d'une part,

- une réalité phénoménologique dont il est une abstraction d'autre part,

- un champ théorique qui, structurant l'investigation de la réalité, guide sa construction.

D'où la nécessité de décrire, au moins dans ses grandes lignes, le champ théorique auquel nous nous référerons constamment dans cette recherche, à la fois explicitement et implicitement.

Enfin, qu'en est-il, à l'heure actuelle, de la reproductibilité dans les travaux de didactique des mathématiques ? C'est ce que nous essaierons de cerner pour compléter cette esquisse.

I UN CHAMP THEORIQUE POUR LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

A l'heure actuelle, sous l'impulsion de nombreux chercheurs, en particulier G. Brousseau, Y. Chevallard, G. Vergnaud, il semble que s'installent, se juxtaposent, se coordonnent en didactique des mathématiques, un certain nombre de cadres théoriques et en liaison avec eux, un certain nombre de concepts qui en constituent l'ossature. C'est dans le champ théorique ainsi en voie de constitution que se situe le présent travail.

L'unité de ces approches théorisantes repose en premier lieu sur leur caractère systémique. La didactique des mathématiques étudie les processus de

transmission et d'acquisition des différents concepts de cette science, particulièrement en milieu scolaire et universitaire. Cette étude est celle d'un système, le système didactique, et de son fonctionnement. Le système didactique est formé, comme le précise Y. Chevallard ([2]) :

- du système didactique stricto-sensu (essentiellement constitué de trois sous-systèmes : professeur, élèves, savoir enseigné),
- et d'une couche extérieure qu'Y. Chevallard nomme la noosphère du système didactique. Cette couche contient tout ce qui, dans la société, pense au niveau précis des contenus de l'enseignement. "Elle est le lieu à la fois des conflits et transactions par lesquels s'exprime et se réalise l'articulation entre le système didactique stricto-sensu et son environnement".

Cette approche systémique nous semble essentielle :

- elle montre que la didactique des mathématiques se trouve au coeur d'interactions multiples et doit de ce fait, sans pour autant négliger les apports des disciplines connexes, en particulier la psychologie et l'épistémologie, développer ses propres problématique et méthodologie.

- elle montre, en les regroupant au sein d'une structure commune, ce qui lie entre elles les didactiques des diverses disciplines mais, dans le même temps, elle pointe ce qui les sépare : des savoirs différents dont l'appropriation et la transmission posent des problèmes qui sont, eux, spécifiques de la connaissance visée.

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous balayerons le système didactique, sous-système par sous-système, en isolant dans chaque cas, les concepts qui nous paraissent y avoir leurs racines essentielles.

A - Sous-système "savoir enseigné".

Les efforts effectués pour tenter d'améliorer l'enseignement des mathématiques, au cours des 20 dernières années, tant en France qu'à l'étranger, ont d'abord porté essentiellement sur cette composante du système didactique. Ils se voulaient une réponse au vieillissement, voire au caractère obsolète des savoirs enseignés. Les résultats ne furent pas à la mesure des efforts consentis. Sans doute une centration trop exclusive sur les savoirs enseignés

n'y est pas étrangère, mais à elle-seule elle ne suffit pas à expliquer toutes les difficultés rencontrées. La mise en place des réformes souleva de nombreuses résistances : de plus, très vite, certains des nouveaux objets d'enseignement introduits se révélèrent mal adaptés, d'autres se mirent à vivre une vie propre, subissant des perversions que n'avaient pas prévues les auteurs des réformes. Pour le didacticien, ces phénomènes ne sont pas le fait du hasard, ils ne sont pas spécifiques des mouvements de réforme des 20 dernières années. Ils sont la conséquence :

- de la complexité des mécanismes par lesquels les savoirs savants se transmutent en objets d'enseignement,

- du fait que les objets d'enseignement sont soumis à une économie qui leur est propre, celle du système didactique.

La didactique se doit de les prendre en charge au niveau théorique et c'est à ce besoin que répond le concept de "transposition didactique", interprétation en didactique des mathématiques d'un concept plus large dû à M. Verret ([3]). En effet la transposition didactique désigne "le processus par lequel un élément du savoir savant devient une connaissance à enseigner puis un objet d'enseignement" ([4]). L'analyse de la transposition didactique de la notion de distance menée par Y. Chevallard et B. Joshua ([2;]) est, à ce sujet, exemplaire. Les auteurs suivent pas à pas le cheminement qui a mené de la notion axiomatisée par Fréchet pour résoudre des problèmes d'analyse fonctionnelle à l'objet actuellement enseigné en 4ème, dans le cadre de la géométrie plane, pointant les interventions des différentes composantes du système didactique, en particulier de sa noosphère et analysant leurs effets.

Mais, au niveau des savoirs enseignés, la recherche en didactique ne doit pas prendre en compte uniquement la spécificité des objets d'enseignement. Elle doit aussi se préoccuper du découpage qu'elle va opérer sur ces objets. Ce découpage ne peut être trop fin. Comme l'a écrit G. Vergnaud ([5]) : "il ne serait pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de la multiplication, de la division, des fractions, rapports, nombres rationnels, proportions, des fonctions linéaires et multilinéaires, des espaces vectoriels et de l'analyse dimensionnelle, car les relations rencontrées par les élèves dans des problèmes

de multiplication et de division participent de tous ces concepts". D'où la notion de "champ conceptuel" qu'il définit comme "un espace de problèmes ou de situations problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion" [6]. L'intérêt et l'importance de cette notion pour la didactique se comprendront encore mieux si l'on considère le sous-système "sujet-apprenant". En effet, il est maintenant bien connu que l'enfant ne construit pas son savoir par petits blocs isolés sur des périodes de temps courtes et bien délimitées. L'étude de la psychogénèse des contenus de connaissance ne peut donc s'effectuer sans un découpage de la connaissance en domaines suffisamment larges et cohérents tels ceux des structures additives, multiplicatives, étudiées précisément par G. Vergnaud et son équipe.

B - Sous-système "sujet apprenant"

Dans ce cadre, la référence aux théories Piagétienes de l'apprentissage et en particulier à la théorie de l'équilibration majorante ([7]) est constante, même si ces théories sont reconnues insuffisantes dans une perspective didactique par tous les auteurs. (Cf. par exemple G. Vergnaud ([6]), C. Laborde ([8]), J. Rogalski ([9])). Dans cette optique, une notion fondamentale est celle de "conception du sujet", associée à un état de la connaissance du sujet à un instant donné, relativement à un concept donné. Comme l'on distingue dans un concept mathématique :

- la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée,

- l'ensemble des signifiants associés au concept : représentations symboliques et icôniques,

- la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens,

- les outils : théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept,

On distinguera dans les conceptions des sujets ces diverses composantes et, en particulier :

- la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève,

- l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,

- les outils, théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept.

G. Vergnaud a justement introduit à ce propos la notion de "théorème en acte" pour désigner "les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de problème ; le vocable "en acte" signifiant qu'il n'est pas pour autant nécessairement capable de les expliciter ou de les justifier" ([6]).

Mais, comme nous l'avons déjà signalé, cette approche théorique bien qu'issue de la perspective Piagétienne, dans le sens où elle postule, en particulier, que toute connaissance se construit par une interaction constante entre le sujet et l'objet, s'en démarque entre autres dans sa manière d'envisager les rapports entre le sous-système "sujet apprenant" et le sous-système "savoir enseigné". D'une part, les contenus ne sont pas considérés ici comme le substrat sur lequel va se développer la recherche d'une organisation et d'une hiérarchisation de structures mentales générales et la notion de champ conceptuel est là pour réhabiliter justement en quelque sorte les contenus de connaissance. D'autre part, la perspective didactique imprime un autre sens à l'étude des rapports entre les deux sous-systèmes.

En effet, pour le didacticien, le problème majeur, c'est celui de l'étude des conditions dans lesquelles se constitue le savoir mais en vue de leur optimisation, de leur contrôle et de leur reproduction, en situation scolaire essentiellement. Ceci va le conduire à accorder une importance particulière à l'objet de l'interaction entre les deux sous-systèmes qu'est la situation problème et à la gestion par l'enseignant de cette interaction.

C - Système didactique stricto-sensu

Le concept, essentiel à ce niveau de l'analyse est celui de "situation didactique" dû à G. Brousseau qui reprend et organise les éléments

ci-dessus. Par situation didactique, on désigne "l'ensemble des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution" ([10]).

Comme on le perçoit immédiatement, le cadre matériel, l'univers de la situation didactique est la classe donc concerne essentiellement le système didactique stricto-sensu ; mais, la présence de l'enseignant doué d'une volonté d'enseignement met en évidence le rôle joué par les éléments du système qui contribuent à déterminer sa conception de l'enseignement visé, en particulier la noosphère du système didactique.

On peut alors interpréter la mise à l'écart relative du maître, dans les recherches menées par l'équipe de G. Brousseau, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, comme une volonté de réduire, pour mieux les maîtriser, l'influence des facteurs extérieurs au système didactique stricto-sensu, dans l'étude des situations didactiques. La citation suivante (J. Perez [11]) illustre très clairement le changement de point de vue par rapport à l'approche psychogénétique et le type de contraintes auxquelles satisfont les situations didactiques analysées dans les recherches de cette équipe : "La démarche que nous avons suivie consiste d'abord à construire un processus d'apprentissage où la connaissance n'est pas directement ou indirectement enseignée par le maître, mais doit apparaître progressivement chez l'enfant à partir de multiples remaniements structurels : ceux-ci étant le résultat de confrontations avec un certain type d'obstacles rencontrés au cours de l'activité. Ce sont donc les multiples interactions au sein de la situation qui doivent seules provoquer les modifications chez l'élève et favoriser ainsi l'apparition des concepts souhaités ... Si la connaissance visée par l'apprentissage doit apparaître dans l'exacte mesure où elle devient un instrument nécessaire pour s'adapter à une situation devenue problématique (les stratégies utilisées spontanément se révélant inefficaces), tout l'effort de l'analyse du didacticien doit porter sur cette situation. La question primordiale est d'abord de savoir en effet, en quoi, celle-ci est réellement problématique pour l'enfant".

Pour le didacticien donc, déterminer comment l'utilisation de variables

de commande de la situation peut provoquer, dans la classe, des changements de stratégie, comment l'on pourrait contrôler au sein d'un processus, par la manipulation de ces commandes, une genèse scolaire du concept, apparaît beaucoup plus important que de chercher à préciser dans leurs moindres détails les étapes du développement psycho-génétique.

Cette genèse scolaire et artificielle des concepts, le didacticien la construit et l'analyse en s'appuyant sur une théorie, qui reflète une prise en compte didactique d'aspects perçus comme fondamentaux dans la construction de la connaissance scientifique.

Actuellement, la théorie à laquelle les didacticiens se réfèrent en général est la théorie des situations didactiques élaborée par G. Brousseau. Elle se base sur une classification qui, indépendamment des contenus, traduit les différents rapports que les situations didactiques peuvent instaurer vis à vis de l'objet de connaissance. Elle distingue ainsi des situations d'action, de formulation, de validation et depuis une époque plus récente d'institutionnalisation. Pour G. Brousseau une genèse scolaire des concepts doit si possible comprendre ces quatre étapes, reflets d'étapes clefs de la construction du savoir scientifique.

Aux situations d'action, de formulation, de validation sont associées trois formes de dialectique qui, comme l'écrit R. Douady ([12]) ont des fonctions différentes :

- "dialectique de l'action" : l'élève est confronté à une situation qui lui pose problème. Dans sa recherche d'une solution, il produit des actions qui peuvent aboutir à la création d'un savoir faire. Il peut plus ou moins expliciter ou valider ses actions mais la situation d'action ne l'exige pas.

- dialectique de la formulation : des conditions différentes rendent nécessaire un échange d'informations et la création d'un langage pour assurer l'échange. Dans la situation de formulation, l'élève peut justifier ses positions mais la situation ne l'exige pas ...

- dialectique de la validation : les échanges ne concernent plus seulement les informations mais aussi les déclarations. Il faut prouver ce que l'on

affirme autrement que par l'action. C'est l'objectif de la situation de validation". Ici, comme le souligne N. Balacheff, sont mis en jeu deux aspects importants de la preuve :

"- la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve,

- la preuve est un acte social, elle s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) qu'il faut convaincre." [13].

Quant aux situations d'institutionnalisation ce sont "celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir" (G. Brousseau [14]).

De nombreux travaux de recherche se placent dans ce cadre théorique, outre bien sûr ceux de G. Brousseau et son équipe qui concernent essentiellement l'enseignement primaire. Pour l'étude des situations de formulation le lecteur pourra se référer utilement à la thèse de C. Laborde ([8]), pour les situations de validation aux travaux de Nicolas Balacheff, par exemple ([13] et [15]). Les situations d'institutionnalisation ont été jusqu'alors peu étudiées. Dans le chapitre III, nous abordons nous-mêmes à propos de la recherche menée sur le cercle le problème de l'institutionnalisation des connaissances, mais il serait faux de prétendre que ce soit dans le cadre de situations d'institutionnalisation. Comme nous le montrons, l'institutionnalisation s'effectue de manière diffuse tout au long de l'apprentissage avec des temps forts lors des phases de rappel et de bilan.

Dans ses travaux récents, [16], R. Douady développe une approche des situations didactiques sensiblement différente et elle-aussi intéressante. Ce qu'elle retient essentiellement de la construction des connaissances scientifiques pour élaborer une genèse scolaire des concepts c'est :

- qu'il convient de distinguer pour un concept mathématique son caractère outil et son caractère objet. Par outil, elle entend "son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre", par objet, elle entend "le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement",

- qu'un concept joue souvent le rôle d'outil implicite avant de devenir un objet du savoir constitué,

- qu'il peut être mobilisé en général dans plusieurs cadres (physique, géométrique, numérique, graphique ...) entre lesquels s'établissent des correspondances qui peuvent être des moteurs de la progression du savoir.

D'où les notions de dialectique outil/objet et de jeu de cadres sur lesquelles se fondent la structure "Activités - Institutionnalisation - Exercices" qu'elle construit.

Dans cette structure, l'élève est confronté, dans une première étape, à un problème pour lequel la mise en oeuvre d'un objet connu comme outil explicite permet d'engager une procédure de résolution mais ne permet pas d'aboutir. Au cours d'une phase d'action, il va donc mettre en oeuvre implicitement des outils nouveaux, pour tenter de résoudre le problème posé. L'intégration de ces outils nouveaux aux savoirs anciens s'effectue au cours d'une seconde étape, dans des processus dialectiques de formulation et de validation. La troisième étape est une phase d'explicitation au cours de laquelle certains éléments nouveaux sont identifiés comme objets de savoir.

A ces trois étapes qui constituent le pôle "activités" de la structure s'ajoutent nécessairement, pour des raisons d'efficacité, une phase d'institutionnalisation et une phase "exercices" où l'élève a l'occasion de faire fonctionner et de mettre à l'épreuve les nouvelles connaissances acquises.

Le jeu de cadre est utilisé, lui, par le biais de l'imperfection des correspondances inter-cadres comme moteur de déséquilibres, la recherche de la compensation de ces déséquilibres (au sens Piagétien) devant permettre de progresser vers la résolution du problème posé. On retrouve ici les différents actes de la construction des connaissances mis en avant par G. Brousseau : action - formulation - validation - institutionnalisation. Mais ce ne sont plus eux qui conditionnent la classification des situations, donc leur analyse et leur élaboration.

Les deux approches théoriques que nous venons de présenter très brièvement, en accord avec le contenu du paragraphe I B, se situent dans le cadre de processus d'apprentissage mettant l'accent sur l'activité de l'élève, lui accordant dans une large mesure la responsabilité de la construction de son savoir. Les situations d'enseignement traditionnelles, c'est bien connu, fonctionnent rarement de la sorte. N'y-a-t-il pas là une contradiction ? Non, à notre avis, car l'analyse des phénomènes didactiques est, pour le didacticien, intimement liée à leur production. De ce fait, les cadres théoriques élaborés pour l'analyse des situations didactiques, doivent pouvoir servir de guide à la construction de genèses scolaires du savoir en accord avec les cadres théoriques développés par ailleurs. Il n'en demeure pas moins, que même s'ils n'ont pas été élaborés explicitement à cette fin, les concepts de la théorie des situations didactiques (notions de variable didactique, d'ouverture d'une situation, de saut informationnel, de contrat didactique ...) sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre ici ont fait, sans aucun doute possible, la preuve de leur efficacité dans l'analyse des situations didactiques, de quelque nature qu'elles soient.

Soulignons que R. Douady reconnaît, à ce propos, que la pédagogie courante utilise essentiellement et dans l'ordre invariable la méthode "j'apprends - j'applique" qui, dans les termes introduits ci-dessus constitue à son avis une mécanique objet/outil. Mais, et ceci justifie sa démarche, elle pense qu'il y a une masse critique de connaissances à acquérir par le processus qu'elle décrit (Activités - Institutionnalisation - Exercices),

- "Grâce à quoi il est possible de leur intégrer d'autres connaissances acquises autrement, par exemple par la mécanique objet-outil, et qui fonctionnent efficacement,

- en-dessous de laquelle le "j'apprends - j'applique" est inefficace pour la plupart des élèves". [16].

Le survol du champ théorique de la didactique que nous venons d'effectuer est à la fois très schématique et très élémentaire. Il s'adresse au lecteur non-spécialiste de la discipline et tente de lui donner rapidement,

sous une formulation accessible les moyens de situer notre recherche dans le champ didactique, de mieux comprendre sa problématique, sa méthodologie, de mieux apprécier le sens et la portée des résultats obtenus^{**}. Il nous semble nécessaire de le compléter par quelques considérations sur la nécessité, le rôle mais aussi les limites à l'heure actuelle de ce cadre théorique.

D - Le rôle des objets théoriques de la didactique

Pour certains, dont je suis, l'avancement des recherches en didactique des mathématiques passe nécessairement par l'effort de théorisation.

Pour d'autres, au contraire, toute théorie à l'heure actuelle constitue une fausse scientification de la recherche, à un niveau purement idéologique, dans un jargon aux termes mal définis voire indéfinissables et la didactique des mathématiques n'est pas prête à dépasser le stade de la recherche pragmatique. Peut être est-ce inhérent à la nature des objets qu'elle étudie et ne le sera-t-elle jamais ?

L'invocation de la nature des objets étudiés nous semble une mauvaise excuse. Elle se sous-tend implicitement de l'affirmation que ce qui a trait à l'humain entre dans une complexité trop grande (complexité des objets eux-mêmes, mais aussi de leurs inter-relations comme des rapports à l'observateur) pour s'inscrire dans une approche scientifique.

Cette affirmation est, à l'heure actuelle, dépassée. Les succès remportés par les sciences du complexe (succès sur lesquels les possibilités créées par l'utilisation de technologies nouvelles : microscopie électronique, informatique ... ne sont pas sans influence), comme la reconnaissance par la physique contemporaine que l'objectivité scientifique ne passe pas par l'absence de référence à l'observateur sont là pour l'attester.

^{**} Note : Pour une plus ample familiarisation, le lecteur pourra se référer aux textes cités et peut-être, en tout premier lieu, à l'article "Didactique des Mathématiques" que R. Douady a écrit pour L'Encyclopédia Universalis.

Cela étant dit, il n'en demeure pas moins que les contraintes propres au domaine étudié imposent au chercheur en didactique de n'avancer qu'avec précautions et patience. Il doit se garder "d'extrapoler à l'extrême les oui rares et limités qui ont été obtenus de la nature" (I. Prigogine et I. Stengers, [17]) en surmontant comme l'écrit Bachelard dans "La formation de l'esprit scientifique" ([18]) l'obstacle de la généralisation hâtive et facile. Il doit aussi se garder de l'illusion qui consiste à penser qu'on a conceptualisé alors même qu'on n'a fait qu'apposer un nom. Mais il n'en reste pas moins que la théorie est un besoin :

- C'est elle qui permet de structurer l'observation en soi informe, de questionner les faits bruts, tout en nous obligeant à prendre conscience de la primauté de ce questionnement sur l'observation et à préciser notre statut par rapport à cette observation. "Jamais la description ne respecte les règles de la saine platitude" écrit à mon sens avec raison G. Bachelard ([18]).

- C'est elle qui rend possible la capitalisation des recherches, en ne réduisant pas leurs résultats à des bribes de savoir émietté mais en les organisant au sein d'une entité cohérente.

- Enfin, par la perspective scientifique de validation dans laquelle elle nous place, elle nous engage à "réaliser" nos connaissances : comme l'écrit Y. Chevallard : "Il ne suffit pas, pour assurer la connaissance d'un phénomène que l'on a observé, d'en décrire les conditions de survenue aussi finement qu'il paraîtra possible : il est douteux qu'on n'en retienne pas qui soient en fait étrangères au phénomène soumis à l'étude, il est plus douteux encore qu'on n'en oublie pas quelques unes essentielles..Le contrôle de notre connaissance du phénomène passe par le projet de production du phénomène et cette production engage notre théorie du phénomène dans une technique de sa production" ([19]). (Nous voyons pointer là, de façon inévitable, le problème de la reproductibilité qui est au coeur de notre interrogation).

Notons que les didacticiens, même lorsqu'ils reconnaissent la nécessité de ces efforts de théorisation, ne cherchent pas à cacher leurs

limites à l'heure actuelle. Les quelques citations qui suivent en témoignent :

"Si l'ambition des travaux que nous venons d'évoquer est claire en ce qui concerne le désir de leurs auteurs de fonder la didactique comme branche scientifique, les conditions minimales de ce projet ne semblent pas, pour l'instant, être réunies". (G. Brousseau [20]).

"Il faut aussi examiner la théorie des situations didactiques du point de vue de sa fécondité didactique en terme de nouveauté et surtout l'efficacité des points de vue proposés ... C'est seulement alors que l'on saura ce que réellement on a appris." (G. Brousseau [20]).

"Etant donné le faible état de développement de notre théorie du système didactique, et par conséquent, la faiblesse du contrôle par la théorie de nos opérations de recherche, nous nous trouvons dans l'incapacité de rencontrer notre objet de connaissance hors du contrôle "empirique" de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe. S'en détourner trop longtemps pour se tourner vers des méthodologies auxiliaires, c'est prendre le risque de négliger ce qui n'est nullement négligeable et qui pourrait pourtant s'effacer de notre champ de conscience à n'y être pas empiriquement. La dialectique théorie-pratique a ici toute sa valeur et la théorisation ne peut frayer sa voie qu'au prix d'une organisation juste de la pratique de notre rapport à l'objet étudié." (Y. Chevallard [19]).

Mais ces obstacles, ces limites ne sont pas considérés ici comme inhérents à l'essence de la didactique des mathématiques.

II MODELISATIONS EN DIDACTIQUE

Il ne s'agit pas dans ce paragraphe de cerner les différentes modélisations utilisées jusqu'à ce jour en didactique des mathématiques, mais d'envisager deux types de modélisations, qui nous paraissent exemplaires, au niveau atteint à l'heure actuelle, des rapports entretenus par la théorie, la modélisation et la réalité du système didactique.

Dans le paragraphe suivant, nous essaierons de déterminer quelles conceptions de la reproductibilité leur ont été implicitement ou explicitement associées dans les recherches.

Le terme "modèle" est pris ici, dans l'acception large indiquée au début de ce chapitre. Il est traditionnel de distinguer pour les modèles, entre des capacités descriptives, explicatives et prédictives, certains réservant le caractère scientifique aux seuls modèles dotés de capacités prédictives quantitatives. Ce ne sera pas notre point de vue ici, et, tout en reconnaissant l'importance de prédictions quantitatives, nous ne leur subordonnerons pas la notion de modèle. Reprenant les propos de R. Thom, nous estimerons qu'un modèle "est quelque chose qui, par rapport à un questionnement préalable au sujet d'un être ou d'une situation X présentant un comportement énigmatique, soit permet la prédiction temporelle, soit, tout en n'améliorant en rien nos possibilités prédictives, diminue le caractère énigmatique du comportement de X". ([21]).

A. - Modèles des conceptions du sujet

Le système de connaissance d'un élève donné, à un instant donné, n'est pas quelque chose que nous puissions directement observer. Ce que nous observons, ce sont des comportements au sens large, des procédures de résolution de problèmes : actions, formulations, tentatives de validation, des erreurs, des blocages Les recherches portant sur les conceptions du sujet passent donc nécessairement par la construction de modèles de connaissance du sujet à partir d'observables recueillis expérimentalement. On réserve le nom de "modèles spontanés" aux modèles qui veulent représenter l'état de la connaissance du sujet avant tout apprentissage spécifique.

Modèles spontanés

L'étude des modèles spontanés connaît un essor très important en didactique de la Physique, en particulier avec les travaux du LDPES autour de L. Viennot et E. Saltiel (cf. par exemple L. Viennot [22], E. Saltiel [23], J.Y. Closset [24]). Cet essor est moindre en mathématiques et l'on peut trouver à cela des explications plausibles. La première est sans doute

que l'expérience première ne joue pas des rôles comparables en mathématiques et en physique du fait des rapports différents de ces disciplines au réel. G. Bachelard a souligné, dans "La formation de l'esprit scientifique", qu'en physique l'expérience première constitue un obstacle épistémologique à la connaissance scientifique et que le passage d'un état d'esprit préscientifique à un état d'esprit scientifique passe par un renversement complet dans la manière d'appréhender la réalité. En mathématiques, il ne semble pas raisonnable de soutenir que ce soit systématiquement le cas. Les connaissances spontanées (c'est à dire essentiellement culturelles) développées par les enfants sur le concept de nombre, avant tout apprentissage scolaire, ont été, par exemple, étudiées ces dernières années par de nombreux chercheurs (par exemple : J.P Fischer [25], R. Gelman et C.R Gallistel [26], C. Meljac [27]). Ces recherches mettent en évidence l'existence de connaissances structurées, attachées à un certain champ sémantique et associées à diverses pratiques calculatoires. Elles sont certes partielles (l'addition est perçue par exemple uniquement comme une opération unaire), se rapportent à un domaine numérique restreint, mais on ne peut les considérer comme erronées.

Il est clair, par ailleurs, que la connaissance construite dans un domaine numérique, par exemple celui des entiers, et même scolairement construite, pourra se constituer comme un obstacle lors de l'extension du domaine numérique : certains théorèmes particulièrement opératoires dans le champ initial, par exemple : "tout entier a un successeur et, s'il est non nul, un prédécesseur "ou" le produit de 2 entiers non nuls est supérieur ou égal à chacun d'eux", par le fait d'une généralisation hâtive, pourront créer, dans le nouveau domaine, des connaissances erronées qui auront tendance à résister du fait de leur poids dans leur domaine initial d'élaboration. Mais nous sommes là très loin de l'obstacle de l'expérience première et des modèles spontanés. Comme l'a écrit G. Brousseau : "les obstacles en mathématiques sont peut être plus souvent des obstacles au changement de statut que des obstacles à la connaissance elle-même". [28].

Modèles généraux des conceptions du sujet

Les références à ce type de modélisation sont explicites relativement tôt dans les travaux de didactique des mathématiques. Par exemple, en 1977, A. Bessot et F. Richard écrivent dans leur "Etude sur le schéma dans l'enseignement des mathématiques" :

"Les productions observables de ces niveaux d'activité (actions, formulations, validations) sont supposées être régies par des systèmes ou des modèles - construits par l'observateur mais tout se passe comme si ce modèle était utilisé par le sujet - qui sont des modèles implicites (niveau 1), des langages (niveau 2), des théories ou des modèles explicités par le sujet cette fois (niveau 3)". [29] .

Divers autres adjectifs seront par la suite opposés au terme "modèle", par exemple :

* R. Douady parle de "modèle implicite provoqué" ([30]) en reprenant une expression utilisée par A. Bessot et F. Richard ([31]) lorsqu'elle construit un modèle dont la structure mathématique n'est autre que celle de $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels positifs, et dont les axiomes visent à traduire la structure et l'évolution des connaissances des élèves au cours du long processus didactique envisagé dans sa recherche.

* N. Balacheff et C. Laborde, dans une communication au congrès ICME IV opposent, quant à eux, modèles spontanés et modèles propres, ces derniers correspondant aux périodes d'apprentissage [32] .

* A. Robert, dans sa thèse, introduit le terme de "modèles exprimés" pour désigner les modèles élaborés à partir d'expressions écrites sur la convergence des suites numériques. ([33]).

* Dans sa thèse également ([34]), H. El Bouazzaoui distingue entre modèles de base, de résolution et de contrôle : les premiers sont ceux qui permettent à l'élève de comprendre la consigne, les seconds ceux qui lui permettent de prendre des décisions, d'adopter des stratégies de résolution, les troisièmes, enfin, ceux qui lui permettent de contrôler les résultats de son activité sans recours à l'intervention du maître.

Mais on note aussi, à l'opposé de cette floraison d'expressions, une tendance à utiliser la dénomination de "modèle implicite" pour désigner, de manière générique, tout modèle des conceptions du sujet. La prééminence dans les recherches de situations d'action n'est sans doute pas étrangère à ce glissement de sens.

Il faut souligner également :

- que les conceptions du sujet sont le plus souvent étudiées non en elles-mêmes mais dans la dialectique qu'elles vivent avec les situations problèmes dans le cadre des situations didactiques,

- que les modèles construits sont de pures inférences de l'observateur mais que, comme l'ont écrit A. Bessot et F. Richard, tout se passe comme si c'était eux qui déterminaient le fonctionnement du sujet.

Dans ces conditions, on ne peut s'étonner qu'il y ait eu parfois aplatissement de cette notion de modèle sur les situations et sur le sujet à travers les procédures observées.

En fait, dans les recherches, apparaissent sous le nom de modèles des conceptions du sujet, des objets divers qui vont de la construction axiomatique à la technique de résolution d'un problème précis. Les quelques exemples ci-après nous semblent bien illustrer cette diversité et la distanciation plus ou moins forte vis à vis des situations et procédures :

* Pour R. Douady [30], les modèles sont "des modèles mathématiques qui expliquent, justifient les actions et démarches" des élèves. C'est le cas du modèle axiomatique qu'elle construit.

* G. Ricco, G. Vergnaud, A. Rouchier [35], dans une recherche sur la représentation du volume au niveau du premier cycle de l'enseignement secondaire, déterminent à partir des procédures observées dans des situations diverses, deux modèles de la notion de volume :

"Un modèle additif du volume comme grandeur unidimensionnelle décomposable en couches, en lignes, en colonnes ... (et) un modèle géométrique du volume comme ensemble d'arêtes ou ensemble de surfaces ...".

* A. Robert construit à partir de descriptions d'étudiants de l'enseignement supérieur, 4 modèles de représentation de la convergence des suites numériques :

Les modèles primitifs correspondant à des descriptions monotones ou stationnaires, les modèles dynamiques correspondant à l'utilisation d'un verbe d'évolution dans le temps et dans l'espace, les modèles statiques correspondant à la traduction en langue naturelle de la définition formelle en (ϵ, N) et les modèles mixtes conjuguant une expression dynamique et statique.

* Enfin H. El Bouazzaoui cite à titre d'exemple de modèle de résolution, dans la situation où "un élève A, ayant un ensemble E_1 de stylos, doit commander par écrit, à un autre élève B, un capuchon pour chacun de ses stylos" le fait de "dessiner autant de capuchons qu'il y a de stylos" ; puis poursuit : "Un autre consiste à compter les stylos et écrire le nombre trouvé. Il y a encore d'autres modèles de résolution et leur apparition dépend des possibilités du sujet".

La construction de modèles des conceptions du sujet, a été, jusqu'à présent, le cadre implicite ou explicite d'un nombre très important de recherches en didactique des mathématiques. Après avoir concerné essentiellement l'enseignement primaire et la genèse des différents domaines numériques, elle s'est développée plus récemment dans le secondaire et l'enseignement supérieur, ce développement s'accompagnant d'une diversification des champs conceptuels étudiés en direction de la géométrie et de l'analyse.

Ces recherches donnent la priorité aux aspects cognitifs et psychologiques. Il s'agit de repérer à travers les variabilités interindividuelles certaines régularités, certaines hiérarchies dans les conceptions des élèves et leur évolution en fonction des situations-problèmes utilisées. Donc, finalement, de construire des modèles susceptibles de traduire en états et changements d'états, dans un champ conceptuel donné, relativement à un processus didactique déterminé, les étapes de la construction des connaissances importantes par leur généralité et leur stabilité relatives.

Ceci comme nous l'avons déjà dit, dans le but d'améliorer notre

connaissance du sujet apprenant mais aussi et en fin de compte de nous donner les moyens d'améliorer l'apprentissage.

Ces recherches se sont déroulées souvent en dehors du contexte de la classe (entretiens individuels, situations d'interaction , tests ...). Mais, même lorsque ce fut le cas, l'attention a été centrée sur le sujet apprenant et sur la composante situation-problème de la situation didactique, avec sous-jacente l'hypothèse que ce qui déterminait le comportement de l'élève était essentiellement l'interaction dialectique qui s'établissait entre ses conceptions et la situation-problème. La prise en compte d'autres dimensions explicatives, en particulier de phénomènes de contrat didactique, n'est intervenue, lorsqu'elle est intervenue, le plus souvent qu'a posteriori, du fait de distorsions importantes entre les comportements observés et ceux prévus a priori.

On peut penser d'ailleurs que, si ce type de recherches a constitué jusqu'à présent une des grandes tendances de la recherche en didactique des mathématiques, c'est bien sûr à cause de sa nécessité, de son caractère de préalable à une recherche en classe, de la qualité des résultats qu'il a permis d'obtenir, mais aussi, parce que sa problématique permettait d'évacuer momentanément en partie la complexité du système didactique, complexité que le faible état d'avancement des recherches rendait d'autant moins maîtrisable.

B - Modèles de situations - théorie des jeux

Le type de modèles dont il sera question, dans ce paragraphe, a été essentiellement développé dans les travaux de G. Brousseau et de son équipe, dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Il n'y a plus comme dans le cas précédent centration sur le sujet mais sur la situation didactique.

Pour G. Brousseau, il faut mettre en oeuvre une modélisation de la situation didactique dans laquelle puissent s'expliciter les choix ouverts à l'élève, l'information dont il dispose, les contraintes et règles qu'il est tenu de respecter. Le cadre de la théorie des jeux lui paraît approprié à ces objectifs :

"Il s'agit d'expliciter les choix ouverts à la personne (ou à l'élève) qui met en oeuvre, la connaissance, par le problème qu'elle s'est posé et par les informations dont elle dispose. Il paraît donc raisonnable de traduire cette activité en terme de jeu, entre cette personne et un "milieu" qui, à son tour, change les états du jeu laissés par le sujet. Le milieu comprend aussi bien "la nature" que les instruments et objets divers qui entrent en scène et que les "autres", éventuellement le professeur. La connaissance est le système producteur et limiteur des décisions du sujet (organisées ou non en stratégies). Les connaissances elles-mêmes s'organisent en représentations qui permettent certains types de contrôle et d'anticipation dans la situation". [20] .

Mais ce type de modélisation ne s'associe pas aisément à n'importe quelle situation didactique et, en particulier, on ne voit pas très bien à l'heure actuelle comment il pourrait rendre compte des situations d'enseignement les plus courantes. En effet, seules y semblent parfaitement adaptées pour l'instant les situations que G. Brousseau qualifie de "problématiques" et "quasi-isolées" ; "problématiques" parce que c'est l'élève ou le groupe d'élèves qui sont, à chaque moment, responsables de leurs actions et de leurs choix, "quasi-isolées" (par rapport au maître) au sens où le maître est l'organisateur, choisit le jeu, en fixe les règles et les objectifs mais ensuite s'efface, se gardant d'apporter des informations supplémentaires aux élèves, d'exploiter librement la situation. Ce point de vue était sensible dans la citation de J. Perez du paragraphe I. et, comme nous l'avions souligné, la modélisation ne constitue pas simplement un outil d'analyse, elle est directement engagée dans la production des situations didactiques qui seront utilisées par le chercheur.

Alors, comme l'écrit G. Brousseau : "le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La règle, explicitement ou implicitement communiquée, lui donne les moyens d'envisager :

- les divers états possibles du jeu X

- l'état initial $i \in X$

- l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de X qui définissent les choix permis dans chaque cas

$$\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(X) \\ x \mapsto \Gamma(x)$$

- l'état final où les états terminaux $t(\Gamma(t) = \emptyset)$

- une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux.

A chaque coup, le joueur effectue un choix ; c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états.

L'autre joueur, "le milieu" établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action ...

L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait. [20]. Une stratégie, dans ces termes, est une fonction de choix qui à tout état x non terminal associe un élément de $\Gamma(x)$. Il est clair que le comportement d'un joueur, suivant une stratégie donnée, au cours d'une partie, est entièrement déterminé.

Pour G. Brousseau : "Une telle modélisation a l'avantage de mettre en avant le rôle de la connaissance et les rétroactions auxquelles elle est soumise (non seulement du point de vue de la pertinence ou de la validité, mais aussi de l'efficacité). Elle permet d'approcher le sens, d'abord des comportements du sujet, mais aussi celui de la connaissance et celui des situations d'enseignement.

Elle permet de placer la prévision des apprentissages dans un cadre théorique accessible au calcul. Dans la mesure où l'efficacité des connaissances peut être sensible à un champ de problèmes, on peut prévoir quelles sont - a priori - les stratégies les plus efficaces, et en retour, les conditions de passage de l'une à l'autre." [20].

Tout ce qui précède est particulièrement bien illustré par la thèse de H. Ratsimba-Rajohn [36]. Cette thèse concerne l'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, la commensurabilité et le fractionnement de l'unité. Une étude en terme de théorie des jeux permet de montrer que ces deux méthodes correspondent à des stratégies différentes, de délimiter leurs domaines respectifs de validité et d'optimalité. Elle permet de plus de construire un processus didactique permettant de tester l'hypothèse selon laquelle l'une des méthodes (ici la commensurabilité) peut, chez des élèves de CM2, constituer une stratégie de base pour la mesure rationnelle et, après avoir vu son efficacité bloquée par le choix judicieux des variables situationnelles, permettre l'appropriation de la seconde méthode.

Cette recherche nous laisse également entrevoir quel peut-être le poids de la contrainte d'un fonctionnement quasi-isolé. Le passage d'une stratégie à l'autre ne va pas de soi. Si certains élèves franchissent ce pas, un certain nombre se désintéresse de l'activité en la déclarant impossible, d'autres persistent à chercher des adaptations locales de la stratégie de base. Face à ces réactions, les enseignants ne peuvent rester dans le rôle qui leur était imparti, et interviennent de façon complètement incontrôlée. Comme l'écrit H. Ratsimba-Rajohn ([37]) : "Cette théorie du jeu que nous avons considérée, ne nous a pas permis de prévoir a priori les comportements des élèves et de l'enseignant au moment de la production des états intermédiaires du jeu.

En effet, lors de l'étude théorique, nous avons fait abstraction du jeu de l'enseignant, du jeu des élèves qui ont quelques idées pour résoudre le problème et du jeu de ceux qui n'en ont pas trouvé. Cependant le travail que nous venons de réaliser a montré qu'il était impossible de faire l'économie de l'étude du jeu de l'enseignant avec les élèves."

Nous ne pensons pas que le problème rencontré ici soit occasionnel. Il nous semble typique d'une situation didactique à la fois fermée et discontinue, fermée car peu d'échappatoires sont possibles, discontinue parce qu'une stratégie de base relativement bien ancrée permet d'aborder la résolution d'un problème mais non de le résoudre effectivement, et que la résolution passe par l'emploi d'une stratégie non déductible de la première par

par une succession d'adaptations locales.

Le risque de blocage de la situation sera d'ailleurs d'autant plus grand que, d'une part, on organisera moins les interactions entre élèves, interactions qui peuvent favoriser la diffusion des stratégies gagnantes, que, d'autre part, la pression du temps didactique se fera plus pesante, donc en particulier que le niveau d'enseignement sera plus élevé.

Ceci est important car, pour le didacticien qui se situe dans une perspective Piagétienne de construction des connaissances (Cf. paragraphe I), la connaissance ne peut progresser de façon totalement continue. Dans ce cas, la maîtrise de la gestion des situations de saut du savoir que sont les situations discontinues est fondamentale. Nous reviendrons sur ce point au chapitre IV.

Nous avons vu à l'oeuvre dans ce paragraphe deux types de modélisations. Nous avons essayé de montrer que, bien que basées sur un champ théorique commun, elles l'abordaient sous des angles différents, mettant la priorité l'une sur une théorie de la connaissance, l'autre sur une théorie des situations. Chacune met l'accent sur des faits qui restent partiellement occultes à l'autre, même si la distance n'est pas si grande que la communication soit impossible. Mais si la distance n'est pas insurmontable, c'est essentiellement du fait de la référence toujours possible à un champ théorique qui les englobe toutes deux.

III MODELISATION ET REPRODUCTIBILITE

Notre propos n'est pas de faire ici une étude poussée de cette question, mais de situer rapidement le problème. Lorsque l'on cherche à cerner, à travers les publications de didactique des mathématiques, le statut fait à la notion de reproductibilité, on s'aperçoit assez vite que ce statut est rarement explicite et que, lorsqu'il l'est, c'est sous une forme essentiellement idéologique.

Ce constat est l'impression empirique que nous ont laissées nos lectures didactiques, qu'elles s'adressent aux chercheurs ou aux praticiens

du système didactique. Pour tenter de la contrôler, nous avons choisi de rechercher à travers les articles de la Revue "Recherches en Didactique des Mathématiques", les références explicites à la reproductibilité. Il s'agit là d'un corpus réduit, la revue n'ayant publié jusqu'à ce jour que dix numéros. Mais ce choix nous a semblé cohérent par rapport à notre projet, d'une part, justement à cause de la taille limitée du corpus, d'autre part, parce que cette revue est, sans aucun doute, depuis sa parution, celle dont les publications se situent le plus au coeur du champ théorique que nous avons présenté ici.

Dans les dix numéros de cette revue, nous avons relevé, sans compter les reprises de communications générales aux congrès ICME IV et P.M.E, 23 articles.

Dans ces 23 articles, une typologie sommaire permet de distinguer :

- 3 articles que nous qualifierons de généraux :
 - . celui de G. Brousseau qui traite des problèmes posés par l'enseignement des décimaux (Vol. 1.1).
 - . celui de G. Glaeser qui traite de l'épistémologie des nombres relatifs (Vol. 2.3).
 - . celui de Y. Chevallard et M.A. Joshua déjà cité qui analyse la transposition didactique du concept de distance (Vol. 3.2)

- 20 articles centrés sur des travaux de nature expérimentale.

Nous distinguerons dans ces derniers, suivant la méthodologie essentiellement utilisée, 5 articles concernant des expérimentations en classe, et 14 correspondant à des expérimentations hors classe (tests, entretiens individuels, situations d'interaction ...) ; l'article non classé, celui de H. Ratsimba-Rajohn, étant mixte.

Ceci confirme ce que nous avons souligné précédemment, à savoir la prédominance d'un type de recherches au niveau des publications. Les raisons invoquées pour justifier les choix méthodologiques sont de nature diverse :

- pour les entretiens individuels, plutôt la mise à l'écart de la complexité du système didactique, cette dernière rendant possible à la fois - une centration sur les rapports entretenus par le sujet et la situation-problème,

- un recueil de données permettant une analyse fine et précise des procédures des sujets et de leur évolution.

- pour les tests, leur adaptation, pour des raisons d'économie de la recherche, au traitement simultané d'un grand nombre de variables.

Les extraits suivants l'expriment clairement :

"Nous avons retenu la méthode d'entretien individuel de préférence à l'observation des comportements d'élève en classe. En effet, dans une situation de classe, certaines procédures, propres à un élève donné, risqueraient de ne pas apparaître du fait de certaines variables difficiles à maîtriser (rôle du maître, des leaders, effet de contamination) ; certains tâtonnements pourraient passer inaperçus ou même ne pas pouvoir s'établir. De ce fait, l'interprétation, au niveau du fonctionnement du sujet, des procédures utilisées serait trop complexe. Au contraire, la situation d'entretien individuel nous permet de saisir, pour chaque enfant, la dynamique des procédures utilisées." C. Comiti, A. Bessot, C. Pariselle (Vol. 1.1. p. 176).

"Pour l'étude des représentations des élèves, nous avons choisi de commencer par la passation collective de questionnaires ... Plusieurs raisons nous ont conduit à ce choix comme première étape d'étude didactique de ces problèmes. Tout d'abord, nous voulions analyser des réponses à un ensemble assez complexe de questions pour repérer les régularités dans les relations entre les réponses, de façon à cerner - pour cette question de dimensionnalité - la structuration du champ conceptuel des mesures. Ensuite nous voulions en suivre l'évolution sur une durée en rapport avec la complexité prévue : ces deux exigences conduisaient à l'interrogation d'un nombre important de sujets ... Nous voulions éviter également les interférences extérieures entre élèves ou entre maîtres et

élèves mal contrôlables et non analysables." (J. Rogalski Vol 3.3 p. 354).

Mais, et ceci confirme bien l'évolution, vers une prise en compte de la globalité du système didactique, associée à l'unification du champ théorique décrite au § 1 du présent chapitre, les approches psycho-génétiques et situationnelles ne sont pas présentées comme s'opposant mais se complétant de façon nécessaire. Ceci, déjà explicite, par exemple, dans la communication (intitulée : "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.") faite par G. Vergnaud au colloque P.M.E. ([6]) est particulièrement développé et argumenté dans l'introduction du Vol. 4.1 (dernier volume paru, centré sur la didactique du concept de volume).

G. Vergnaud y écrit (p. 19) :

"Le point sur lequel nous voudrions insister, en conclusion de ces brèves remarques méthodologiques, est la nécessité de recourir, pour étudier cet objet complexe qu'est "l'enseignement et l'acquisition des connaissances" à une diversité de méthodes, complémentaires les unes des autres. Nous avons déjà indiqué que les expériences planifiées papier-crayon permettaient l'utilisation de plans d'expériences assez complexes, qui entraîneraient un coût prohibitif avec des entretiens individuels. A l'inverse ceux-ci permettent de regarder une variété plus grande de questions à la fois, avec une plus grande finesse.

Ces deux méthodes permettent de leur côté d'élaborer, en meilleure connaissance de cause, une séquence didactique expérimentale, en particulier de mieux définir les hypothèses par rapport auxquelles doit être conduite l'observation. A l'inverse l'expérimentation didactique et elle seule permet de s'approcher de cet objet complexe qu'est le déroulement en classe d'une leçon ou d'une série de leçons sur des savoirs et des situations déterminées."

et plus loin (p. 24).

"Loin de s'opposer l'une à l'autre, la théorie des situations didactiques, la théorie de la complexité psychogénétique et la théorie de

l'analyse de la tâche apparaissent complémentaires les unes des autres et parfois indissociables".

Mais venons en maintenant, à ce qui nous intéresse tout particulièrement, à savoir la notion de reproductibilité que véhiculent implicitement ou explicitement ces écrits.

* Dans les travaux associés à des expérimentations hors-classe, nous n'avons pas rencontré le terme "reproductibilité" ou des termes synonymes comme "répétabilité" par exemple. Il est question de "régularités" et les questions posées à ce propos (lorsqu'elles sont posées, ce qui n'est pas toujours le cas) sont celles du sens, de la fiabilité, du domaine de validité des régularités observées.

Ce questionnement est parfois explicité en tant que tel (A. Robert, par exemple, intitule un paragraphe : "les limites de nos données et la portée de nos résultats" Vol. 3.3 p. 337). Souvent, il est présent, mais moins directement sous forme de mises en garde, d'avertissements au lecteur, il se manifeste enfin de façon plus implicite par de multiples précautions oratoires, par exemple l'abondance d'expressions verbales comme "il semble", "il paraît que", "on pourrait penser que" ... , de termes comme "tendances", "hypothèses", "conjectures" ... , l'utilisation du conditionnel, etc

Citons quelques extraits :

Sous le titre "Mise en garde du lecteur"

"Le but visé par l'ensemble de notre recherche, et en particulier par l'article présenté ici n'est pas une étude statistique des connaissances dans les domaines pré-numériques et numériques des élèves du cours préparatoire.

Ce que nous voulons, c'est d'une part mettre en évidence, à partir de l'analyse des comportements des enfants observés, un certain nombre de tendances ; d'autre part, formuler des hypothèses explicatives de ces comportements".

C. Comiti - A. Bessot - C. Pariselle Vol. 1.2 p. 180.

"Prendre simultanément en compte tout le contexte historique, social et culturel dans lequel l'enfant actualise ses compétences ne peut pas être fait par une démarche unique, à la fois clinique et expérimentale du type "laboratoire" aussi limitée que celle présentée ici. Aussi sommes-nous très sensibles aux dangers qu'il y aurait à généraliser abusivement la portée de nos résultats et à tirer trop directement des prétendues applications pédagogiques".

(M.L.Schubauer-Leoni, A.N.Perret Clermont Vol. 1.3 p. 308)

"Il semble bien qu'il y ait là occasion d'un apprentissage probablement durable et qu'il faudrait pouvoir confirmer par l'étude d'effectifs de sujets plus grands que ceux-ci".

(ibidem p. 328).

"Les résultats précédents sont évidemment trop limités pour permettre d'énoncer des conclusions définitives ; ils suggèrent cependant des hypothèses directrices qui pourront orienter des recherches ultérieures".

(J. Caron-Pargue Vol. 2.1 p. 33)

"Autrement dit, les résultats sur les 1253 réponses standard sont les mêmes que sur les 662 réponses correspondant au seul texte V.1 du questionnaire" ... Cette stabilité entre les résultats de la moitié des élèves de toutes les classes (à peu près) est très importante, d'autant plus que, par contre, les résultats obtenus par les élèves de chaque classe d'un même niveau (chaque Math-Sup par exemple) ne présentent plus du tout cette homogénéité. Nous n'avons donc dégagé que les régularités valables, par deçà la personnalité des enseignants (et les conditions de passage ...), pour tous les enseignements (actuels)".

(A. Robert Vol. 3.3 p.314)

"La comparaison des réponses au questionnaire SA données par des élèves de 6ème et 5ème d'origines scolaires différentes apporte des éléments d'information sur la fiabilité des résultats observés".

(J. Rogalski Vol. 3.3 p. 361)

"Je parlerais plutôt de phase exploratoire ayant permis de prendre une certaine connaissance d'un terrain inexploré jusqu'alors ... et d'ouvrir des hypothèses que des expériences de didactique pourront éclairer".

(A. Robert Vol. 3.3 p.337)

Comme on le voit, la reproductibilité n'est pas enfermée dans la reproductibilité d'une expérience précise, la signification des résultats réduite à leur validité statistique. Face à un champ d'investigation complexe, les limites perçues sont bien sûr celles dues au fait d'un échantillonnage restreint ou mal contrôlé, mais aussi et surtout celles dues :

- à l'aspect nécessairement limité sur le plan conceptuel de la recherche,
- à l'existence de variables qui pourraient être déterminantes mais que l'on sait mal prendre en compte,
- enfin, à la distance qui sépare de l'objectif "final" qu'est la didactique scolaire.

Ce dernier point se manifeste par des mises en garde contre des interprétations pédagogiques hâtives des résultats obtenus, mais aussi très fréquemment par l'affirmation de la nécessité d'expériences ultérieures en situation scolaire, expériences par rapport auxquelles les recherches menées prennent le statut d'explorations préliminaires nécessaires.

** Dans les travaux associés à des expérimentations en classe, la difficulté de l'analyse des phénomènes observés, compte tenu de la multiplicité des variables dont ils dépendent est soulignée par tous les auteurs. Par exemple, dans le volume 1.1, R. Douady écrit (p. 81) : "Encore s'agit-il de faits qui se sont produits dans un contexte scolaire dont nous maîtrisons mal les variables. Nous ne pouvons donc pas affirmer que tel modèle implicite fonctionne en général chez les enfants dans telle situation", sous le titre "limites de validité de la réponse proposée".

Mais est soulignée aussi la nécessité d'une approche scientifique

de l'expérimentation en classe. Et c'est à ce sujet que nous voyons figurer effectivement (mais rarement, il faut le noter) les termes de "reproductibilité" ou "répétabilité".

Par exemple G. Brousseau (Vol. 1.1 p. 56) :

"A travers cette étude, se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques. Nous essaierons de les aborder aussi".

G. Vergnaud (Vol 4.1 p. 16) :

"Quelles précautions faut-il prendre pour faire de l'expérimentation didactique en classe, une expérimentation proprement scientifique ? Plusieurs critères peuvent être avancés :

- la clarté des objectifs visés et des effets attendus
- fiabilité des observations faites
- la répétabilité des faits didactiques intéressants

Les critères de cette approche scientifique, le didacticien - même s'il voit dans l'observation provoquée en classe l'analogue didactique de l'entretien individuel en psychologie - ne peut les calquer sur ceux issus de la psychologie (alors que c'était le cas pour les questionnaires et les entretiens individuels). A lui de définir par exemple ce qu'il entend par "répétabilité des faits didactiques intéressants". Et ce, avec la contrainte suivante : pour des raisons d'économie de la recherche, il est encore moins envisageable de multiplier des expérimentations en classe qu'il ne l'est de multiplier des entretiens individuels.

Ce problème est loin d'être résolu. A travers les écrits, on voit poindre des exigences, des distinctions de sens, des limitations mais tout ceci reste presque toujours au niveau du discours.

Par exemple G. Vergnaud écrit (Vol. 2.2 p. 229) :

"Le critère de la répétabilité est un critère exigeant. Il est impossible de le satisfaire à la lettre, mais il est peut-être moins malaisé qu'on le croit de s'en approcher, à un certain niveau d'interprétation des

événements. En effet, lorsqu'on répète la même séquence didactique avec plusieurs classes d'élèves, on constate des régularités très importantes, notamment au niveau des distributions de conduites et les variations prennent elles-mêmes un sens par rapport à ces régularités".

(Vol. 4.1 P. 17) :

"La répétabilité des faits didactiques est un critère apparemment très empirique. Il l'est d'ailleurs d'une certaine manière, puisqu'il faut effectivement avoir vu se répéter des conduites, des erreurs, des difficultés et des effets didactiques, pour leur accorder un autre statut qu'anecdotique. Mais il n'est pas qu'empirique, car l'enjeu scientifique qu'il recouvre est de savoir s'il est possible de décrire les déroulements possibles d'une série de leçons de manière telle que certaines régularités soient repérables et interprétables et que le maître dispose ainsi des moyens de comprendre et de maîtriser le processus dont il est responsable. Non point bien entendu que les choses se passent d'une manière identique d'une classe à l'autre. Chacun sait que cela est exclu ! Mais l'objectif à atteindre est que l'ensemble des conduites possibles, qu'il s'agisse des conduites individuelles ou des conduites de groupe, soit bien identifié et comme tel prévisible par le maître. Les régularités observées en psychologie pour des conduites individuelles ou des conduites de groupe permettent de considérer comme un objectif accessible, la mise en évidence de régularités au niveau du déroulement d'une classe, sur un ensemble de situations-problèmes et dans un champ conceptuel bien défini".

Mais rien de plus précis n'est avancé qui permette de trancher entre la reproduction et la non-reproduction. Que sera une régularité au niveau de la distribution des conduites ?.

Le seul article qui semble aller plus loin est celui de G. Brousseau (Vol. 2.1). Il y distingue, à juste titre, des reproductibilités que l'on pourrait qualifier respectivement d'externe et d'interne et essaie de déterminer à quel niveau s'est située la reproduction d'un processus de construction des nombres décimaux mené dans huit classes différentes.

"L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée

principalement contre les deux suivantes :

1 - Celle d'une "amélioration" au moins locale, comme celle que nous venons de signaler et dont l'effet, visible ici, est un resserrement de la dispersion des résultats.

2 - Celle d'une obsolescence des situations didactiques. Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions, qui, tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une "histoire", un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparemment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel

On peut espérer que l'obsolescence, si elle se produit, entraînera d'une part, une évolution des questions choisies par le maître (pour les exercices) dans le sens d'une augmentation du nombre de problèmes fermés et d'autre part une diminution des réussites sur les questions les plus ouvertes". (p. 85-86).

Mais il ne précise pas vraiment comment dans ce cas précis, il a tranché en faveur de la reproductibilité. Ainsi, tout en faisant allusion à diverses approches qualitatives et quantitatives, il laisse le lecteur sur sa faim.

D'autre part, les différents auteurs soulignent l'importance dans la dynamique d'évolution des classes de facteurs inatteignables par la simple connaissance des régularités individuelles.

Par exemple A. Rouchier Vol. 1.2 p. 235 :

"Les énoncés individuels sont identifiés ainsi que les énoncés et procédures issus d'un groupe d'élèves. Ils dépendent des problèmes posés,

des connaissances antérieures des élèves, mais aussi de l'existence d'interactions intra-groupes et inter-groupes qui favorisent la diffusion et la confrontation des réponses et des savoirs".

Mais comment prendre en compte ces facteurs dans l'analyse de la reproductibilité des situations. Rien n'est dit encore une fois sur ce sujet et, par ailleurs, les relations des expérimentations de classe, en général, tendent à les occulter. Ceci pour diverses raisons :

- la difficulté de disposer, dans une observation de classe, des informations nécessaires pour rendre compte de manière précise de la dynamique de son évolution,

- l'espace nécessairement restreint de la publication, sont deux facteurs qui jouent dans le même sens. Ils amènent à enfermer la situation dans le ou les quelques déroulements particuliers observés, à résumer la dynamique au profit de quelques trajectoires significatives qui risquent de devenir la chose à reproduire (avec tous les risques de perte de sens que cela comporte), enfin à multiplier des expressions comme "les élèves" qui noient le collectif dans la juxtaposition des individualités.

De tout ceci, il reste l'impression qu'on navigue en matière de reproductibilité des situations didactiques au niveau des vœux pieux. Ce faisant, on laisse au lecteur le libre choix de l'interprétation et nos écrits tendent peut-être à renforcer, malgré les précautions oratoires prises, des modèles naïfs compatibles avec l'idéologie de l'institution scolaire. A notre avis, ouvrir ce champ de recherches, même timidement en faisant l'effort d'analyser soigneusement les problèmes qui se posent dans quelques situations précises, peut être profitable à la recherche et à la diffusion de ses résultats.

- Thèse - Université de Grenoble

- [9] J. Rogalski (1983) : "Quelques éléments de théorie Piagétienne et didactique des mathématiques"
Cahier de didactique n° 2 - I.R.E.M Paris Sud
- [10] G. Brousseau (1982) : "Ingénierie didactique"
Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques -
I.R.E.M d'Orléans.
- [11] J. Perez (1982) : "Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénomènes pertinents au cours d'une activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle".
Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques -
I.R.E.M d'Orléans.
- [12] R. Douady (1984) : "Didactique des Mathématiques"
Encyclopedia Universalis.
- [13] N. Balacheff (1982) : "Preuve et démonstration en mathématiques au Collège"
Recherches en Didactique des Mathématiques
Vol. 3.3
- [14] G. Brousseau (1981) : "Problèmes de didactique des décimaux"
Recherches en Didactiques des Mathématiques
Vol 2.1.
- [15] N. Balacheff (1981) : "Etude de l'élaboration d'explications par des élèves de 3ème à propos d'un problème combinatoire".
Rapport de recherche n° 224 -
Laboratoire IMAG - Grenoble
- [16] R. Douady (1983) : "Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, Jeux de cadres"
Cahier de didactique des mathématiques n° 3 -
I.R.E.M Paris Sud
- [17] I. Prigogine et I. Stengers : "La nouvelle alliance"
Ed. Gallimard - Paris

- [18] G. Bachelard : "La formation de l'esprit scientifique"
(1977 - 10ème ed) Lib. J. Vrin - Paris
- [19] Y. Chevallard : "Sur l'ingénierie didactique"
(1982) Notes non publiées
- [20] G. Brousseau : "Les objets de la didactique des mathématiques"
(1982) Contributions à la seconde école d'été de
didactique des mathématiques -
I.R.E.M d'Orléans
- [21] R. Thom : "Modélisation et scientificité"
(1979) Actes du colloque : Elaboration et Justification
des Modèles - Ed. Maloine - Paris.
- [22] L. Viennot : "Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire"
(1979) Ed. Hermann - Paris
- [23] E. Saltiel : "Concepts cinématiques et raisonnements naturels :
(1978) étude de la compréhension des changements de
référentiels Galiléens par les étudiants en
Sciences".
Thèse - Université Paris 7.
- [24] J.L Closset : "Le raisonnement séquentiel en électrocinétique"
(1983) Thèse de 3ème cycle - Université Paris 7
- [25] J.P. Fischer : "L'enfant et le comptage"
(1981) I.R.E.M de Strasbourg
- [26] R. Gelman et : "The Child's understanding of number"
C.R. Gallistel Harvard University Press - Cambridge
(1978)
- [27] C. Meljac : "Décrire, agir et compter"
(1979) P.U.F. - Paris
- [28] G. Brousseau : "Les obstacles épistémologiques et les problèmes
(1983) en mathématiques"
Recherches en Didactique des Mathématiques
Vol 4.2.

- [29] A. Bessot et F. Richard (1977) : "Etude du schéma dans l'enseignement des mathématiques"
I.R.E.M de Bordeaux
- [30] R. Douady (1980) : "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire"
Recherches en Didactique des Mathématiques
Vol. 1.1.
- [31] A. Bessot et F. Richard (1979) : "Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures".
Thèse 3ème cycle - Université de Bordeaux
- [32] N. Balacheff et C. Laborde (1980) : "Address of members of the G.R.D.M (France) at the ICME IV" reproduit dans Recherches en didactique des Mathématiques - Vol. 2.1
- [33] A. Robert (1982) : "L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur".
Thèse - Université Paris 7
- [34] H. El Bouazzaoui (1982) : "Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération - Relation entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension et l'apprentissage de ces notions"
Thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I
- [35] G. Riccco, G. Vergnaud et A. Rouchier (1983) : "Représentations du volume et arithmétisation - Entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans"
Recherches en Didactique des Mathématiques
Vol.4.1.
- [36] H. Ratsimba-Rajohn (1981) : "Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques".
Thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I
- [37] H. Ratsimba-Rajohn (1982) : "Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles"
Recherches en Didactique des Mathématiques -
Vol. 3.1.