

i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

QUELQUES CONCEPTS, QUELQUES GÉNÉRALITES ET QUELQUES RÉFÉRENCES

(collectif)

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
5

La didactique des mathématiques pour nous, c'est l'étude du rapport enseignement-apprentissage des concepts mathématiques, notre objectif final étant une amélioration de l'enseignement.

Apprentissage, ici, est à situer du côté de l'élève (du sujet), au sens de acquisition. Avoir acquis un concept, c'est savoir le faire fonctionner.

Un certain nombre de résultats sur ce rapport ont été établis par des études sur le primaire et le premier cycle, depuis une quinzaine d'années (cf. G. Brousseau, R. Douady, G. Vergnaud...). D'ailleurs, c'est pour les enfants de ces niveaux que les résultats de Piaget permettaient d'avoir une idée des mécanismes de l'acquisition au niveau du sujet - avec la restriction que jamais Piaget ne s'est préoccupé de l'enseignement des notions dont il étudiait l'acquisition.

Il n'est pas possible d'exposer tous les résultats de Piaget, ne serait-ce que pour une question de temps. Très schématiquement nous en avons retenu un certain nombre d'hypothèses, éventuellement même en les élargissant. Ainsi prenons-nous à notre compte l'idée de Piaget que "apprendre résulte d'agir" (cf. "l'action est source et critère de savoir"). Mais nous assimilons, le cas échéant, action et résolution de problèmes (alors qu'à l'origine il s'agissait d'actions effectives sur des objets matériels); et nous adoptons à tous les ~~les~~ niveaux, même après 14 ans, le même postulat. Nous retenons l'hypothèse générale que le développement des connaissances "ne procède ni de la seule expérience des sujets ni d'une programmation innée préformée dans le sujet" mais bien de constructions successives dont les mécanismes sont les régulations (ou compensations). Ces régulations aboutissent à des rééquilibrations améliorant les structures antérieures déstabilisées par des déséquilibres (dus, par exemple, à des contradictions, des erreurs ...) (cf. R. Douady pour l'utilisation opératoire de ces hypothèses). Ceci dit, les études que nous jugeons efficaces doivent se placer au niveau même du concept visé (ou du champ conceptuel correspondant), une trop grande généralité ne permettant pas, à notre avis,

de faire des projets d'enseignement précis.

Cela étant, nos objectifs vont être, pour un grand nombre de concepts en tout cas, de concevoir des problèmes précisément aptes à faire construire les notions que nous entendons enseigner (en une sorte de genèse artificielle) - ingénierie didactique - et de vérifier, a posteriori, après expérimentation en milieu scolaire, les raisons de l'apparition (ou non apparition) des comportements prévus (et d'autres non prévus). Lorsqu'il s'agit de l'introduction d'un nouveau concept ou de l'élargissement du domaine où on veut faire fonctionner un concept déjà introduit, on cherche à élaborer un problème dont la résolution passe par l'utilisation partielle, en tant qu'outil implicite, de certains aspects du concept visé. Ce concept, nous cherchons à le solliciter simultanément dans plusieurs de ses cadres d'intervention, par rapport auxquels les acquis des élèves sont différents.

Cependant, nous estimons que l'action seule est insuffisante (cf. échecs pédagogie Freinet) ; il est indispensable d'identifier l'objet construit, avec ses propriétés générales et non particulières à l'action initiale (formulation et validation) ; il est non moins indispensable de placer l'objet dans le savoir mathématique et c'est au maître, en fin de compte, que revient l'institutionnalisation du concept (introduit dans un problème), c'est à dire le fait de présenter le concept en tant que tel, avec un certain nombre de ses propriétés, son nom, sa place par rapport au savoir antérieur, et ce qu'il y a à retenir ; une phase de renforcement plus ou moins longue reste toujours nécessaire.

Pour déterminer, cela étant, les bonnes situations problèmes, nous commençons par une étude extrêmement précise du concept visé.

.Etude épistémologique : pour caractériser la place du concept en mathématique, en particulier les cadres où il intervient, les problèmes qu'il

a permis et permet de résoudre, les obstacles qui ont accompagné son émergence, sa formulation actuelle ... Ceci permet aussi de cerner le champ conceptuel auquel on rattachera le concept.

.Etude globale de l'enseignement habituel (et des manuels en particulier):
pour caractériser la distance entre l'objet d'enseignement et l'objet de savoir (cf. transposition didactique) - et peut-être la minimiser -, pour caractériser aussi les implicites éventuels attachés à la manière d'enseigner et en particulier les différents registres de formulation proposés aux élèves.

.Etude des conduites des élèves dans la mise en fonctionnement du concept:
pour repérer les représentations spontanées ou non, les acquis antérieurs, les erreurs - leur tenacité, leur lien éventuel avec l'enseignement reçu-, les procédures (stratégies) ... Ceci permet de fixer, compte tenu des résultats épistémologiques, le champ conceptuel que l'on va choisir pour faire travailler les élèves.

On conçoit que ces études doivent être menées simultanément, qu'elles prennent un certain temps, et qu'elles ne soient pas nécessairement terminées au moment des premières expérimentations, ne serait-ce qu'à cause de la variabilité des acquis prérequis par exemple.

Ensuite, nous déduisons de ces études nos choix didactiques c'est à dire ce qui, d'après nous, est susceptible dans l'enseignement d'engendrer les comportements que nous voulons susciter (variables didactiques, domaine de ces variables, suivant le concept) puis nous cherchons les problèmes adéquats du type évoqué plus haut; de plus pour construire ces problèmes (ingénierie) nous essayons d'articuler les caractères spécifiques des concepts mis en évidence auparavant et les résultats plus généraux d'ingénierie didactique acquis au niveau de l'enseignement obligatoire:

.La nécessité que le problème posé soit une "vraie" question pour les élèves (ce qui amène à ne pas systématiquement décomposer le problème en questions simples) ou, en d'autres termes, la gestion de la complexité (ni

trop ni trop peu).

.La nécessité de s'appuyer sur de l'acquis, tout en prenant en compte les risques d'obsolescence, en ouvrant néanmoins suffisamment le problème pour qu'il ne soit pas soluble entièrement avec de "l'ancien".

.La reconnaissance du rôle du travail collectif, dans la mesure où l'appropriation collective peut précéder l'appropriation individuelle, et où les conflits socio-cognitifs peuvent accélérer/certaines acquisitions.

.L'importance considérable du rôle du maître, avec la gestion des phases collectives où toutes les idées émises doivent être plus ou moins prises en compte, le fait de savoir déceler les défaillances, les carences... pour renforcer ou faire des rappels au bon moment, la nécessité d'adapter les problèmes proposés aux acquis prérequis de sa classe, et, sur un autre plan, la nécessité d'explicitier/au maximum le contrat didactique (par essence implicite...) entre les élèves et lui (toutes les attentes non dites).

Cela étant nous ignorons encore bien des choses comme:

.Le rôle du temps (dont nous savons seulement qu'il est fondamental), en distinguant les effets de durée (liés à une réorganisation permise par des acquisitions adjacentes ou spontanés), et les problèmes liés au moment où doivent intervenir telles ou telles activités (décisions du maître).

.Les diversités entre élèves, non seulement comme récepteurs mais comme acteurs (rôle de la mémoire, de la rapidité, des leaders, origine socio-culturelle...) et le rôle de ces diversités.

.Les conditions de classe et leur rôle.

Puis les séquences correspondant à notre projet étant élaborées avec les prévisions, en terme de comportements, qui s'y attachent, ce n'est que par plusieurs expérimentations et retours en arrière que nous pouvons tester la validité de l'ensemble de notre démarche. Le cas échéant, nous la proposons alors à des enseignants autres que ceux qui ont participé avec leur classe à nos expériences, avec tous les nouveaux problèmes posés par la transmission de telles démarches.

Didactique des mathématiques

Il n'existe pas vraiment d'acception tout à fait universelle de ce terme. (Un^{des} articles les plus complets à notre connaissance sur le sujet est l'article de G. Brousseau intitulé Petit panorama de la didactique des mathématiques (2^{me} école été de didactique).

Entre les conceptions plus ou moins behavioristes de certains (étude des comportements observés sans recours à des hypothèses sur le fonctionnement cognitif interne du sujet) et la définition opératoire que nous avons donné (étude du rapport enseignement-apprentissage), on peut trouver toute une gamme de définitions.

Dans un article de la revue Recherches en didactique des mathématiques (1981 Vol.2.2) G. Vergnaud précise justement quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.

Ingénierie didactique

Ce terme désigne l'ensemble des travaux aboutissant à la création de séquences d'enseignement et leur mise en place.

Un cahier de l'école d'été n°2 y est consacré (de Y. Chevallard).

Se reporter au cahier n°1.

champ conceptuel

Nous utilisons ce terme correspondant à la définition donnée par Vergnaud (Vergnaud, 1981): "un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion".

Se reporter au cahier n°2.

Piaget

Nous ne retenons qu'une partie de l'apport de Piaget à la connaissance des mécanismes du développement cognitif de l'enfant, et en particulier, la théorie des déséquilibres-rééquilibrations ^{qui} est exposée dans son ouvrage de 1975 l'équilibration des structures cognitives (PUF).

Pour une description détaillée se reporter au cahier n°2. Pour un résumé des théories de Piaget ^{articulés à la didactique et à l'épistémologie} on peut se reporter à la contribution de M. Brossard dans le cahier de l'IREM de Bordeaux n°18 pp 83-152.

Psychologie sociale

Elle a pour objectif d'articuler les approches individuelles du développement cognitif et les approches collectives.

Nous nous basons sur les deux ouvrages de référence suivants:

- W. DOISE G. MUGNY Le développement social de l'intelligence (Interéditions)
A. N. PERRET-CLERMONT La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale (Peter Lang).

Conflit socio-cognitif

Situation de divergence cognitive entre deux enfants.

Ce conflit qui fait coexister dans une même situation et en même temps deux centrations différentes peut donner ^{lieu} par sa résolution, à une restructuration qui n'aurait pas eu lieu aussi vite en son absence.

Ainsi, si on met en présence 2 enfants dont l'un "a" la conservation des liquides et l'autre pas encore (mais "n'en est pas très loin"), le simple problème de partager du jus de fruit également avec des verres de section différente permet à la fois au non conservant de le devenir (durablement) et au conservant de renforcer sa conviction et ses arguments (cf. Perret-Clermont, Doise et Mugny).

Situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisati

C'est G. Brousseau qui a mis en évidence ces étapes dans les rapports enseignement-apprentissage dont il pense que la ~~suite~~ complète est une condition suffisante d'une acquisition.

Dans l'article Problèmes de didactique des décimaux (in Recherches en didactique des mathématiques 1981 Vol.2.1) il présente non seulement tous ces types de situation mais les articule à l'introduction d'un concept précis.

La dialectique de la validation a été particulièrement étudiée par N. Balacheff (cf. l'article Preuve et démonstration dans Recherches en didactique des mathématiques 1982 Vol. 3.3).

D'autre part, dans ses travaux, C. Laborde a abordé plus généralement les problèmes de formulation (cf. Thèse d'état Langue naturelle et écriture symbolique).

Situations de communication

Dans l'article Une activité de communication en géométrie (in Séminaire didactique et pédagogie des mathématiques Grenoble 80-81) C. Laborde et M. Guillerault exposent particulièrement clairement ce que sont ces situations de communication et leurs avantages et leurs inconvénients pour la recherche.

Situations d'interaction

Situations dans lesquelles les enfants (resp. élèves) ont pour tâche commune la résolution d'un problème.

Ces situations peuvent s'avérer propices à une observation didactique dans la mesure où les interlocuteurs doivent se mettre d'accord, ce qui donne lieu à des discussions permettant de repérer les arguments des uns et des autres. On peut obtenir des effets analogues grâce aux situations de communication avec élaboration de message commun à deux élèves.

L'école de Grenoble exploite systématiquement ce genre de situations à l'heure actuelle.

situation didactique.

Il y a une certaine analogie entre le statut d'une situation-problème pour la psychologie cognitive et une situation didactique pour la didactique. Dans le premier cas le sujet, un enfant quand on étudie le développement, est confronté à une situation nouvelle, qui "fait problème", et doit apporter des réponses à ce problème: le problème méthodologique dans la construction d'une telle situation est l'adéquation de la situation problème au contenu cognitif étudié; dans le second cas, l'élève ou la classe est confronté à une situation dans laquelle il rencontre des notions nouvelles, le problème méthodologique est de construire une situation de façon à contrôler la transformation des connaissances que cette situation va produire chez les élèves. Une différence importante apparaît dans la place occupée dans chacun des cas par le savoir de l'enfant/élève: la situation-problème ne vise pas à une transformation du savoir (mais à une certaine mise en oeuvre), alors que la situation didactique comprend l'intentionnalité explicite de modification du savoir. Cette distinction ne signifie néanmoins pas indépendance: une situation problème produit en général un savoir nouveau (qui peut être limité et très "local"), et une situation didactique suppose la mise en oeuvre de savoirs déjà présents (des prérequis implicites ou explicites).

Parmi les situations didactiques Brousseau (Brousseau, 1981) distingue des situations d'action, des situations de formulation et des situations de validation et d'institutionnalisation, il précise de plus à propos d'un champ particulier, celui des décimaux, les conditions qui confèrent à une situation-problème des propriétés didactiques visées.

Dialectique Outil-objet

Ce concept introduit par R. Douady, désigne un certain fonctionnement des concepts mathématiques intervenant dans une situation problématique. Se reporter au cahier n° 3.

Transposition didactique

Ce concept, emprunté à Verret, caractérise le décalage entre le fonctionnement savant (du savoir) et son fonctionnement dans l'enseignement.

L'article Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance (Y. Chevallard, M.A. Johsua) (in recherches en didactique des mathématiques 1982 Vol.3.2) illustre particulièrement clairement ce décalage par ailleurs décrit théoriquement par Chevallard dans un cahier de la première école d'été de didactique des mathématiques.

Contrat didactique

Le contrat didactique est, schématiquement, l'ensemble des "règles de jeu" implicites qui régissent la réponse de l'élève aux demandes du maître (cf Brousseau 1979).

Beaucoup d'exercices témoignent de cet implicite. Ainsi, en CE₁, on demande aux élèves de former le plus petit nombre possible avec les chiffres 2, 4, 6, sans préciser que les trois chiffres doivent être utilisés. Un enfant qui fournit 2 comme solution est pénalisé sans nécessairement comprendre la cause de cet échec si le contrat n'est toujours pas précisé.

La prise en compte du poids de ce contrat sur les élèves permet d'expliquer certains échecs en mathématiques (cf. le cas Gaël de Brousseau).

Un exemple, emprunté à un tout autre domaine que la didactique des mathématiques, peut illustrer cette notion: un exercice de grammaire de 4^o comporte un court extrait d'un dialogue entre Louis XIII et un officier; deux questions le suivent: l'une sur la valeur temporelle du temps utilisé, l'autre demande de rédiger un petit texte analogue entre un ministre et son chauffeur par exemple. Analyse de la deuxième question par un adulte n'ayant sous les yeux que la page de l'exercice, et n'ayant pas regardé la nature du manuel: "l'officier cherche à soutirer au roi des informations, en lui demandant innocemment l'emploi du temps que lui prévoit le roi, tu dois écrire un texte où le chauffeur tente la même chose"; surprise de l'élève: l'objectif du manuel, confirmé par la correction qui suivra en classe, est l'usage du futur à valeur d'ordre.

représentations, conceptions

Ces termes renvoient au sujet: on parlera ainsi des conceptions des enfants sur la continuité, de leurs représentations de l'ensemble des nombres. Le terme de "conceptions" est plus vague, et ne se réfère pas à un ensemble conceptuel plus large sur l'étude de la connaissance. Le terme de "représentations" s'intègre de façon plus précise dans un cadre théorique, où sont mises en relation les notions de "champ conceptuel", "systèmes de représentations", "signifié/signifiant/référent", "règles d'action", "théorèmes en acte", "invariants opératoires". (Vergnaud) ou d'autres ensembles de notions entrant dans des cadres théoriques sensiblement différents. On peut ainsi citer le résumé d'une intervention aux journées d'étude de la société française de psychologie sur le thème des représentations:

1) acceptions du terme de "représentation": la représentation comme processus et comme produit de processus; la nature du produit de ces processus (objet matériel ou produit cognitif); la représentation mentale (disponibilité et actualisation des entités cognitives).

2) propriétés des systèmes de représentation: codage de l'information; abstraction; conservation des relations; processus directionnels; référence spécifique à la notion de figuration.

3) fonctions des systèmes de représentations: conservation de l'information; modalités d'utilisation de l'information; préparation à l'action; notions de schématisation et de systématisation." (M.Denis).

conduites, comportements

Comme les termes de représentation et de conception, les mots conduites et comportements, à côté d'une acception non spécifique qui renvoie à la manière dont un sujet agit, verbalise, transforme une situation, peuvent s'intégrer dans des cadres théoriques différents. De manière générale le terme de comportement a une connotation plus restrictive que conduite. Dans le cadre du behaviorisme le comportement s'identifie aux éléments physiquement observables, à l'exclusion de toute intervention d'une interprétation qui ferait intervenir des concepts dits "hypothétiques": il devient alors évidemment fort difficile de faire entrer dans le "comportement" la part de signification que comporte le langage (par exemple). Les références à la science comportementale en parlant de la psychologie (dont la psychologie cognitive) sont, dans la pratique, exclusives de l'intégration dans la théorie de notions comme celles de systèmes de représentation..

variable didactique

La notion de variable didactique intervient lors de l'étude des situations didactiques: il s'agit d'un élément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu dans la situation didactique. Par exemple le temps laissé aux élèves pour résoudre un problème peut être une variable didactique si le fait de le restreindre rend inefficace la mise en oeuvre de procédures relevant d'une conception que l'enseignant veut justement modifier. Le changement de "niche informationnelle" dans le domaine numérique est également une modification de la variable didactique que constitue- pour certaines situations- l'ordre de grandeur numérique. Le sexe des élèves ou leur origine socio-professionnelle n'est en revanche pas une variable didactique.

Quelques publications et manifestations didactiques.

Cahiers de l'IREM de Bordeaux.

Publications didactiques de l'IREM de Strasbourg.

DEA, Thèses de troisième cycle de Bordeaux, Marseille Strasbourg, M.S.H., Paris

Séminaire de recherche didactique et pédagogique en mathématique (Grenoble)

Revue : N , α , ...

Recherches en didactique des mathématiques.

Educational mathematical studies.

Séminaire national de didactique des mathématiques: 4 fois par an samedi
et dimanche matin à Ulm.

Ecoles d'été: tous les deux ans , début juillet.