

i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

ENSEIGNEMENT ET ACQUISITION DE LA BIDIMENSIONNALITE
(ANALYSE DES EFFETS MACROSCOPIQUES DE L'ENSEIGNEMENT)

PAR J. ROGALSKI

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
13

ANALYSE DES EFFETS MACROSCOPIQUES DE L'ENSEIGNEMENT

Par effets macroscopiques, nous entendons la prise en compte de phénomènes globaux de l'enseignement, d'invariants dont il semble raisonnable de postuler l'existence à partir des éléments institutionnels que sont les programmes et les manuels. Il ne s'agit donc pas dans ce qui suit d'une analyse de situations didactiques, ni de l'observation de la conduite d'une classe sur les domaines qui nous intéressent avec des élèves dont nous étudierions par ailleurs les conduites.

Nous allons ici présenter un certain nombre de caractères que l'on trouve de façon dominante, sinon permanente, dans les manuels scolaires concernant le produit, le repérage plan, les mesures spatiales de surface. Si les programmes représentent davantage les intentions du législateur que la réalité dans les classes, les manuels - et en particulier ceux largement diffusés - apportent des informations à deux niveaux : d'une part ils réalisent les représentations que se font leurs auteurs (sur l'enseignement, son contenu, son ordonnancement dans le temps), d'autre part étant effectivement utilisés par les maîtres (de façon importante, en particulier dans l'enseignement obligatoire), on peut considérer qu'il y a une adéquation globale entre les manuels et l'enseignement effectif (1).

(1) Une étude de M. Kastenbaum (1983) sur l'enseignement donné sur la surface dans deux classes de CM2 par des enseignants différents, exprimant a priori des rapports différents avec les manuels, a montré l'existence d'invariants considérables au-delà des "traits de surface" constitués par le style propre à chacun des maîtres.
Nadine Bédnarz (1984, séminaire didactique) signale le même phénomène (au Canada) pour l'enseignement de la numération.

(Le rôle en France de la centralisation et des fonctions du corps de l'inspection jusqu'à présent ne peut qu'accentuer ce phénomène) (1)

Pour avoir une idée un peu globale de l'enseignement des notions liées au produit, au repérage plan et aux mesures, nous avons effectué sur quelques points spécifiques un survol historique des manuels de l'enseignement primaire, à partir de l'époque où celui-ci est devenu un enseignement de masse, c'est-à-dire autour de 1850-1860 (2). Il ne s'agit pas d'une étude exhaustive - même pour la période récente - mais de sondages effectués en tenant compte des multiples réformes qui ont visé à modifier le système d'enseignement et ses contenus (3).

La comparaison de quelques manuels des mêmes auteurs avant et après une réforme tend à nous faire poser l'hypothèse que, au moins pour l'introduction des notions dites élémentaires dans l'enseignement primaire, la stabilité des choix fondamentaux et l'invariance de certaines caractéristiques de fond ont été davantage la règle que le changement de point de vue.. Toutefois, le mouvement qui a marqué les années 60-70, nous a conduit à distinguer deux périodes : avant la réforme des années soixante-dix, après cette réforme.

Nous allons décrire les invariants observés pour la multiplication

-
- (1) Les innovations dues au travail dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) touchent le corps enseignant de façon numériquement marginale - à l'heure actuelle - et en particulier celui de l'enseignement élémentaire concerné par notre travail ; ils ne s'écartent pas nécessairement de certains invariants. Un manuel, qui commence à avoir une assez large diffusion (comme livre du maître ?) est plus atypique : ERMEL, issu des recherches à l'INRP.
 - (2) Selon les critères qu'on prend pour "enseignement de masse", et selon qu'on considère les garçons ou les filles...
 - (3) La liste des manuels consultés est donnée en annexe à ce chapitre.

et son rapport avec le produit cartésien, puis ceux concernant les repérages, ceux touchant à l'enseignement des mesures spatiales et plus particulièrement la surface ; en conclusion de ce chapitre nous indiquerons le rapport entre les invariants dégagés et les acquisitions des enfants dans le domaine de la dimensionalité.

1. - Multiplication et produit cartésien

1.1. Avant la réforme des années soixante-dix

Après une prise en compte de la définition "savante" de la multiplication en termes de proportion : "la multiplication est une opération dans laquelle étant donnés 2 nombres on en compose un troisième qui soit à l'égard du premier comme le second est à l'égard de l'unité" (F.P.B., 1842), la définition classique de la multiplication sera par la suite - pour le cours moyen où on "théorise" ces éléments - rattachée à l'addition : "La multiplication est une opération par laquelle on prend un nombre appelé multiplicande selon que l'indique un autre nombre appelé multiplicateur" (F.P.B. 1865), avec en note : "à proprement parler la multiplication n'est autre chose qu'une addition".

Cette représentation de la multiplication comme addition réitérée est un invariant à la fois au cours du temps (1) et dans les divers niveaux scolaires où elle est reprise. On la retrouve dans les livres d'arithmétique à l'usage des classes de 6ème, 5ème, 4ème ou 3ème (chez Hachette, Belin, Hatier, Editions de l'Ecole, Vuibert).

(1) On la retrouve pour la même série - éditeurs et/ou auteurs de 1860 à 1895 pour les manuels des frères des écoles Chrétiennes, puis ultérieurement dans ceux écrits par "une réunion de professeurs", aux mêmes éditions Mame, on la retrouve dans les éditions successives de Leysenne pour la période autour de 1900, elle est présente dans les différents manuels de l'enseignement primaire laïque après la réforme de 1919.

Avec cet invariant vont de pair un certain nombre de caractéristiques de l'enseignement de la multiplication :

- le multiplicande est un nombre "concret",
- le multiplicateur est un nombre "abstrait" (1) (sans "dimension").

Il est rarissime que la mesure des surfaces et volumes soit citée comme une exception à cette règle ; au contraire nombre de manuels insistent sur le fait qu'on ne multiplie jamais par un nombre "concret", qu'il faut écrire $1 \text{ m}^2 \times 42 \times 10$ et non $10 \text{ m} \times 42 \text{ m}$; le problème des rapports dimensionnels est parfois explicitement renvoyé à la notion de proportion (qui n'apparaît pas au niveau du CM) : "si la proportion avait lieu entre grandeurs concrètes (..) le mot produit n'aurait plus de sens".

Il faut signaler que ces choix sont distincts de ceux en cours aujourd'hui dans les manuels scolaires pour la mesure : on fixe l'unité, on travaille ensuite sur des nombres (la référence concret/abstrait n'est plus apparente dans l'enseignement de mathématique) ; dans les manuels d'avant la réforme on utilise bien des nombres "concrets" : on s'interdit la multiplication des dimensions.

Autre caractère lié au précédent : les problèmes posés sont toujours du type "isomorphisme de mesures" au sens de Vergnaud () et jamais du type de "produit de mesures" : on connaît la valeur d'une certaine mesure pour une unité, on cherche la valeur de cette même mesure pour n unités.

A côté de ces invariants touchant au caractère dimensionnel de la multiplication, on peut relever des invariants concernant les rapports entre produits et organisation du plan : ainsi la commutativité est

(1) Dans la description d'un produit, quel qu'il soit, on donne toujours des noms à l'un des facteurs : ex. : files, lignes, rangées, colonnes.. et pour l'autre on parlera de "rang par file", "rangées par colonnes".

montrée comme une propriété de la multiplication à partir de la représentation spatiale du type suivant :

```
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
```

toujours donnée avec de petits nombres qui permettent de "voir" immédiatement le nombre d'unités par ligne ou par colonne.

La commutativité est rapidement utilisée dans les techniques opératoires ; elle pose problème dans la mesure où la multiplication est posée de façon tout à fait asymétrique. En revanche la distributivité (qui est asymétrique dans sa présentation) ne "nécessite" pas d'explication : cette propriété relative à l'addition et la multiplication fonctionne, au niveau du CM, comme un véritable " théorème en acte".

De plus, sur le plan de la "bidimensionalité" du produit, la remarque est presque toujours faite que si un facteur est multiplié par P le résultat est aussi multiplié par P ; toutefois la remarque sur l'effet de la multiplication par P d'un facteur et par 9 de l'autre facteur est très rare (nous ne l'avons rencontrée dans notre sondage que pour une question d'examen de BE dite d'arithmétique théorique..).

La raison d'être de la précision sur la multiplication par p d'un facteur est le passage de la multiplication des nombres entiers à la multiplication des décimaux.

L'algorithme fonctionne ensuite sans retour au sens et on ne rencontrera pas de problèmes liés au dénombrement d'un produit cartésien "quelconque" (1) .

(1) La "formule de la surface du rectangle ne se réfère pas à la multiplication du nombre d'unités mais au fait "additif" que l'on a x carreaux par rangées et y rangées dans le rectangle.

Donc l'enseignement avant la réforme des années soixante-dix "linéarise" complètement les problèmes de la multiplication, ne les met pas en rapport avec la combinatoire du produit cartésien pas plus qu'avec le produit des dimensions "physiques" ; il s'appuie sur le rôle producteur de l'organisation spatiale supposée acquise par les élèves (ce qui correspond bien à nos observations, dans l'étude du repérage plan) mais dans le cadre étroit d'une conception "application linéaire" du produit de nombres.

1.2. Après la réforme des années soixante-dix

Le mouvement de rénovation de l'enseignement des mathématiques a mis en avant les représentations ensemblistes : quel effet en est-il résulté sur l'objet d'enseignement "multiplication" ?

Tout d'abord le "produit cartésien" fait son entrée officielle comme objet d'enseignement, y compris dans les tables des matières de manuels de CE. Ensuite les "nombres concrets" opposés aux "nombres abstraits" disparaissent ; on met les unités en avant, on travaille ensuite sur les nombres : "nombres" et "grandeurs" sont distingués et la multiplication numérique retrouve un statut symétrique.

Dans les livres du maître elle est explicitement liée à la structure de produit cartésien ; ainsi, par exemple, Eiller et al (1980, Hachette) signale : "on notera toutefois que le nombre d'éléments de $A \times B$ est égal au produit du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de B".

Cependant dans la réalisation des séquences proposées et des manuels la structure de produit cartésien ne sera jamais, à ce niveau de l'enseignement élémentaire CE et CM (1 et 2), dissociée d'une représentation spatiale, le plus souvent en "matrice" lignes x colonnes. Eiller précise d'ailleurs explicitement que "le produit est le plus souvent représenté par un tableau à double entrée" et insiste sur les activités sur les tableaux et les rangements pour déboucher sur l'écriture multiplicative.

L'hypothèse de la "transparence" de la représentation spatiale va plus loin puisqu'il est signalé aussi que "la différence entre (a, b) et (b, a) se traduira d'une manière visuelle, qui est sans doute la plus accessible aux élèves". Dans les différents manuels, et dans ce qui en est transcrit dans des cahiers d'élèves, cela se traduit par l'écriture de chaque coordonnée d'un produit "homogène" par une couleur différente : la pertinence de cet indice "couleur" au problème spatial de repérage (et au problème de distinction de $A \times B$ et $B \times A$ qui motive la remarque) est loin d'apparaître aux élèves pour autant (nos observations sur le repérage "couleur" montrent bien l'occultation des indices non spatiaux lorsque la tâche est à juste titre identifiée par l'enfant à un travail sur l'espace).

La réalisation du produit par une disposition spatiale permet la "reconnaissance" que 3×5 et 5×3 donnent - par dénombrement des unités - le même résultat numérique ; elle est explicitement utilisée pour "montrer" également la distributivité de façon symétrique (ce qui est nouveau par rapport à l'enseignement antérieur).

Cette réalisation spatiale est privilégiée car elle répond à plusieurs attentes de l'enseignement : "il est facile d'illustrer rapidement des exemples numériques par des dispositions convenables d'ensembles de jetons et de quadrillages" et "l'emploi du schéma conserve au nombre son caractère abstrait". (H.J. Denisse, R. Polle, CE2, Livre du Maître, 1982, Delagrave).

Lorsque le produit cartésien de deux ensembles est explicitement présent, il s'agira toujours d'ensembles de types formes ou couleurs - qui ne sont donc pas associés à des dimensions physiques - représentés de manière spatiale, le plus souvent en tableau, parfois en "arbre".

Dans les exercices, le produit cartésien n'apparaît jamais en dehors de sa représentation en tableau avec marges ou associé à la représentation algorithmique en arbres ; les autres problèmes de CE2 et ceux ultérieurs

de CM restent des problèmes "linéaires" d'où les produits de dimensions sont exclus. Le dénombrement du produit par sa représentation spatiale mis en avant avec de petits nombres cède très rapidement le pas au passage à l'algorithme de calcul. On ne trouve pas de travail sur les effets du produit pour l'un et/ou l'autre des facteurs : le caractère linéaire du produit reste dominant voire exclusif ; le caractère bilinéaire n'apparaît pas. L'"ancien", à savoir les acquis additifs de l'enseignement, et les "présupposés", à savoir les connaissances spatiales des élèves, ne sont en fait pas transformés.

Par rapport à la situation antérieure, la différence majeure est que l'invariant de la représentation spatiale a pris une importance beaucoup plus grande, ce qui est lié d'ailleurs à la part considérable faite aux questions des représentations symboliques (tableaux, schémas, graphes sagittaux, machines à opérer, etc.).

2 - REPERAGE PLAN

2. 1. Avant la réforme

Pour l'essentiel, rien dans les manuels de mathématique tout au moins. Il est possible que, dans la grande place faite au 19ème au dessin, les activités de repérage aient eu une place. Dans les manuels sur les mathématiques à l'école primaire, les connaissances de la structuration spatiale en produit de dimensions horizontale/verticale (ou lignes/colonnes) sont supposées acquises par les élèves de CM puisqu'elles servent de support à la "démonstration" de propriétés numériques sur le produit.

2. 2. Après la réforme

Le repérage est une activité explicite dans les programmes, mais l'objectif visé ne concerne pas l'espace, lequel n'est là que comme support : "le repérage d'une case a d'abord un but très "pratique" : celui de familiariser les enfants avec la lecture d'un tableau à double entrée (...).

Sur le plan mathématique on s'en sert en particulier pour la représentation des relations (schéma cartésien)" ; pour les "noeuds" l'objectif est "de faire coder et décoder les noeuds d'un réseau à l'aide de couples formés essentiellement de 2 chiffres" (Eiller, p. 103). Un objectif intermédiaire est de faire distinguer l'ordre comme pertinent pour le couple : on passera ainsi de codages lettres/chiffres, à des codages chiffres couleur 1 / chiffres couleur 2 puis à un codage chiffre/chiffre avec toujours la même convention de représentation de (a, b) .

Avec ce que nous avons vu sur les difficultés des enfants avec le produit homogène et la difficulté d'indexer de 2 façons un même ensemble fourni, on peut prédire que cette méthode "d'ostension", où un codage "horizontale/verticale" se transforme en codage "gauche/droite" présente d'énormes difficultés pour les élèves. En 6ème, voire au-delà, s'il est avéré que $(x, y) \neq (y, x)$, il n'est pas clair de repérer quel couple est (x, y) parmi les 2 points possibles (ce qui renforce les difficultés à différencier application et bijection..).

On peut remarquer par ailleurs que ces activités de repérage ne s'accompagnent jamais d'un dénombrement des cases ou des noeuds (liaison possible avec le domaine multiplicatif numérique) ni de changement de repère autres que l'homothétie (avec le même "point de vue") ou la translation (toujours avec le même point de vue).

Les problèmes spatiaux non réglés au CE (voir nos expériences sur les quadrillages) ne sont ainsi jamais abordés.

En fait, au cours de pratiquement toutes les activités proposées dans les manuels, l'espace est le micro-espace de la feuille de papier, convenablement placée selon l'horizontale et la verticale, avec un observateur qui ne changera jamais de point de vue. La fonction du repère : pouvoir être détachée du point de vue, n'est ainsi jamais (1) en jeu.

(1) dans notre échantillon des manuels.

3 - LES MESURES

1) Une première comparaison entre le contenu de l'enseignement obligatoire sur les mesures spatiales du CM à la 5ème et l'évolution des réponses des élèves peut permettre de situer les effets propres à cet enseignement dans un domaine cognitif où les premiers acquis sont précoces (et précèdent l'enseignement).

Rappelons qu'un premier enseignement débute en cours moyen, avec le noyau (en cours moyen deuxième année), constitué par le système métrique et les formules de calcul de la surface du rectangle, du carré, du triangle, et les premiers éléments concernant le volume. Une reprise, unique, a lieu dans l'enseignement secondaire : en 6ème pour la surface, en 5ème pour le volume où les formules du calcul prennent la place dominante dans les exercices demandés aux enfants.

La notion de dimensionalité des mesures n'est pas un objet pertinent pour l'enseignement institutionnel des mathématiques (elle n'est prise en compte de façon explicite que tard dans l'enseignement de la physique) ; néanmoins les rapports entre l'unidimensionalité des longueurs et la bidimensionalité des surfaces ne sont pas sans relation profonde avec les rapports entre structures additives et multiplicatives, structures qui sont - elles - au coeur de l'enseignement obligatoire.

Nous allons présenter des effets possibles de ces caractères de l'enseignement sur deux points : l'utilisation par les élèves d'un "modèle linéaire" et la difficulté à passer d'un traitement simplement additif des mesures spatiales au traitement multiplicatif approprié aux mesures de surface et de volume.

3.1. Le modèle linéaire et son évolution

Dans les problèmes concernant le périmètre de figures semblables (avec rapport entier) on a observé une évolution régulière des résultats

d'ensemble, une diminution régulière du décalage entre les réponses concernant les figures "rectilignes" et celles pour les figures "curvilignes".

La fiabilité des réponses évolue cependant différemment. Les élèves de cours moyen 1 et 2 ont des patterns de réponses semblables, et la cohérence de leurs réponses est analogue et faible, cependant que les élèves du cycle d'observation répondent mieux et surtout de manière plus cohérente. La classe de 6ème apparaît là comme une classe "charnière" dans l'organisation de certaines notions concernant la longueur (cf. Produit de mesure : partie IV, annexe).

3. 1.1. Le contenu de l'enseignement sur les nombres nous semble influencer sur le statut des représentations qui conduisent aux réponses correctes sur les longueurs et rendre, en partie, compte de ces évolutions contrastées.

Nous venons de voir que l'introduction de la multiplication se fait dans le cycle élémentaire (7-9 ans) au moyen de l'addition :

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ et que les problèmes ultérieurement posés dans le cycle moyen (9-11 ans) renforcent ce caractère additif de la multiplication.

Le cas le plus fréquent est celui que G. Vergnaud a appelé "isomorphisme de mesures" : à une mesure "a" correspond une mesure "b" (par exemple des kilos et des francs) le problème est de calculer b' correspondant à une autre mesure a'. Or des procédures "additives" sont très souvent valides pour résoudre ce type de problème : par exemple si 4 crayons valent 20 francs, 12 crayons = $4 + 4 + 4$ crayons valent $20 + 20 + 20 = 60$ francs... Ces procédures s'appuient sur le seul schème additif (et le caractère additif de l'isomorphisme de mesure) (1).

(1) Lors d'un bilan sur l'enseignement élémentaire aux Etats-Unis (N.A.E.P. 1980) le rapporteur écrit "at the most basic level, area is defined as the number of units, required to exactly cover a given region. Calculations of area by multiplying various linear dimensions of figures should be based on understanding that such operations are a short cut for finding the number units in a unit covering..." : il explicite aussi bien un fonctionnement régulier de notre propre enseignement qui "écrase" le domaine multiplicatif sur le domaine additif.

Notre hypothèse est que le modèle linéaire se trouve renforcé du fait de l'extension de son champ de validité dans les problèmes rencontrés ; cela produirait un double effet contradictoire : accroissement de l'efficacité et de la fiabilité de ce modèle et en même temps constitution en obstacle pour l'accès à un modèle multiplicatif, adapté aux quantités composées.

Cependant, dans le cycle d'observation du secondaire, ce type de problèmes devient beaucoup plus rare alors que des questions proprement numériques deviennent plus importantes, avec un travail de calcul sur les décimaux, sur les proportions numériques, qui fait fonctionner addition et multiplication comme deux opérations propres. Il nous semble que ce changement de perspective contribue à faire "décoller" les opérations multiplicatives des opérations additives, au moins pour un certain champ de problèmes.

Cela contribuerait à un affermissement opératoire des opérations multiplicatives dans le calcul du périmètre de l'homothétique d'une figure, d'où le changement de fiabilité observé : le modèle proprement "linéaire" $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ se distinguerait du simple modèle "additif" nécessitant des décompositions additives préalables (par exemple $f(n a) = f(a) + \dots + f(a)$ car $na = a + a + \dots + a$ (n fois)).

3.1.2. L'usage par nos sujets du "modèle linéaire", tel que nous venons d'en décrire succinctement le fonctionnement, ne s'identifie pas avec l'appropriation du concept d'unidimensionalité de la longueur.

Tout d'abord il n'est attesté que pour des rapports entiers pour lesquels l'additif et le linéaire ne se distinguent pas. Ensuite, sur le plan théorique, le modèle linéaire présenté plus haut : $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ n'exprime pas le rapport entre les dimensions a et $f(a)$.

L'appropriation, constatée, du modèle linéaire permet des procédures algorithmiques de type suivant : "si à ℓ correspond $P(\ell)$, alors à $(\ell \times n$

correspond $n \times \mathcal{P}(\ell)$, " mais elle n'implique pas ipso facto la relation dimensionnelle $\dim \ell = \dim \mathcal{P}(\ell)$.

Si nous utilisons les anciennes représentations symboliques encore en usage au cours du 19ème siècle pour les proportions, ce modèle linéaire se traduirait par

$\mathcal{P}(n \times \ell) : \mathcal{P}(\ell) :: n \times \ell : \ell (:: n : 1)$ (rapport entre même dimensions), sans qu'on puisse nécessairement écrire $\mathcal{P}(n \times \ell) : n \times \ell :: \mathcal{P}(\ell) : \ell$ qui implique, dans le formalisme en question, que $\mathcal{P}(\ell)$ et ℓ soient de même dimension.

Remarquons que c'est cette deuxième écriture du rapport qui permet de considérer 2π , dans la formule du périmètre du cercle $p = 2\pi R$, comme un rapport numérique sans dimension (R étant un nombre quelconque).

Enfin, la mise en oeuvre efficace d'un modèle linéaire identique en certaines de ses conséquences à l'unidimensionalité de la longueur ne la constitue pas comme une propriété s'opposant à la pluridimensionalité des deux autres mesures spatiales. En témoigne tout d'abord le décalage des réponses correctes concernant la mesure de surface par rapport à celles de longueur ; en témoigne également le recours inapproprié au modèle linéaire pour la surface, voire pour le volume (Partie IV).

- 3.1.3. Nous avons vu que les élèves recourent au modèle linéaire dans des situations où l'organisation des figures est complexe (triangles difficiles à paver sans une certaine maîtrise géométrique) et dans des situations où le mode opératoire utilisé (le cm^2) se réfère à l'unité linéaire. Dans ce dernier cas le modèle linéaire peut être en contradiction avec le caractère additif de la mesure comme simple quantité, caractère attesté par ailleurs par les mêmes sujets. Bien entendu ce recours au modèle linéaire est massif lorsque les propriétés de la figure ne permettent pas de mise en oeuvre directe de l'additivité (le cercle par exemple).

Cet usage, erroné, d'un modèle linéaire disponible est d'ailleurs connu "depuis toujours" puisque Platon en fait, dans le Ménon, le support d'une de ses argumentations sur la nature de la connaissance...

3.2. Le rapport entre modèle linéaire et mesure

Or le modèle linéaire est issu des schèmes additifs, précoces, et il rejoint les caractères additifs de toute mesure, lorsque celle-ci est présentée comme une simple quantité - ce qui est bien la présentation initiale qui en est faite.

L'enseignement systématique en CM2 sur la surface semble porter son effet principal sur la prise en compte correcte de ce caractère additif. L'utilisation, dominante, du mode opératoire bidimensionnel lié aux unités cm^2 et m^2 n'est pas rattachée au caractère bidimensionnel de la mesure de surface : le cm^2 est un pavé parmi d'autres dont on décompte le nombre. Quand la pavabilité n'est plus assurée, la mesure exprimée en nombres devient le résultat d'un calcul n'ayant guère acquis de sens par rapport à l'additivité initiale.

3.2.1. Il faut souligner deux faits :

D'une part l'enseignement a des difficultés à faire fonctionner la dialectique entre le caractère pragmatique de la forme, qui permet pavage et décompte additif, et le caractère conceptuel de l'unité, qui permet d'exprimer la mesure de figures non pavables et doit se dégager contre la forme. Le caractère de classe d'équivalence de l'unité est occulté par le passage immédiat au calcul (en ramenant par conservation ou partition les figures utilisées au rectangle lui-même pavable en carrés) ; très peu d'exercices proposent des mesures de figures par des unités distinctes équivalentes...

D'autre part le caractère de produit de la forme carrée de l'unité de surface attachée à l'unité linéaire est lui aussi occulté. Or la

transparence de l'opération qui consiste à aligner des bandes de cm^2 pour couvrir les rectangles n'est qu'apparente. Si les unités n'étaient pas, à l'instar de la figure mesurée, un "produit" de deux segments de directions indépendantes, les formules multiplicatives n'apparaîtraient pas aussi simplement : il suffit d'essayer de construire ces formules à partir d'une unité triangulaire pavant des triangles... Une des réponses de Ewbank (1980) à propos des conceptions erronées de la surface représente nous semble-t-il cette occultation du rôle de la forme du cm^2 dans le passage au calcul :

A la question "is the hectare like the acre, a square unit of area", Ewbank répond en effet : "there is nothing square about either of them ! Traditionally area has been measured in square units because the square is the simplest shape that tessellates and accomodates easily to the rectilinears, hapes, lands, buildings, etc.. whose areas man needs to measure. The acre, originally the amount of land a joke of oxen could plough in a day, has no shape orientation".

- 3.2.2. La bidimensionalité des formules est elle-même également très peu exploitée. Rares sont les manuels, même considérés sur une longue période, qui construisent la formule $S = a \times b$ du calcul de la mesure du rectangle à partir de la proportionnalité par rapport à chaque côté ; tout aussi rares les utilisations réelles du caractère multiplicatif des formules ; celles-ci sont essentiellement, sinon exclusivement, utilisées pour leur statut algorithmique : la formule, par son expression en langue naturelle, ou sa représentation symbolique, détermine des opérations à effectuer : "chercher la longueur, chercher la largeur, effectuer leur produit".

Dans les problèmes les formules interviennent presque toujours dans la mise en oeuvre d'un calcul additif de la mesure d'une figure composée d'un nombre fini de figures de base.

Le caractère bidimensionnel d'une formule du type $S = l \times L$ n'est pas davantage exploité pour l'homogénéité des dimensions : il n'est donc pas étonnant de voir des élèves faire des calculs périmétriques, et de ne

trouver sur une classe de 4ème (13-14 ans) que 16 élèves sur 27 calculant des surfaces par produit de longueurs (1)...

Dans ces conditions l'enseignement renforce les acquis liés aux premiers schèmes additifs, l'emploi du modèle "linéaire" si souvent validé par ailleurs. Il intervient sur la dimensionalité des surfaces essentiellement en élargissant le domaine de validité des opérations qui assurent le passage du pavage à l'expression de la mesure. La méconnaissance de la nature des difficultés conceptuelles dans ce domaine des mesures spatiales conduit l'enseignement à peu exploiter les "points d'ancrages" cognitifs qui existent, pas plus que les apports propres à l'arithmétisation.

L'utilisation des formules enseignées pour le périmètre et la surface des figures classiques (carré, rectangle, triangle, parallélogramme, cercle) prend très peu souvent pour objet de problèmes les rapports entre ces deux éléments simultanément présents : la mesure du bord (linéaire) et la mesure de l'intérieur (bidimensionnelle). Seuls quelques exercices demandent à l'enfant de comparer des figures isopérimétriques, ou au contraire de surface égale, mais (presque) toujours il s'agit de comparaison au sein d'une seule classe de figures : les rectangles.

Les variations relatives de ces mesures quand on fait varier les dimensions linéaires ne sont pas mieux prises en compte : les exercices portant sur les effets de similitudes sur le périmètre et la surface sont l'exception tout comme les calculs d'échelle, et les changements d'unité linéaire.

(1) La passation dans une classe de 4ème, sans particularités, de la question de l'enquête INRP (INRP, 1975) concernant la surface a confirmé les difficultés de la mesure de surface. Les obstacles rencontrés par les élèves dans l'utilisation d'une échelle de mesure recourent les observations faites dans nos questionnaires à partir de similitudes.

3.3. Les questions d'arithmétisation

L'occultation du caractère intrinsèquement multiplicatif de la surface et du volume interagit avec l'arithmétisation.

En effet, les additions rencontrées dans l'enseignement mettent en jeu un petit nombre d'opérations, portant en général sur des nombres appartenant à une même "niche informationnelle" (Brousseau, 1979). Le résultat de ces opérations est lui-même un nombre qui ne sort que rarement de cette niche informationnelle, aux niveaux scolaires considérés ici.

Au contraire, la multiplication de 2, et a fortiori 3 nombres comme dans un calcul de surface ou de volume, se traduit fréquemment par un changement d'ordre de grandeur : qu'une feuille $21 \times 29,7$ contienne plus de 600 cm^2 n'est pas si aisément représentable, qu'une boîte à chaussures contienne plus de $5\,000 \text{ cm}^3$ paraît hors de proportion avec son encombrement linéaire.

L'arithmétisation de la mesure, non étayée par un travail sur les effets des caractères multiplicatifs, peut alors contribuer à la dénéga-tion des conséquences de la bi ou tri-dimensionalité des mesures d'aire et de volume : bien des élèves jugent en effet de la pertinence de la formule choisie par la plausibilité de son résultat arithmétique (et l'existence d'un tel contrôle est positive quant au sens que les enfants attribuent à leur calcul) ; si ce résultat leur paraît peu plausible, pour les raisons énoncées ci-dessus en particulier, ils peuvent être conduits à rejeter une représentation bidimensionnelle ou tridimensionnelle en train de s'établir.

4 - LIENS ENTRE LES DIVERS DOMAINES DE L'ENSEIGNEMENT SUR LA MULTIPLICATION, LE REPERAGE PLAN ET LA MESURE

La caractéristique dominante est l'absence de liaison entre les divers domaines qui touchent à la bidimensionnalité, voire entre les différentes notions qui apparaissent dans un même chapitre. Ainsi les questions de repérage sont, nous l'avons vu, centrées sur la lecture de tableaux à double entrée ou sur le codage numérique de positions ; cependant les chapitres sur les quadrillages ne comportent pas de calcul sur le nombre de cases (reliable à celui des cas possibles dans un tableau à double entrée) ni sur le nombre de noeuds.

Le travail sur la multiplication utilise la disposition spatiale en produit mais celle-ci n'est pas mise en rapport avec le repérage : la donnée des "marges" pour remplir un "tableau cartésien" de type $F \times C$ est utilisée pour déterminer la tâche de construction ; son utilisation possible comme codage d'une case (et non moyen de produire une réponse) apparaît hors du champ de l'enseignement, tout autant que le dénombrement d'éléments d'une forme ou d'une couleur donnée (implicite pourtant dans l'expression du calcul multiplicatif).

La partie concernant l'enseignement de la mesure spatiale est elle-même découpée en séquences indépendantes : ainsi l'existence d'un rapport inverse entre unité et valeur numérique de la mesure est présentée mais elle n'est pas utilisée lors de la présentation des unités du système métrique et des changements d'unités.

La propriété $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, obtenue par la description du carré 10×10 en 10 cm^2 par ligne et 10 lignes, n'est pas mise en rapport avec le nombre de lignes et le nombre de colonnes (utilisée antérieurement pour définir le produit).

Les effets de la multiplication d'un nombre par 10 dans un produit sur la valeur du résultat ne sont pas davantage utilisés - même lorsqu'ils ont

été présentés dans l'enseignement antérieur - pour justifier d'une autre façon le résultat de la mesure d'une surface en cm^2 connaissant celle en dm^2 .

La distributivité de la multiplication - même "montrée" en s'appuyant sur une représentation spatiale en "carrelages" - n'est pas réinvestie pour mettre en avant la double linéarité de la mesure de surface par rapport à celle des longueurs. Ce découpage étanche se traduit également par ce paradoxe que le calcul du nombre de cm^2 dans un dm^2 précède le calcul de l'aire d'un rectangle et d'un carré, présenté comme un objet nouveau. En fait, l'objectif de ce dernier point est d'introduire l'algorithme multiplicatif $S = l \times L$; celui-ci est ultérieurement utilisé dans des calculs additifs d'aires complexes, mais sans relation avec les propriétés de la multiplication.

5. CONCLUSION

Si nous mettons en relation l'évolution des acquisitions des enfants sur la bidimensionalité et l'enseignement qui s'y rapporte (dans ce qui y est dominant depuis un peu plus d'un siècle) nous pouvons dégager un premier élément central : fondamentalement l'enseignement s'appuie sur des acquis antérieurs qui - sur le plan des notions liées à la bidimensionnalité - sont extérieurs au projet scolaire. Pour ce dernier, deux objectifs apparaissent dominants : faire acquérir des compétences sur la formulation et les représentations, faire fonctionner les algorithmes arithmétiques.

Les notions du champ conceptuel du produit cartésien de dimensions comme la forme et la couleur sont très partiellement introduites ; on s'appuie sur des acquisitions antérieures sur la bidimensionnalité de l'espace pour représenter le produit ensembliste mais sans utiliser les propriétés effectivement bidimensionnelles du plan ; les opérations liées au produit cartésien (projections et "relèvements", dénombrement des classes selon l'une ou l'autre projection, distributivité du produit ensembliste, complémentation, etc.) ne font pas l'objet d'une activité explicitement prévue par l'enseignement.

Les exercices, lorsqu'ils existent, sur le produit cartésien ne se dégagent pas du cadre de la représentation spatiale "matricielle" et sont très peu liés au travail numérique sur la multiplication.

Les problèmes de représentation spatiale, et du rôle de repérage bidimensionnel pour permettre l'identification de positions pour tout point de vue, ne sont pas pris en charge par l'enseignement, centré sur les questions de codage - donc de changement de représentation - sans changement de point de vue.

Au niveau de la multiplication arithmétique, les activités présentées dans l'introduction des notions et les problèmes proposés aux élèves renforcent le modèle additif ou linéaire (qui se ramène au précédent).

Tant dans la présentation générale de situations de multiplication en CE, que dans leur reprise en CM et dans l'introduction de la mesure des surfaces, l'aspect "produit de mesures" est totalement absent, voire explicitement évacué.

Les formules multiplicatives elles-mêmes jouent un rôle algorithmique, et ne sont pas exploitées du point de vue de la bidimensionalité.

Les acquisitions sur la dimensionalité faites par les enfants dans le cadre de leurs activités scolaires sont probables car des "objets" multiplicatifs sont effectivement manipulés, mais il nous semble s'agir là d'un produit "marginal" de l'enseignement qui n'en contrôle pas l'évolution qualitative ni quantitative, ni n'établit de rapports avec les objets explicites d'enseignement.

Bibliographie ; manuels consultés.

CHEVALLIER P.(sous la direction de) (1974) La scolarisation en France depuis un siècle. Colloque Grenoble 1968. Paris-La Haye, Mouton- P.U.F.

PROST A. (1968) Histoire de l'enseignement en France 1800-1967. ris, A.Colin, collection U.

Les manuels sont classés par ordre chronologique.

1804 LACROIX S.-F. Traité élémentaire d'arithmétique à l'usage de l'école centrale des quatre-nations, Paris, Courcier, (4^oédition).

1805 TEDENAT M. Leçons élémentaires d'arithmétique et d'algèbre, Paris, Didot, (nouvelle édition).

1842 L.C., F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale, Paris-Tours, Mame et Cie-Poussiègue-Durand, (31^oédition).

1845 LAVAUX P.-A. Traité d'arithmétique, à l'usage des ENP, des EPS, et des pensions, Paris, Bachelier.

1860 F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale, Paris-Tours, Mame et Vve Poussiègue, (48^oédition, autres éditions consultées: 1872, 1887)

1865 F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale, livre du maître, Paris-Tours, Mame et Vve Poussiègue.

1878 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique (CEP), Paris, A. Colin, (8^oédition).

1888 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique, à l'usage des écoles commerciales, des pensionnats de demoiselles et des candidats au CEP, Paris, A.Colin, (77^oédition; 85^oédition en 1899).

1890 AUVERT U. Arithmétique et système métrique, cours moyen, Paris, Gedalge Jeune, (12^o ou 15^oédition).

1891 LEYSSENNE P., BOUSQUET A. Exercices et problèmes d'arithmétique de première année, Paris, A.Colin, (29^oédition).

1895 F.J.J. Nouveau traité d'arithmétique décimale, Paris-Tours, Mame et fils-Ch.Poussiègue.

1900 F.J. Eléments d'arithmétique, cours de mathématiques élémentaires, Paris-Tours, Mame et fils-Ch.Poussiègue.

- 1900 XXX Nouveau cours simultané d'études primaires, cours moyen, Paris, Hatier.
- 1902 LEYSSENNE P. Problèmes de troisième année, Paris, A.Colin, (2^e édition).
- 1906 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique, à l'usage de l'enseignement primaire, des écoles commerciales et des candidats au C.E.P., Paris, A.Colin, (75^e édition).
- 1908 ALIX J., BAZENANT L. Arithmétique et système métrique, cours moyen et supérieur, Paris, Bibliothèque d'éducation.
- 1910 LEMOINE A., AYMARD A. La théorie arithmétique au brevet élémentaire et au concours d'admission aux E.N., Paris, Pauli et Cie.
- 1916 LEYSSENNE P. Nouveau cours d'arithmétique, cours supérieur, première année, Paris, A.Colin.
- 1919 LEYSSENNE P. Nouveau cours d'arithmétique, C.E. 1^o et 2^o année, Paris, A.Colin, (16^e édition).
- 1919 LEYSSENNE P., BOUSQUET E. Exercices et problèmes de première année, Paris, A.Colin, (75^e édition).
- 1923 LAISANT C.-A. Initiation mathématique, Paris, Hachette, (2^e édition).
- 1923 LEMOINE A. Arithmétique, cours élémentaire et moyen, Paris, Hachette, (10^e édition).
- 1923 MINET A., PATIN L. Cours pratique d'arithmétique, cours élémentaire, 1^o et 2^o année, Paris, Nathan, (nouvelle édition).
- 1927 CAMMAN Arithmétique du brevet élémentaire, Paris, de Gigord.
- 1930 Une réunion de professeurs. Arithmétique, cours moyen et supérieur, Paris-Tours, Mame et fils- de Gigord, (refonte du n°153, édition 1931).
- 1930 MORTREUX X. et O. Nouvelle arithmétique des écoles primaires, cours élémentaire nouveau, Paris, Belin, (11^e édition).
- 1932 HATTEMER R. Cours d'arithmétique, à l'usage de la classe de 8^e, La Chapelle-Montlignen.
- 1932 CHENEVRIER P. Précis d'arithmétique à l'usage des classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e, Paris, Hachette.

- 1933 MORTREUX X. et O. Arithmétique pratique et raisonnée (CE), Paris, Belin, (51^e édition).
- 1934 LECOMTE G. Arithmétique à l'usage des classes de 6^e et de 5^e, Paris, Belin, (5^e édition).
- 1934 DELFAUD M., MILLET A. Arithmétique, cours élémentaire et moyen, Paris, Hachette.
- 1936 CHATELET A. Arithmétique, cours moyen, classes de 8^e et 7^e des lycées et collèges, CEP, Paris, Bourrellet et Cie, (4^e édition).
- 1936 MORTREUX X. et O. Nouvelle arithmétique des écoles primaires, CEP et cours supérieur, Paris, Belin, (15^e édition).
- 1936 MORTREUX X. et O. Arithmétique, algèbre et géométrie, cours supérieur et cours complémentaires, Paris, Belin.
- 1937 CROISILLE G. Arithmétique. Système métrique. Géométrie (CE, 9^e et 10^e des lycées et collèges). Paris, Martinet(ed.).
- 1938 MARIJON A., DESFORGE J. Arithmétique, à l'usage des élèves de 6^e, année préparatoire des E.P.S., Paris, Hatier, (2^e édition).
- 1938 Un groupe de professeurs. Arithmétique à l'usage des élèves de 5^e, 4^e et 3^e. Paris, Editions de l'Ecole.
- 1942 BENOIT A. Arithmétique, classes de 5^e classique et moderne. Paris, Vuibert.
- 1946 COURTET B., GRILL C. Arithmétique, cours moyen, classes de 8^e et 7^e. Paris, Editions de l'école, (9^e édition).
- 1949 VASSORT L. et M. Le calcul vivant, CE 1^e année. Paris, Hachette.
- 1962 BRANDICOURT R. et S. Le chemin du calcul, CE 1^e année. Paris, Bourrellet.
- 1965 PICARD M., RENUCCI R. Le calcul quotidien, CE 1^e année ou 10^e des lycées. Paris, Nathan.
- 1974 TOUYAROT M.-A., HAMEAU C. Itinéraire mathématique, CM1. Paris, Nathan.
- 1977 IREM-Poitiers La multiplication, propositions de travail pour un CE1. Poitiers, I.R.E.M.