

irem.

UNIVERSITE PARIS VII

DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES À L'HEURE ACTUELLE

par Régine DOUADY

Ce texte diffère peu du texte à paraître dans
l'Encyclopédie Universalis édition 1984, sous la
rubrique " Mathématiques " (didactiques des).
Nous le diffusons avec l'aimable accord de
l'éditeur

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
6

0- INTRODUCTION

Les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques ne sont pas nouveaux. H. Lebesgue [1] au début du siècle manifestait sa préoccupation des conditions de l'enseignement et de la formation des professeurs. Des efforts plus récents se sont déployés dans tous les pays. Des quantités énormes de données ont été recueillies et traitées, le plus souvent avec les outils de la statistique. Des réformes de programme ont été décidées, des décisions pédagogiques prises. Pourtant, les résultats n'ont pas toujours été à la mesure des espoirs permis. Sous l'impulsion de chercheurs d'horizons différents : mathématiques, psychologie, sciences de l'éducation, et aussi linguistique, histoire, sociologie ... en France, comme à l'étranger, une idée a fait son chemin. On a éprouvé le besoin de sortir du cadre empirique ou statistique des premiers travaux. On a voulu situer les problèmes posés par l'articulation enseignement - apprentissage des mathématiques dans un cadre théorique. Dans les années 1960 - 70, des institutions, de statut différent selon les pays ou à l'intérieur d'un même pays, ont reçu pour mission d'étudier ces problèmes. En France par exemple des I.R.E.M. (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) ont été créés. Leur structure est tout à fait originale : ils accueillent des acteurs différents du système éducatif, principalement des enseignants (toutefois de tout niveau scolaire et universitaire) mais aussi des conseillers pédagogiques, des inspecteurs ... Cette structure transversale a permis la circulation des idées, des problèmes et des personnes entre le monde de l'Ecole et celui de la Recherche. Par cette ouverture ils ont rendu possible, en leur sein et ailleurs, l'essor de recherches prenant comme objet d'étude l'ensemble des relations entre trois pôles : enseignants, élèves et mathématiques dans le système d'enseignement.

La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, particulièrement en situation scolaire ou universitaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée. Par exemple, l'organisation d'une activité dont l'intention déclarée est l'apprentissage d'un savoir désigné est un objet d'étude pour la didactique même si cette activité échoue ou dévie de son objectif. A terme la didactique se propose

d'agir sur le système éducatif dans un sens "bénéfique", à savoir, améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement et proposer des conditions pour un fonctionnement stable de systèmes didactiques assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permette de résoudre des problèmes et de poser de vraies questions).

Les mathématiques, même si leur objectif reste de modéliser le réel possèdent une certaine autonomie de développement. Ce fait pose des problèmes particuliers à leur didactique.

Du point de vue méthodologique, on dispose de plusieurs moyens complémentaires : entretiens individuels, questionnaires auprès d'élèves et d'enseignants, analyse de manuels et surtout observations d'activités didactiques conçues dans un cadre théorique et réalisées à des fins différentes : tester des hypothèses, faire apparaître des comportements, reproduire des faits repérés L'enregistrement au magnétophone ou au magnétoscope des échanges verbaux entre élèves et avec l'enseignant sont des éléments indispensables pour l'analyse des observations. Pour traiter les données recueillies, diverses techniques ont été mises au point et continuent à faire l'objet de recherches [2] [3]...

1- DE LA PSYCHOLOGIE COGNITIVE A LA DIDACTIQUE

Les acquis de la psychologie cognitive et en particulier les aspects théoriques de l'épistémologie génétique de Piaget sont d'une grande utilité. Pour lui le sujet forme ses connaissances dans une interaction constante avec l'objet. Le facteur fondamental du développement cognitif est l'équilibration (qui résulte de déséquilibres) [4]. Toutefois, il a privilégié une catégorisation des stades de pensée au détriment de l'évolution adaptative des connaissances, il a minimisé le rôle des contenus en donnant la priorité aux structures logiques. Enfin, il ne s'est jamais intéressé à l'enseignement. De Piaget nous retenons l'importance qu'il accorde à la rééquilibration. A l'étude d'un sujet, (considéré isolément) l'école genevoise de psychologie sociale apporte la dimension collective [5].

Au contraire de Piaget, pour donner de la signification aux comportements il est nécessaire de faire intervenir pleinement les contenus et les caractéristiques de la situation. L'analyse des conduites (procédures et représentations) apporte certains éléments explicatifs des comportements des sujets. Ainsi l'évolution psychogénétique se produit sur une longue durée. Par exemple, les représentations numériques consistant à confondre un volume avec une aire, avec un périmètre ou avec un combiné des deux font obstacle pendant plusieurs années à la mise en place du concept de volume [6]. Mais cette analyse est insuffisante car elle permet seulement de faire des hypothèses sur le rôle et l'évolution de ces représentations. De plus, l'élève confronté à un problème doit faire des choix, prendre des décisions et donc rejeter des éventualités. La situation dans laquelle l'enseignant le place pour agir lui impose peut être des contraintes : sa réponse peut être une optimisation de la situation.

Choisissons deux exemples : l'apprentissage des nombres décimaux à l'école primaire et le concept de limite au début du cursus universitaire.

Les décimaux, compte tenu de leur utilité, doivent être enseignés à tout le monde, le plus tôt possible. C'est une nécessité sociale. Pour cela, on les associe à un système de mesure et pour les calculs on se réfère aux techniques

opérateurs sur les entiers. Les décimaux, présentés comme "des entiers naturels avec changement d'unité" deviennent pour les élèves des couples d'entiers séparés par une virgule auxquels il suffit d'adapter les algorithmes connus de calcul sur les entiers. Cette conception, appuyée par une mécanisation des procédures, va très longtemps faire obstacle à la mise en place d'une conception et d'une utilisation correcte des décimaux. [7].

Rappelons quelques erreurs classiques persistantes, bien connues des enseignants : entre 3,25 et 3,26 il n'y a pas de nombre ; 3,135 est plus grand que 3,4 puis plus tard 3,135 est plus grand que 3,4023 (dans lequel apparaît des dixmillièmes) ; $(3,4)^2 = 9,16$.

Le concept de limite est fondamental en analyse.

A. Robert en étudie le fonctionnement dans le cadre de la convergence des suites numériques auprès d'étudiants de l'Université et d'élèves de classes préparatoires aux Grandes Ecoles [8].

Dans un premier temps, elle relève trois grands types de représentations : "dynamiques", "statiques", "monotones". Elle étudie la corrélation de leur expression par écrit avec les performances de leurs auteurs. Il s'avère que "les étudiants qui ont exprimé une représentation statique (associée ou non à une représentation dynamique) ont réalisé les meilleures performances. Les étudiants qui n'expriment qu'une représentation dynamique (qui n'ont pas remplacé leur modèle "initial" par un modèle plus élaboré) ne sont pas discriminés par leur conception. Par contre, ceux qui ont gardé un modèle monotone ou archaïque réalisent de mauvaises performances [8]. Une analyse des erreurs la conduit à retenir un autre élément spécifique de la notion visée et absent chez beaucoup d'étudiants : la prise en compte du caractère variable de l'indice d'une suite, facteur constitutif de la signification de la convergence.

Une méthodologie propre à la didactique s'est progressivement mise en place. Elle consiste à faire des hypothèses didactiques (par exemple la corrélation entre la mise en place rapide d'une représentation statique de la notion de limite et une meilleure acquisition du fonctionnement du concept), à concevoir des situations qui permettent de les tester. Il faut alors réaliser ces situations, les observer, les analyser, enfin mettre en évidence les variables qui en assurent la reproductibilité [9]. De nombreux chercheurs contribuent à ce travail.

2- CHAMP CONCEPTUEL

Pour G. Vergnaud, une étude féconde de la didactique et de l'acquisition d'un concept nécessite un découpage de la connaissance en domaines assez larges. Il écrit : "il ne serait pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de la multiplication, de la division, des fractions, rapports, nombres rationnels, des fonctions linéaires et multilinéaires, des espaces vectoriels et de l'analyse dimensionnelle, car les relations rencontrées par les élèves dans des problèmes de multiplication et de division participent de tous ces concepts". L'aspect interactif des concepts, la longue durée de l'évolution psychogénétique chez l'élève ont conduit G. Vergnaud à la notion de champ conceptuel qu'il définit comme "un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroites connexions". [16].

G. Vergnaud a spécialement étudié deux exemples : les structures additives et les structures multiplicatives.

L'élève, pour sa part, placé devant un problème à résoudre produit des actions, des formulations orales et/ou écrites. On ne peut comprendre leur signification sans les rapporter aux contenus et "la notion de champ conceptuel réhabilite les contenus". De plus, pour G. Vergnaud, on doit considérer les différentes réponses de l'élève comme "engendrées par des règles de production à identifier". Il appelle théorème en acte des "propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de solution de problème" même si le sujet ne peut ni les expliciter, ni les justifier [16].

Pour expliquer les procédures de l'élève il reste encore à situer ses comportements parmi les comportements possibles et à rechercher les raisons des choix, par l'élève, des comportements observés. C'est une des préoccupations de G. Brousseau.

3- SITUATION DIDACTIQUE

Pour étudier expérimentalement les problèmes d'enseignement, G. Brousseau construit une théorie des situations didactiques qui doit lui permettre d'analyser a priori (inventaire des comportements possibles par exemple) et a posteriori (quelle est la signification des comportements observés ...) les interventions de l'élève et du maître. La mise en oeuvre de cette théorie nécessite l'élaboration d'un processus d'apprentissage : G. Brousseau en construit un pour les nombres décimaux [10]. Pour lui, les conceptions des élèves sont le résultat d'un échange permanent avec les situations de problèmes dans lesquels ils sont placés, et au cours desquelles les connaissances antérieures sont mobilisées pour être modifiées, complétées ou rejetées. Il définit la situation didactique comme "un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier par ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution." [11].

Dans le but d'organiser les échanges de l'élève avec le milieu de façon productive, il classe les situations autour de 3 formes de dialectique qui ont des fonctions différentes :

- dialectique de l'action :

L'élève est confronté à une situation qui lui pose problème. Dans sa recherche d'une solution, il produit des actions qui peuvent aboutir à la création d'un savoir-faire. Il peut plus ou moins expliciter ou valider ses actions, mais la situation d'action ne l'exige pas.

- dialectique de la formulation :

Des conditions différentes rendent nécessaire un échange d'informations et la création d'un langage pour assurer l'échange. Dans la situation de formulation, l'élève peut justifier ses propositions, mais la situation ne l'exige pas.

Notons que le travail de formulation ne se réduit pas à une simple traduction des actions. Comme le remarque C. Laborde, le passage à la formulation pose en lui-même des problèmes conceptuels à l'élève.

"L'expression en mathématiques passe par l'analyse des objets en jeu, des relations qui peuvent être établies entre eux, mais en retour elle est susceptible de faire évoluer cette analyse" [12].

Les problèmes langagiers en mathématiques retiennent d'ailleurs depuis longtemps l'attention de chercheurs comme D. Lacombe.

- dialectique de la validation :

Les échanges ne concernent plus seulement les informations mais aussi les déclarations. Il faut prouver ce que l'on affirme autrement que par l'action. C'est l'objectif de la situation de validation. Ici, sont mis en jeu deux aspects importants de la preuve [13] :

- "la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve ;

- la preuve est un acte social, elle s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) qu'il faut convaincre".

Or ces aspects, note N. Balacheff, sont en général effacés par la pratique de l'enseignement. Cette pratique est le plus souvent associée à un contrat implicite entre le maître et l'élève : le maître reçoit l'explication de l'élève "en tant qu'objet qu'il va accepter ou rejeter et non pas en tant qu'instrument de preuve".

N. Balacheff rapporte en témoignage des propos d'élèves relevés lors d'une enquête anglaise (Galbraith 1979) :

"Prouver quelque chose en mathématiques signifie que vous avez su le faire et cela prouve combien vous êtes bons pour ces questions et que vous les avez comprises. (13 ans)".

Pour rendre compte du fonctionnement des systèmes didactiques (expliquer les comportements des différents acteurs, les décisions du maître, celles de l'élève ...), G. Brousseau propose une modélisation des situations didactiques [10] en se référant à la théorie des jeux :

"La modélisation des situations didactiques réelles par des "contrats formels" représentés par les règles d'un jeu a pour objet de permettre les comparaisons entre ces choix didactiques, la mise en évidence des cas "dégénérés" et de leurs effets, la production de situations appropriées répondant à des critères fixés à l'avance, l'analyse et la prévision de leurs effets."

Cette présentation théorique est accompagnée d'un exemple de modélisation d'un problème et de sa transformation en situation - problème, c'est à dire une situation dans laquelle le sujet, confronté à un problème doit obtenir un certain

résultat par des choix et des actions dont il a la responsabilité.

Dans son exemple, G. Brousseau repère les variables pertinentes de la situation, celles qui commandent des comportements différents. Parmi celles-là, les variables didactiques sont celles qui, lorsqu'on agit sur elles, "provoquent des adaptations, des régulations, des apprentissages" et dans le cas de la recherche de la solution d'un problème, des changements de stratégie.

A l'aide des variables didactiques, on détermine le domaine d'efficacité des procédures. Par exemple, en géométrie la taille des objets est une variable didactique : il y a le "microespace" des objets déplaçables, le monde ambiant et le "macroespace" (le découpage est proposé par G. Brousseau). Les propriétés de ces trois espaces sont différentes pour l'enfant. D'un espace à l'autre la variable "taille" fait un saut.

Pour concevoir des situations favorisant une certaine procédure, il faudra tenir compte du domaine d'efficacité de la procédure et donc des sauts.

Pour compléter son cadre théorique, G. Brousseau introduit les situations d'institutionnalisation et le contrat didactique [14].

4 - DES ELEMENTS POUR UNE ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

Pour construire un processus d'apprentissage relatif à un certain concept mathématique, la description des situations organisant les échanges ne suffit pas. Il faut concevoir des situations-problèmes adéquates aux différentes situations [15] et engageant le concept. Pour cela, plusieurs éléments interviennent :

- L'étude d'épistémologie génétique apporte des informations sur les conceptions du sujet, ses représentations, leur évolution dans le temps et selon les problèmes, les difficultés ou les obstacles rencontrés dans l'évolution.

- L'étude historique des différentes manifestations du concept et de leur statut cognitif offre des éléments de comparaison. Mais l'histoire a pu connaître des circonstances particulières qui n'ont aucune raison de se reproduire.

- L'étude mathématique comprend une analyse du concept du point de vue de sa nature mathématique, mais aussi du point de vue du rôle qu'il joue actuellement dans les domaines qui l'utilisent, que ce soit dans la vie courante ou dans les sciences.

a) Activité mathématique

L'activité principale en mathématiques (dans le cadre scolaire ou chez les chercheurs professionnels) consiste à résoudre des problèmes, poser des questions.

G. Vergnaud trouve dans la résolution de problèmes "la source et le critère du savoir ; ... la source, parce que c'est dans ces situations que sont élaborées les notions et abstraites les propriétés pertinentes ; le critère, parce que c'est aussi dans ces situations que sont éprouvées les connaissances opératoires" [16].

Pour sa part, le chercheur peut déclarer un problème résolu s'il peut justifier ses déclarations selon un système de validation propre aux mathématiques. Dans cette démarche, il crée des concepts qui jouent le rôle d'outil pour résoudre des problèmes.

Lors du passage à la communauté scientifique, le concept est décontextualisé de façon à pouvoir resservir. Il devient alors un objet de savoir et prend place dans un édifice plus large, le savoir scientifique du moment. Ce processus de décontextualisation est poussé à l'extrême par Bourbaki [17].

b) Caractère outil/objet d'un concept

Il convient de distinguer le caractère outil et le caractère objet d'un concept mathématique. Celui-ci prend son sens par son caractère outil.

En liaison avec cela un autre aspect importe : Un concept n'intervient pas de manière isolée dans un problème. Par exemple, en relation avec la mesure de longueur, aire ou autre grandeur interviennent des représentations de l'espace, des fonctions, des notions numériques ... Un concept prend aussi son sens par les relations qu'il entretient avec les autres concepts impliqués dans le même problème.

Un outil est adapté à un problème s'il est nécessaire ou efficace pour le résoudre. Il peut être adapté éventuellement à plusieurs problèmes. Par exemple, les nombres décimaux servent à approcher d'aussi près qu'on veut tout nombre réel. Ils serviront dans n'importe quel problème d'approximation numérique.

Plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Ces outils peuvent appartenir à différents cadres : physique, géométrique, numérique, graphique, ou autre ; chaque cadre a ses objets, ses relations et leurs formulations.

Pour l'élève, le caractère outil peut être implicite ou explicite.

Nous parlons d'outil implicite quand l'élève fait fonctionner une notion ou une technique dans un problème sans être capable d'expliciter ce qu'il fait, sans connaître nécessairement les conditions d'emploi. Par exemple quand un élève affirme :

"Lorsque le côté d'un carré grandit de 3 cm à 4 cm, l'aire passe de 9 cm^2 à 16 cm^2 , il y a bien un moment où l'aire vaudra 12 cm^2 "

il utilise implicitement la continuité de la fonction $a \rightarrow a^2$ sur le segment $[3, 4]$ (la continuité est un outil implicite) et le principe des valeurs intermédiaires comme "théorème en acte" [16].

c) Obstacles

Bachelard a introduit la notion d'obstacle à propos de la physique. Il s'agit de conceptions très résistantes qui ont leur domaine de validité et qui s'opposent à la mise en place de modèles corrects pour une réalité plus large [18].

Il existe des obstacles en mathématiques. Dans une étude historique : "Epistémologie des nombres relatifs" [19] G. Glaeser étudie le passage des positifs aux négatifs" où les obstacles concernent surtout les propriétés additives, celles qui nous paraissent présenter le moins de difficulté". L'obstacle qui se trouve dans le passage du discret au continu est bien connu (Achille et la Tortue).

Ces obstacles épistémologiques se retrouvent dans l'évolution des conceptions des élèves et on ne peut pas en faire l'économie dans l'apprentissage. Le refus d'avoir une somme plus petite que l'un des termes (quand l'autre est négatif) ou d'avoir un produit plus petit que l'un des facteurs (lorsque l'autre est plus petit que 1) soutenu par les expériences de la vie courante fait obstacle à l'école primaire et au début du secondaire à une utilisation correcte des nombres relatifs ou des nombres décimaux ; nous en avons déjà cités d'autres. Au niveau de l'enseignement supérieur, l'idée que tous les fibrés sont triviaux est un exemple d'obstacle persistant.

Ces obstacles, l'enseignant ne peut les ignorer. Cependant, ils ne sont pas assez fréquents pour qu'on puisse fonder sur eux un enseignement. On doit distinguer dans l'apprentissage, d'une part les longs processus

d'élaboration de certains concepts et de leur articulation, ou de maîtrise des obstacles qui leur sont associés, d'autre part les processus locaux d'apprentissage en situation dont l'échelle de temps est beaucoup plus courte. Ces derniers peuvent être l'occasion de conflits qu'il faut résoudre, de difficultés et contradictions qu'il faut surmonter. Mais, il s'agit plus d'élargir des conceptions étroites que de rejeter des conceptions résistantes qui font obstacle.

d) Transposition didactique

Y. Chevallard a introduit le concept de transposition didactique pour rendre compte de la transformation nécessaire opérée sur les savoirs retenus pour être enseignés avant que ces savoirs puissent effectivement être enseignés.

Les mathématiciens assurent la création mathématique selon une genèse qui dépend essentiellement (mais pas seulement) des problèmes à résoudre.

L'école, elle, développe une genèse artificielle différente, compte tenu des contraintes auxquelles elle est soumise : par exemple, la contrainte de temps, la complexité du champ scientifique et des problèmes à l'origine de la notion choisie pour être enseignée.

Y. Chevallard observe un phénomène d'enseignement [20] : le renouvellement régulier des savoirs enseignés, tant par leur formulation (règle de trois, opérateur, fonction linéaire, quatrième proportionnelle ...) que par leur contenu.

Les savoirs enseignés naissent, vivent et "vieillissent" et même quelquefois meurent (comme "les cas d'égalité des triangles").

Il propose d'expliquer ce phénomène par la nécessité pour le système d'enseignement de réguler la distance qui sépare les objets enseignés des objets de savoir d'une part, de la culture de tous d'autre part. Un savoir enseigné à la longue se vulgarise.

Par ailleurs les découvertes des savants peuvent rendre caduques certains savoirs enseignés (parce qu'ils se sont révélés incorrects ou simplement inutiles - par exemple - les règles à calculs ou les tables de logarithmes ...). Ainsi se crée nécessairement un flux des savoirs savants vers les savoirs enseignés.

Y. Chevallard et A. Joshua [21] analysent en détail, à titre d'exemple, la transposition didactique de la "distance" depuis Fréchet qui l'a mise au point pour répondre à des problèmes d'analyse, à l'introduction dans les programmes de 4e (élèves de 13 - 14 ans) en géométrie plane.

e) Objets réels - objets d'enseignement - représentations

Le début de l'enseignement des mathématiques correspond à une modélisation du réel : l'espace ambiant et les objets déplaçables.

L'enfant peut agir sur le monde réel et le modifier. Il peut ne pas être capable d'en avoir une vision globale instantanée.

Un des rôles des représentations est de rendre compte de cette globalité, en ne retenant qu'une partie bien choisie de l'information de façon à en avoir une disponibilité permanente. Ce faisant, on attache aux signifiés primitifs (objets réels) des signifiants (représentations, relations ...). Aux traces écrites de ces signifiants sont attachés de nouveaux signifiés d'un nouvel espace, celui des représentations.

5- UNE PROPOSITION D'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

Dans cette organisation, l'enseignant prend en compte officiellement la construction du savoir des élèves par les élèves eux-mêmes.

Cette organisation est fondée du point de vue cognitif sur trois points : la dialectique outil/objet ; la dialectique ancien/nouveau, le jeu de cadres.

Du point de vue des échanges de l'élève avec le milieu au sein duquel il évolue, elle s'appuie sur les trois formes de dialectique (action, formulation, validation).

Enfin du point de vue du contrat didactique elle nécessite une institutionnalisation des connaissances et un moyen pour l'élève de contrôler lui-même son apprentissage.

Nous décrivons ce fonctionnement ci-dessous en dégagant les deux leviers sur lesquels nous avons choisi d'agir : le sens (dialectique outil/objet) et le jeu des déséquilibres/rééquilibration (jeu de cadres). [22] .

a) Dialectique outil-objet/Dialectique ancien-nouveau

La dialectique outil/objet est caractérisée pour un problème donné par l'organisation schématique que nous détaillons ci-dessous.

. La première étape consiste en la mise en oeuvre d'un objet connu comme outil explicite pour engager une procédure de résolution du problème ou au moins d'une partie du problème. Autrement dit, on mobilise de l'"ancien" pour résoudre au moins partiellement le problème.

. Dans la deuxième étape, l'élève rencontre des difficultés pour résoudre complètement son problème : soit parce que sa stratégie devient très coûteuse (en nombre d'opérations, en risque d'erreurs, en incertitude du résultat ...), soit parce qu'elle ne fonctionne plus. Il est conduit à chercher d'autres moyens mieux adaptés à sa situation.

On reconnaît là le début d'une phase d'action. Il peut alors mettre en oeuvre implicitement des outils nouveaux, soit par l'extension du champ de validité, soit par modification des hypothèses qui en autorisent l'emploi et peut être par les conclusions qu'on peut tirer, soit par leur nature même. Schématiquement, nous parlons dans cette étape de "nouveau implicite".

Du point de vue de l'élève, les conceptions à l'oeuvre à ce moment là vont entrer en conflit avec les anciennes (même s'il ne s'agit pas d'un obstacle au sens donné plus haut) ou au contraire les englober en les élargissant. Les erreurs et contradictions ou au contraire les prolongements deviennent les enjeux de processus dialectiques de formulation et de validation propres à résoudre les conflits et assurer les intégrations nécessaires.

Cette étape est une phase d'apprentissage. C'est là essentiellement que les conceptions et les représentations de l'élève évoluent.

. Dans la troisième étape, certains éléments sont formulés et identifiés (avec leurs conditions d'emploi du moment). Ce sont ceux qui, dans l'étape précédente ont joué un rôle important et qui sont susceptibles d'être appropriés à ce moment là de l'apprentissage. Nous parlons de nouveau explicite.

Le processus que nous venons de décrire comprend plusieurs phases basées sur un problème à résoudre impliquant tous les élèves.

Toutefois, même si la collectivité "classe" a résolu le problème, tous n'ont pas réagi, à titre individuel, de la même manière vis à vis du savoir engagé dans le problème, vis à vis des connaissances-outils mobilisées. Dans les situations de communication, le savoir diffuse diversement selon les élèves.

Officialiser certaines connaissances qui, jusque là, n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation de la classe, et pour chacun, une façon de jalonner son savoir et par là même d'en assurer la progression. C'est la fonction principale des situations d'institutionnalisation.

Une autre fonction est d'intégrer le savoir social, les habitudes et conventions dans le savoir de l'élève.

Par ailleurs, la structuration personnelle du savoir est de première importance en mathématiques pour qu'il y ait effectivement savoir. Cette structuration a été bien engagée dans le processus développé. Toutefois pour la parfaire, l'élève a encore besoin de mettre à l'épreuve éventuellement dans des essais renouvelés, tout seul, les connaissances qu'il croit avoir acquises et faire le point sur ce qu'il sait. C'est la fonction des exercices. Les connaissances concernées prennent dès lors le statut d'ancien.

Dans cette structure qu'on peut appeler "activités-institutionnalisation-exercices", on a montré toute l'importance du premier terme. Sans les deux autres termes, son incidence sur l'appropriation des connaissances risquerait d'être faible pour l'élève.

Remarquons qu'il n'est sans doute pas nécessaire que toutes les notions visées par l'apprentissage soient introduites dans une dialectique outil/objet. Certaines peuvent être apportées directement par l'enseignant ou la lecture d'un manuel.

Il reste à résoudre un véritable problème didactique : définir une stratégie pour l'organisation de la matière à enseigner (répartition entre problèmes et apport direct ...) et pour une certaine organisation, définir une stratégie d'adaptation aux réactions de la classe.

b) Jeu de cadres

Le jeu de cadres traduit l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres. Il en résulte des correspondances entre objets et relations des différents cadres.

Mais pour les élèves en cours d'apprentissage, les concepts fonctionnent de manière partielle et différente selon les cadres. Par suite, les correspondances sont incomplètes.

Nous choisissons pour introduire et faire fonctionner les nouvelles connaissances à enseigner des problèmes où elles interviennent dans au moins deux cadres. Nous privilégions les cadres, pratiquement cela veut dire les problèmes, dans lesquels cette imperfection des correspondances est créatrice de déséquilibres qu'il s'agit de compenser. Les efforts déployés pour la recherche d'un équilibre pourront se traduire par un dépassement de l'objectif visé d'où un nouveau déséquilibre et ainsi de suite jusqu'à la construction d'un modèle stable pour toutes les opérations qu'on veut faire.

c) Conditions sur le problème

Il reste à exprimer des conditions sur les problèmes pour que certains rapports de l'élève au problème soient assurés, que la dialectique outil/objet et le jeu de cadres soient possibles. Énonçons celles que nous avons retenues :

- La connaissance visée par l'apprentissage est un outil adapté au problème.
- L'énoncé a du sens dans le champ des connaissances de l'élève. Autrement dit, l'élève peut envisager ce qu'est une solution. Ceci est indépendant de sa capacité à concevoir une stratégie ; (par exemple, une réponse négative à la conjecture de Fermat serait la désignation de 4 nombres entiers non nuls x, y, z, n tels que $n \geq 3$ et $x^n + y^n = z^n$).
- Compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure de résolution mais ne peut la faire aboutir.
- Le problème est riche. Autrement dit, le réseau des concepts impliqués est assez important mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité.
- Le problème est ouvert par la diversité des questions ou des stratégies possibles et par l'incertitude qui en résulte pour l'élève. Complexité et ouverture sont des notions relatives à l'élève. Un problème est riche et ouvert pour une classe, s'il l'est pour assez d'élèves de la classe (80 % par exemple). Ces conditions éliminent un découpage de l'énoncé en de trop petites questions.
- Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents, chacun ayant son langage et sa syntaxe.

Les notions de champ conceptuel et analyse de la tâche introduites par G. Vergnaud [16] sont précieuses pour concevoir et organiser les situations-problèmes.

Donnons un exemple de problème : "Un rectangle étant donné, on sait déterminer son aire et son périmètre. Existe-t-il un rectangle de périmètre et aire donnés". Ce problème est élémentaire pour un élève de seconde. Si le problème s'adresse à un élève de CM ou 6^e (10-12 ans), il s'inscrit dans une tout autre perspective. Il répond à toutes les conditions énoncées plus haut. La connaissance visée peut

être par exemple l'utilisation des nombres décimaux pour donner des solutions approchées avec une précision arbitrairement grande à un problème dont on ne sait pas s'il admet une solution exacte. Dans ce problème, l'énoncé fourni aux élèves comporte des données numériques (par exemple on cherche un rectangle de périmètre 34 cm et d'aire 40 cm^2). Ces données sont des variables didactiques, leur variation doit faire évoluer les conceptions de l'élève. Toutefois, H. Ratsimba-Rayohn [23] a montré que, dans certains cas, l'élève peut privilégier le premier modèle appris au détriment d'un autre, appris par la suite, et pourtant plus efficace ou mieux adapté au problème qu'il doit résoudre.

6- LE CONTRAT DIDACTIQUE

Enseignant et enseignés se mettent en jeu dans la relation didactique selon des règles qui fonctionnent comme les clauses d'un contrat. Cependant, ces règles n'ont rien d'explicite, elles se révèlent essentiellement dans la transgression. Le contrat didactique est l'ensemble des conditions qui déterminent implicitement ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il est comptable devant l'autre.

Examinons de ce point de vue la structure d'enseignement la plus couramment proposée en mathématiques : la structure cours/exercices [24]. Le travail de reconstruction personnelle du savoir y est laissé à l'élève sous sa propre responsabilité. Ce travail est trop lourd et angoissant pour beaucoup d'élèves. Alors s'opère une négociation implicite entre l'enseignant et l'élève établissant les rôles de chacun et dont l'un des objectifs est d'aider l'élève à assumer sa charge en la réduisant à des actions qu'il peut maîtriser. L'enseignant remplit son contrat en donnant des leçons à apprendre et des exercices à faire. Il doit prévoir dans son cours des parties que l'élève puisse apprendre. Il doit lui donner des problèmes faisables (dont l'énoncé prévoit toutes les données nécessaires et seulement celles-là, dont la solution est possible à trouver en combinant raisonnablement des éléments de cours à apprendre). L'élève remplit son contrat s'il apprend ses leçons (bien ou mal) et s'il fait ses exercices (juste ou faux). Si l'élève ne comprend pas ou ne sait pas faire, l'enseignant doit "l'aider". Celui-ci va le faire en orientant le travail de l'élève, par exemple au moyen d'indices qui lèveront son incertitude ou de petites questions intermédiaires élémentaires le menant au résultat.

Une autre fonction du contrat est de faire évoluer les significations des contenus. Par exemple, à l'école primaire une multiplication d'entiers est un véritable enjeu ; plus tard il n'en est plus de même. Le contrat didactique enregistre "le vieillissement" des contenus enseignés [25] et par là même intervient dans la progression du savoir. Le contrat évolue par une suite de petites ruptures.

Mais c'est surtout à l'occasion de fortes ruptures que le contrat se révèle, comme le montre une expérience réalisée, auprès d'élèves de l'école primaire, par l'I.R.E.M de Grenoble : "Quel est l'âge du capitaine" [26]. Les élèves (7-11 ans) ont à répondre à des problèmes "absurdes" ("il y a 7 rangées de 4 tables dans la classe, quel est l'âge de la maîtresse") et à dire ce qu'ils pensent de l'énoncé. Un grand nombre d'élèves (toutefois décroissant quand l'âge augmente) ont donné des réponses en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé ("la maîtresse a 28 ans). Cela signifie-t-il que les élèves sont "illogiques" ou que le système d'enseignement lui-même est stupide au point de leur apprendre à répondre de façon stéréotypée à n'importe quoi ? Le reproche que l'on fait ici aux élèves est de ne s'être pas posé le problème de la pertinence des données au regard de la question posée. Malheureusement cette question n'est pas dans le contrat. A priori, le problème est faisable et l'élève n'a pas le choix de la stratégie.

Dans la structure activités-institutionnalisation-exercices, le contrat est complètement différent. L'enseignant prend appui sur les activités des élèves, sur leurs productions personnelles et collectives pour faire progresser le savoir de tous. Le problème n'est pas nécessairement faisable : on peut ne pas savoir s'il existe une réponse ; la réponse n'est pas nécessairement unique, les données peuvent ne pas être adéquates (trop ou pas assez). La recherche de données pertinentes vis à vis des questions posées est inscrite au contrat de même que la validation des résultats produits. Ainsi le contrat de l'élève est plus proche de celui du chercheur. Les ruptures du contrat ne sont plus nécessaires à l'avancée du savoir. Le contrat prévoit la progression du savoir par la mise à l'essai de conceptions successives provisoirement et relativement bonnes qu'il faudra, selon le cas rejeter ou reprendre et élargir pour former des conceptions nouvelles. L'erreur n'est plus un défaut à éviter à tout prix. Elle peut être constitutive de la connaissance. Notons toutefois qu'il y a plusieurs types d'erreurs et que toutes ne sont pas nécessaires.

L'enseignant, en dehors des phases d'institutionnalisation, est seulement

un animateur de la situation. Il ne valide pas les propositions des élèves avant qu'elles n'aient été argumentées. Il maintient la situation ouverte en se contentant de repérer et noter les diverses propositions sans prendre parti. Il est, dit G. Brousseau, "la mémoire de référence de la classe, il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages". [10] .

La transposition didactique se réalise différemment. Elle s'attache à garantir aux savoirs enseignés un fonctionnement proche des savoirs scientifiques dont ils sont les transformés. Par exemple, les décimaux serviront à fournir des suites numériques convergentes dont les limites ne sont pas des décimaux.

7- DIDACTIQUE ET ENSEIGNEMENT

La didactique a-t-elle pour le moment des répercussions sur l'enseignement ? La réalisation de processus didactiques conçus à des fins expérimentales implique de vrais élèves, un vrai enseignant, réunis dans une vraie classe. La déontologie laisse une faible marge de manoeuvre à l'expérience. Les élèves doivent avoir appris au moins autant que s'il n'y avait pas eu d'intervention extérieure. Cette ingénierie [10] fabriquée peut se révéler fructueuse pour les élèves à leur évaluation. Est-elle pour autant transposable au système d'enseignement, dans toute sa généralité et toute sa réalité ? Pas de façon évidente, en tout cas. Les industriels savent bien qu'il y a loin de la construction d'un prototype conçu à des fins expérimentales, à la fabrication industrielle. Or le système d'enseignement a pour tâche d'assurer un enseignement de masse, tandis que le système de recherche sur l'enseignement doit en expliquer les phénomènes. Le deuxième système, cependant, est nécessaire à toute action reproductible sur le premier.

Toutefois, sur de nombreux points, on peut noter déjà l'influence de la didactique des mathématiques. C'est le cas de la modification récente des programmes de l'enseignement primaire ou du choix de certaines orientations de l'enseignement secondaire. Certains de ses résultats sont susceptibles de donner aux enseignants les moyens de mieux organiser leur enseignement, de justifier des choix faits empiriquement, d'en rejeter d'autres. En repérant certains obstacles épistémologiques ou didactiques (ou seulement certaines difficultés), en attirant l'attention sur les manifestations multiples d'un même concept comme sur les interactions entre concepts, elle montre la nécessité de tenir compte de la longue durée de leur élaboration ; elle donne l'idée de la variété des problèmes à traiter. En explicitant

certaines clauses du contrat didactique, elle donne les moyens de le modifier en fonction d'un projet choisi.

En conclusion, la didactique des mathématiques, outre son objectif d'explication des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage a un rôle à remplir dans la formation initiale et la formation continue des enseignants en mathématiques.

B I B L I O G R A P H I E

Le sigle R.D.M désigne la revue "Recherches en Didactique des Mathématiques".

- | | | |
|--------|-------------------|--|
| [1] | Lebesgue H. | : La mesure des grandeurs A. Blanchard 1975 |
| [2] | Pluvinage F. | : Thèse d'état Université de Strasbourg |
| [3] | Gras R. | : Thèse d'état Université de Rennes |
| [4] | Piaget J. | : L'équilibration des structures cognitives
P.U.F 1975 |
| [5] | Doise W, Mugny G. | : Le développement social de l'intelligence
Inter-Editions 1981 |
| [6] | Ricco G. et al | : Représentation du volume
R.D.M 1983 Vol 4.1 |
| | Vergnaud G. et al | : Une expérience didactique sur le concept du
R.D.M 1983 Vol 4.1 |
| | Rogalski J. et al | : Analyse du prétest/posttest sur le volume
R.D.M 1983 Vol 4.1 |
| [7] | Brousseau G. | : Problèmes de l'enseignement des décimaux
RDM 1980 Vol 1.1 |
| [8] | Robert A. | : Thèse d'état Université Paris VII
• Acquisition de la notion de convergence
R.D.M 1982 Vol 3.3 |
| [9] | Artigue M. | : Thèse à paraître |
| [10] | Brousseau G. | : Problèmes de didactique des décimaux
RDM 1981 Vol. 2.1 |

- [11] Brousseau G. : Ingénierie didactique
 2ème Ecole de didactique des maths 1982
- [12] Laborde C. : Thèse d'état Université de Grenoble
- [13] Balacheff N. : Preuve et démonstration
 RDM 1982 Vol 3.3
- [14] Brousseau G. : Petit panorama de la didactique des maths.
 2ème Ecole d'été de didactique 1982
- [15] Douady R. : Approche des nombres réels ...
 R.D.M 1980 Vol 1.1
- [16] Vergnaud G. : Quelques orientations ... des recherches
 françaises en mathématiques R.D.M 1981 Vol 2.2
 . L'enfant, la mathématique et la réalité
 P. Lang, Berne 1981
- [17] Bourbaki N. : Eléments de mathématiques Masson
- [18] Bachelard G. : La formation de l'esprit scientifique
 Vrin 1983
- [19] Glaeser G. : Epistémologie des nombres relatifs
 R.D.M 1981 Vol 2.3
- [20] Chevallard Y. : Pourquoi la transposition didactique
 Séminaire de didactique des mathématiques
 Grenoble 1981-82
- [21] Chevallard Y. Joshua M-A: Un exemple d'analyse de la transposition
 didactique R.D.M 1982 Vol 3.2
- [22] Douady R. : Dialectique outil.objet, jeux de cadres
 Cahier de didactique des mathématiques n° 3
 I.R.E.M Paris 1983
- [23] Ratsimba-Rayohn H. : Deux méthodes de mesures rationnelles
 R.D.M 1982 Vol 3.1
- [24] Chevallard Y. : Pour la didactique
 2ème Ecole d'été de didactiques des maths 1982
- [25] Chevallard Y. : Sur le contrat didactique
 Notes polycopiées I.R.E.M Marseille
- [26] I.R.E.M de Grenoble : Quel est l'âge du Capitaine