i.r.e.m.
UNIVERSITE PARIS VII

A PROPOS DE L'ACQUISITION DE LA BIDIMENSIONNALITE CHEZ LES ELEVES D'AGE PRESCOLAIRE ET SCOLAIRE

PAR J. ROGALSKI

cahier de didactique des mathématiques
numéro 12

INTRODUCTION

Le but du travail rapporté ici est de contribuer aux connaissances sur le développement cognitif dans le domaine logico-mathématique et sur l'acquisition par les enfants et les élèves de notions relatives au produit cartésien.

Entre le moment où l'enfant est capable d'utiliser localement une propriété, une relation entre objets ou situations, et celui où il peut travailler de façon multiplicative sur des ensembles ou des relations, se déroule un long processus de construction et de structuration des connaissances.

C'est ce processus dont nous cherchons à marquer des états (ou des étapes) pour, ultérieurement, construire des hypothèses qui rendent compte de l'évolution entre ces états, l'objectif visé étant la connaissance du processus en tant que tel.

Il n'y a pas à l'heure actuelle de théorie de l'acquisition des connaissances qui donne des outils d'analyse des processus d'appropriation cognitive qui soient à la fois généraux - et fournissent donc un cadre conceptuel d'ensemble - et que l'on puisse mettre en oeuvre de manière opératoire dans des situations particulières sur des points précis.

Avant de situer notre problématique dans un cadre général, auquel se réfèreront les concepts utilisés, nous allons spécifier les types de problèmes abordés et délimiter implicitement par là-même le domaine de validité de nos conclusions.

Trois champs de problèmes seront étudiés : la combinatoire des dimensions (forme et couleur par exemple), le repérage avec des coordonnées cartésiennes (dans un réseau fini), les mesures spatiales de surface (dans le plan). La combinatoire, le repérage spatial, la mesure sont tous des activités - ou des problèmes - à travers lesquels l'enfant se construit

une connaissance sur "le monde". Par ailleurs, une même structure intervient dans la modélisation de telles situations : celle de produit cartésien.

Pour la combinatoire, de formes et de couleurs par exemple, le produit : {ensemble des valeurs prises par la forme} x {ensemble des valeurs prises par la couleur}, représente la collection des objets considérés du point de vue de ces deux dimensions forme et couleur.

Dans le repérage du plan cartésien, avec par exemple un repère "horizontale"/"verticale", le produit : {ensemble des valeurs des coordonnées horizontales} x {ensemble des valeurs des coordonnées verticales}, représente les points du plan R2 ou d'un sous-ensemble IxJ du plan qui est un réseau fini si les deux ensembles de valeurs sont finis.

Enfin, les mesures spatiales de surface et de volume sont des produits de mesures. En particulier la surface est un produit de mesures de longueurs explicité dans l'équation aux dimensions : S = L x L.

Pour analyser dans un même cadre conceptuel spécifique l'évolution des processus cognitifs qui peuvent orienter l'activité de l'enfant dans ces différents domaines nous faisons intervenir la notion de dimensionalité. Expliquons-nous.

Choisir des objets en fonction de leur couleur (par exemple), repérer des points en fonction de leur éloignement dans une certaine direction, mesurer une longueur sont des opérations qui ont en commun leur "unidimensionalité" : une seule propriété, une seule relation, une seule quantité sont en jeu dans chacune des situations.

Combiner des dimensions forme et couleur, coordonner deux repérages sur deux axes indépendants, traiter une quantité comme une mesure produit sont toutes des opérations qui ont en commun leur "bidimensionalité".

Il nous faut souligner ici que le terme de "dimension" est polysémique, qu'il renvoie aujourd'hui à des domaines scientifiques différents ; mais les significations que ce terme peut recevoir en mathématiques, en physique, en psychologie, ne sont ni conceptuellement, ni historiquement indépendantes. Nous développerons en annexe* de ce chapitre quelques éléments sur l'utilisation de ce terme de "dimension" ; nous pouvons dire schématiquement que la dimension (1), concept mathématique, caractérise, d'un certain point de vue, des espaces ou des sous-espaces, que dans des textes de psychologues la forme - par exemple - apparaît comme une dimension dans l'analyse des objets lors de l'étude de "l'acquisition des concepts", et que la longueur apparaît comme dimension en physique dans l'analyse dimensionnelle des rapports entre grandeurs.

Cependant, malgré des significations a priori distinctes, il existe des invariants qui vont dans le sens d'une communauté conceptuelle de ces significations particulières. En effet, pour se limiter au cas de la bidimensionalité, il existe dans tous les cas le modèle commun du produit cartésien ; dans tous les cas aussi l'arithmétisation (le passage au domaine du calcul avec des nombres) conduit à une même structure numérique multiplicative.

La dimensionalité sera pour nous, de fait, un concept de base dans notre description des situations étudiées et surtout dans l'analyse des opérations effectuées par les enfants et élèves dans les différentes tâches que nous leur présentons ; d'où le titre même de ce travail : "acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire".

---

(1) Au début de ce siècle, et souvent encore dans les manuels scolaires actuels, l'espace euclidien représentant l'espace physique classique était "à trois dimensions" (et non "de dimension 3"). L'usage au singulier du terme dimension rejoint l'utilisation que nous faisons ici du terme dimensionalité qui se réfère à des propriétés communes de systèmes modélisables en produits.

* cf. S. Rogalski "Acquisition de la bidimensionnalité..."

0 - STATUT DE L'ACQUISITION DES CONNAISSANCES SUR LA DIMENSIONALITE PAR RAPPORT AUX CHAMPS DE SAVOIR ET A L'ENSEIGNEMENT

Pour étudier l'appropriation par les enfants et jeunes adolescents des éléments constitutifs de la combinatoire multiplicative, des bases du repérage plan par un système de coordonnées cartésiennes et de notions fondamentales sur les mesures spatiales, nous faisons intervenir, nous l'avons dit plus haut, un concept théorique général : celui de la dimensionalité.

Plus précisément : les questions que nous abordons vont concerner la bidimensionalité de produits ensemblistes A x B, de produits d'applications f x g, par rapport à l'unidimensionalité des ensembles A et B considérés comme ensembles de base, des applications f et g composantes du produit f x g. De même la bidimensionalité impliquée dans le repérage du plan comme dans la mesure de surface se distingue de, et se coordonne à, l'unidimensionalité du repérage sur une ligne, l'unidimensionalité de la mesure linéaire, bref la bidimensionalité des variétés "surfaces" par rapport à l'unidimensionalité des variétés "lignes".

0.1. Dimensionalité et produit cartésien

A un premier niveau d'analyse, nous pourrions nous situer exclusivement par rapport à cette grande structure de base dans la construction d'objets mathématiques qu'est le produit cartésien. Combiner les valeurs de deux "dimensions", comme la forme et la couleur, serait lié à la construction d'un produit ensembliste ; coordonner deux relations indépendamment établies entre formes d'une part, couleurs d'autre part (de 2 ensembles) correspondrait au produit de relations et/ou d'applications ; repérer un point dans un plan relèverait de l'identification du plan (affine) à un produit isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Enfin, travailler sur la mesure de surface serait considéré comme une opération sur le produit des mesures de Lebesgue sur "chaque" $\mathbb{R}$. Ce sera effectivement un niveau essentiel de notre travail au sens où nous développerons plus longuement le rapport entre des objets

de connaissance pour le sujet et des objets de savoir mathématique (1) (du domaine de savoir auquel s'intègrent les notions de produits, de relations d'équivalence et de quotient).

De plus, nous étudierons les rapports avec les objets d'enseignement mathématique qui, à une époque donnée et un niveau scolaire déterminé, sont une transposition didactique d'objets mathématiques.

0.2. Place de la dimensionalité dans la connaissance sur le monde

Cependant, s'agissant de l'appropriation de concepts qui jouent un grand rôle dans l'ensemble du développement cognitif de l'enfant et l'adolescent, on ne peut valablement rapporter les connaissances du sujet à un domaine unique du savoir, historiquement élaboré et spécifié (2) selon un très long processus.

Ainsi, considérant les connaissances dans le domaine spatial : les repérages dans le plan et la mesure de surface, nous devons certes tenir compte de leur statut comme objets mathématiques (liés à l'histoire de la géométrie) mais aussi de leur place dans la connaissance du monde physique. Les représentations de l'espace physique (ou de différents espaces : celui de la "saisie" visuelle et/ou manuelle, celui des déplacements du sujet, le macro-espace), la constitution de mesures directes ou indirectes (3),

---

(1) Avec la modulation sur ce terme, introduite plus haut (page XXIII).

(2) Au sens où les mathématiques se sont différenciées de la physique, en donnant deux secteurs spécifiques de connaissance.

(3) Il y a une mesure directe ou effective par exemple de la longueur avec l'instrument "mètre", des volumes par la capacité de récipients, mesure indirecte quand on calcule la surface à partir des longueurs.

que l'on peut effectuer sur des parties de l'espace ou sur des objets occupant des parties de l'espace - sont des constituants essentiels de cette connaissance "physique".

Par exemple, l'appréhension de la dimension du plan, en tant que variété topologique, peut s'analyser du point de vue des connaissances du sujet en rapport avec des notions mathématiques.

Mais dans le même temps, pour le "même" référent physique, se pose le problème de l'appréhension par le sujet de la dimensionalité physique d'une surface (surface considérée alors comme produit de deux dimensions physiques de longueur - cela même hors du problème des unités et du calcul arithmétique de la mesure).

D'une manière quelque peu différente, la description d'objets matériels en fonction d'un certain nombre de "dimensions" (couleur, forme, taille, texture, brillance, poids, volume, masse...) relève également de la représentation du monde physique. La description d'états de systèmes à partir d'une combinatoire d'états élémentaires (ex. : le résultat d'un lancer de 2 dés) fait partie de ces problèmes de représentations. Dans l'un et l'autre cas la référence au produit cartésien ensembliste, objet mathématique, est tout aussi évidente.

0.3. La "double articulation" des connaissances "logico-mathématiques"

Considérons - en étant très schématique - que l'on peut traiter les mathématiques d'un double point de vue : d'une part en tant qu'elles sont issues d'un travail d'organisation des représentations d'objets et d'états de systèmes matériels, et jouent en permanence un rôle de représentation des actions sur ces objets et systèmes ; d'autre part comme un domaine propre de savoir, qui possède sa dynamique interne , où les constructions qui s'effectuent deviendront des "objets" de travail ultérieur.

Certes le fonctionnement n'est certainement pas le même selon qu'on se place sur le plan historique de la genèse des mathématiques - construction sociale d'un savoir - ou sur le plan individuel de la psychogenèse. Mais il nous semble justifié de situer le processus de constitution de connaissances "logico-mathématiques" chez l'enfant ou l'adolescent par rapport à cette double articulation des concepts mathématiques en jeu ; cela d'autant qu'il s'agit d'un processus long concernant le sujet comme enfant ayant des activités propres sur le monde matériel (dans des lieux sociaux certes) et le sujet comme élève, scolarisé dans un système institutionnalisant des savoirs mathématiques.

Par suite, si nous allons étudier plus particulièrement les rapports entre les acquis cognitifs de l'enfant, les objets de savoir mathématique et l'enseignement lui-même, nous prendrons tout de même en compte, pour l'interprétation de ces rapports, l'insertion de la notion de dimensionalité dans les problématiques plus larges que nous venons d'évoquer. Ce, d'autant que la capacité à combiner des relations est un élément décisif pour l'organisation même de la connaissance : parcourir un ensemble organisé de possibles, constituer des hypothèses sur l'intervention relative de plusieurs facteurs, sont des éléments primordiaux pour la méthodologie de la connaissance. L'analyse dimensionnelle prend directement en compte cet aspect de l'organisation de la connaissance, elle nous semble donc une référence conceptuelle importante.

0.4. Pourquoi la centration sur les rapports aux mathématiques ?

Nous pouvons maintenant, donner brièvement les raisons essentielles de la centration effectuée ici sur les rapports au savoir mathématique, avant d'en spécifier les caractères principaux. D'une part, les connaissances de nature "multiplicative", acquises par l'enfant hors de l'école ou par l'élève dans la classe, débouchent effectivement sur des structures mathématiques au niveau y compris de leur formulation, et ce, quels que soient leurs contenus physiques d'origine. D'autre part, l'enseignement concerne d'abord, de façon dominante sinon exclusive, les notions

mathématiques. L'enseignement des sciences de la nature ne débute guère avant le premier cycle du second degré, alors que les acquis sur le produit se développent, comme nous le verrons, de façon dominante de 4 à 12 ans, c'est-à-dire antérieurement.

De plus, les aspects de relations fonctionnelles et de mesure des grandeurs physiques ne sont que marginaux dans les premières années d'enseignement des sciences physiques ; quant à l'analyse dimensionnelle elle n'apparaît pas avant, au mieux, la fin du second cycle.

0.5. Relations entre les connaissances du sujet sur la dimensionalité les objets de savoir mathématique et l'enseignement

Les rapports entre les acquis cognitifs des enfants et adolescents, les objets de savoir scientifique, et l'enseignement lui-même, ne sont pas homogènes selon que nous considérons la "combinatoire des dimensions", le repérage spatial, les mesures spatiales : nous allons donc aborder spécifiquement chacun de ces domaines.

°

° °

1 - LA MULTIPLICATION DES DIMENSIONS

Les rapports entre la multiplication des dimensions (ou les classifications multiples), le produit cartésien ensembliste et l'enseignement sur les structures multiplicatives ensemblistes, sont complexes et évoluent dans un temps didactique long.

1.1. Genèse des notions

Il nous faut retracer d'abord brièvement la genèse des notions qui précèdent et préparent les acquisitions des jeunes enfants et élèves sur les structures multiplicatives logiques. Très jeunes, les enfants constituent des systèmes classificatoires de traitement d'objets sur lesquels portent leurs activités. A valeur d'abord locale - aussi bien dans le temps que dans l'espace des objets classifiables (1) - ces systèmes évoluent, leur stabilité croît, leur domaine de validité s'étend.

Certaines des classifications sont valorisées par la culture "ambiante", et le langage y joue un rôle organisateur (social) important.

Nous pouvons prendre comme exemple la classification selon la couleur, puisque ce sera une "dimension" concrètement présente dans notre travail expérimental sur le produit. A partir de relations locales de différenciation et d'appariement se constitue un début de classification opératoire, où l'exhaustivité et l'exclusivité se traduisent par le fait que sont mis

---

(1) Vergnaud (1972), Pieraut-Le Bonniec (1972, 1977).

ensemble les objets "pareils - en - couleur", et que, sur de "bons" ensembles d'objets, tous les objets sont classifiables (couleurs uniformes, oppositions nettes, textures et brillances analogues...).

Un pas qualitatif est ensuite franchi, à partir de la permutabilité des couleurs (une bille peut être bleue, rouge ou verte sans changer par ailleurs ses propriétés fonctionnelles, de taille, de poids, etc. (1) : la couleur elle-même se constitue en nouvel objet de connaissance.

Non seulement l'enfant pourra faire des regroupements cohérents d'objets d'une collection présente hic et munc, mais il pourra y adjoindre de nouveaux objets non seulement dans les couleurs présentes mais dans une quelconque nouvelle couleur. Il pourra, et là se situe le pas qualitatif majeur, poser (ou se poser) la question "quelle est sa couleur ?" à propos de tout objet présent ou représenté mentalement.

Le "traitement" culturel (et linguistique) de différentes "dimensions"

Les propriétés ainsi "détachables" des objets constituent des "dimensions", bases d'activités classificatoires ; elles sont multiples, et dépendent d'ailleurs de la culture dans laquelle vit l'enfant et de la langue dans laquelle s'effectue sa communication avec les autres. (Les implications que peuvent avoir pour l'enseignement nos analyses des structures produit ne sauraient être généralisées sans études spécifiques à des systèmes culturellement et linguistiquement très divergents de ceux des enfants de culture et langue française que nous avons observés).

---

(1) Cette permutabilité n'a pas un domaine de validité infini : pour de jeunes enfants (voire de moins jeunes) les automobiles rouges peuvent aller plus vite que les autres.. et le fonctionnement de la permutabilité est relatif à certains domaines notionnels, fonctionnels, affectifs ou sociaux.

Pour reprendre l'exemple de la couleur, une remarque importante est que la langue opère une discrétisation sur les couleurs, qui transforme un système physique continu (à l'échelle de la physique classique des longueurs d'onde) en un ensemble discret et fini, des valeurs. De plus, dans le domaine fonctionnel des activités de l'enfant - et de la majorité des adultes - l'ensemble de valeurs ainsi obtenu est petit (une douzaine, si on ne retient pas la modulation clair-foncé) (1).

Une discrétisation s'effectue également sur la forme (d'objets "plats" ou de dessins, en particulier) d'une nature différente et plus complexe puisqu'elle s'effectue sur un ensemble de valeurs a priori non unidimensionnel. L'emploi des valeurs pratiquées est beaucoup plus variable que celui des couleurs.

Remarquons de plus que le statut des valeurs dans la langue est par ailleurs différent pour la couleur et pour la forme : le fonctionnement comme adjectif des couleurs est valable pour toutes, alors que certaines formes ont une désignation fonctionnant comme nom ou comme adjectif (rond, carré) mais la plupart fonctionnent seulement en tant que nom (croix, étoile, lune, triangle, hexagone) (2). Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Les caractères des "dimensions"

Cette discrétisation des formes et couleurs ne se retrouve pas pour toutes les "dimensions" : ainsi la "grandeur-grosseur" d'un objet (au sens de la place qu'il prend, de son "encombrement") fonctionne comme une quantité intensive continue, avant que la mesure numérique ne soit établie. La longueur, qui recevra un statut institutionnel relativement précoce (CE1), fonctionne d'abord avec un système d'opposition grand-petit (discret mais relatif à une classification en cours, très spécifiée), enrichi ulté-

---

(1) bleu, jaune, rouge, vert, orange, violet, blanc, noir, gris, rose, marron.

(2) S'il s'agit en revanche de "motifs" répétés sur une surface, le statut devient de type adjectif "à pois", "à petits carreaux", ...

rieurement (et tôt) avec les relations d'ordre "plus grand" et "plus petit".

Il en va de même pour la masse comme une "quantité" de matière et pour le poids (sans entrer dans le problème de leur différenciation notionnelle).

La numérosité (1) fournit un système de classification particulier, ordonné lui aussi et discret mais non borné, également présent très tôt dans l'enseignement.

Nous n'entrerons pas dans le débat sur la discrétisation (par le langage ou lors d'opérations de mesure physique effective) des ensembles continus de valeurs pour certaines "dimensions" mais il faut souligner que, d'une part c'est cette discrétisation qui permet de représenter des ensembles de valeurs par des ensembles finis et d'en fournir explicitement la liste (pour certaines classes de situations tout au moins), d'autre part les situations où s'opère une telle discrétisation ne vont pas fonctionner comme celles dans lesquelles est impliquée une mesure continue.

La structuration "multiplicative"des dimensions

De multiples systèmes classificatoires se constituent ainsi dès la petite enfance. La coordination de ces systèmes - ou tout au moins de certains d'entre eux - et leur structuration "multiplicative" est un nouveau pas qualitatif, objet principal de notre étude sur la combinatoire du produit cartésien fini.

Un objet, comme un carré rouge, va alors non seulement être identifiable de façon globale, non seulement être classable comme "rouge" (avec

(1) Les caractéristiques numériques comme le cardinal descollections ou le nombre de points ou autres marques sur des objets.

d'autres rouges et "contre" des bleus, des jaunes...) ou comme "carré", mais il va pouvoir être caractérisé par rapport à d'autres objets par les valeurs de deux "dimensions" : "carré, quant à la forme", "rouge, quant à la couleur".

Cela signifie qu'une valeur (comme "rouge") est définie par opposition et permutabilité avec les autres valeurs de la même "dimension" et qu'elle est définie indépendamment des valeurs sur l'autre (ou d'autres) "dimension(s)".

Ce "carré rouge" peut être comparé, opposé à la fois au "carré bleu", au "carré jaune", et au "rond rouge" ou au "triangle vert". Cette double classification correspond à un double système de relations d'équivalence indépendantes qui, par passage au quotient - à la classe - "envoient" les objets (ou plutôt leurs représentations) sur les ensembles de valeurs actuelles ou possible des "dimensions" en jeu.

Dans notre travail expérimental, nous avons choisi des situations telles que les valeurs de chaque "dimension" considérée fonctionnant comme des éléments d'un ensemble, et des "dimensions" indépendantes. Plus précisément : aux âges des enfants avec lesquels nous travaillons ce sont là deux hypothèses cohérentes avec les travaux des psychologues. Nous reviendrons sur le statut de ce type d'hypothèses dans le chapitre sur la méthodologie.

La formation, ou la formalisation dans un modèle, de l'objet de connaissance de l'enfant peut bien être alors rattachée à l'objet mathématique : "produit cartésien".

La combinatoire des "états"

Nous avons jusqu'ici considéré l'acquisition de notions sur le produit ensembliste, en relation avec "la combinatoire des dimensions". C'est en effet le thème central de nos travaux expérimentaux sur ce sujet.

Mais au-delà de la description opératoire de collections d'objets, le produit cartésien représente aussi des descriptions d'états possibles de systèmes. C'est le cas par exemple pour un pendule oscillant (on peut "jouer" sur la masse et la longueur pour définir des états du système-pendule) ; c'est le cas également des représentations des coups possibles obtenus en lançant deux dés.

Or, le rapport du produit avec la connaissance de l'enfant, l'adolescent (et ici nous semble-t-il, l'adulte lui-même) est profondément différent dans les situations-problèmes selon que l'ensemble des états peut être ou ne peut pas être manipulé dans une simultanéité, et que le sujet doit se situer au seul niveau des représentations (sans s'appuyer sur des opérations concrètes sur des réalisations de ces représentations).

En fait l'hypothèse que nous faisons est la suivante : la notion de "produit cartésien" s'intègre comme une connaissance nouvelle non pas dès qu'une collection d'objets peut être représentée, a posteriori, comme résultat de la combinaison des valeurs des 2 dimensions mais quand, en plus, une collection, non donnée a priori comme telle (1) peut être constituée sous forme d'une réalisation matérielle, ou d'une représentation symbolique, par l'opération même de combinaison de valeurs (par exemple de n formes et p couleurs).

Le problème de la construction chez l'enfant des notions cognitives débouchant sur le produit ayant été délimité, il nous faut indiquer à quel(s) objet(s) de savoir nous nous référons pour représenter ce "produit".

1.2. L'objet de savoir en jeu

L'objet de savoir en jeu : le produit cartésien ensembliste, apparaît a priori comme très simple ; à partir de deux ensembles X et Y le produit Xx Y est défini comme l'ensemble des couples (x, y) où x est élément de X et y élément de Y. Cette structure élémentaire présuppose "seulement" des notions ensemblistes d'une part, la distinction de l'ordre $(x,y) \neq (y,x)$,(2)

(1) C'est-à-dire non donnée en extension mais définie ici comme résultat d'une opération de construction.

(2) Par rapport à la combinatoire des dimensions, il faut préciser que dans ce modèle X et Y doivent être d'intersection non vide. Le cas opposé extrême, celui du carré cartésien, est différent, nous y reviendrons plus loin, cf. p. 43.

d'autre part. La "simplicité" de la notion présuppose ainsi que la notion d'ensemble soit simple. Or, élément d'une théorie des fondements des mathématiques, cette notion est l'aboutissement actuel d'un processus historique de travail sur la connaissance mathématique. Sortie de ce cadre théorique, elle soulève par ailleurs d'énormes problèmes sur la représentation et la signification. Chacun a rencontré dans les manuels élémentaires (destinés aux élèves ou au maître) la situation suivante : une ficelle, objet réel, entoure des objets réels sur une table ; elle est censée jouer au niveau des représentations le rôle de constitution des objets en un ensemble. L'hypothèse implicite qui "justifie" ce statut de la ficelle est que la disposition relative ficelle/objets va fonctionner par analogie avec la représentation symbolique d'un ensemble en diagramme de Venn.

De plus, si nous considérons non plus cette définition "constructive" du produit cartésien X x Y mais la définition comme solution d'un problème universelnous avons singulièrement déplacé le caractère "élémentaire" du produit cartésien..

D'autre part, un objet de savoir ne se saisit pas à partir de sa seule définition : il s'inscrit dans un champ conceptuel, où un système de relations le met en rapport avec d'autres notions. Ainsi le produit cartésien implique un cortège de notions :

- les projections p_x et p_y sur les ensembles X et Y,
- les relations d'équivalence R_x et R_y canoniquement associées à P_x et P_y
- les isomorphismes canoniques
  $X \times \{y\} \equiv X$ et $\{x\} \times Y \equiv Y$, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$,
- l'isomorphisme canonique $X \times Y \equiv Y \times X$,

- le produit $f \times g : X_1 \times Y_1 \longrightarrow X_2 \times Y_2$ défini à partir d'applications $f : X_1 \longrightarrow X_2$ et $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$

...

La lecture de la suite de ce paragraphe n'est pas indispensable à la compréhension de l'ensemble.

Ces points de vue sont symétriques par rapport aux ensembles X et Y; on peut aussi considérer le produit comme relevant d'un champ conceptuel quelque peu différent - et plus large, d'une manière qui dissymétrise les statuts de X et Y, en représentant X x Y comme un fibré $\mathcal{F}$ trivial soit au-dessus de X (et de fibre Y), soit au-dessus de Y (et de fibre X).

Si on note F_x la fibre au-dessus de x, s une section (c'est-à-dire une application s de X dans le fibré $\mathcal{F}$ telle que $s(x) \in Fx$ pour tout x) $\mathcal{F}$ est isomorphe à un fibré trivial s'il y a card (Y) sections dont les images forment une partition de $\mathcal{F}$.

Cela équivaut au fait qu'il existe une application g de $\mathcal{F}$ sur Y telle que pour tout y $s_y(x) = F_x \cap g^{-1}(y)$ définisse une section.

Cette réalisation de X x Y, qui dissymétrise X et Y, rapproche ainsi l'objet mathématique de l'objet de connaissance pour le sujet, étant donnés les rôles souvent asymétriques joués par des "dimensions" différentes dans les processus cognitifs de représentations des systèmes matériels.

De ce même point de vue non symétrique, le produit cartésien est à rapprocher des opérations de quotient. Un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ peut être constitué de façon naturelle en fibré sur l'ensemble quotient $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ - la fibre au-dessus de $\tilde{x}$ est la classe d'équivalence de x. Un produit cartésien est en particulier muni de deux relations d'équivalences telles que $\mathcal{E}$ soit un fibré trivial au-dessus de chaque ensemble quotient.

Dans ce champ conceptuel où s'insèrent les concepts de relations d'équivalence, quotient, produit les problèmes significatifs sont ceux de "passage au quotient" d'opérations sur $\mathcal{E}$, et de "relèvement" d'opérations sur les ensembles quotients.

De plus, les deux opérations de produit et de quotient sont à la base de nombre de construction de nouveaux objets mathématiques et/ou d'enseignement et ce, dès l'enseignement obligatoire.

Ainsi $\mathbb{Z}$ comme quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}^*$ comme produit $\mathbb{N}^* \times \{-, +\}$) $\mathbb{Q}$ comme quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, les ensembles de vecteurs comme quotient d'ensembles de bi-points...

1.3. Intervention de l'enseignement

Or, comme nous l'avons dit, l'un des objectifs de notre travail est d'analyser le statut de la connaissance construite par l'enfant et l'élève sur la "multiplication logique des dimensions" par rapport au modèle que peut constituer l'objet de savoir "produit cartésien ensembliste". Il se trouve que la façon dont cet objet de savoir se situe lui-même dans l'enseignement donne une pertinence de l'objet de notre travail par rapport aux problèmes de la didactique des mathématiques - nous voyons deux faits principaux à relever :

La "priorité" des acquisitions "spontanées" sur l'enseignement ès qualités

En premier lieu, le développement cognitif lié à l'analyse des objets ou des situations selon des "dimensions" multiples a lieu en tout état de cause, et pour une part décisive avant une scolarisation où les visées didactiques soient dominantes.

Nous ne sommes donc pas dans une situation telle que celle de l'enseignement de l'algèbre (1) par exemple, où l'essentiel des acquis de l'élève

(1) Nous faisons référence à ce qui est étiqueté "algèbre" dans l'enseignement secondaire, et plus spécialement au calcul littéral.

concerne un objet d'enseignement, partiellement un objet de savoir mathématique - et fort peu une connaissance opératoire sur le monde.

Concernant le produit cartésien, la connaissance de l'enfant, issue de ses activités socio-cognitives générales, prend beaucoup plus de place dans son développement cognitif que la connaissance institutionnalisée qu'il acquiert comme élève, dans le lieu scolaire. Nous qualifierons par la suite la connaissance non institutionnalisée de "spontanée" bien que ce terme semble éliminer le fait social de la construction des acquis, mais il sert à introduire une différenciation "institutionnelle" des connaissances enseignées/acquises à l'école (de la même manière que l'on parle de modèle spontané du sujet pour des notions comme la continuité, la vitesse, et d'autres concepts physiques).

L'étude de cette acquisition "spontanée" des connaissances est donc importante pour analyser ce qui se passe dans l'école lors de l'enseignement de notions relevant du champ conceptuel dans lequel on peut situer le produit cartésien.

L'objet de savoir comme "connaissance implicite" et non objet d'enseignement

Un deuxième fait à souligner - que nous étayerons plus loin par une brève étude des manuels scolaires - est que l'objet de savoir "produit cartésien" n'est pratiquement pas objet d'enseignement dans l'enseignement élémentaire et du 1er cycle du second degré. Certes nous le voyons apparaître dans la table des matières d'un manuel récent de CE1 mais c'est sous une forme bien particulière (liée à la construction de tableaux à double entrée). Les programmes de 6ème que ce soit en 1960, après la réforme de 70, ou en 1977 n'y font pas référence : celui de 1960 est - comme le précédent - centré sur les mesures, celui de la "réforme des mathématiques modernes" donne une assez large place aux notions ensemblistes mais le produit cartésien n'en fait pas partie, enfin celui de 1977 - le dernier en date - retient l'utilisation du langage ensembliste et de ses symboles, mais la notion de couple apparaît dans le texte du cours celle de produit cartésien n'est pas explicitement utilisée.

Cette raison que nous venons de donner pourrait apparaître paradoxale : pourquoi l'acquisition des notions liées au produit serait-elle pertinente pour la didactique justement parce que, aux niveaux considérés, le produit n'est pas un objet d'enseignement ? C'est que si le produit cartésien n'est pas un objet d'enseignement explicite, en tant que notion logico-mathématique, il est sous-jacent à de très nombreux objets de l'enseignement obligatoire. Nous venons, par exemple, de signaler l'usage du terme "couple" dans des manuels de 6ème : son usage est réglé par l'hypothèse implicite que l'élève sait travailler non seulement sur un couple mais sur tout couple, en fait sur un produit cartésien.

De même, lorsqu'en 5ème les entiers relatifs sont introduits comme quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est à partir d'une relation d'équivalence entre couples d'entiers naturels supposée sans problèmes.

Une meilleure connaissance de l'organisation conceptuelle (des acquis cognitifs de l'élève) liée au produit cartésien est donc un élément important, d'une part pour analyser le fonctionnement de nombre d'objets d'enseignement (et de savoir et savoir-faire liés), d'autre part pour construire des situations didactiques concernant des connaissances mathématiques, qui impliquent l'appropriation du produit cartésien soit dans leur construction, soit dans leur fonctionnement.

Nous ne développons pas ici un tel travail mais nous analysons certains des rapports entre "unidimensionnel" et "bidimensionnel" à propos de l'enseignement sur les structures multiplicatives numériques dans l'enseignement primaire.

°

° °

2 - LE REPERAGE DU PLAN

Les rapports entre le repérage spatial dans le plan, l'objet mathématique : le plan géométrique isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et les objets d'enseignement de la géométrie plane, présentent certaines analogies avec ceux que nous venons de présenter concernant le produit cartésien.

Certes, le champ conceptuel dans lequel se situent les problèmes de repérage est beaucoup plus vaste puisqu'il couvre l'ensemble des notions spatiales. Cependant, si nous centrons nos préoccupations sur le repérage - et particulièrement le repérage lié aux coordonnées cartésiennes - les caractères communs sont importants, la précocité des premiers acquis, l'âge auquel se pose la question de la coordination de relations "unidimensionnelles" de repérage, les rapports temporels entre les acquisitions "spontanées" et l'intervention de l'enseignement. En revanche, la nature de la droite réelle se traduit par des différences certaines entre l'objet de savoir et l'objet d'enseignement par rapport au caractère "amorphe" et fini des ensembles que nous considérions à propos du produit cartésien.

Il faut ici souligner que les problèmes dits de repérage, tels qu'ils sont abordés ici et dans l'enseignement, ne portent pas sur le repérage "pratique", des déplacements réels par exemple, mais le repérage dans une représentation. Cette représentation peut être graphique ou être réalisée sous forme de maquette.

Eléments de genèse des représentations de position

Esquissons maintenant les grandes lignes des premiers éléments du développement cognitif sur ces problèmes de "positionnement" ; avant deux ans un enfant est déjà capable d'utiliser certaines informations sur les dispositions d'objets réels données par une représentation de type dessin ou photo ; vers deux-trois ans, le passage de l'espace réel à une maquette est significatif pour lui : il peut ainsi transposer certains de ses déplacements dans un espace, marqué d'objets identiques (des cubes par exemple)

présentant une configuration organisée et simple, en déplacements d'une poupée dans une maquette représentant cet espace. Un peu plus tard (1) s'établit la possibilité de travailler directement sur des espaces de représentation, sans qu'un espace réel de référence ne soit présent.

Un ensemble de relations se développe à partir d'indices pris par rapport au corps propre : devant/derrière, loin/près, d'un côté/de l'autre. Appliquées d'abord à des objets "orientés" comme l'est le corps propre (une poupée, une maison...), elles permettent ensuite des repérages locaux dans un espace objectif (d'objets extérieurs non rapportés au corps propre).

Des coordinations locales permettent des premières possibilités de repérage non syncrétique ; ces coordinations peuvent concerner des relations de nature topologique (dedans/dehors/sur le bord) et des relations de nature (pré)métrique, (loin, près) ou liées à l'orientation du plan (à droite/à gauche).

Le caractère culturel très prégnant des représentations graphiques planes de l'espace "à trois dimensions" privilégie dans ce développement certains systèmes de repérage. D'une part les supports matériels utilisés - tables, papier, voire écran de télévision - sont délimités par un cadre rectangulaire, orientés de façon spécifique par rapport au corpsdeux des bords sont - par rapport au sujet - dans des plans fronto-parallèles, les deux autres orthogonaux, sont parallèles au plan de symétrie droite/gauche. D'autre part, l'espace y est représenté de sorte que la direction de l'axe de symétrie soit significative de la dimension "haut/bas" (la verticale).

---

(1) Vers 3/4 ans, voir Maury, (1976).

La conjonction des propriétés des supports matériels et des caractéristiques des représentations planes contribue à ce que le système "horizontales/verticales" joue dans le développement du repérage un rôle spécifique.

Le repérage d'un point de cet espace de représentation peut se faire en coordonnant la position par rapport à la direction "proximal - distal" (qui coïncide avec celle "bas/haut" de la feuille de papier), avec la position "latérale". Cette coordination de deux relations spatiales spécifiques est conceptuellement proche de la composition multiplicative des dimensions. Le problème de son acquisition se pose d'ailleurs dans la même période antérieure à la scolarisation.

Le plan affine comme objet de savoir de référence

L'objet de savoir sur lequel débouchent ces systèmes de repérage - au niveau de la formalisation - est l'objet mathématique "plan affiné" (muni d'un repère isomorphe à $\mathbb{R}^2$). C'est un objet de savoir plus complexe que celui auquel aboutissaient les opérations combinatoires, pour deux raisons essentielles. D'une part, il y a là un produit cartésien particulier, avec comme ensembles de base $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$; or la droite réelle - quelqu'en soit le système d'axiomes-est un objet complexe, qui renvoie entre autres à la mesure et au calcul numérique. Tel n'était pas le cas pour les ensembles "amorphes" et finis considérés dans la combinatoire des dimensions, comme la forme et la couleur. (En revanche, certaines dimensions physiques : la masse, le poids, la longueur présentent des caractères identiques - puisqu'aussi bien on les représente justement par $\mathbb{R}^+$). D'autre part, le champ conceptuel dans lequel s'inscrit $\mathbb{R}^2$ comme plan est, nous l'avons souligné plus haut, très vaste. Là s'inscrit a priori une différence majeure avec le produit cartésien, différence qui a évidemment des conséquences sur les rapports entretenus avec l'objet d'enseignement.

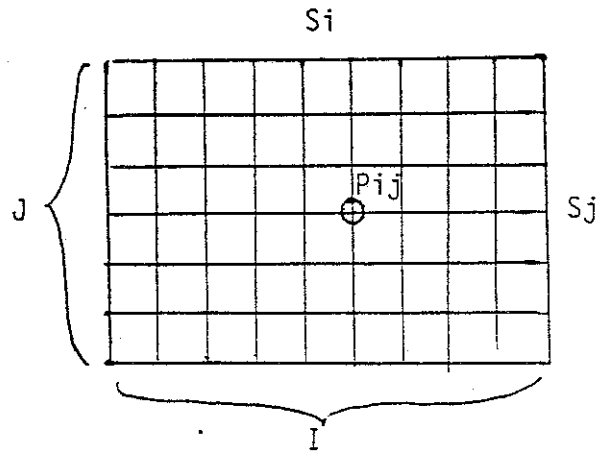
La situation spécifique des quadrillages (finis)

En fait nous analysons la capacité des enfants à repérer des positions dans un repérage déjà explicite, construit à partir d'une discrétisation des positions : un quadrillage de "chemins" en nombre fini, les seuls points en jeu étant les "carrefours". Le modèle "sous-jacent" n'est alors pas le produit $[A\ B] \times [A'\ B']$ de deux intervalles mais un ensemble de points défini à travers l'intervention d'un produit fini I x J :

L'ensemble $\mathcal{P}$ des points du quadrillage est défini par

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (S_i \cap S_j)$$

où les S_i sont - ici - des segments disjoints (parallèles), dont les origines sont situées sur un même segment, de même longueur, ayant leurs extrémités sur un segment parallèle au premier, les indices i appartenant à un ensemble fini I ordonné, avec des propriétés analogues pour S_j. Les directions des S_i et S_j étant par ailleurs indépendantes (orthogonales).



Deux notions importantes interviennent : la relation $S_i \cap S_j = \{P_{ij}\}$ où P_{ij} est un point, et la structure produit I x J qu'a l'ensemble indexant les points du repérage.

Le caractère "multiplicatif" de cette structure rapproche les problèmes cognitifs de repérage de ceux de la combinatoire du produit. Néanmoins la relation fondamentale d'intersection des lignes pour définir un point (ou une "position") relève, quant à elle, de propriétés topologiques du plan.

La réalisation choisie avec un quadrillage orthogonal et un petit nombre de segments nous paraît telle que la relation $\{P\} = S_i \cap S_j$ est considérée comme évidence implicite, elle fonctionne pour les enfants comme un"théorème-en-acte". Sous cette hypothèse, le problème de l'acquisition du repérage est centré sur la maîtrise de la combinatoire I x J des indices. Dans la mesure où on ne demande pas à l'enfant de construire lui-même un tel quadrillage, l'objet de savoir en jeu est très largement réduit. Cependant nous ne devons pas oublier qu'il s'agit là d'une hypothèse de travail, plausible eu égard aux connaissances acquises à ce jour sur les savoirs des enfants, mais dont le domaine de validité peut être limité pour les jeunes enfants (1).

L'objet d'enseignement "repérage dans un quadrillage"

L'objet d'enseignement, qui est en rapport avec ces problèmes de repérage, se présentede façon tout à fait explicite comme un objet propre recevant une formulation différente de celle de l'objet de savoir.

On voit par exemple dans un manuel de CE1 (1978) deux rubriques "quadrillage - repérage de carreaux" et "quadrillage - repérage de points", et de même en 6ème (1977) une rubrique "quadrillage", qui distingue également repérage d'une case et repérage d'un noeud.

---

(1) Le problème de l'évolution de ce domaine de validité met en jeu l'objet de savoir beaucoup plus large, $\mathbb{R}^2$ introduit plus haut - cela ne fait pas partie de nos objectifs, centrés sur l'acquisition de la bidimensionalité.

Il y a évidemment une dualité entre segments et bandes inter-segments et un complet isomorphisme des opérations de repérage. (Néanmoins l'existence simultanée des deux repérages introduit des problèmes d'intervalle dont on sait qu'ils ne sont pas si simples à maîtriser).

Remarquons la proximité de cet objet d'enseignement et des objets de pratiques sociales, des mots croisés au plan de ville, en passant par la bataille navale ou le jeu d'échecs.

Une connaissance du développement de la compétence qu'ont les enfants à utiliser des quadrillages déjà construits, une étude des propriétés qu'ils utilisent et des obstacles qu'ils rencontrent - et franchissent ou non - dans des tâches somme toute socialement "banales", peut nous éclairer sur le statut didactique de l'enseignement - qui existe - portant sur ces notions.

°

° °

3 - LES MESURES SPATIALES

L'acquisition de notions fondamentales touchant aux mesures spatiales met en jeu un nouveau champ conceptuel avec le concept même de mesure, et l'arithmétisation de celle-ci - en rapport avec le problème de l'unité. L'existence des rapports avec des objets de savoir mathématiques et des objets d'enseignement y apparaît comme sans doute plus évidente que pour la combinatoire multiplicative ou le repérage plan. On peut rappeler la place déterminante qu'occupaient les mesures (longueur, surface, volume) dans l'enseignement de la géométrie au siècle dernier...

De fait les mesures spatiales ont une situation particulière dans le champ de la didactique, place déterminée à la fois par leur statut dans la connaissance du sujet, par leurs caractéristiques comme objets mathématiques et par la façon même dont elles sont définies comme objet d'enseignement.

Les relations entre le décompte et les quantités

On sait le rôle que jouent dans le développement cognitif les opérations de décompte (construction et structuration des nombres entiers...) et de mesure (construction des quantités physiques et spatio-temporelles...); ces opérations sont décisives pour l'élaboration de la connaissance, la régulation des actions, le remplacement du tâtonnement empirique par le calcul sur les représentations. On sait aussi que les premières notions qu'en a l'enfant s'élaborent de façon précoce à partir de ses actions sur le monde.

Comme pour les notions précédemment vues, cette élaboration dépend des représentations socialisées existant, à la fois dans le proche milieu de l'enfant et dans la culture dans laquelle il vit.

L'étude du fonctionnement de l'enseignement tout comme la construction et l'analyse des situations didactiques, comportent donc une interrogation précise sur ces représentations des élèves et sur leur intervention dans les processus didactiques.

Or, les travaux de psychologie cognitive, aussi bien que les études sur les acquisitions scolaires, convergent pour confirmer la difficulté des notions sur ces mesures spatiales pour l'enfant et l'élève. Ainsi les recherches sur les conservations spatiales montrent que si les premiers acquis commencent relativement tôt, c'est néanmoins pendant la période de scolarisation : c'est en effet vers 7-8 ans qu'apparaissent les réponses stables de conservation de la longueur et de la surface comme "étendue" (quantité intensive, ou encore quantifiée, mais avec des comparaisons d'ordre).

L'acquisition de la conservation pour l'ensemble des mesures spatiales est un processus de longue durée qui se poursuit pendant l'adolescence. Les bilans effectués à la fin de l'enseignement primaire montrent, par une autre approche, les difficultés des acquisitions scolaires correspondant à ces notions : échecs considérables à la fin du CM2 pour les calculs de périmètre et de surface de rectangles, et pour les changements d'unités. Les conceptions erronées sur la nature dimensionnelle des mesures se traduisent par exemple par des calculs de surface ou même de volume de type "périmétrique" (additionner des longueurs).

Différenciation et coordination de propriétés

Ces observations rejoignant celles sur les conservations des périmètres et surfaces, renvoient fondamentalement aux problèmes rencontrés par les enfants et les élèves dans l'acquisition des relations entre les différentes mesures spatiales considérées initialement comme des quantités d'objets physiques occupant une certaine place dans l'espace. Ces relations, qui déterminent la dimensionnalité relative de ces mesures, mettent en oeuvre un double processus de différenciation et de coordination. Différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord / la surface intérieure ; la surface d'un solide / son volume) et coordination de ces propriétés non seulement qualitatives (une ligne a une dimension, une surface deux, un volume trois) mais quantitative, aboutissant aux équations aux dimensions $S = L \times L$, $V = S \times L = L \times L \times L$ et aux calculs de mesures.

Nous retrouvons ici le problème plus général de la coordination multiplicative, y compris sur le plan "qualitatif". De plus le caractère multiplicatif des rapports entre longueur, surface et volume se traduit également par les propriétés de bilinéarité de la mesure de surface et de trilinéarité du volume par rapport aux longueurs : nous voyons ici se recouper le champ conceptuel des mesures spatiales et le champ conceptuel des structures multiplicatives numériques. Nous ne développerons pas ce versant des problèmes, qui fait l'objet de nombreux travaux de Vergnaud, Rouchier, Ricco.

Le problème de l'unité et du mesurant "objet"

Par rapport au problème d'ensemble de la coordination multiplicative, il faut souligner pour ces quantités "continues" que sont les mesures spatiales l'exigence d'une étude particulière des notions de "mesurant" et d'unité.

Lorsqu'il s'agit de cardinaux finis - situation que nous rencontrons avec le produit cartésien considéré ici - la notion d'unité est évidente : dans les opérations de dénombrement le choix du mesurant ne se pose pas : 1 est 1. En revanche, pour la longueur comme pour la surface, le volume (et les autres quantités physiques, d'ailleurs) le choix d'un mesurant qui aura fonction d'unité est essentiel pour l'arithmétisation de la quantité. Suivant le mesurant et l'élément mesuré il est, ou non, possible de passer d'une quantité "intensive" à une valeur numérique. A cette question générale pour les problèmes de mesure, qui rejoint celle de la constitution de la droite numérique, s'ajoutent des problèmes spécifiques pour la surface et le volume, liés à l'existence de mesures directes.

Pour la surface, un mesurant ne peut fonctionner que s'il est une forme qui pave le plan, et si l'élément à mesurer est pavable par cette forme. C'est le cas - dominant dans l'enseignement - où le mesurant est un pavé rectangle ou carré et où les "mesurés" sont rectangulaires (bien choisis...).

Or une figure comme le disque, bien que non pavable par des rectangles ni quelque pavage régulier que ce soit, n'en a pas moins une surface... Pour le volume s'ajoute une autre difficulté : si, pour la surface plane il est possible d'effectuer un pavage soit au niveau des représentations graphiques soit au niveau des réalisations matérielles par des recouvrements obtenus "en passant dans $\mathbb{R}^3$", la structure même de l'espace de nos activités matérielles nous interdit semblable opération pour le volume. Ainsi dès l'instant où l'on a composé un volume matériel on n'en voit plus que la surface - et encore pas dans son intégralité.

L'établissement des relations multiplicatives

Si nous considérons maintenant des unités pavant le plan et des surfaces pavables, l'établissement des relations multiplicatives ne va pas pour autant de soi. Prenons l'exemple de pavés formés de triangles équilatéraux ; que l'on prenne aussi bien un parallélogramme qu'un triangle équilatéral, construits sur ce pavage, il est bien difficile, sans un travail arithmétique, de faire apparaître le caractère multiplicatif de la surface par rapport à la longueur...

En fait la situation paradigmatique qui met en évidence le caractère bidimensionnel de la surface par rapport à la longueur est celle où les pavés sont construits à partir de la structure produit du plan, comme produit de segments (c'est-à-dire rectangles ou parallélogrammes). La structuration de l'espace en "n lignes xp colonnes" introduit alors une relation étroite entre le produit cartésien fini, le repérage spatial et le produit numérique scolaire n x p.

Il faut souligner que le caractère bidimensionnel de la surface n'en découle qu'à un certain nombre de conditions : que le décompte des unités n'en reste pas au dénombrement additif, que la structure organisant les unités (de surface) en lignes et colonnes soit reconnue, que la relation soit faite entre le nombre p d'unités - surface qu'il y a par ligne et le nombre p d'unités - longueur qui mesure le côté correspondant. (Il faut

simultanément reconnaître qu'il s'agit du même nombre p et de deux unités différentes...).

Il faut y ajouter une condition centrale portant sur le domaine de validité : le caractère bidimensionnel doit concerner la mesure en tant qu'opération générale sur les "bonnes" parties du plan et pas seulement la mesure de formes "produit" comme le rectangle ou le parallélogramme.

Le caractère relatif de la dimensionalité des mesures spatiales

L'existence de mesures effectives du volume et de la surface introduit une conception "relativiste" de la dimensionalité : grâce aux caractéristiques des liquides, on peut en effet mesurer directement certains volumes par repérage de niveau. De manière voisine, en identifiant les surfaces à des volumes d'épaisseur constantes on peut les mesurer via le poids, par exemple, en utilisant un "isomorphisme de mesure" volume - poids. Ces opérations de mesure directe traitent alors les mesures spatiales comme "unidimensionnelles" (aucun rapport de dimensions n'y intervenant). Cette "unidimensionnalité" est cohérente avec les premières notions intensives des quantités spatiales, ce qui peut rendre plus difficile le dépassement conceptuel exigé par l'appropriation de la bidimensionalité.

L'intervention de l'enseignement

L'enseignement intervient donc sur un objet très complexe, qui entretient un réseau multiple de relations avec des notions relevant de plusieurs champs conceptuels. Uneedes conséquences de cette complexité nous paraît être le report des questions conceptuelles à des niveaux d'enseignement tardifs, lors de la formalisation de la théorie de la mesure et de l'intégration, et la réduction de l'essentiel de l'enseignement obligatoire à un seul aspect : l'arithmétisation des notions, les calculs de périmètres, surfaces et volumes. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre portant sur les effets macroscopiques de l'enseignement.

Nous allons introduire maintenant brièvement les caractères qui distinguent les mesures spatiales de quantités physiques, dont l'acquisition est contemporaine, à la fois dans le développement cognitif et dans le processus de l'enseignement.

Caractères spécifiques des mesures spatiales dans le développement cognitif

D'une part elles sont à l'articulation de concepts "physiques", relatifs aux propriétés des objets matériels, à des mesures et à des transformations sur ces objets, et de concepts "spatiaux", qui interviennent dans l'organisation des activités cognitives sur l'espace : ce n'est pas le cas pour d'autres quantités comme la masse, le poids, ni pour la mesure probabiliste, ni pour le temps qui occupe une autre place très spécifique.

D'autre part elles exigent une coordination de concepts à caractère "géométrique" portant sur une représentation qualitative de l'espace, et de concepts numériques, débouchant sur le progrès décisif dans le développement cognitif que constitue le calcul des mesures.

Un double processus de mathématisation est ainsi à l'oeuvre dans l'élaboration des concepts spatiaux, qui en tout état de cause ne peut relever d'une problématique psychologique qui ne prendrait pas en compte le processus même de l'enseignement. On constate d'ailleurs que dans le champ considérable des recherches sur le développement cognitif effectuées à partir des conservations, les conservations spatiales sont peu étudiées ès qualités, et ce sont essentiellement le fait d'études d'épistémologie piagétienne : la situation par rapport à l'objet de connaissance du sujet est donc fort différente de celle des études psychologiques sur la combinatoire ou le repérage spatial, qui sont nombreux ou l'ont été (ainsi le champ d'étude de l'"acquisition de conception" et des changements de dimension pertinente au cours d'un apprentissage conceptuel a marqué pendant de longues années les recherches, en particulier d'orientation théorique "behavioriste").

Les mesures spatiales dans le processus d'enseignement

Dans le processus d'enseignement lui-même, le statut des mesures spatiales les distingue des quantités physiques dont l'acquisition des notions est contemporaine : celles-ci deviennent des objets d'enseignement de la physique, alors que les quantités spatiales demeurent des objets d'enseignement mathématique attestés : la place de la mesure et de l'intégration dans l'enseignement supérieur en est une manifestation, comme la question de "métrisation" d'autres espaces que $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$).

Néanmoins les mesures spatiales, y compris la surface et le volume, deviennent rapidement, dans le cursus scolaire obligatoire, des objets d'enseignement obsolescents : l'élève les rencontre comme objets de connaissance pratique à la fin de l'enseignement élémentaire et en apprend des formules de calcul, les revoie - brièvement en général - au début du premier cycle du secondaire, et ne les rencontre plus, ensuite, que comme supports éventuels d'autres notions. C'est seulement en fin du second cycle, dans les sections scientifiques, que les mesures spatiales retrouvent un statut d'objet d'enseignement reconnu.

Une étude historique approfondie pour laquelle nous ne sommes pas armée serait nécessaire pour analyser les raisons de ce phénomène d'obsolescence - qui s'est par ailleurs accompagné en France, au moins, d'une réduction considérable de la part de mathématisation dans l'enseignement mathématique (malgré les efforts d'un certain nombre d'enseignants, y compris dans l'élaboration de manuels), et qui se traduit, comme nous le verrons, par une insuffisante prise en compte de l'ensemble des concepts en jeu.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Avant de résumer nos résultats d'ensemble obtenus sur l'acquisition de la bidimensionalité dans les trois champs conceptuels de la combinatoire ensembliste, du repérage plan et des mesures spatiales, nous allons revenir brièvement sur les rapports entre notre perspective d'étude et les travaux de psychologie génétique dans les mêmes domaines.

1. Le travail sur les classifications multiples développé à partir des études de Piaget d'une part s'est placé dans le cadre général du développement de la logique de l'enfant et de l'adolescent, d'autre part - plus récemment - s'est orienté plutôt vers une étude approfondie des procédures des jeunes enfants.

Les conclusions globales que nous avons pu tirer de nos recherches sur l'acquisition convergent ici avec les analyses de Piaget ; en particulier nous pouvons souligner que les âges des sujets dont les protocoles illustrent les stades décrits par Piaget sont très stables et que ce sont, globalement, ceux que nous avons dégagés comme étapes dans l'évolution. Remarquons néanmoins que la validité de nos résultats nous paraît liée à des caractéristiques "dimensionnelles" du matériel utilisé : les représentations des enfants ne sont pas les mêmes pour des produits hétérogènes de dimensions comme F x C et pour des produits homogènes de type C x C ou F x F ; cela nous a conduit à détailler davantage le processus d'évolution des représentations et l'acquisition de la bidimensionalité, au-delà de l'approche centrée sur la logique.

D'autre part, les classifications n'abordent pas l'ensemble des opérations attachées à un produit cartésien ensembliste mais concernent l'existence et la coordination des projections sur chaque ensemble de base, et les relations d'équivalence qui leur sont attachées, au sein d'une inscription dans un cadre spatial qui joue un rôle producteur spécifique.

Or deux types de situations-problèmes utilisées dans notre travail ne se situent pas dans ce cadre et ont apporté des éléments complémentaires. Ces derniers nous permettent - nous semble-t-il - de préciser davantage les représentations que se construisent les enfants sur une période relativement longue : il s'agit d'une part des tâches numériques de dénombrement d'éléments construits ou d'anticipation sur des modifications des ensembles de base, d'autre part des tâches de mise en correspondance de produits ensemblistes. Les premières tâches nous paraissent même susceptibles d'être réinvesties dans la construction de situations didactiques visant l'acquisition des notions attachées au produit cartésien ensembliste. Les seconds types de tâches ont permis de montrer les limites de la formation d'hypothèses stables, au long d'une correspondance, mobiles par rapport aux dimensions en jeu et bidimensionnelles ; cette formation d'hypothèse concerne un niveau de fonctionnement de la bidimensionalité postérieur à celui en jeu dans les classifications multiples.

Par contre, l'étude approfondie des procédures de jeunes enfants dans des tâches de complétion de "matrices", avec en particulier la mise à l'épreuve de modèles précis de "règles de production" (Anh Ngyen Xuan et al, 1983) affine les connaissances sur la période antérieure à l'acquisition de la bidimensionalité. Il s'agit là d'une période sur laquelle nous avons peu développé notre propre travail (sinon pour rechercher comment la double contrainte d'unicité et d'exhaustivité était traitée dans une solution ensembliste de construction de produits de type F x C ou C x C).

Soulignons d'ailleurs l'importance de connaissances dans ce domaine pour la construction de situations didactiques destinées à introduire des concepts sur le produit auprès de jeunes enfants.

De même, il n'entrait pas dans notre perspective de travail d'étudier sur le plan génétique la construction des "dimensions" elles-mêmes, en rapport avec l'ensemble des activités socio-cognitives des enfants ; mais

nous insistons sur le fait que les résultats de telles recherches concernent directement la détermination du domaine de validité de nos conclusions, et ce en particulier dans la période de construction du premier niveau de fonctionnement de la bidimensionalité.

Dans le domaine spatial, nous avons retenu un aspect très spécifique de l'analyse des acquisitions: nous avons étudié le passage à la bidimensionalité du repérage (dans un "plan quadrillé") à partir des acquis antérieurs de l'enfant sur les propriétés spatiales et de ses rapports avec son espace visuo-moteur (éloignement par rapport à soi, relation droite-gauche). Nous avons trouvé des résultats convergeant avec les autres travaux sur le repérage et sur les acquis sur la représentation de l'espace ; nous avons également observé une interaction des diverses propriétés utilisées par les enfants conduisant à une prise en compte précoce de la bidimensionalité du repérage (dans des conditions sur lesquelles nous reviendrons à propos du domaine de validité des conclusions sur la bidimensionalité).

De plus, la comparaison d'un repérage purement spatial, d'un repérage où des identifications intrinsèques de position sont possibles, et de l'identification de points d'un repère par une information non spatiale (couple de couleurs) nous a permis de distinguer les difficultés à coordonner deux informations (4;6 ans) les simples non-prises en compte spontanées d'informations non spatiales, dans une tâche reconnue par l'enfant comme spatiale. Rappelons ici que nous n'avons pas étudié la construction par l'enfant d'un système de repérage : cette situation est beaucoup plus complexe et Piaget a montré le caractère relativement tardif de sa réussite. Une telle construction en effet met en oeuvre beaucoup plus de notions que celle de la bidimensionalité, dont celles - difficiles - liées à la mesure ; elle fait logiquement appel à des outils élaborés, comme la construction de l'orthogonalité (repérage cartésien) ou le report des angles (coordonnées polaires) (Piaget, 1948).

Enfin notre situation de repérage où le sujet et l'expérimentateur ont chacun leur propre point de vue, par rapport à des repères "isomorphes", semble faciliter la prise en compte du point de vue de l'observateur dans le repérage. En particulier l'orientation gauche/droite apparaît mieux conservée que dans les expériences où le sujet est placé face à deux repères. L'exploitation des changements de point de vue avec observateur ne nous semble pas avoir été faite sur des tâches de repérage plan.

Cette situation a confirmé les difficultés, mises en évidence par tous les auteurs, de prise en compte des changements de point de vue dans l'espace (et non dans le "plan marqué") : cela montre que le système de repérage n'a pas nécessairement la fonctionalité qui lui est implicitement supposée, et que les tâches de repérage plan ne peuvent être étudiées sans mise en rapport avec l'ensemble des représentations spatiales de l'enfant.

En particulier le type de réponses apportées dans la situation où l'expérimentateur avec son repère était face au sujet semble bien indiquer que l'enfant plutôt que de composer les relations spatiales planes "loin/près" et "droite/gauche" essaie de "compenser" le déplacement de l'expérimentateur en se "mettant mentalement" à sa place.

Ceci expliquerait que les tâches de changement de point de vue ne s'intègrent pas dans une classification en termes de stades et que l'acquisition de la bidimensionalité ne puisse assurer la réussite dans ce genre de situations.

Enfin, nous devons rappeler que les recherches en psychologie sur les mesures spatiales sont essentiellement centrées sur les conservations, dans le cadre de l'épistémologie génétique. Les difficultés que nous avons observées de prise en compte de la bidimensionalité de la mesure de surface, comme l'application erronée d'un "modèle linéaire" à la surface (au lieu du modèle bilinéaire approprié) sont analogues aux confusions entre conservation du périmètre et de la surface (Vinh Bang, 1965)

pour ne citer que l'exemple le plus flagrant de la convergence de notre approche avec celles évoquées ci-dessus. En revanche, les éléments de notre travail qui prennent en compte la dimension de l'enseignement ne se retrouvent pas dans les travaux antérieurs, en particulier tout ce qui concerne la validité des opérations des enfants selon les différentes figures, objets de mesure.

2. Dans l'ensemble de notre étude sur l'acquisition de la bidimensionalité, nous avons mis l'accent essentiel sur la recherche d'invariants dans l'élaboration des représentations. Cela nous a paru nécessaire pour deux raisons que nous rappelons. Une étude des caractères de l'intervention (ou la non-intervention) de l'enseignement dans le domaine du produit cartésien nécessite de disposer de repères sur le développement des acquisitions cognitives des élèves. L'organisation de situations didactiques sur la longue période de construction cognitive (confirmée par l'étude des trois champs conceptuels considérés) suppose également de connaître les caractéristiques générales des élaborations cognitives des enfants et de leurs transformations. Dans cette perspective, nous avons pris en compte comme essentiels les contenus, vus sous l'angle de l'objet de savoir en jeu, en insistant sur l'importance des domaines de validité.
Il nous paraît y avoir complémentarité, et convergence d'intérêts, entre cette approche et celle des travaux de psychologie cognitive qui s'attachent aux pratiques opératoires elles-mêmes pour étudier "non pas (ou pas directement) l'élaboration progressive des instruments cognitifs chez l'enfant, mais les conditions et les modalités de la mise en oeuvre de ces instruments..." pour "contribuer à une pragmatique de la connaissance (et à sa théorie)..", cela impliquant une "reconsidération générale des notions de schéma et de structure, la structure étant cette fois définie non par les produits intrinsèques des instruments cognitifs (..) mais par les conditions formelles assurant la compatibilité, la modulation, la composition et la convertibilité des pratiques observées" (Gréco, 1984).

3. Nous allons maintenant résumer les conclusions spécifiques que nous avons obtenues sur l'acquisition de la bidimensionalité. Pour fixer les idées nous avons rapporté cette acquisition à des niveaux d'âge (qui recoupent, rappelons-le, des niveaux scolaires). Il doit être bien clair qu'il s'agit d'éléments essentiellement indicatifs.

A 4 ans, les enfants rencontrent des difficultés - relatives - à tenir compte de façon stable de deux informations simples (repérage des carrefours) mais il y a des acquis précurseurs dans le domaine spatial ; ainsi par exemple, la disponibilité du repérage proximal/distal permet déjà une prise en compte non négligeable de la deuxième dimension.

A 5 ans, le seul obstacle qui subsiste dans la mise en oeuvre de la bidimensionalité du repérage plan est celui de la conservation de l'orientation gauche/droite ; en ce qui concerne la combinatoire ensembliste, il apparaît une contradiction entre la contrainte d'unicité (liée au caractère ensembliste du matériel à construire) et l'exhaustivité (liée à la combinatoire elle-même).

A 6 ans, la bidimensionalité spatiale est acquise, et les enfants peuvent assez bien compenser un changement limité de point de vue (dans l'utilisation d'un repère). Le statut ensembliste du produit semble assuré ; on peut mobiliser, séparément, les projections sur chacun des ensembles de base dans des tâches simples (rangements) mais les "relèvements" ne sont pas disponibles. Les opérations sont exclusivement unidimensionnelles, avec une forte asymétrie qui peut aller jusqu'à l'inaccessibilité d'une des dimensions, selon la signification du matériel.

A 7 ans, il commence à y avoir des règles d'arrêt: le produit est une solution, unique, à certaines problèmes . La représentation du produit semble de type "additif", une dimension reste relativement dominante, mais pas de manière absolument stable ; les comportements restent unidimensionnels.

A 8 ans se produit un processus de réorganisation des représentations du produit de dimensions conduisant des représentations de type additif à celles de type multiplicatif ; le fait que les anticipations des effets d'adjonction d'éléments aux ensembles de base soient mobilisables nous en semble un indice très intéressant. Ce processus se traduit aussi, nous semble-t-il, par d'apparentes régressions pour certaines réponses. De plus, l'espace joue un rôle producteur. Cependant le domaine de validité des opérations bidimensionnelles est limité.

A 9-10 ans, la bidimensionnalité du produit ensembliste est acquise, le produit homogène E x E n'est plus mis en rapport avec l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ mais traité de manière similaire à un produit hétérogène A x B. Dans des opérations complexes comme les mises en correspondance de produit, les enfants peuvent maintenant faire des hypothèses unidimensionnelles stables, pour l'une et l'autre des dimensions successivement. Toutefois la coordination multiplicative de ces hypothèses reste difficile.

A 10-12 ans, les acquis sur la bidimensionalité de la mesure de surface s'établissent ; le pavage des figures rectangulaires en fournit une première base, qui n'assure pas néanmoins une disponibilité de la notion même pour les formes structurées multiplicativement (rectangles, parallélogrammes).

De la 6ème à la 4ème alors que la linéarité de la mesure des longueurs est utilisée de façon fiable, la bidimensionalité de la mesure de surface garde un domaine de validité limité, bien que s'étendant lentement à des formes comme les triangles. La structuration des situations-problèmes, les modes opératoires utilisés pour exprimer la mesure, interviennent dans la disponibilité de la bidimensionalité. Faute de pratiques "spontanées" à ce niveau de fonctionnement des mesures spatiales, faute d'une intervention appropriée de l'enseignement, beaucoup d'élèves ne parviennent pas à s'approprier la mesure de surface comme une opération bidimensionnelle valide sur toute (bonne) forme plane.

Globalement, dans une certaine mesure, l'espace apparaît comme un précurseur dans la construction de la bidimensionalité : la richesse de ses propriétés, la précocité des représentations des enfants construites à partir de leurs activités manuelles et motrices dans l'espace, en sont une des raisons. En particulier le privilège de la dimension proximal/distal (loin/près par rapport à soi, devant/derrière par rapport à des objets orientés) fournit une organisation unidimensionnelle. Le plan apparaît un référent privilégié pour la représentation de la bidimensionalité en tant qu'objectivement organisé de façon bidimensionnelle.

4. Cela étant, l'évolution de l'acquisition de la bidimensionalité se confirme non seulement comme un processus de longue durée, mais encore comme marquée par des niveaux de fonctionnement différents. Dans cette évolution apparaissent des obstacles dans le passage de l'unidimensionalité à la bidimensionalité. Ces obstacles se distinguent des difficultés tenant à la réalisation matérielle, au statut des ensembles de base, aux moyens de contrôle plus ou moins accessibles, etc. Ils se manifestent par l'existence de régression dans certaines performances et surtout par le caractère récurrent de certains problèmes ; ainsi peut-on retrouver beaucoup plus tard (éventuellement chez des adultes) la trace de tels obstacles par des erreurs qui peuvent sembler paradoxales.

Il apparaît tout d'abord l'obstacle que nous qualifierons de logique, au sens Piagétien, du passage au domaine multiplicatif. Cet obstacle a son versant arithmétique dans le problème du passage des structures additives aux structures multiplicatives, que l'enseignement, comme nous l'avons vu, a plutôt tendance à renforcer. L'une des conséquences à long terme est la représentation de la multiplication comme une opération qui "donne des nombres plus grands" (et la division comme une opération qui donne des nombres plus petits)(1).

---

(1) On retrouve ainsi des problèmes dans la mise en oeuvre de la proportionalité au niveau de la seconde quand les coefficients sont inférieurs à 1 .

Un autre aspect de cet obstacle est lié au changement d'ordre de grandeur, en rapport avec la représentation du domaine numérique, où seul un domaine restreint est utilisé. Or le passage de l'unidimensionnel au bidimensionnel se traduit par un changement d'ordre de grandeur dès que les cardinaux des ensembles de base ou les mesures des longueurs ne sont pas trop petits. Nous n'avons délibérément pas manipulé cette variable numérique dans nos expériences, mais nous avons rencontré cet obstacle dans l'arithmétisation du volume (Vergnaud et al, 1983, Rogalski et al. 1983) et dans les rapports entre nombre et espace chez des élèves de 6ème et de 5ème (Errecalde et Rogalski, 1984).

Un autre type d'obstacle se rencontre dans l'acquisition de la dimensionalité des diverses mesures spatiales : c'est la mise en relation entre dimensions physiques composées (surface, volume, au-delà masse volumique, etc.) et dimensions composantes. Ces problèmes liés à l'analyse dimensionnelle, se retrouvent jusque dans l'enseignement supérieur.

L'étude de ces derniers obstacles n'a pas été développée dans notre travail : leur analyse est un des prolongements possibles de l'étude de l'acquisition la bidimensionalité. Nous voulons signaler maintenant d'autres limites de sur la portée de nos conclusions, et avancer un certain nombre de questions encore ouvertes.

5. Nous avons déjà fait référence à la limitation de nos expériences à des cardinaux petits, ne serait-ce qu'à cause de l'âge des plus jeunes enfants avec lesquels nous avons travaillé. Or, outre le problème du changement d'ordre de grandeur évoqué ci-dessus, se pose la question de l'extension de nos conclusions à des ensembles quelconques. Au-delà des questions de domaine de validité numérique, c'est alors l'opération même de produit qui est en jeu et non son résultat direct ; cela suppose un changement de p o i n t de vue qui impliquerait un changement de méthodologie.(1)

---

(1) Si les ensembles sont quelconques, finis très grands, ou non finis, les réalisations matérielles ne sont plus possibles. Les représentations symboliques et/ou l'expression des modes de construction sont alors indispensables.

Par ailleurs, nous avons rappelé plus haut que nous n'avions pas manipulé la variable "nature des dimensions" ; mais nous n'avons pas non plus étudié les effets des différences entre "critère", "attribut", "dimension" (cf. annexe sur la dimension*). Nous estimons cependant, à partir des résultats déjà acquis en psychologie, que ce sont des variables propres à modifier les règles d'action voire les représentations des sujets : il y a là des investigations à poursuivre.

Dans un autre ordre d'idée, nous avions déjà signalé dans le chapitre concernant les objectifs et la méthodologie, qu'il nous paraissait indispensable d'analyser un large éventail de tâches liées à chacun des champs conceptuels concernés. Comme pour le produit cartésien et le repérage, vu l'âge des enfants, cela ne pouvait être fait qu'en entretiens individuels (en tout cas en-dessous du CM) cela nous a conduit à une limitation du nombre des enfants observés sur chaque tâche (pour un âge donné). C'est la cohérence d'ensemble des résultats obtenus dans chacun des domaines qui, à notre avis, permet de juger de la validité de ces résultats. Nous n'avons en particulier pas développé une analyse statistique fine ; de plus nous ne voyons pas quelles hypothèses initiales permettraient à l'étape actuelle de construire un modèle théorique adéquat, donnant un sens à une telle analyse statistique, vu les concepts en jeu. La régularité de nos résultats (au sens d'une répétabilité suffisante) est néanmoins une question que nous considérons comme ouverte.

De plus, nous avons pratiquement toujours associé l'âge et le niveau scolaire des enfants considérés (sauf pour l'étude sur la surface, où nous avons pris des classes entières).

Or, l'âge correspond à une maturation de l'enfant sur différents plans, et à un certain temps passé à des activités "spontanées" plausibles - mais inconnues - dans les champs conceptuels considérés (constitution et manipulation de "dimensions" comme la couleur, la forme, la texture..., représentations de l'espace issues des manipulations et des déplacements..., comparaisons d'objets selon leur taille, etc.). La classe correspond à un temps d'activités scolaires "contrôlées" a priori par l'enseignement mais pour lesquelles on ne connaît pas pour autant l'investissement propre

* cf J. Rogalski "Acquisition de la bidimensionnalité..."

de l'élève. Ces activités d'enseignement reprennent pour certaines d'entre elles des notions correspondant également à une acquisition "spontanée".

Notre choix identifie donc ces deux "temps" et cela comporte a priori une contre partie : l'accentuation des évolutions, par la sélection effectuée (de fait) à partir du CE par les passages d'une classe à l'autre. Cela nous conduit à une remarque complémentaire ; nous n'avons pas pris en compte l'origine sociale des enfants. Cependant dans la mesure où nous avons très peu joué sur l'usage des représentations (pas plus que celui des verbalisations) mais au contraire centré nos questions sur la production d'actions, nous ne pensons pas avoir biaisé nos analyses par cette non-prise en considération. Néanmoins, l'étude des différents chemins cognitifs à travers les invariants d'ensemble que nous avons dégagés affinerait l'analyse des acquisitions dans les champs conceptuels concernés.

Rappelons d'autre part que nous avons distingué à plusieurs reprises la disponibilité et la mobilisation possible d'une notion ; nous avons supposé que c'était la disponibilité qui attestait le mieux l'appropriation. Nos résultats vont effectivement dans ce sens. Cependant, et c'est pourquoi il y a encore question ouverte, nous n'avons pas posé à un même sujet une variété telle de questions sur une même notion particulière que cela constitue une justification expérimentale de la différence et de la hiérarchie des caractères "disponible" et "mobilisable" d'une notion ou opération cognitive.

Par ailleurs, nous avons utilisé surtout des situations "ouvertes" dans lesquelles l'enfant n'avait pas de contrôle sur ses productions (autre que les opérations mêmes qu'il avait effectué) : nous considérons, en effet, qu'une des caractéristiques de l'appropriation était la possibilité pour le sujet d'organiser lui-même la situation proposée et de faire des hypothèses sur son traitement. Cela reste néanmoins une prise de position théorique qui peut se discuter.

Enfin, parmi les autres questions ouvertes, nous pensons que les systèmes de représentation (et en particulier le système "additif" et le système "multiplicatif") peuvent coexister. Selon la nature des tâches (domaine de référence, dimensions utilisées, valeurs numériques éventuellement manipulées, nature des objets, etc.,) et leur complexité cognitive, l'enfant, l'adolescent ou l'adulte vont tirer leurs règles d'action de l'un ou l'autre de ces systèmes, voire partiellement - si ce n'est contradictoirement - de l'un et de l'autre. Ainsi, par exemple, des adultes "cultivés" peuvent penser que l'effet d'une homothétie de rapport 2 sur un volume se traduit par la multiplication de la mesure initiale par un nombre qui peut être 4 ou un peu plus grand - réponse non linéaire - sans arriver pour autant à la réponse tridimensionnelle appropriée, ici 8. Cette question rejoint celle de l'existence des registres de fonctionnement étudiée par Vermersch (Vermersch, 1976).

6. Nonobstant ces questions ouvertes, on peut avancer, à partir des résultats obtenus, un certain nombre de conséquences ou d'hypothèses didactiques.

Ce qui ressort de l'analyse de l'enseignement est que celui-ci s'est surtout adapté aux acquisitions cognitives générales, non spécifiquement scolaires, des élèves plus qu'il n'est intervenu pour les construire - d'où, a posteriori, la pertinence pour la didactique d'une étude précise des acquisitions des enfants dans les domaines concernés.

Or le temps long des acquisitions sur la bidimensionalité, à partir de l'unidimensionalité, attesté par l'ensemble des résultats, conduit à postuler que l'enseignement devrait intervenir ; mais à notre sens seule une intervention organisée sur une longue durée pourrait produire des effets (modifier la rapidité et/ou l'ordre des acquisitions). Cependant nous n'avons pu nous livrer qu'à des hypothèses, appuyées sur nos conceptions quant au développement des connaissances et sur les travaux développés en didactique des mathématiques.

Les hypothèses obtenues sur l'évolution des acquisitions, et l'analyse de l'intervention de l'enseignement actuel conduisent à mettre en avant quelques points clés;

Tout d'abord, le rôle producteur que joue le plan dans la structuration bidimensionnelle doit pouvoir être exploité; il conviendrait de s'appuyer pour cela sur la connaissance des acquis cognitifs de l'enfant pour pouvoir faire fonctionner en temps opportun la dialectique "ancien/nouveau". L'objectif serait alors de construire des situations qui exigent la constitution de nouvelles connaissances ou d'objets nouveaux, dans le domaine du produit, tout en s'appuyant sur les propriétés des relations spatiales que les enfants peuvent déjà utiliser.

Ensuite, l'utilisation d'un "jeu de cadres" entre le domaine spatial, la combinatoire ensembliste et le domaine arithmétique devrait contribuer à la construction de conceptions plus opératoires dans le champ des structures multiplicatives. Un objectif décisif serait de donner un statut fonctionnel spécifique au produit, dépassant son point de départ additif et ouvrant en particulier sur une autre représentation qu'algorithmique des formules multiplicatives des mesures spatiales.

Par ailleurs, dans le domaine de l'espace la mathématisation doit être un outil de connaissance: une utilisation fonctionnelle des repères cartésiens (à partir de ceux, simples, constitués par des quadrillages finis) lors de changements de point de vue apparait tout à fait nécessaire, si l'on se réfère aux obstacles non surmontés alors que la bidimensionalité commence à être fonctionnelle. La constitution de meilleures représentations des changements de point de vue dans l'espace, qui pourrait ainsi être construite, permettrait peut-être ultérieurement aux étudiants de buter moins contre l'obstacle des changements de repère en mécanique.

De façon générale, nous avons signalé dans l'analyse de l'enseignement la coupure existant entre des champs conceptuels pourtant en interaction. A contrario, il nous paraitrait important de rétablir la dialectique entre les différentes notions des différents champs conceptuels concernés par la bidimensionalité.

Nous avons déjà souligné à plusieurs reprises la nécessité de faire intervenir le domaine numérique (que nous n'avons pas étudié à cette étape de notre travail, mais qui est le point essentiel dans l'enseignement) en rapport avec les problèmes de dimensionalité des repérages ou de la combinatoire.

D'autres domaines, peu ou pas pris en charge par l'enseignement élémentaire ou même obligatoire, sont également en relation avec les acquisitions sur la bidimensionalité. Nous avons déjà rappelé les rapports avec les "équations aux dimensions" de la physique. La"combinatoire des possibles", dans le champ conceptuel des probabilités, est également en rapport étroit avec le produit ensembliste; le plus souvent il intervient d'ailleurs des produits de type ExE dont nous avons souligné la spécificité..

A un autre niveau, enfin, le travail de constitution d'hypothèses fait également partie de la formation scientifique, un des objectifs généraux de l'enseignement. Les analyses des épreuves de correspondances entre produits ont indiqué la multiplicité des problèmes qui interviennent dans cet autre domaine de mise en oeuvre de la bidimensionalité (pour nous limiter au premier niveau qualitatif de difficulté).

Il est évident que ces remarques ouvrent la perspective de tout un champ de recherches aussi bien sur les appropriations cognitives des enfants et des adolescents que sur l'élaboration et l'organisation de situations didactiques,concernant non seulement la didactique des mathématiques mais aussi la didactique de la physique, dans une orientation de travail interdisciplinaire.