i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

DES ANALYSTES AVANT L'ANALYSE

PAR M.C BOUR

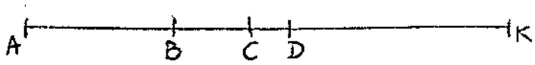
cahier de didactique des mathematiques

numéro 10

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)

Né à Gand, il fut professeur jésuite à Rome et à Prague, puis devint précepteur à la cour de Philippe IV d'Espagne. Son "Opus geometricum" ne fut pas publié avant 1647 à Anvers.

Il fut l'un des premiers à étudier les quadratures en utilisant plus ou moins implicitement des infinitésimaux : à la différence de la méthode d'exhaustion des Grecs, il inscrit dans le cercle un polygone ayant un nombre infini de côtés et des rectangles infiniment minces pour calculer l'aire délimitée par la courbe $xy = 1$. Sa vision des éléments infinitésimaux n'est pas la vision statique de Cavalièri ("indivisibles"), mais il raisonne plutôt en termes de subdivision poursuivie jusqu'à l'infini, ce qui le conduira à s'approcher de la notion de limite pour les progressions géométriques.



Il subdivise un segment AK par les points B, C, D ... tels que AB, BC, etc ... soient en progression géométrique et il définit "le terminus d'une progression" comme la fin de la série, que la progression n'atteint pas, même si on le poursuit indéfiniment, mais dont elle peut s'approcher de plus près que par tout intervalle donné. Il perd un peu de la force du concept de limite cependant, en remarquant que AK est la grandeur de toute la progression continue jusqu'à l'infini, c'est-à-dire que AK n'est pas considéré comme la somme parce que K est la limite, mais dire que AK est la somme est pour lui équivalent à dire que K est la limite.

Il est néanmoins le premier à affirmer clairement qu'une série infinie peut avoir une somme et à voir que cela permet de résoudre le paradoxe de Zénon sur Achille et la tortue (en fonction du rapport de leurs vitesses, il détermine le point où Achille rattrapera la tortue). La question de savoir comment Achille peut rattraper la tortue n'est toujours pas résolue, car il fait plus appel à l'expérience qu'au raisonnement pour résoudre le paradoxe et cette manière de voir restera l'obstacle principal au développement du calcul infintésimal en termes de limites.

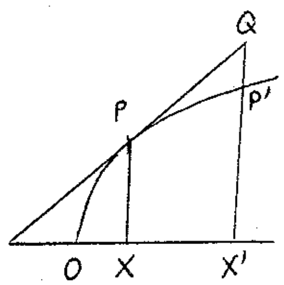
... Il a sans aucun doute exercé une grande influence sur les mathématiciens de son temps, bien que sa réputation ait quelque peu souffert de ce qu'il ait toujours affirmé avoir réalisé la quadrature du cercle.

Fermat (1601-1665)

Carrière de magistrat à Toulouse et Castres. Sa célébrité, de son vivant, est restreinte aux milieux scientifiques. Il a beaucoup étudié les Grecs qui lui ont inspiré sa méthode " De maximis et minimis" (Pappus). Il n'a jamais été un mathématicien de métier, et ses essais sont restés manuscrits de son vivant. Dans sa "Méthode des recherches de "maximis et minimis " il apparaît comme un précurseur du calcul différentiel.

Principe. Dans l'égalité $A = x(a - x)$, si on change x en $x + E$ on obtient $A' = (x + E)(a - x - E)$ et il reprend le résultat de Pappus suivant lequel, pour un problème qui a, en général, deux solutions, il y en a une seule pour l'extremum. On développe suivant E l'équation $A = A'$, puis on remplace E par O pour obtenir $x = \frac{a}{2}$. L'idée fondamentale est la suivante : on modifie "x" puis on annule sa variation. En un sens, c'est une anticipation du calcul différentiel : il utilise "E" au lieu de "h" ou "dx". Mais le raisonnement est loin d'être clair, x et x + E sont d'abord distincts et à la fin, ils coïncident. En tout cas, la notion de limite n'apparaît pas.

Dans la recherche des tangentes, c'est le même principe : on part d'une inégalité qui devient ensuite une égalité.



Parabole $y^2 = kx$ P(x, y) P'(x', y')

TX = t $\quad \frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'} \quad$ X'P' $\quad$ X'Q

$$\frac{XP}{X'Q} = \frac{TX}{TX'}$$

$$TX' = t + E \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y^2}{y'^2} \geqslant \frac{XP^2}{X'Q^2} = \frac{TX^2}{TX'^2} = \frac{t^2}{(t + x' - x)^2}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{x}{x + E} \geqslant \frac{t^2}{(t + E)^2} \quad , \quad t \leqslant 2x + \frac{Ex}{t}$$

Pour E = O , on obtient t = 2x (sous-tangente)

Gregory et Barrow utiliseront cette méthode de Fermat pour construire les tangentes, ce qui influencera plus tard Newton.

Pour la quadrature de la parabole, Fermat généralise la méthode de Grégoire de Saint-Vincent mais il ne voit pas le lien avec le problème des tangentes. Plus que d'un nouveau type d'analyse, il s'agit de la solution de problèmes géométriques particuliers, comme ce sera d'ailleurs le cas pour tous les précurseurs de Newton et Leibniz.

Wallis John (1616-1703)

Le plus influent, peut-être, des prédécesseurs de Newton, il entre à Cambridge en 1632 et dans les ordres en 1640, mais il consacre le plus clair de son temps aux mathématiques. Il est élu professeur de géométrie à Oxford en 1649, publie son "Arithmetica Infinitorum" en 1655, traité où il tente "d'arithmétiser" les indivisibles de Cavaliéri. D'une manière générale, il tente d'abandonner les considérations géométriques, mais sans trop se préoccuper des questions de rigueur. Il utilise le premier la notation "∞" et "$\frac{1}{\infty} = 0$". Par exemple, pour calculer l'aire d'un triangle, il somme des aires de parallélogrammes en progression arithmétique : l'aire est le produit du "dernier" terme par la moitié du nombre de termes $\frac{1}{\infty} \cdot AB \cdot \frac{\infty}{2} = \frac{AB}{2}$

Plusieurs quadratures sont réalisées de cette manière ; il calcule l'aire d'un quart de cercle $a_{1/2} = \int_2^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ à partir des valeurs connues $\int_2^1 (1 - x^2)^n dx$ pour n entier en s'appuyant sur une espèce de principe de continuité et d'interpolation : à partir des valeurs de $\dfrac{1}{\int_0^1 (1 - x^\alpha)^\beta dx}$, α, β entiers il donne la valeur de $a_{1/2}$.

C'est le résultat de Wallis qui conduira plus tard (1664) Newton à son théorème du binôme.

<u>Mercator Nicolas</u> (1620-1687)

Né au Danemark mais il vécut à Londres très longtemps. Mort à Paris en 1687. Il publie en 1668 ses "Logarithmotechnia" où il considère les segments d'hyperbole comme des logarithmes "naturels" et qu'il calcule par intégration de la série $\frac{1}{1+x}$.

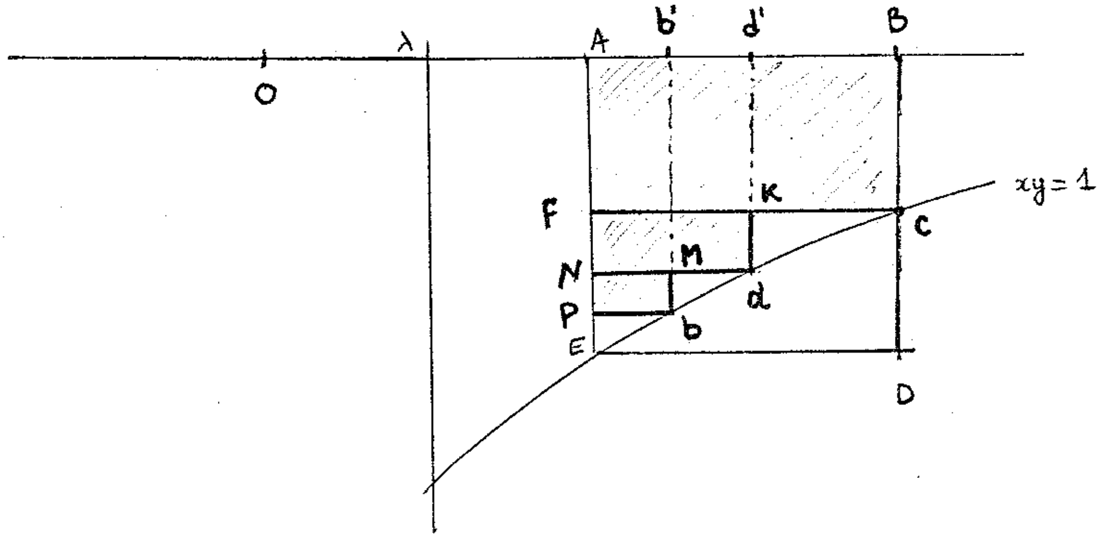
En fait, aux notations près, il écrit

$$\ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 \ldots\ldots)dt = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

(Wallis démontre ce résultat à partir des quadratures).

Brouncker William (1620-1684)

Premier président de la "Royal Society" il publie en 1668 un article intitulé "La quadrature de l'hyperbole par une série infinie de nombres rationnels, ainsi que sa démonstration, par l'éminent mathématicien Lord Viscount Brouncker".



OA = AE = AB = 1

L'aire sous-tendue par l'hyperbole est comprise entre la somme des aires des parallélogrammes:

ABCF + FKdN + MNPb + ...

celle du parallélogramme ABDE diminué de la somme des aires des triangles CED + CdE + dbE .... .

Il divise AB en 2^n intervalles de longueur $\frac{AB}{2^n}$, d' est le milieu de AB, b' le milieu de Ad' etc ... L'aire du premier rectangle est $\frac{1}{1.2}$, celle du second $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{3.4}$, ...

Brouncker obtient ainsi un minorant de l'aire du domaine (ABCE) sous-tendu par l'hyperbole sous la forme

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots$$

De la même manière, il majore par

$$1 - \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \ldots\right.$$

Il obtient ainsi les valeurs approchées de ln2.

Il effectue aussi divers calculs à l'aide des fractions continues $(\frac{4}{\pi})$.

Hobbes Thomas (1588-1679)

Bien qu'il soit plus philosophe que mathématicien, on peut lui accorder une certaine importance car il a influencé les fondateurs du calcul infinitésimal.

Il rejette l'algèbre et les symboles de Wallis comme "la peste", ce qui est très significatif de la tendance géométrique du 17e siècle et des conceptions de cette époque. Il veut fonder toute sa philosophie sur le mouvement, mais il ne comprend pas le rapport entre nombre et quantité spatiale, et ne voit pas que la vitesse instantanée est une notion numérique, d'où son échec. Mais il a cherché à donner aux mathématiques une base plus intuitive que logique et on retrouvera, dans les "fluxions" de Newton sa "génération des grandeurs".

Barrow Isaac (1630-1677)

Comme Wallis, il est entré dans les ordres mais a enseigné les mathématiques. En 1662 il est professeur de géométrie à Londres et en 1664 à Cambridge, après y avoir enseigné le Grec de 1660 à 1663. C'est là qu'il aura Newton comme élève. Il traduit les "Eléments d'Euclide" et publie en 1669 les "Lectiones Geometricae" (méthodes pour trouver des tangentes, ...) Ensuite il démissionne de sa chaire pour la laisser à Newton et se consacrer à la théologie.

Barrow détestait le formalisme algébrique (celui de Wallis, notamment) et il préféra revenir à la notion euclidienne : le nombre n'a aucune existence propre indépendante des quantités géométriques. Les nombres "sourds" (irrationnels) sont bannis de l'arithmétique pour rejoindre l'algèbre, plus proche de la logique que des mathématiques. Ses conceptions ont certainement beaucoup influencé Newton, qui évitera aussi longtemps que possible, la notion arithmétique de limite.

Gregory James (1638-1675)

Né a Aberdeen (Ecosse) où il fait ses études avant de devenir professeur de Mathématiques à l'Université de St Andrews, puis à Edimbourg (1674), après avoir séjourné plusieurs années en Italie (1664-1668) auprès de Menzoli et Anzeli, successeurs de Toricelli . De toute évidence, il était au courant des Mathématiques des différents pays d'Europe.

Il publie à Padoue en 1667 "Tera circuli et hyperbolae quadrature" où il établit des résultats concernant les aires du cercle, et de l'hyperbole.

Dans ses "Exercitationes Geometricae", il donne des tables de valeurs approchées des intégrales de la tangente et du cosinus en utilisant la formule de Simpson. Vers 1670, Gregory publie des méthodes d'interpolation par les différences finies, des formules d'intégration numérique, des résolutions approchées d'équations numériques par itération (à propos de problèmes d'annuités, il s'intéresse à l'équation $b^n c + a^{n+1} = b^n a$ où a est l'inconnue et remarque que pour $a_o = c$, $a_i = c + \frac{a_i n+1}{n}$, on obtient une suite qui converge vers la plus petite racine positive de l'équation alors que pour $a_o = b$, elle converge vers la plus grande). Il développe en série les fonctions tgx et Arctgx ; il est le premier à utiliser le terme de convergence pour les séries infinies et voit le "passage à la limite" comme une opération arithmétique propre à définir de nouveaux nombres. Contemporain de Newton, il s'intéresse aux mêmes problèmes et meurt peu avant la parution de "De quadrature

Newton Isaac (1642-1727)

Né l'année de la mort de Galilée. Il entre à Trinity College, Cambridge, en 1661 et s'intéresse d'abord à la chimie. Mais il étudie les travaux de Kepler, Viète, Wallis, Fermat, Descartes .... A la fin de 1664, il semble dominer toutes les connaissances mathématiques de son temps et il est prêt à apporter sa propre contribution.

En 1665, il commence à utiliser les séries infinies pour l'analyse des propriétés infinitésimales des courbes (tangentes, courbure) ; en même temps que Gregory faisait cela en Italie, mais indépendamment. Il commence aussi à cette époque à penser au taux de variation, ou fluxion de quantités variables, ou "fluentes" (longueurs, aires, volumes, distances, ...) A partir de ce moment là, Newton lie toujours ces deux problèmes (séries infinies et taux de variation) désignées sous le nom de "ma méthode".

. Il fait ses découvertes essentielles au cours des deux années 1666-67 où l'Université de Cambridge est fermée à cause de la peste.

. Sa conception des nombres est plutôt celle de Wallis que de Barrow. Il commence par la série du binôme.

Il examine l'aire délimitée par les courbes $(1 - x^2)^n$, n entier 0, 1, 2, 3 où le premier terme est x, le second $-\frac{0}{3}x^3$, $-\frac{1}{3}x^3$, $-\frac{2}{3}x^3$ ... Par le principe de Wallis, il donne comme second terme pour $n = \frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2x^3}$ et en procédant toujours par analogie avec les entiers il calcule les termes suivants $-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}$, $-\frac{1}{16}\cdot\frac{x^7}{7}$ ... et réalise qu'on peut obtenir cela en intégrant

$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$ .... (même interpolation) et en déterminant l'aire par intégration de cette série. Cela lui permet d'assimiler les séries infinies aux polynômes. Il remarque la même chose pour $(1 - x^2)^{-1}$ qu'on obtient aussi bien avec sa formule du binôme qu'avec la méthode des divisions ...

Les séries infinies "permettent la désignation de quelque quantité particulière par une progression régulière qui l'approche régulièrement et qui, si on la poursuit indéfiniment, doivent lui être égale". Il ne donne jamais de preuve et ne publiera pas son théorème du binôme.

A partir de là, on n'évitera plus les procédés infinis comme l'avaient fait les Grecs car ils seront considérés comme légitimes en mathématiques.

Newton n'a pas encore développé sa théorie des fluxions mais il utilise les infinitésimaux pour différencier par exemple les courbes $y^n = x^m$.

"o" petit intervalle de temps, op : variation de x, oq : variation de y , $(y + oq)^n = (n + op)^m$: on développe par le binôme, divise par o et néglige les termes qui contiennent encore "o" pour $\frac{q}{p} = \frac{m}{n} \times x^{\frac{m}{n} - 1}$

Donc cette méthode lui permet de déterminer des taux de variations, c'est-à-dire que l'idée de base est celle de <u>dérivée</u>. Mais il ne donne pas de justification claire du fait qu'il "néglige" les termes en "o" restants. Dans un premier temps, les opérations sont facilitées mais non justifiées.

En 1671, il écrit son "Methodus fluxionum et serierum infinitorum". (publié en 1736). Là les quantités variables sont considérées comme engendrées par le mouvement continu de points, lignes, plans, plutôt que des éléments infinitésimaux. Il utilise alors la notation $\dot{x}$ (fluxions) pour les dérivées et x' et y' pour les quantités dont x et y sont les fluxions. En doublant les points ou les traits, on obtient des fluxions de fluxions.

<u>1676</u> "De quadrature curvarum" où il essaie d'éviter les infinitésimaux et les quantités variables en introduisant les "premiers" et "derniers" rapports : il calcule $(x + 0)^n - x^n$ et calcule le taux d'accroissement $1 : [\, nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 0x^{n-2} + \dots \,]$ puis annule "0". Il est très proche de la notion de limite mais sa terminologie est ambigüe : y-a-t'il un rapport entre des accroissements qui se sont "évanouis" ?

<u>1687</u> "Philosophiae naturalis principia mathematica". Les résultats y sont présentés sous forme géométrique. Le " terminus " de Grégoire de St Vincent est devenu le "rapport ultime" chez Newton.

"Des quantités ou rapports de quantités, qui tendent à tout moment vers l'égalité, et avant la fin de ce temps s'approchent de plus près que toute quantité donnée, sont à la fin égales".

Il reste toujours influencé par les vues infinitésimales du 17e siècle pour parler d'indivisibles geometriques ultimes, même s'il ne parle jamais d'arcs ultimes, etc .... mais de rapports, ou de forces ultimes.

Le manque de clarté arithmétique de ses définitions conduira aux discussions du siècle suivant ("fantômes de quantités disparues" ...) et on a suggéré que le retard dans la publication de ses oeuvres était lié à son insatisfaction concernant les bases théoriques de son "calcul" : il donne au total trois interprétations de sa méthode :

- En termes d'infinitésimaux (quantités évanouissantes)
- En termes de "derniers rapports"
- En termes de fluxions

Les deux conceptions (indivisibles et cinématique) alternent en fait chez Newton, mais l'importance des résultats et du travail expérimental dominent nettement chez lui le travail de justification.

Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716)

Né à Leipzig en 1646, il entre à l'Université à 15 ans (1661) et obtient le grade de bachelier ès arts deux ans plus tard. Il suit ensuite des cours de Mathématique à Iena, écrit un traité "De Arte combinatoria " en 1666, et obtient le grade de docteur en droit à Altdorf (près de Nüremberg) la même année. Il étudie aussi bien la théologie, le droit, la philosophie que les mathématiques. Il devient conseiller à la Cour suprême de l'électorat de Mayence en 1670, et en 1672, il se rend à Paris (en mission diplomatique) où il rencontre Huyghens et lit les traités de Pascal.

En 1673, voyage à Londres où il rencontre des mathématiciens (Wren, Oldenbourg) et acquiert les "Lectiones Geometricae" de Barrow.

En 1676, il "découvre" le calcul infinitésimal ; il effectue un nouveau voyage à Londres où il rencontre Newton avant de regagner Hanovre où il a obtenu un poste de bibliothécaire à la Cour, et où il deviendra ensuite conseiller. Il y meurt en 1716.

Les séries infinies jouent, comme pour Newton, un grand rôle dans les premiers travaux de Leibniz : Huyghens lui avait posé en 1672 le problème de calculer la somme des inverses des nombres triangulaires $\frac{2}{n(n+1)}$. Il utilise $\frac{2}{n(n+1)} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ pour calculer la somme et il conclut hardiment qu'il pourrait ainsi trouver la somme de toute série infinie.

A cette époque, la considération du triangle de Pascal et du triangle harmonique fascinent Leibniz qui a toujours affirmé y avoir trouvé l'idée de base du calcul différentiel

triangle arith.

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

Triangle Harmo.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	...	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	...	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	...		
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	...			

Dans le triangle arithmétique, chaque nombre est la différence des deux situés en dessous et à gauche, dans le second, c'est la différence des deux situés en dessus et à droite.

Dans le premier, chaque nombre est la somme de tous ceux qui sont en dessus et à gauche, dans le second la somme de tous ceux qui sont en dessous et à droite. Enfin, la première ligne du triangle harmonique est la série harmonique, qui diverge, les autres lignes donnent des séries convergentes. Dans les problèmes des quadratures et des tangentes, Leibniz voit la même réciprocité.

En 1684, il publie son premier traité de calcul différentiel "Nova methodus pro maximis et minimis" où il donne surtout des régles de différenciation $d(xy) = xdy + ydx$, $d(\frac{x}{y}) = \ldots.$, obtenues en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur (sans justification), et des applications géométriques. C'est plus dans le domaine des notations (introduction du symbole "dx", de $\int$ pour l'intégrale, etc ...) que dans celui des méthodes de calcul et des résultats qu'il innove et c'est une des raisons de la célébrité que connaîtra son oeuvre. Il pressent que ses nouvelles méthodes sont applicables à toutes les fonctions, y compris les séries infinies. Il produit explicitement la notation "$y = f(x)$" , pour désigner une "correspondance réglée entre éléments quelconques appartenant à des multiplicités données" et fait une utilisation constante de séries divergentes ($1 - 1 + 1 \ldots = \frac{1}{2}$)..

D'une part, il a produit un algorithme très fécond, sans autre justification que les analogies (avec les triangles arithmétiques et harmoniques par exemple), d'autre part il l'exploite au profit de sa métaphysique : il répartit les mathématiques en deux branches : la théorie des homogènes qui s'occupe des positions (en qualité et en quantité) et la théorie des homogones qui s'occupe des transitions et des passages. Dans la première se classent l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie analytique, la théorie des probabilités. De la seconde relèvent la géométrie et l'analyse infinitésimale, c'est-à-dire la science de l'infini. Pour Leibniz, c'est le nombre et non l'étendue géométrique qui est l'objet de la science mathématique et l'extension du nombre se fait par généralisations successives du nombre entier. Quant à l'infinitésimal, c'est une fiction et non une réelle différence : "Nous concevons l'infiniment petit non comme simple et absolu 0 mais comme zéro relatif, c'est-à-dire une quantité évanouissante qui retient cependant le caractère de "qui disparaît".

Ce langage est lié à la métaphysique de Leibniz dans laquelle il prend un sens : quand la réalité sensible d'un objet disparaît, il reste son essence.

La philosophie de l'infini va devenir, après Leibniz, de plus en plus confuse tout au cours du 18e siècle et s'enliser dans des débats inutiles aux mathématiciens, alors même que les travaux et recherches de ceux-ci allaient connaître des développements considérables grâce aux innovations de Newton et Leibniz et au calcul différentiel.

18e siècle :

Le 18e siècle voit le développement d'un abondant travail formel sur les séries en même temps que la résolution de nombreux problèmes posés par la Mécanique et l'Astronomie. Le problème de la convergence n'est pas ignoré mais pas non plus pris très au sérieux par les mathématiciens. Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, y voient l'extension de l'algèbre des polynômes mais ne réalisent pas vraiment qu'ils introduisent de nouveaux problèmes en manipulant les sommes infinies. Cependant, les problèmes traités les amènent, au moins occasionnellement, à se poser quelques questions : déjà au 17e siècle, il y a des ébauches de démonstrations de convergence (Gregory a inauguré le terme en 1668, Newton affirme que les séries de puissances convergent pour les "petites valeurs", Leibniz écrit à J. Bernoulli en 1713 au sujet des séries alternées et donne le théorème des séries alternées (avec une preuve incorrecte ...), Mac Laurin donne la condition : "le terme général doit décroître continuellement" comme nécessaire pour la convergence de la série, N. Bernoulli dans ses lettres à Leibniz dit que $(1 + x)^n$ n'a pas de somme pour x négatif plus grand que 1 si n est rationnel et de dénominateur pair ; il insiste dans ses lettres à Euler sur le fait que le reste manque "$\frac{x^{\infty + 1}}{1 - x}$" dans la série géométrique et sur l'absence de "dernier terme" dans une série géométrique : d'où le fait que par exemple, on ne peut utiliser les relations entre "coefficients et racines" comme le fait Euler pour calculer la somme de la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ...)

En 1745, Euler écrit que 1 - 2 + 6 - 24 + 120 .. n'a pas de somme mais une "valeur définie". "Pas de somme", c'est-à-dire en tant que cela fait référence à l'addition effective ; "valeur définie", c'est-à-dire valeur de l'expression algébrique dont provient cette série ; il utilise en fait le développement en série entière même lorsqu'il est divergent..En fait, il écrit $1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \frac{1}{2}$ mais interdit l'utilisation de séries divergentes. Bernoulli lui fait remarquer qu'une même série peut provenir de fonctions différentes mais il ne donne pas d'exemples et Euler est peu convaincu (Callet (1744-49) donnera $1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \frac{m}{n}$ avec

$$\frac{1 + x + \ldots + x^{m-1}}{1 + x + \ldots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} \ldots \qquad \text{d'où}$$

le résultat ... Mais Lagrange considèrera cette objection comme incorrecte, usant pour cela d'un argument de "probabilité" qui lui vient de Leibniz

Par ex. $\begin{cases} m = 3 \\ n = 5 \end{cases}$ donne la série entière $1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^3$ si on donne à x la valeur 1, trois sommes partielles valent 1 les deux suivants 0, etc ... la valeur "probable" est donc $\frac{3}{5}$.Argument qui fut d'ailleurs réutilisé par Poisson ....

Euler affirme bien qu'il faut être prudent dans la manipulation des séries divergentes et il distingue entre celles qui divergent, celles qui oscillent sans devenir infinies et celles qui convergent véhémentement.

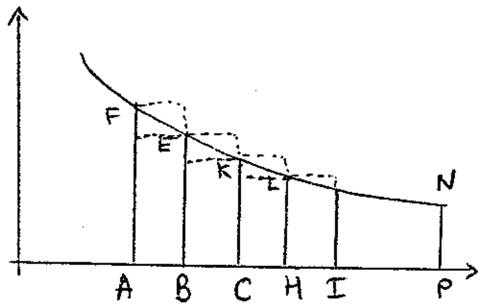
Parallèlement à ces abondants travaux, le 18e siècle est aussi celui des nombreuses tentatives pour avoir de façon rigoureuse les principes du calcul différentiel de Newton et Leibniz et l'utilisation des infinitésimaux, mais elles seront davantage le fait des philosophes que des mathématiciens.

En 1734, Berkeley, dans son célèbre pamphlet "the Analyst", critique violemment Newton, à qui il reproche un raisonnement plus inductif que déductif, et le fait que les accroissements donnés aux variables sont d'abord des accroissements puis sont annulés (il parlera, à leur propos, de "fantômes de quantités disparues"). Selon lui, la nouvelle théorie donne des résultats corrects grâce à la "compensation des erreurs", qui ne conduit pas à la science, mais à la vérité. Mac Laurin sera le dernier mathématicien à réfuter sérieusement ces attaques des philosophes. Au fil du 18e siècle, la philosophie de l'infini va s'enliser dans de vains combats d'arrière garde qui ne concernent plus guère les mathématiciens ; ces derniers font confiance au calcul infinitésimal en raison de son efficacité et de sa richesse et ne se soucient plus beaucoup des objections métaphysiques.

Mac Laurin Colin (1698-1746)

Le plus important des mathématiciens anglais de la période "après" Newton. Il était Ecossais et fit ses études à Glasgow avant de devenir professeur à Aberdeen (à 19 ans) puis à Edimbourg en 1725. En 1740, il partage avec Euler et Bernoulli le prix offert par l'Académie des Sciences pour son essai sur les marées. En 1742, il écrit son "traité des fluxions" en réponse à Berkeley et pour défendre Newton.

Ses principaux travaux et résultats concernent la géométrie, bien que son nom soit associé à celui de la série qui n'est qu'un cas particulier de celle de Taylor.(en fait, elle était déjà connue de J. Gregory), mais qu'il utilise comme un outil fondamental dans son traité. Il s'intéresse à des problèmes de quadrature et établit la formule sommatoire dite d'Euler - Mac Laurin



Il démontre que la somme des ordonnées AF, BE, CK, ... a une limite si et seulement si l'aire délimitée par la courbe existe (comparaison série intégrale) avec l'argument suivant :
Si on complète les rectangles BAF, .. l'aire APNF est toujours inférieure à la somme de tous ces rectangles et supérieure à celle de tous les rectangles au-delà du premier. Par conséquent l'aire APNF et la somme de ces rectangles soit ont toutes deux des limites, soit aucune des deux n'en a. Et quand la première (aire) en a une, elle peut approcher la valeur de la seconde (la somme). Il établit ensuite son premier théorème : si A désigne l'aire APFN, a l'ordonnée AF, b la première fluxion de AF (celle de la base AB étant l'unité), ... la somme de la progression représentée par AF, BE, CK, etc ... sera à peu près égale à

$$A + \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}b - \frac{1}{720}d + \text{etc} \quad \ldots$$

(avec la terminologie moderne, il exprime le résultat

$$\sum_{\alpha=0}^{+\infty} F(a+\alpha) = \int_a^{+\infty} F(x)dx + \frac{1}{2}F(a) + \frac{1}{12}F'(a) - \frac{1}{720}F''(a) \ldots .$$

De nombreux mathématiciens de cette époque calculaient alors les sommes de différentes séries.(De Moine - Taylor - Nicole - Stirling).

Les preuves de Mac Laurin illustrent bien les techniques et notations de son époque, de même que les exemples qu'il donne sont significatifs du type de problèmes que se posaient les mathématiciens. Par exemple, il considère la progression arithmétique m, m + e, m + 2e , ... et un entier $r \neq -1$ et se propose de calculer la somme $\sum_{\alpha=0}^{\beta} (m + \alpha e)^r$. Il utilise pour cela la fonction $y = x^r$ et trouve $\frac{n^r - m^{r+1}}{r+1}$ puis il en déduit :

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \alpha^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{rn^{r-1}}{12} + \quad \ldots.$$

Cette série étant continuée avec autant de termes qu'il y a d'unités dans $e + \frac{r-1}{2}$, r étant un entier impair.

Il calcule ensuite sa somme pour r = 1, 2, 3 (voir théorème de Jacques Bernoulli à ce sujet). Il calcule aussi la somme pour r rationnel ou négatif enfin pour r = - 1, il obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \log \alpha = (n - \tfrac{1}{2}) \cdot \log n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \quad \ldots.$$

et la formule de Stirling

$$(n-1)\,! = n^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, \exp\left[- n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \ldots\ldots\right]$$

En dehors de ses divers travaux sur les séries, il fait à Berkeley une réponse très <u>rigoureuse</u> pour justifier le calcul des fluxions de Newton, mais elle repose sur une approche géométrique beaucoup moins commode que le calcul différentiel qui se répand très vite sur le continent. Peut-être est-ce là l'une des raisons qui explique le déclin des mathématiques en Angleterre au 18e siècle.

<u>Stirling James</u> (1692-1770)

Ecossais qui fait ses études à Glasgow puis Oxford, d'où il est exclu. Il vivra à Venise pendant 10 ans, puis à son retour en Angleterre deviendra l'ami de Newton dont il subira l'influence.

Sa "Methodus differentialis", en 1730, contient de nombreux calculs de sommes de séries.

Bernoulli (17e siècle - 18e siècle)

Famille de mathématiciens, originaire d'Anvers et fixée à Bâle à la fin du 16e siècle.

Jacques I (1654-1705) - Jean I (1667-1748) - Daniel (1700-1782), fils de Jean furent les plus célèbres. Nicolas (1695-1726) - Jean II (1710-1790) étaient aussi des mathématiciens (Nicolas et Daniel furent professeurs à St Petersbourg, Daniel et Jean II à Bâle). Disciples de Leibniz et professeurs d'Euler, leur correspondance avec les plus grands mathématiciens d'Europe fournit un panaroma de l'activité scientifique du 18e siècle.

Jacques (1654-1705) étudie d'abord la théologie, puis se rebelle et s'intéresse à la physique et aux mathématiques. Il devint professeur à l'Université de Bâle en 1687 et y enseigna jusqu'à sa mort, après avoir beaucoup voyagé et rencontré des scientifiques de tous les pays d'Europe. Il a été le premier à comprendre le calcul infinitésimal de Leibniz et il l'a beaucoup perfectionné. Il introduit l'expression "calcul intégral" au lieu de "calcul sommatoire" proposé par Leibniz. Il s'intéresse aussi beaucoup aux séries infinies, son premier traité sur le sujet date de 1689 ; il y utilise l'inégalité dite de Bernoulli $(1 + x)^n > 1 + nx$ $(x > -1,\ n \neq 0$, n entier supérieur à 1). On lui attribue la démonstration de la divergence de la série harmonique (bien qu'il y ait eu des anticipations par Oresme et Mergoli). Il sait que la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$ converge mais ne parvient pas à en calculer la somme.(il majore par $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ dont la somme est 2), il montre que la série $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec la série harmonique) et signale le paradoxe que le rapport de la somme de termes impairs à celle des nombres pairs est $\sqrt{2} - 1$, donc inférieure à 1, alors que, terme à terme, les premiers sont supérieurs aux seconds.

A propos d'intérêts composés, il démontre les inégalités

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1.2. \dots n} < 3$$ et fait le calcul

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A.n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3.4} Bn^{c-3} + \dots\dots$$

(A, B, ... sont les nombres de Bernoulli) pour c = 1, 2, ... 10.

Jean (1667-1748), frère du précédent, étudie d'abord la médecine puis fut attiré par les mathématiques. Nommé professeur à Groningue en 1695, il succéda à Jacques à Bâle en 1705. C'est lui qui a introduit le calcul infinitésimal en France (1691-92) et il écrit le premier traité de calcul différentiel et intégral à cette époque pour le marquis de l'Hospital, dont le célèbre "Analyse des infiniment petits" est une traduction plus ou moins remaniée du traité de Jean Bernoulli. Il a entretenu une correspondance très active avec Leibniz mais aussi avec les mathématiciens de toute l'Europe ce qui lui valut le titre de "Praeceptor mathematicus Europae". Il donne la définition d'une fonction comme "quantité composée de quelque manière d'une variable et de constantes quelconques". Il polémique avec Euler à propos de logarithmes de nombres négatifs dont il affirme l'existence à partir des diffférentielles (celle de $\ln(-x)$ est $\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$ donc $\ln(-x) = \ln x$ et de l'égalité $\ln p^n = n\ln p$ pour tout exposant n , d'où pour $p = -a$ et $n = 2$ $\ln a^2 = 2\ln(-a)$. Leibniz avait objecté que d'une part la série de Taylor de $\ln(1 + x)$ diverge par $x = -2$, donc ne vaut pas 0, et comme ce n'est ni un nombre positif ni un nombre négatif, c'est un imaginaire, d'autre part l'équation $e^y = -a$ n'est pas solùble pour y réel, donc les nombres négatifs ont des logarithmes imaginaires.

C'est finalement Euler qui mettra un terme à cette querelle en prouvant qu'il y a toujours une infinité de logarithmes associés à un nombre donné, c'est-à-dire "si y est le logarithme x, je dis que y peut prendre une infinité de valeurs". La preuve de ce théorème est la suivante :

Pour ω "infiniment petit", $\ln(1 + \omega) = \omega$ et $\ln(1 + \omega)^n = n\omega$. Donc pour n "infiniment grand", $x = (1 + \omega)^n$ et $y = \ln x$, $y = n\omega$ donc $y = nx^{\frac{1}{n}} - n = \ln x$. Quand n augmente, cette expression approche lnx et pour n "infiniment grand", elle donne la vraie valeur du logarithme de x. Or $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs, $x^{\frac{1}{3}}$ en a trois etc ... . Donc pour n "infini", il y en aura une infinité .... . D'ailleurs, le logarithme est solution de l'équation $a = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots$ de degré infini qui doit donc avoir une infinité de racines.

Euler Leonhard (1707-1783)

Né à Bâle, il suivit les cours de Jean Bernoulli et s'associe à ses fils Nicolas et Daniel. Il étudie la théologie, la médecine, l'astronomie, la physique et les langues orientales.

En 1727, il rejoint N. et D. Bernoulli à Saint Petersbourg, à la nouvelle Académie des Sciences fondée par Catherine de Russie, où il obtient la chaire de Mathématiques en 1733. En 1741, il s'installe à Berlin puis retourne en Russie en 1766.

Il est certainement le mathématicien le plus productif de son époque et est apparu à ses contemporains comme le législateur de l'analyse, celui qui a mis en ordre les acquisitions du 17e siècle. "Introductioin Analysis Infinitorum", publié à Lausanne en 1748, sera réédité en 1783 puis en 1797 et il en paraîtra des traductions françaises et allemandes à diverses reprises. En 1755 paraît les "Institutiones Calculi differentialis" puis en 1768-70, les "Institutiones Calculi integralis". Grâce à lui, le concept de fonction sera précisé et deviendra un concept de base des mathématiques ; il en donnera d'ailleurs plusieurs définitions. Dans l'"Introductio", sa définition est la suivante : "Une expression analytique composée d'une manière quelconque d'une quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". Par expression analytique, il entend aussi bien les opérations algébriques que les opérations "infinies" telles que sommes de séries, produits infinis, fractions continues, et les opérations transcendantes (logarithmes, fonctions circulaires, exponentielles). Avec Euler, le travail formel sur les séries prend un essor considérable et prépare le terrain pour les mathématiciens du 18e siècle.

En 1754, il écrit "chaque fois qu'une série infinie est obtenue comme développement d'une expression algébrique, on peut l'utiliser dans des opérations mathématiques comme équivalente de cette expression, même pour des valeurs de la variable pour lesquelles la série diverge". Avec cette définition, il prétend conserver les séries divergentes, (tellement utiles), et contrer toutes les objections à leur sujet. Il affirme dans ses lettres à Bernoulli (1743) avoir eu quelques doutes à leur sujet mais n'avoir jamais été induit en erreur avec sa définition de leur somme.

Pour la plus grande part, ses calculs sur les séries sont formels, et il leur étend les propriétés de factorisation des polynômes : à ses yeux, ce procédé ne demande pas de justification. Ainsi, il calcule, en utilisant les relations entre coefficients et racines de polynômes de degré infini, les valeurs de $\zeta(2n) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2n}}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 13$ $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots\ldots$: il résoud l'équation $\sin z = 0$ comme l'équation algébrique de degré infini $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \ldots\ldots = 0$ qui lui permet d'obtenir $\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots\ldots$ (somme des inverses des racines du polynôme $1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} + \ldots = 0$) et finalement $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.. Ce problème avait été étudié en vain par Leibniz et Jean Bernoulli, et Euler semble l'avoir résolu vers 1736. Il utilise aussi abondamment les séries dans le domaine de la théorie des nombres (nombres premiers, décomposition d'entiers en sommes d'entiers etc ...). Dans ses calculs sur les séries, il affirme à certains moments que la condition $\lim a_n = 0$ est suffisante pour que la série converge, (alors qu'il connaît l'existence de la série harmonique et a établi $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \text{Log} n + \gamma + \frac{1}{2n} + \ldots$) , il cherche à donner un sens à des expressions telles que $1 - 1! + 2! - 3! + \ldots$ et il dérive terme à terme pour obtenir l'équation différentielle $xy' + y = x$, à partir de :

$$1 - 1 + 1 \quad \mp 1 = \mp \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} \; ,$$

$$1 - 2 + 3 - 4 \ldots\ldots \mp x = \mp \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 \ldots \mp x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + x) \text{ etc } \ldots$$

($\mp$ suivant la parité du nombre de termes).

il tente un passage à l'infini ce qui, l'infini n'étant ni pair, ni impair, lui fait écrire

$$1 - 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots = 0$$

De même, de la formule d'interpolation de Lagrange, il déduit $\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx + \ldots$ sans parvenir à élucider le problème pour $x = \pi$ (c'est Daniel Bernoulli qui, en 1772, verra que dans la série $\Sigma \frac{\cos nx}{n^k}$, il faut modifier la somme suivant l'intervalle de variation de x).

Un de ses mérites aura été d'évacuer complètement l'intuition géométrique dans la manipulation de l'infini et par la richesse de ses travaux, il ouvre la voie aux développements mathématiciens du 19e siècle.

D'Alembert (Jean Le Rond) (1717-1783)

Découvert sur les marches de l'église St Jean Baptiste Le Rond, près de Notre Dame, d'où son nom. Il fit des études de droit, de médecine et de mathématiques, discipline qu'il choisit finalement. Il présente son premier mémoire à l'Académie en 1739 (il y est admis deux ans plus tard). Ses principales oeuvres scientifiques sont publiées entre 1743 et 1754, à la suite de quoi il collabore à la rédaction de l'Encyclopédie avec Diderot.

D'Alembert est le premier à vouloir fonder rigoureusement le calcul différentiel sur la notion de limite et il insiste sur la nécessité de clarifier les concepts mathématiques. Il se méfie beaucoup de l'utilisation des séries divergentes, malgré les succès qu'elle assure. En 1768, dans ses "Opuscules Math", il écrit : "Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs". Il donne une condition suffisante pour que la série converge (sur l'exemple de la série du binôme : voir régle de d'Alembert) et il fonde l'analyse sur la notion de limite dont il donne la définition suivante :

"Une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut s'approcher de la première plus près qu'une quantité donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable"; "à proprement parler la limite ne coïncide jamais ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite, mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on veut".

D'Alembert interprète alors les "premières et dernières raisons" de Newton en termes de limites et nie l'existence des infiniment petits ("Une quantité est quelque chose ou n'est rien : si elle est quelque chose, elle n'a pas encore disparu, si elle n'est rien, elle a littéralement disparu. La supposition qu'il existe un état intermédiaire entre les deux est une chimère" (allusion aux "zéros" d'Euler et aux infiniment petits de Leibniz). En fait, D'Alembert fait preuve d'un net souci de rigueur qui restera surtout au niveau des intentions : voir l'article "séries" de l'Encyclopédie, où il précise : "Les mathématiciens disent et prouvent que la somme de la suite des nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ .... si on la suppose poussée à l'infini est égale à 1. Cela signifie, si on veut ne parler que d'après des idées claires, que le nombre 1 est la limite de la somme de cette suite de nombres, c'est-à-dire que plus on prendra de nombres dans la suite, plus la somme de ces nombres approchera d'être égale à 1 et qu'on pourra en approcher aussi près qu'on voudra".

Mais les conceptions et interprétations de d'Alembert restent très géométriques (voir la monotonie de sa définition de la limite) et la fin du 18e siècle préfèrera continuer à utiliser le langage et les vues de Leibniz et Euler. (Sur 28 publications entre 1754 et 1784, il y en a 15 qui interprètent le calcul différentiel en termes de Leibniz, 6 en termes de limites, 4 avec les zéros d'Euler, deux en termes de fluxion, et celle de Lagrange qui donne une présentation originale).

Lagrange (1736-1813)

Né à Turin, il devint professeur à l'Académie militaire de Turin. Lié d'amitié avec d'Alembert, il échange avec lui une correspondance très riche à partir de 1764.

En 1766, il fut appelé à Berlin pour succéder à Euler et y resta jusqu'en 1787, date de son retour à Paris où il contribua à la fondation de Polytechnique et Normale Supérieur.

En 1797, il publie la "théorie des fonctions analytiques" et en 1808 les "Leçons sur le calcul des fonctions", deux ouvrages didactiques où il expose sa théorie du calcul différentiel. Critiquant à la fois la méthode des infiniment petits de Leibniz, celle des zéros d'Euler (division de zéro par zéro), celle des limites préconisées par Mac Laurin et d'Alembert (qu'il critiqua comme faisant appel à une "méthaphysique étrangère à l'esprit d'analyse"), celle des fluxions de Newton (car elle repose sur les notions de mouvement et de vitesse), il se propose d'établir les bases du calcul différentiel sur des règles purement algébriques, à l'exclusion de toute considération géométrique ou cinématique. Il fait donc reposer la notion de dérivée sur le développement en série de la fonction : au départ, il s'agit de développements en séries purement formels, les dérivées étant obtenues à partir des coefficients de la série de Taylor. C'est là qu'il introduit les notations f'x, f"x pour les dérivées successives. Le problème est qu'il n'échappe pas à la notion de limite pour étudier la convergence de ses séries. Il est cependant le premier à utiliser l'encadrement du reste, après avoir donné l'expression du reste qui porte son nom dans la série de Taylor : il affirme qu'on ne doit pas considérer la série infinie sans faire intervenir le reste, c'est-à-dire qu'on doit considérer un nombre fini de termes, assez grand pour que le reste soit petit. Le problème de la convergence de la série de Taylor est évidemment le point faible de cet édifice qui ne sera élucidé que par les mathématiciens du 19e siècle.

A propos du problème des cordes vibrantes, il étudie des séries de Fourier et polémique avec d'Alembert au sujet de la série $\sum\limits_{k\geq 1} \cos kx$: Lagrange calcule la somme de m termes $\frac{\cos m x - \cos(m+1)x}{2(1-\cos x)} - \frac{1}{2}$ et ajoute :

"Dans le cas où m est infini, le nombre 1 s'évanouit devant m et le terme cos(m + 1)x devient égal à cosmx d'où $\frac{\cos mx - \cos(m+1)x}{2(1 - \cos x)} = 0$" mais si x = 0, le dénominateur est nul et la valeur de la série est alors $m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = m$ (par la règle de l'Hospital). Il déduit que la série vaut $-\frac{1}{2}$ pour $x \neq 0$.
D'Alembert lui montre avec x = 45° que la somme de la série est $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0, ou - 1 ou ... suivant le nombre de termes donc la somme ne vaut 0 que si m x 45° est un nombre fini de fois 360° ou 135° plus une telle quantité. La réponse de Lagrange est tout à fait significative des vues de l'époque sur les séries : avec ce type d'argument, on pourrait dire que $\frac{1}{1 + x}$ n'est pas l'expression de $1 - x + x^2 + \ldots$ car pour x = 1 , la somme vaut 1 ou 0 suivant la parité du nombre de termes. Or cette somme vaut $\frac{1}{2}$ ...".

En tout cas, Lagrange aura été l'artisan d'une transformation épistémologique essentielle, en mettant l'accent sur encadrement, majoration, approximation et en faisant du concept central de l'analyse celui de fonction analytique, en fait.

Lacroix, dans son "Traité du calcul différentiel et intégral" critiquera l'utilisation formelle des séries par Lagrange : on ne doit pas parler d'une série comme développement d'une fonction parce que la série n'a pas toujours "la valeur" de cette fonction : elle en donne la valeur seulement pour x assez petit. Mais cela ne l'empêche pas d'affirmer que la série infinie reste liée à la fonction pour tout x (c'est-à-dire qu'elles conservent les mêmes propriétés : c'est toujours le principe de continuité d'Euler ...).