

ACQUISITION DES PREMIERS CONCEPTS D'ANALYSE
SUR $\mathbb{R}$ DANS UNE SECTION ORDINAIRE DE
PREMIERE ANNEE DE DEUG

par F. BOSCHET et A. ROBERT

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
7

RESUME

L'étude présentée ci-dessous a été réalisée à partir de l'observation d'une section de DEUG SSM (première année) à PARIS VI. Il s'agit d'une section ordinaire, à ceci près que les enseignants de T.D., constitués en équipe, avaient pris quelques initiatives non standard (réunion hebdomadaire de l'équipe, permanence hebdomadaire pour les étudiants, interrogations écrites mensuelles en T.D., présentation en T.D. de quelques notions d'analyse avant leur exposition en cours magistral ...).

La première semaine de cours, les étudiants ont passé un prétest destiné à nous permettre de mieux cerner leurs acquis antérieurs en analyse. Le même prétest avait été proposé à la rentrée dans une classe de SUP C. De plus, nous avons dépouillé toutes les productions écrites des étudiants portant sur l'analyse (durant le premier semestre universitaire) et nous avons tout particulièrement travaillé sur les deux premières interrogations écrites - également proposées en SUPC - à savoir le post-test sur les suites et la première interrogation sur les fonctions. Nous avons aussi observé quelques séances de T.D. (en particulier celles portant sur des notions non encore abordées en cours magistral).

Nous avons d'abord mis en évidence certaines corrélations entre les acquis antérieurs et les comportements des étudiants sur des tâches portant sur la convergence des suites et des fonctions (§I). Puis nous avons caractérisé (statistiquement) par rapport à leurs prérequis en analyse les étudiants qui échouent au partiel et à l'examen final (§II).

Dans la troisième partie (§III), nous exposons une classification (provisoire) des tâches sur les fonctions et un essai de typologie des comportements correspondants (dégagé des erreurs relevées dans les copies). La dernière partie (§IV) est consacrée à quelques réflexions sur les expériences faites en T.D. et sur leur observation.

I ACQUIS ANTÉRIEURS ET COMPORTEMENTS SUR LA CONVERGENCE (SUITE ET FONCTIONS)

L'étude détaillée des réponses des étudiants au prétest nous a permis de dégager

les acquis antérieurs (et les lacunes). L'allure générale des répartitions des réponses est d'ailleurs la même en DEUG et en SUP C: réussite générale à des tâches élémentaires sur les réels et les fonctions (calculs sur $\mathbb{R}$, graphiques simples); lacunes massives sur les développements décimaux et l'interprétation d'expressions formalisées non simples; réussite moyenne à des tâches portant sur l'ordre sur $\mathbb{R}$, les valeurs absolues et l'interprétation (graphique) d'expressions formalisées relativement simples. Ces résultats nous ont amené à dégager des "blocs de connaissance" correspondant à des groupes d'exercices "proches" quant aux tâches proposées (et aux performances constatées):

- E (connaissances des propriétés élémentaires des réels);
- O (ordre sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant);
- G (représentations graphiques);
- R (définition des rationnels et exemples d'irrationnels);
- F (connaissance de certaines règles du langage formel);
- S (attribution de leur sens à des expressions formalisées);
- Type de formulation (suivant leurs réponses formalisées).

Un bloc est attribué à un étudiant s'il a réussi tous les exercices correspondants; sinon on attribue la moitié du bloc ou le bloc vide, selon les réponses.

Les répartitions des réponses regroupées par blocs de connaissance nous ont permis de souligner l'hétérogénéité des six groupes de T.D. et la différence notable (culminant sur le nombre de lacunes, mesuré en nombre de blocs vides, et le type de formulation) selon la série du baccalauréat obtenu (C ou D).

La comparaison des résultats (et procédures) aux post-test sur les suites et prétest a montré que le nombre de lacunes (présence d'au moins 3 blocs vides) est le critère le plus significativement lié à l'échec au post-test. De plus le bloc O (ordre) semble avoir une corrélation particulière avec la possibilité de produire des raisonnements non algorithmiques (importants en analyse).

La comparaison des résultats au post-test des SUP C et des DEUG montre, elle, les effets d'enseignement que ~~quelques~~ soient les acquis antérieurs.

La comparaison des procédures à deux exercices portant sur deux tâches analogues sur les

suites (post-test) et sur les fonctions (première interro) a permis de renforcer les résultats précédents en mettant en évidence que même la possibilité d'améliorer ses procédures est liée aux performances au prétest. Il semble enfin que certaines des procédures erronées particulièrement tenaces soient liées à des lacunes dans le bloc 5 (Bloc vide).

II QUELS SONT LES ETUDIANTS QUI REUSSISSENT?

III ETUDE DES FONCTIONS

Dans l'enseignement actuel, les exercices sur les fonctions sont donnés en général sans indication ni sur l'origine des fonctions étudiées (lorsqu'elles sont définies explicitement) ni sur les applications éventuelles des propriétés visées (lorsque le but de l'exercice est d'établir une propriété sur une fonction plus générale). Dans les productions écrites des étudiants, nous avons distingué différents types d'erreurs: certaines utilisations erronées de règles d'analyse nous semblent correspondre à une algébrisation abusive de ces règles; certaines simplifications systématiques évoquent le recours à des conceptions simplistes sur les fonctions et les réels (tout passe à la limite, toute fonction est continue,...); on rencontre souvent l'utilisation erronée d'arguments locaux ou globaux pour démontrer des propriétés globales ou locales; enfin certaines erreurs grossières (confusion fonction/variable, limites dépendant d'une variable...) nous font penser à une absence complète de modèle (implicite) liée à des pertes de sens. Cette classification, jointe à nos résultats sur la disparition de certaines erreurs, nous a amené à une typologie provisoire des comportements erronés: (sur des tâches sur les fonctions). En particulier certains étudiants semblent se cantonner dans l'imitation (à la lettre) et le par-coeur; d'autres ont recours de préférence (même si cela est incorrect) à des conduites de type algorithmique; alors que certains adoptent plutôt des procédures liées à des images mentales, d'autres semblent préférer le plus souvent des raisonnements formels, sans support de représentation.

IV LES SEQUENCES D'ENSEIGNEMENT EN DEUG (OBSERVATION ET EVALUATION)

Les résultats de nos observations ne concernent ni les acquisitions individuelles pouvant avoir lieu en T.D. ni le comportement des étudiants devant telle ou telle tâche et par là même nous n'avons pas pu évaluer nos séquences par nos observations. De plus nous estimons que de telles séquences ne peuvent être expérimentées avec une chance de succès qu'au sein d'un enseignement prenant explicitement en compte l'activité des étudiants (ce qui oblige à un changement réel dans l'organisation des enseignements pendant une durée suffisante). Seul un travail ultérieur dans des conditions adéquates permettrait éventuellement de conclure.

PRESENTATION

Pendant l'année scolaire 83-84, nous avons suivi la section C de première année de DEUG SSM à Paris VI. Il s'agit d'une section ordinaire, à une exception près, à savoir que les enseignants ayant la charge des T.D s'étaient organisés avant la rentrée en équipe d'enseignement et avaient pris, en conséquence, un certain nombre de décisions non "standard". De façon générale, comme dans toutes les sections, l'enseignement de mathématiques comporte 3 séances de 1 H 20 de cours magistral (en amphi) et 3 séances de Travaux Dirigés (T.D), respectivement de 2 H et 2 fois 1 H 30. Un problème (à rédiger à la maison) est distribué tous les 15 jours. Traditionnellement, le cours magistral commence une semaine avant les T.D. Signalons encore que dans la section il n'y a pas eu de polycopié de cours, le livre de référence étant le cours de premier cycle de Dixmier. La section C comporte 6 groupes de T.D (désignés ici par les lettres A, B, C, D, K, L) donc 6 enseignants de T.D, stables, et successivement 2 enseignants chargés du cours magistral (un par semestre).

Les décisions de "l'équipe T.D" ont porté sur plusieurs points. En ce qui concerne la forme de l'enseignement en T.D, un effort a été décidé pour inverser, pour certaines notions, le rapport temporel "cours puis T.D sur le cours" : ainsi, pour quelques notions d'analyse sur $\mathbb{R}$ (convergence des suites, continuité, développements limités, ...) une séquence faisant intervenir la notion visée en tant qu'outil implicite (avant tout cours sur le sujet) a été menée en T.D. Le bilan de ces interventions n'est pas positif (ni négatif d'ailleurs !) comme nous l'expliquerons plus loin. En ce qui concerne le contenu même des cours, et l'ordre de présentation des notions, aucune décision particulière n'est intervenue. En ce qui concerne l'encadrement des étudiants dont nous savions la difficulté réelle, en première année, à s'adapter à l'Université, deux sortes d'initiatives ont été prises :

d'une part, les enseignants T.D ont reçu au début de l'année chaque étudiant individuellement, avec une première production du dit étudiant à commenter (éventuellement) ; d'autre part une permanence a eu lieu une fois par semaine, pendant une demi-journée "libre" des étudiants⁽¹⁾. En ce qui concerne les contrôles, sur lesquels il n'était pas non plus question de prendre quelque initiative que ce soit, il y a quand même eu dans chaque T.D, à peu près une fois par mois, une interrogation écrite "blanche", notée, et corrigée ou séance tenante ou la séance d'après.

(1) Nous y reviendrons.

Les étudiants ont à passer en DEUG 1 un partiel (en février) et un examen (en juin) dans chaque matière ; un partiel blanc a eu lieu en décembre.

Enfin, en ce qui concerne la coordination du travail, et même le choix des exercices à faire en T.D (grosso modo), il a été décidé une réunion de concertation hebdomadaire entre les enseignants T.D, réunion à laquelle A. Robert a toujours assisté en tant qu'observateur. Ce travail a été préparé par une douzaine de demi-journées de travail collectif effectuées l'an dernier et avant la rentrée sur le contenu des T.D précisément, compte tenu du contenu et du déroulement du cours (imposé par les programmes, les habitudes et les enseignants chargés du cours).

Dernière décision de l'équipe T.D : pour ne pas prendre systématiquement une semaine de retard sur le cours en T.D, ne pas faire porter les 3 premiers amphis sur le premier nouveau cours sur lequel nous avons justement un projet de séquences. Ceci a permis, grâce à l'accord de l'enseignant chargé du cours, de faire passer la première semaine (en amphi) un prétest destiné à mettre en évidence certains acquis antérieurs des étudiants (en analyse). Ce prétest est très important pour le travail que nous présentons ici, car nous lui avons systématiquement comparé les productions ultérieures des étudiants (interrogations écrites⁽¹⁾, problèmes à la maison, partiels ...).

Ajoutons, du point de vue de la méthodologie de la recherche, que nous avons assisté à un certain nombre de séances de T.D au début de l'année.

Dans le même temps, prétest et posttest sur les suites ont été posés dans une classe de Math. Sup. C dans laquelle un certain nombre de séances d'exercices sur les suites ont été également communes avec celles de DEUG.

(1) Quelquefois désignées comme posttest.

OBJECTIFS

Nos objectifs sont multiples, et se placent dans des problématiques différentes.

D'un point de vue strictement didactique (et dans le prolongement de travaux antérieurs) nous voulions évaluer les séquences mises au point l'année précédente sur la convergence des suites numériques ⁽¹⁾. Ceci fait l'objet du § IV.

Dans le même ordre d'idées, nous avons des interrogations précises sur le rôle de la formulation du discours oral ou écrit dans l'enseignement. Ceci fait l'objet d'un travail de F. Boschet.

Par ailleurs, nous voulions baliser plus largement le champ conceptuel "début de l'analyse sur $\mathbb{R}$ ", tout au moins sur le plan des conduites (procédures, représentations, erreurs tenaces ...). Nous nous sommes donné les moyens, à cette fin, d'avoir à notre disposition des relevés diachroniques d'erreurs, une centaine (T_1 à T_7). Ceci fait l'objet des § I et III.

Enfin, sans que nous l'ayons tellement programmé à l'avance, l'ensemble de nos observations nous a conduites à une réflexion sur le fonctionnement de l'enseignement en première année de DEUG tant sociologique (rôle des classes précédentes par exemple) que plus didactique (rôle du contrat par exemple) (cf. § II et IV).

Nous avons adopté pour présenter nos différents résultats le plan suivant (compte tenu de la possibilité d'exploiter de plusieurs manières différentes certains relevés de données) :

PREMIERE-PARTIE : ACQUIS ANTERIEURS ET COMPORTEMENTS SUR LA CONVERGENCE (SUITES ET FONCTIONS)

1) Le prétest

- a) Résultats par questions (DEUG)
- b) Comparaison DEUG et SUP C et blocs
- c) Résultats par blocs

2) Le posttest sur les suites

- a) Résultats par questions
- b) Comparaison prétest/posttest
- c) Comparaison SUP C/DEUG

(1) Cela s'appuie à la fois sur les observations de classe et sur les postests sur les suites.

3) 1ère interrogation écrite sur les fonctions (DEUG)

- a) Comparaison des questions communes avec le posttest
- b) Mise en rapport des résultats précédents

DEUXIEME PARTIE : QUELS SONT CEUX QUI REUSSISSENT ?

- a) Le partiel blanc
- b) Le partiel
- c) l'examen

TROISIEME PARTIE : ETUDE DES FONCTIONS

- a) Classification des tâches
- b) Essai de typologie des erreurs
- c) Essai de typologie des comportements erronés

QUATRIEME PARTIE : LES SEQUENCES D'ENSEIGNEMENT (EN DEUG)

- a) Observation
- b) Evaluation de l'observation
- c) Evaluation de l'expérience
- d) Les permanences

CONCLUSION

ANNEXES :

- . Tableaux T_1 à T_7 : les résultats par étudiants
- . Les séquences sur les suites
- . Proposition de prétest

BIBLIOGRAPHIE

I- ACQUIS ANTERIEURS ET COMPORTEMENTS SUR LA CONVERGENCE (SUITES ET FONCTIONS)

1) Le brêtest

En DEUG, il a été posé la première semaine de cours, avant le début des T.D, et a été passé en amphï (le texte présente 3 micro-variantes (ne portant que sur la question 6)); les étudiants ont donc eu 1 h environ pour le faire.

Voici ce texte. On a indiqué en bas de page les 2 autres possibilités pour la question 6).

1. Représenter dans le plan
 $A = \{ (x,y) : x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; |x-1| \leq \frac{1}{2} \}$.
2. Les relations $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$ impliquant-elles $(x_1 - x_2) \leq (y_1 - y_2)$?
 $(x_1, y_1$ réels).
3. Calculer (à la main) $(0,3)^2 \times 3,14$.
4. On considère l'ensemble des nombres de la forme $\{1 + \frac{1}{n}\}$ (où n entier strictement positif). Cet ensemble est-il minoré? majoré? Existe-t-il un plus petit élément dans cet ensemble? Cet ensemble a-t-il une borne inférieure? Le cas échéant citer ces réels.
5. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ sur $]1,2]$ et $f(x)=|x|$ sinon. Cette application est-elle minorée? croissante? décroissante? Que valent $f(1), f(0,999), f(1,001)$?
- (V₂) 6. Déterminer A où $A = \{ x; x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon \}$.
7. Définir les nombres rationnels; citer trois nombres irrationnels.
8. Soit la proposition suivante:
 $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n$;
 Ecrire sa négation. La quelle des deux propositions (initiale et son contraire) est vraie?
9. Comparer 1 et 0,999... (développement illimité);
 " 4 et $(1,333... + 2,666...)$.
10. Donner le plus grand nombre possible d'expressions équivalentes à l'expression suivante, où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0, l deux réels: "Quand x tend vers x_0 , f(x) tend vers l."
11. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:
 a) $\forall i (1 \leq i \leq 3), \exists a (a \in \mathbb{R}) f_i(a)=1$.
 b) $\exists i (1 \leq i \leq 3), \forall a (a \in \mathbb{R}) f_i(a)=1$.
 c) $\exists a (a \in \mathbb{R}), \forall i (1 \leq i \leq 3) f_i(a)=1$.
 d) $\forall a (a \in \mathbb{R}), \forall i (1 \leq i \leq 3) f_i(a)=1$.
 e) Il existe une fonction $f_1 (1 \leq i \leq 3)$ et un point a de $\mathbb{R}$ tels que la fonction f_1 prend la valeur a en a.
12. Ecrire à l'aide de quantificateurs ($\forall, \exists$) la phrase suivante, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels:
 Tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contenant un élément de la suite.

(V₃) 6. Déterminer A où $A = \{ x; x \in \mathbb{R}; \forall n, n \in \mathbb{N}, |x| \leq \frac{1}{n} \}$.

(V₄) 6. Déterminer A où $A = \{ x; x \in \mathbb{R}; \forall n, n \in \mathbb{N}^*, |x| \leq \frac{1}{n} \}$.

En Sup C, le prétest ci-joint présente quelques modifications par rapport au précédent (cf. questions 7, 8, 12).

Il a été passé en classe, en 1 H, la 2ème semaine.

1. Représenter dans le plan
 $A = \{ (x,y); x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; |x-1| \leq \frac{1}{2} \}$.
2. Les relations $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$ impliquent-elles $(x_1 - x_2) \leq (y_1 - y_2)$?
 $(x_1, y_1$ réels).
3. Calculer (à la main) $0,3^2 \times 3,14$.
4. On considère l'ensemble des nombres de la forme $\{1 + \frac{1}{n}\}$ (où n entier strictement positif). Cet ensemble est-il minoré? majoré? Existe-t-il un plus petit élément dans cet ensemble? Cet ensemble a-t-il une borne inférieure? Le cas échéant citer ces réels.
5. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ sur $]1,2]$ et $f(x)=|x|$, sinon. Cette application est-elle minorée? croissante? décroissante? Que valent $f(1), f(0,999), f(1,001)$?
6. Déterminer A où $A = \{ x; x \in \mathbb{R}; \forall n, n \in \mathbb{N}, |x| \leq \frac{1}{10^n} \}$.
7. Formaliser les expressions suivantes, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels:
 - a) Tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contient un élément de la suite.
 - b) Pour tout nombre positif, tous les éléments de la suite sauf un nombre fini sont compris entre ce nombre et son double.
 - c) pour tout nombre positif, il existe une infinité d'éléments de la suite inférieurs à ce nombre.
8. Nier la proposition suivante où A et B sont des réels et f une application $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$:
 $\exists A, A \in \mathbb{R}^{**}, \forall B (B > A \Rightarrow |f(B) - B| \leq A)$.
9. Comparer 1 et $0,999\dots$ (développement décimal illimité);
 " 4 et $(1,333\dots + 2,666\dots)$.
10. Donner le plus grand nombre possible d'expressions (y compris formalisées) équivalentes à l'expression suivante, où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0, l deux réels: "Quand x tend vers x_0 , $f(x)$ tend vers l ."
11. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:
 - a) $\forall i (1 \leq i \leq 3), \exists a (a \in \mathbb{R}) f_i(a)=1$.
 - b) $\exists i (1 \leq i \leq 3), \forall a (a \in \mathbb{R}) f_i(a)=1$.
 - c) $\exists a (a \in \mathbb{R}), \forall i (1 \leq i \leq 3) f_i(a)=1$.
 - d) $\forall a (a \in \mathbb{R}), \forall i (1 \leq i \leq 3) f_i(a)=1$.
 - e) Il existe une fonction $f_i (1 \leq i \leq 3)$ et un point a de $\mathbb{R}$ tels que la fonction f_i prend la valeur a en a .

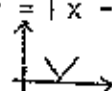
a) Résultats par question (DEUG)

Nous avons recueilli 132 copies, dont 2 anonymes. Parmi les étudiants concernés 6 puis 3 autres ont abandonné la section ; leurs prétests étaient en général médiocres (notes sur 20 : 4, 9, 6, 8, 10, 3, 12, 9, 3). Nous n'avons pas enlevé leurs productions du lot des copies étudiées.

Nous allons décrire les réponses à chaque question en donnant les répartitions correspondantes (globalement). Les pourcentages sont toujours calculés sur le total des étudiants ayant abordé la question concernée.

Pour la première question (non abordée par 5 étudiants seulement),

on a trouvé 59 % de copies comportant un dessin correct, quelques copies sans dessin (avec éventuellement le résultat $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$) et des erreurs de plusieurs types.

Certaines portent sur la détermination des bornes pour x ($-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ou $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$), d'autres sur le dessin correspondant - dessin sur l'axe des x seulement, ou au-dessus de l'axe des x ou quelques graphes plus difficiles à interpréter qui nous semblent résulter d'une confusion entre les droites $y = |x - \frac{1}{2}|$, $y = |x - \frac{3}{2}|$ et l'ensemble cherché, avec des dessins du type 

Autrement dit il y a des difficultés soit avec les valeurs absolues, soit, plus fréquemment, avec la représentation graphique d'un ensemble de points défini analytiquement.

Pour la deuxième question (non abordée par 9 étudiants),

la réponse (avec ou sans justification) est exacte pour 80 % des étudiants.

Les justifications qui sont plus fréquentes que la simple réponse "Faux", sont de 2 types : ou bien un contre-exemple numérique est fourni, ou bien on explique par un discours métamathématique que les inégalités initiales n'entraînent pas l'inégalité cherchée.

Quant aux erreurs, elles correspondent pratiquement toutes à une soustraction d'inégalités. Soulignons tout de suite que chez certains étudiants il y a là une erreur terriblement tenace, nous y reviendrons ...

Pour la troisième question (non abordée par 2 étudiants seulement),

la réponse est exacte pour 81 % des copies et les erreurs proviennent soit de l'erreur classique $(0,3)^2 = 0,9$ soit de fantaisies dans la multiplication de 009 par 3, 14.

En ce qui concerne la quatrième question, les 2 premières sous-questions ont été plus abordées que les 2 autres - il faut dire que la définition des bornes inférieures avait été donnée la veille, au cours magistral ...

On a pu noter un certain nombre de confusions dans l'utilisation des termes (confusion entre minoré et majoré, entre inf. et sup.). On a même trouvé une copie avec "1 est la borne supérieure donc $\inf A = 1$...". Ceci dit les erreurs les plus fréquentes sont les suivantes :

α) Comme il n'y a pas de plus petit élément, il n'y a pas de borne inférieure. (Cela peut provenir d'une confusion entre les 2 notions, et/ou de la conception que la borne inférieure est atteinte ...).

β) L'ensemble est minoré par 2. Cela correspond à la valeur prise par le "premier" élément, pour $n = 1$, que ce soit explicite ou non. Il y a donc là, dans beaucoup de cas, une confusion entre n et u_n .

γ) L'ensemble n'est pas majoré. Cela correspond au fait de faire tendre n vers 0, explicitement ou non. Il y a là une non prise en compte de la nature de n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Il y a 12 étudiants (resp. 13) qui n'ont pas abordé la sous-question "E minoré" (resp. majoré) ; parmi les autres, 70 % (resp. 65 %) donnent une réponse juste, à savoir ou bien E est minoré (resp. majoré), ou bien E est minoré (resp. majoré) par ... , mais si le minorant (resp. majorant) donné n'en est pas un, nous n'avons pas comptabilisé la réponse comme juste.

Il y a 25 étudiants qui n'ont pas abordé la question du plus petit élément et parmi les autres, 63 % donnent une réponse juste (avec la même restriction qu'au dessus).

Enfin 34 étudiants ne parlent pas de borne inférieure, et 49 % des autres estiment qu'il y en a une - citée ou non - ce qui ne peut être distingué d'une réponse de type aléatoire.

Pour la cinquième question,

nous ne nous sommes intéressées qu'au sens de variation et aux valeurs.

On peut remarquer d'abord que seulement 24 étudiants ont représenté graphiquement la fonction - dont 5 ont produit des dessins faux !

Il y a aussi quelques étudiants qui calculent $f'(x)$ pour trouver le sens de variation sur chaque intervalle....

L'erreur la plus fréquente en ce qui concerne ce sens de variation consiste à dire que f décroît sur $]-\infty, 1[$.

Il y a 7 étudiants qui n'abordent pas la question ; parmi les autres, 73 % donnent le bon sens de variation et 94 % les bonnes valeurs.

Abordons maintenant la sixième question :

Très peu réussie (24 % de réponses justes, justifiées ou non) et non abordée par 33 étudiants.

Les réponses fausses sont très variées de $[-\epsilon, \epsilon]$, $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ à $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $\mathbb{R}$...

Ceci dit, beaucoup d'étudiants réécrivent autrement la définition de A (sans valeur absolue) et s'arrêtent là, visiblement "dépassés". D'autres enlèvent le quantificateur $\forall$ en réécrivant A , ce qui peut expliquer les premières réponses fausses évoquées ci-dessus. Pour d'autres, tout se passe comme si le " $\forall$ " est interprété comme une union :

$$A = \bigcup \{x ; |x| \leq \frac{1}{n}\} \text{ d'où certaines réponses comme } [-1, 1].$$

On peut souligner que la grande majorité des étudiants, ne parvient pas à donner du sens à cette expression. Enfin, en ce qui concerne le rapport avec le texte de la micro-variante, on a les résultats suivants :

Etude de l'influence de la variante dans l'exercice 6

Voici la répartition des résultats :

numéro variante effectif	Réponses	Juste	enlève le $\forall$	intervalle de $\mathbb{R}$ (corresp. à U)	autres	$\emptyset$
V. 1 ($1/10^n$) 36	19 % 7	25 % 9	17 % 6	11 % 4	28 % 10	
(ϵ) 2 42	28 % 12	17 % 7	14 % 6	9 % 4	31 % 13	
($\frac{1}{n}$) 3 41	12 % 5	19 % 8	32 % 13	12 % 5	24 % 10	

Les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne.

La différence du total avec 132 est due à ce que on a pas identifié le n° de la variante sur 13 copies.

Tendances :

α) La variante avec "e" est relativement mieux réussie, peut-être est-ce dû à l'effet d'habitude et au fait que c'est la forme la plus générale de l'énoncé.

β) La variante avec " $\frac{1}{n}$ " a entraîné relativement plus de réponses sous formes d'intervalles $([0,1], [-1, 1], \mathbb{R}, \dots)$. Peut-être y-a-t-il un effet d'automatisme, du genre : $A = \{ x ; x \in \bigcup_n]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\}$?.

La septième question ne figure pas dans le prétest des Sup C.

Il y a 10 étudiants qui n'abordent pas la définition des rationnels, parmi les autres 70 % donnent une réponse juste... y compris avec oubli des rationnels négatifs ou omission du dénominateur nul. Les autres réponses montrent souvent des confusions dans les termes - on trouve définis $\mathbb{R}, \mathbb{Z} \dots$

Les exemples d'irrationnels (non abordés par 19 étudiants) sont corrects chez 55 % d'étudiants (y compris s'il ne figurait qu'un irrationnel et rien d'autre). Signalons que π arrive en tête (59 fois cité) suivi de près par $\sqrt{2}$ (51 fois) alors que e (16 fois cité) ou autre logarithme sont peu cités. Les deux distributions les plus fréquentes sont $(\pi, \sqrt{2}, e)$ ou 3 racines carrées.

Quant aux erreurs, relativement nombreuses donc, la plus fréquente consiste à citer un ou plusieurs rationnels parmi les irrationnels. On peut se demander si il n'y a pas l'idée que les irrationnels contiennent les rationnels (confusion $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

On a aussi trouvé des nombres décimaux, ou même des quotients de nombres décimaux $(-\frac{0,8}{2,1} \dots)$ et quelquefois des nombres complexes.

En ce qui concerne la huitième question : là aussi différente dans le prétest Sup C - si seulement 8 étudiants n'abordent pas la négation, 31 % des autres fournissent l'expression correcte. On a trouvé plus de 10 expressions différentes⁽¹⁾ candidates à la négation, depuis la proposition $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \quad p \geq n$ (à la place, de $p > n$) à celle ci, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n \dots$

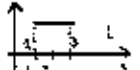
Pour ce qui est du sens (question : laquelle des 2 propositions est vraie), 64 % des étudiants ayant abordé le problème reconnaissent la proposition vraie - même si leur négation n'avait pas été correcte. Malheureusement certains estiment que les 2 sont vraies. Seuls 8 étudiants n'ont pas répondu.

(1) étude à part.

La neuvième question, non abordée par 29 étudiants, est réussie par 21 % des étudiants ; presque tous les autres pensent que 1 et 4 sont strictement supérieurs aux D.D.I. (2) proposés [aucun ne propose <] ; les derniers gênés mettent d'autres signes comme = , > , etc ...

Certains écrivent qu'ils ne savent pas ce que c'est que 0,999 Notons qu'en Ter. D, ce n'est pas au programme !

La dixième question révèle que presque tous les étudiants utilisent au moins la notation $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, même si d'autres notations supplémentaires sont utilisées. Ceci est bien en accord avec l'étude de F. Boschet [1].

La onzième question a été quelquefois résolue sans dessin - malgré la consigne. Mais la plupart du temps on a eu des graphiques, avec, dans quelques copies, un dessin du type  témoignant peut-être encore d'une confusion (i, f_j) ...

La sous question a) [non abordée par 31 étudiants] est réussie par seulement 23 % des étudiants : il y a, explicitement ou non, confusion avec c), c'est à dire non identification du rôle de la place des quantificateurs dans $\forall \dots, \exists \dots$ par rapport à $\exists \dots, \forall \dots$. Et en effet la sous question c) [non abordée par 42 étudiants] est réussie par 57 % des autres étudiants. Ce qui est curieux, c'est qu'on n'a pas le même phénomène entre b) et d) - alors que formellement il y a la même disposition - 82 % des étudiants réussissent b) [39 n'ont pas abordés ce point] et 72 % réussissent d) [47 ne l'ayant pas abordé] . Enfin la sous question e) non abordée par 55 étudiants, est réussie par 59 % des autres - il y a surtout des erreurs consistant à dessiner la diagonale.... .

Les réponses à la douzième question nous ont permis de distinguer - qu'elles soient justes ou non - les formulations :

usuelle, du type	$(\forall I, \exists n, u_n \in I)$
intermédiaire, du type	$(\forall I, \exists u_n, u_n \in I)$
primitive, du type	$(\forall I, \exists x, x \in (u_n), x \in I)$
confusion (n, u_n) du type	$(\forall I, \exists n, n \in I)$

C'est sur le a) de leur exercice 7) que nous avons attribué de même le type de formulation des Sup C.

(2) D.D.I : développement décimal illimité.

b) Comparaison DEUG/Sup C (pour les questions identiques) - Blocs

Voici la répartition des résultats

REPARTITIONS DES RESULTATS AU PRETEST PAR QUESTION

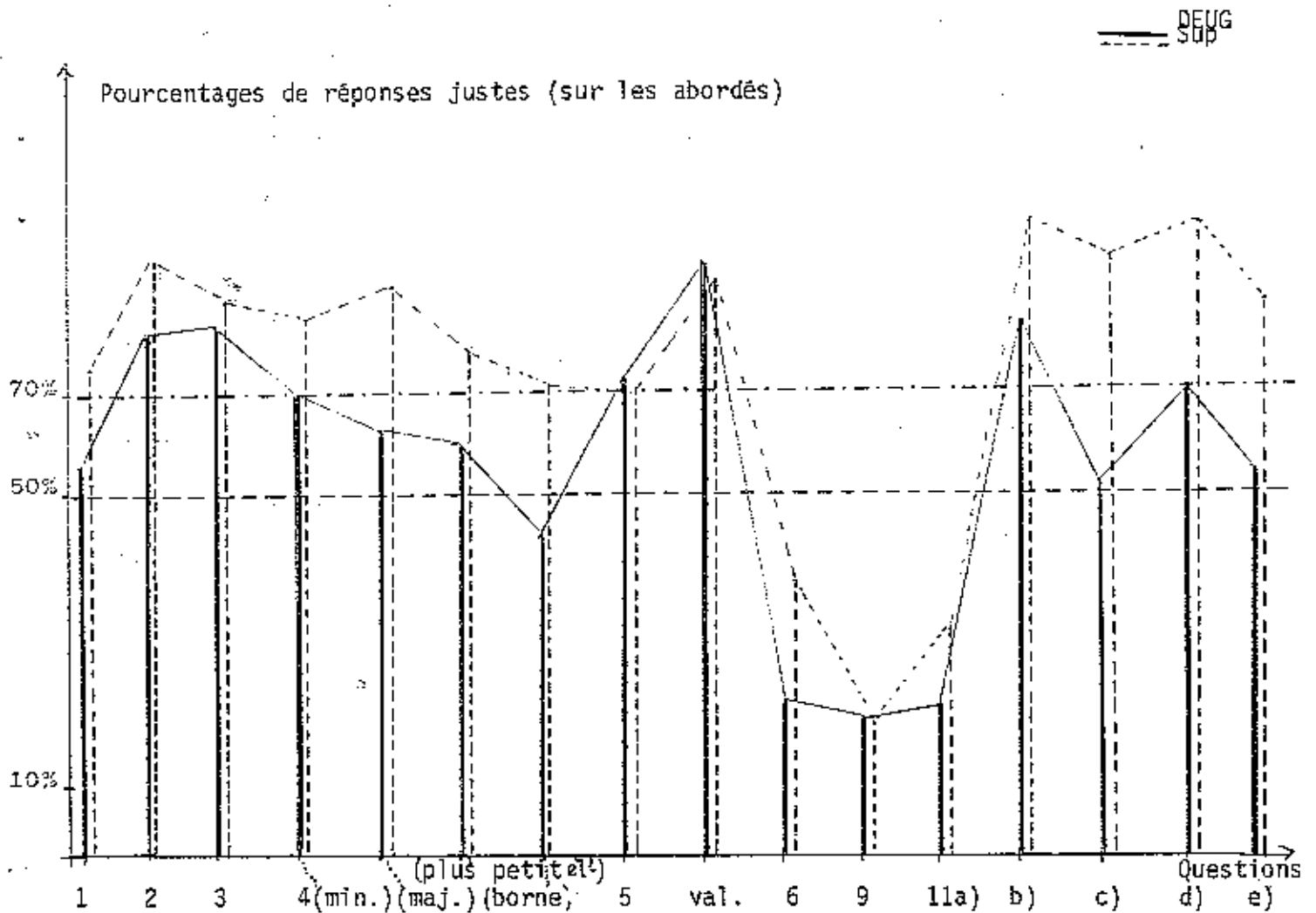
% réponses justes	1	2	3	4	MIN. MAJ.	+ gr. à l'émot.	bor- ne inf.	5. sensval.	6.	9	11a)	b)	c)	d)	e)	
DEUG	59%	80%	81%	70%	65%	63%	49%	73%	94%	24%	21%	23%	82%	57%	72%	59%
Sup C	74%	91%	85%	82%	87%	77%	72%	71%	88%	42%	20%	35%	97%	92%	97%	85%

	Formulations usuelle	inter	prim
DEUG	29	30	37
SUP C	16	16	2

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants concernés ayant abordé la question.

Ce qui nous semble très intéressant, outre le fait que les descriptions qualitatives précédentes s'appliquent parfaitement bien aux copies de Sup C, c'est que d'une part les répartitions des réponses justes ne sont pas significativement différentes pour les questions 3, 5, 9 et que d'autre part, même si il y a de meilleurs pourcentages en Sup C pour les questions 1, 4 ii), iii, iv), 6), 11a), c), e), l'allure générale des répartitions des réponses est la même (une seule exception: majoré meilleur que minoré en Sup C dans la quatrième question, sans doute parcequ'il n'y a plus l'erreur $n \rightarrow 0$).

REPARTITIONS DES REPONSES JUSTES AU PRETEST EN DEUG ET EN SUP. C



En particulier les questions largement réussies sont les mêmes, mais tout se passe comme si les mêmes notions étaient acquises, mais par moins d'étudiants (relativement) en DEUG qu'en Sup C. Ainsi si on prend comme "barre" 55 % de réussites, les questions 1) 2) 3) 4) i et ii) (seules recevables comme prérequis), 5), 11 b), 11 c), 11 d), 11 e) sont réussies dans les 2 cas, les questions 6), 9), 11a) conduisent à des échecs. Dans les 2 cas il y a non connaissance des DDI, et une grosse difficulté à donner du sens à des expressions formalisées non simples⁽¹⁾ (en respectant les règles du langage formel).

Par contre si on prend comme barre 70 % de réussites, on trouve comme acquis les questions 1), 2), 3), 4), 5), 11 b), c), d), e) en Sup C et seulement 2), 3),

(1) contenant des quantificateurs en cascade.

4) i), 5), 11 b), 11 d) en DEUG. L'écart est particulièrement net pour les questions 11). Autrement dit, connaissance des valeurs absolues, représentation graphique et interprétation d'expressions formalisées même relativement simples semblent constituer les "maillons intermédiaires" des prérequis supposés. - acquis par la majorité mais pas par les 2/3 des étudiants en DEUG, alors que 2/3 des élèves de Sup C savent les faire fonctionner (dans le cadre du prétest). On obtient une sorte de hiérarchie : questions 2), 3), 5), 11 b), 11 d) puis 4), 1), 11 c), 11 e) puis 6), 9), 11 a).

De plus l'écart entre Sup C et DEUG peut s'expliquer par l'absence en Sup C d'étudiants faisant de très mauvaises copies (avec $n \rightarrow 0$, confusion (i, f) ...), les autres étudiants étant tout à fait comparables au niveau des prérequis.

Par contre pour ce qui est des formulations, il y a une différence très marquée : quasi-absente en Sup C, la formulation primitive est utilisée dans un peu plus du 1/3 des copies en DEUG 1. Mais le prétest a été passé un peu plus tard en Sup C - peut être les étudiants y étaient-ils plus "dans le bain" (après les vacances).

Cela étant nous avons commencé par corriger les exercices l'un après l'autre et avons attribué sur cette base un type de formulation et une note sur 20 à chaque copie suivant le barème suivant (prétest DEUG) :

exercice 1	1
exercice 2	1
exercice 3	1
exercice 4	minoré (juste ou pas nommé) 1 majoré (" " ") 1 plus petit él ^é 1 borne inf ^{re} 1
exercice 5	1 pour le sens de variation, 1 pour les valeurs.
exercice 6	1
exercice 7	1 pour la définition des rationnels, 1 s'ils ont donné 3 irrationnels (ou 1 ou 2).
exercice 8	1 pour la négation, 1 pour le choix de la vraie.
exercice 9	1
exercice 11	5 (1 pour chaque numéro)

exercice 12	}	pas de points
exercice 10		

Pour les Sup C : même chose avec exercice 7 : 1 point pour chaque sous-question et exercice 8 : 1 point.

Mais pour mieux prendre en compte les réponses des étudiants sous forme d'acquis ou d'insuffisances sur une tâche précise nous avons regroupé des questions telles que la réussite à l'ensemble soit "significative" d'un certain prérequis - compte-tenu et de la tâche et de ce qu'on a vu se dégager comme hiérarchie. Nous pensons à des tâches correspondant à la mise en fonctionnement des propriétés élémentaires des nombres réels (et fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) [calculs sur $\mathbb{Q}$, inégalités ...], aux propriétés élémentaires d'ordre sur $\mathbb{R}$, aux représentations graphiques, aux manipulations de langage formel, à l'attribution de leur sens aux expressions formalisées Ainsi nous avons déterminé des "blocs" de connaissances prérequis de la façon suivante :

. E (comme élémentaire) constitué des questions 2, 3, 5

On attribue E(entier) si les 3 questions sont justes.

$E_{1/2}$ si une est fautive.

E_0 si tout est faux ou si toutes les questions ne sont pas abordées [cas rarissime].

"Avoir E" veut dire avoir su utiliser des connaissances élémentaires sur les réels, nous semblant prérequisées ...

Mais si E semble nécessaire, cela peut n'être pas suffisant : ainsi le fait de reconnaître que 2) est faux peut ne pas suffire à ne pas faire l'erreur en cours de calcul ou des erreurs du même type (cf. : l'erreur : $a < b$ $c < d \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$) ; par contre ne pas le reconnaître semble inquiétant sauf fautes d'étourderie !

Avoir E_0 - très rare - semble a priori assez alarmant.

Pour $E_{1/2}$, il y a plusieurs cas (a priori) : ou bien il y a étourderie (en particulier fantaisie dans 3), ou bien il y a erreur de soustraction des inégalités (tenace ou non), ou bien il y a erreur dans 5) sur le sens de variation (souvent étourderie !).

. O (comme ordre) constitué des 2 premières sous-questions de la question 4.

On attribue O si l'étudiant traite correctement majoration, minoration de l'ensemble $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$.

$O_{1/2}$ si l'une des 2 sous-questions est traitée correctement,

$O_{\emptyset}$ si tout est faux ou non abordé [cas rarissime].

Avoir $O_{\emptyset}$ veut dire qu'on ne sait pas [faire fonctionner] les définitions élémentaires sur l'ordre.

Avoir O ne voulant pas dire qu'on est très sûr (à cause des réponses "minoré" ou "majoré" sans indications des candidats minorant ou majorant)!

Avoir $O_{1/2}$ veut dire qu'on s'est trompé au moins une fois.

. G (comme graphe) constitué des questions 1) et 11), b), c), d), e).

On attribue G si tout est fait (sauf peut être un des points de 11) avec dessin.

$G_{1/2}$ si 1) faux et 3 sous-questions de 11) traitées ou au contraire si 1) est fait mais pas 11).

$G_{\emptyset}$ si rien n'est fait ou si 11) est fait sans dessin ou si tout est faux.

Avoir $G_{\emptyset}$ veut dire qu'on n'a fait aucun dessin (resp. aucun dessin correct) - on peut soupçonner là une vraie difficulté.

Avoir G veut dire qu'on sait réaliser des représentations graphiques (au sens large) - et ça semble relativement significatif.

Avoir $G_{1/2}$ signale que certaines représentations graphiques sont réalisées - mais pas toutes. Il se peut que ce soit la question des valeurs absolues dans 1) qui "fasse obstacle" plus que des questions vraiment de graphes - nous n'avons pas tenu compte dans un 1er temps des 2 types d'erreurs possibles dans la 1ère question. On peut penser que ($E_{1/2}$ et $G_{1/2}$) témoignent souvent d'une insuffisance sur la mise en fonctionnement des réels.

. R (comme rationnels ou réels) : on attribue R si la définition des rationnels comme quotient de 2 relatifs (avec dén. $\neq 0$) est donnée - y compris si il y a oublié du dénominateur non nul ou oublié des négatifs - et si on a cité 3 ir rationnels - y compris si on en a cité seulement 1 ou 2, à l'exclusion d'autres réels (ou complexes!).

Avoir $R_{\emptyset}$ signifie que la question n'a pas été abordée, ou bien est fausse complètement. Il y a là une question de définition, qui peut ne préjuger en rien d'une mise en fonctionnement, ou qui peut signaler au contraire un modèle de $\mathbb{R}$ insuffisant, sans qu'on puisse trancher.

De même que "avoir R " peut révéler ou bien une bonne représentation de $\mathbb{R}$ ou bien une bonne connaissance des définitions, insuffisante à elle seule. $R_{1/2}$ est attribué si une des 2 parties de la question est correctement traitée - en général c'est la 1ère.

- . F (comme formalisation) : ce bloc est "réservé" aux manipulations "internes" au langage formel. On attribue F si la question 8) a) (resp. 7) en Sup C) est correcte (connaissance des automatismes de la négation) et si les formulations du 12) sont correctes - usuelles ou intermédiaires. Avoir F signale donc une certaine connaissance des règles du langage formel, ignorées dans la cas $F_{\emptyset}$, à moitié sues si $F_{1/2}$ est attribué.
- . S (comme sens) : ce bloc, à notre avis très important, correspond à la possibilité d'attribuer un sens à des expressions en langage formel. Il est attribué si les questions 6), 11 a) et 8) ii) sont correctes. Il nous semble significatif d'avoir S - cas très rare au demeurant - ou même $S_{1/2}$ (correspondant à au moins une des 3 questions correctes). De même $S_{\emptyset}$ nous semble signaler un manque réel de connaissances préalables.

Ainsi les blocs significatifs nous semblent être, a priori : $E_{\emptyset}$, (E : simple condition nécessaire ?), $O_{\emptyset}$ et peut être $O_{1/2}$, $G_{\emptyset}$ et G , peut être $G_{1/2} \sqcup^{(1)} E_{1/2}$, R (condition nécessaire ?), F et $F_{\emptyset}$, S , $S_{1/2}$, $S_{\emptyset}$.

Nous y avons rajouté $F_{1/2} \cup S_{1/2}$ - garant d'une certaine connaissance des "choses" formelles, $E_{1/2} \cup O_{1/2} \cup R_{1/2} \cup G_{1/2}$ garant de certaines connaissances élémentaires sur $\mathbb{R}$ et le nombre de blocs vides, ce qui tient compte de la quantité de prérequis.

Ces attributions de blocs, on le voit, sont un peu arbitraires et relativement "grossières" - la perte d'information nous semble compensée par ce qu'on gagne en organisation de ces informations. Par exemple on aurait eu beaucoup plus de mal à faire des classifications si on avait cherché systématiquement à corréler chaque question et les productions ultérieures des étudiants.

(1) Ce signe entre deux blocs symbolise le fait d'avoir chacun des deux.

Mais avant d'engager ces constats de corrélation prérequis/acquisitions nouvelles, nous allons présenter les résultats au prétest par blocs - par groupe de TD et globalement, en notant les séries de bac ce qui permettra au passage de souligner la différence entre les groupes, et les liens avec le bac.

c) Les résultats par blocs au prétest - étude qualitative et quantitative

Ils sont présentés dans les tableaux T₁ à T₇ (par étudiant) et par groupe dans le tableau ci-dessous. Attention, en Sup C les blocs F et surtout S comptent une question en moins [8) ii)] et le 8) i) est plus difficile ; de plus R n'existe pas en Sup C. Les pourcentages sont calculés sur le total des effectifs de la colonne correspondante. Lorsque les effectifs sont petits, les pourcentages ne sont pas calculés.

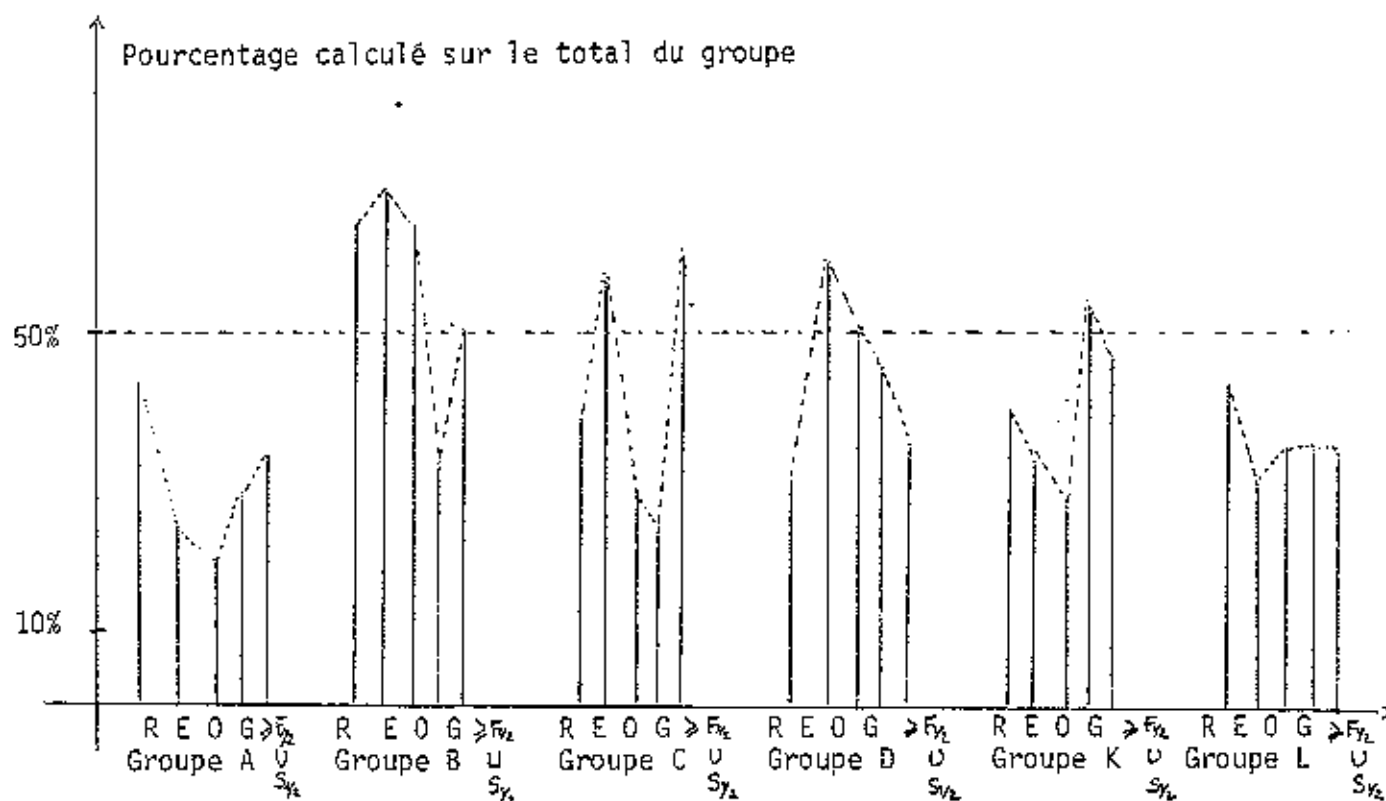
Groupes	Total DEUG	A	B	C	D	K	L	Sup C
Effectif	123	21	22	22	20	19	23	35
Moyenne du groupe au prétest	10,2	8	12	9,5	10,4	10,3	10,3	10,6
E ₀	4	0	1	2	0	0	1	1
E	53 43%	43%	64%	38%	30%	46%	43%	60%
O ₀	21 17%	19%	1	18%	3(15%)	33(5)	4(17%)	(28%)
O _{1/2}	36 46%	42%	32%	35%	35%	40%	48%	29%
G ₀	33 27%	33%	23%	41%	15%	20%	26%	(28%)
G	43 35%	29%	32%	23%	43%	33%	35%	51%
R	36 46%	24%	68%	57%	60%	33%	30%	
< E _{1/2} UG _{1/2} chacun	42 34%	24%	23%	53%	35%	40%	30%	
F ₀	35 46%	32%	41%	23%	40%	53%	43%	31%
F	10 8%	2	0	1	2	2	1	2
S ₀	18 15%	48%	18%	23%	20%	40%	30%	43%
S _{1/2}	79 64%	52%	77%	64%	70%	53%	65%	46%
S	4	0	1	3	0	1	1	4
Fus	26 21%	28%	27%	18%	15%	20%	17%	40%
Fin	29 24%	14%	1	41%	2	27%	42%	49%
For	32 26%	28%	27%	3	30%	27%	30%	2
> F _{1/2} UG _{1/2} chacun	53 43%	33%	50%	40%	35%	47%	35%	47%
> E _{1/2} UG _{1/2} UG _{1/2} UG _{1/2}	69 56%	38%	48%	35%	70%	53%	52%	80%
> 38	26 21%	28%	14%	23%	15%	33%	17%	0

Globalement, on constate qu'aucun bloc de connaissances n'est attribué à la majorité absolue des étudiants, avec la hiérarchie suivante :
Réels (45 %), Elémentaire (43 %), Ordre (37 %), Graphe (35 %), Formulation (8 %), Sens (5 %).

On peut souligner que le bloc vide le plus attribué (à presque un étudiant sur 2) est celui qui correspond à la formalisation vide ($F_{\emptyset}$), alors que à peu près la même proportion (43 % - presque tous les autres, donc) s'est vue attribuée au moins chacun des mi-blocs sens et formalisation ($\geq F_{1/2} \cup S_{1/2}$).

Cela étant, on est aussi frappé de l'hétérogénéité des groupes, si la moyenne des notes au prétest varie de 8 à 12, c'est du simple au double, si ce n'est au triple, que varient suivant les groupes les répartitions de presque tous les blocs et types de formulation. De plus les maxima ou minima ne sont jamais atteints dans les mêmes groupes, ce qui donne des profits très contrastés. Seuls les groupes A et L seraient comparables : très grossièrement, on peut regrouper les groupes A, K, L et B, C, D ; on verra plus loin si on retrouve ces "paquets".

RÉPARTITION DES BLOCS DE PREREQUIS PAR GROUPE DE T.D.



Il y a une différence entre les étudiants dont on peut se demander si elle n'explique pas, au moins partiellement, les résultats constatés, c'est la série du baccalauréat passé avant d'entrer à l'université.

On a donc cherché les répartitions correspondantes, par groupe pour la note au pré-test et globalement, vu les effectifs, pour les blocs. On n'a en effet tenu compte que des étudiants ayant effectivement passé leur bac l'an dernier, et parmi eux, on n'a retenu que ceux dont on connaissait la série du bac. Cela réduit à 49 les bac D et à 44 les bac C. Voici ces répartitions.

REPARTITION DES NOTES AU PRETEST SELON LA SERIE DU BAC

groupe catégorie	A	B	C	D	K	L	total
BAC C effectifs	7	7	10	10	5	5	44
moyenne	10,3	13,6	12,4	12,6	14	13	12,5
BAC D effectifs	9	7	10	4	5	14	49
moyenne	6,7	10,3	7,6	6	6,8	9,3	8,1

On constate, aussi bien globalement (moyenne 12,5 contre 8,1), que dans chaque groupe, l'hétérogénéité entre les Bac C et D; cependant l'exemple des groupes B et C où il y a respectivement autant de C que de D et où les performances sont très différentes, suffit à montrer que cette différence n'explique pas tout, loin de là. Pour préciser cependant les points cruciaux de cette hétérogénéité, nous avons regardé les répartitions des blocs et le nombre de blocs vides selon la série du bac. On constate (cf. tableau ci-joint) qu'une des différences les plus marquées intervient sur le nombre de blocs vides: 81% des bac C ont au plus 1 bloc vide, alors que 69% des bac D ont au moins 2 blocs vides... Vu ce que nous allons voir plus loin

sur l'importance du nombre des blocs vides dans la réussite, ce résultat est très important. De plus, il y a chez les étudiants ayant passé le bac C significativement plus de formulations usuelles et uniformément moins de blocs vides, avec les différences les plus marquées pour le bloc O_0 , les moins marquées pour le bloc F_0 et des différences du même ordre pour les blocs G_0, R_0, S_0 . Enfin, pour les blocs où la comparaison a un sens, les profils des bac C DEUG et des Sup C sont très proches; on a même vu que la moyenne des Bac C DEUG était plus élevée que celle des Sup C mais cela tient sans doute à la différence des questions 7) et 8) (plus difficiles en Sup C).

REPARTITIONS DES BLOCS ET NOMBRES DE BLOCS VIDES SELON LA SERIE DU BAC

prérequis	Type de formulation			NOMBRE DE BLOCS VIDES					
	primi.	usuel	inter.	0	1	2	3	4	5
Bac C	33%	38%	19%	43%	38%	17%	1	0	0
Bac D	27%	12%	23%	12%	20%	31%	20%	18%	1

prérequis	E_0	G_0	O_0	R_0	F_0	S_0	$S_{1/2}$
Bac C	0	12%	0	12%	31%	19%	81%
Bac D	2	39%	37%	35%	48%	37%	63%

prérequis	E_0	G_0	O_0	F_0	S_0
Bac C	0	12%	0	31%	19%
Sup C	1	8%	8%	31%	43%

Les pourcentages sont calculés sur le total des effectifs (44 bac C, 49 bac D et 35 Sup C).

On a enfin vérifié que les répartitions des redoublants renforçaient l'hétérogénéité, comme le prouve le petit tableau suivant.

REPARTITIONS DES MOYENNES AU PRETEST SELON LES GROUPES POUR LES REDOUBLANTS

Groupes	A	B	C	D	K	L
moyenne	7,6	13,3	15	9,9	8	11
moyenne de ceux qui viennent de SUP	10	14			15	

Indications sur les corrélations entre l'origine sociale des étudiants et leurs acquis antérieurs.

Nous avons déterminé la catégorie socio-professionnelle (C.S.P.) suivant l'indice INSEE de 1 à 9 en nous basant sur les professions du père⁽¹⁾ (et éventuellement de la mère) indiquées sur la fiche d'inscription. Ces renseignements ne sont pas toujours assez précis pour établir avec certitude l'indice cherché. Cependant, malgré ces insuffisances, nous avons dressé le tableau croisant la catégorie socio-professionnelle (en regroupant ouvriers et employés) d'une part et la série de bac, la note au prétest, le type de formulation, et chaque bloc d'autre part. Pour simplifier nous n'avons retenu que la note au prétest supérieure ou égale à 8 (resp. inférieure à 8) et n'avons considéré que les blocs E, R, O, G pleins et $F \geq \frac{1}{2}$, $S \geq \frac{1}{2}$.

REPARTITIONS DES RESULTATS AU PRETEST SELON LA C.S.P.

C.S.P.	C	D	Note pré-test		type formulation					E	R	O	G	$F \geq \frac{1}{2}$	$S \geq \frac{1}{2}$	total
			≥ 8	< 8	Ø	prim	int	usu	(n,u)							
2,9	6	7	9	4	3	4	3	3	0	4	6	4	4	6	6	13
8				31%	23%	31%	23%	23%		31%	46%	31%	31%	46%	46%	
3	25	17	32	12	10	9	7	16	2	20	18	16	19	28	31	44
				27%	23%	20%	16%	36%	5%	45%	41%	36%	43%	64%	70%	
4	8	14	19	6	5	7	5	3	5	16	12	11	8	14	19	25
				24%	20%	28%	20%	12%	20%	64%	48%	44%	32%	56%	76%	
5,6	11	8	17	4	4	8	5	2	2	9	11	9	6	10	14	21
				19%	19%	31%	24%	9,5%	9,5%	52%	43%	52%	29%	48%	67%	

Les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne sauf pour les 2 premières cases (calcul sur le total correspondant, inférieur au précédent vu nos informations).

On constate que les étudiants d'origine sociale la plus modeste ont parmi les meilleures notes au prétest (19% d'entre eux ont moins de 8 contre 24% de ceux issus des cadres moyens et 27% de ceux issus des cadres supérieurs et professions libérales). Par contre, ils ont massivement un moins bon type de formulation puisque seulement 9,5% d'entre eux ont donné une formulation usuelle, contre 36% des étudiants issus des couches supérieures, et que 31% d'entre eux ont une formulation primitive, contre

(1) C.S.P.: 2:commerçants et petits patrons, 3:cadres supérieurs et professions libérales, 4:cadres moyens, 5:employés, 6:ouvriers, 8:militaires ..., 9:retraités ...

20% globalement. De plus, et cela ne fait que renforcer ce résultat, ils ont moins souvent que les autres étudiants, mais surtout que les étudiants issus des cadres supérieurs et professions libérales, les blocs G et F_{3/2}; ils ont les mêmes performances en ce qui concerne les blocs S et E; ils sont même un peu meilleurs dans les blocs R et O. Tous ces résultats convergent vers une tendance, qui sera à confirmer, à savoir que, si globalement les étudiants d'origine sociale modeste arrivés en DEUG sont largement aussi bons que les autres, si ce n'est meilleurs, ils affichent plus de difficultés que les autres en ce qui concerne toutes les manipulations de signifiants, graphiques, formulations, jeux internes au langage formel. Autrement dit ils seraient plus embarrassés par les signifiants que par les signifiés... Cela nous semble pouvoir être rattaché aux difficultés en français bien connues pour ce genre d'élèves. Cela signifie en même temps qu'on peut réussir jusqu'à un certain point malgré ces insuffisances (?). Cela évoque aussi la difficulté de faire jouer le "jeu de cadres" de R. Douady avec des enfants défavorisés justement, faute semble-t-il de suffisamment de cadres et donc de signifiants différents pour un même signifié. Cela veut aussi dire qu'il y a peut-être d'autres dialectiques à faire jouer pour ces enfants, qui peuvent s'en sortir autrement...

Et si les différences ci-dessus n'étaient pas significatives?

Nous nous sommes livrées à une petite expérience, en cherchant les répartitions des mêmes facteurs chez les étudiants pairs et impairs (sur nos listes).

Voici ces répartitions, pour le type de formulation.

Type de formulation	Ø	Primitif	Intermédiaire	Usuel.
Etudiants pairs	11 18%	18 30%	17 28%	11 18%
Etudiants impairs	16 26%	13 21%	12 19%	15 24%

On constate bien qu'aucune différence ne dépasse 9%; or nous avons considéré dans tout ce travail que deux pourcentages différaient significativement s'ils étaient distants d'au moins 15%.

2) Le posttest sur les suites

Voici le texte proposé aux étudiants de DEUG sous forme d'interrogation écrite en T.D., posée après trois semaines d'activité sur les suites en T.D.

1. Donner trois exemples de suites divergentes.
2. Une suite convergeant vers 1 par valeurs inférieures à 1 est-elle croissante à partir d'un certain rang ? Justifier.
3. Etudier la convergence des suites qui vérifient $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$.
- 4; Etudier la convergence des suites de terme général u_n définies ci-dessous:

$$u_n = \frac{1}{n} (\cos n\theta + 1);$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

5. Etudier la convergence de la suite récurrente définie par

$$u_0 = 0$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{3u_n + 2}.$$

En Sup C le texte est légèrement différent mais les questions 2,3 et 4 sur les quelles est basé notre travail sont identiques (posées en 2me, 4me, 3me question).

Là aussi, le texte a été proposé après trois semaines d'activité sur le sujet.

Rappelons encore que les premières séances de T.D. sur les suites furent identiques (à peu près) dans tous les groupes de T.D. (et en Sup C) avec même une première séance avant toute intervention magistrale sur le sujet.

Les résultats à ce posttest sont matérialisés d'une part par une note (cf. tableaux T_1 à T_7 en annexe) et d'autre part par un relevé de procédures aux questions qui nous intéressent.

Les notes sur 6 ont été attribuées de la façon suivante (sans finesse) :

- 1 pour une réponse juste à la convergence de chaque suite du 4;
- 2 pour une réponse correcte au "vrai ou faux" posé en 2., avec seulement 1 si la réponse correcte est donnée sans justification,
- 2 pour une réponse correcte à la convergence des suites (u_n) vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$ avec seulement 1 si la procédure amenant à un résultat juste est insuffisante.

Avant de donner les corrélations entre les prétest et posttest, nous livrons une rapide analyse des procédures relevées dans les questions 2. et 3. avec les répartitions correspondantes dans chaque groupe de DEUG et en Sup C, et aussi suivant la série du bac (pour ceux qui l'ont obtenu l'an dernier).

a) Résultats par questions

Dans l'exercice 2., nous avons distingué les procédures erronées suivantes:

- * "non $\wedge = \vee$ " : Si la suite u_n n'était pas croissante elle serait décroissante ce qui est impossible donc la suite u_n est croissante.
- * MAJ. : Comme 1 est majorant, la suite est nécessairement croissante.
- * DYMO : Comme la suite converge, c'est qu'elle se rapproche en croissant de sa limite. Il y a là une expression d'un modèle dynamique monotone (cf. Robert(1)).
- * "soustractions d'inégalités" : A partir de la définition en (ε, N) , écrite pour u_n et u_{n+1} , on soustrait terme à terme; tout trafic de ce genre est affecté à cette étiquette.

Les autres procédures erronées, moins fréquentes, sont regroupées en "autres".

Les procédures correctes donnent lieu soit à un dessin soit à un contre-exemple explicite.

Restent les procédures sans démonstration ou non terminées.

Dans l'exercice 3., nous avons distingué parmi les procédures erronées :

- * la procédure "produit faux" : $\lim nu_n = \lim n \cdot \lim u_n$, encore appelée "PLI"
- * la procédure "scalaire" : $\lim nu_n = n \lim u_n$, encore appelée "SCA";
- * la procédure "par l'absurde" : si la suite u_n ne convergeait pas alors ...; cette procédure, encore appelée "DVG" est évidemment incorrecte ici car on ne peut envisager tous les cas;
- * la procédure "RECFO" : reconnaissance de la forme de la définition avec une limite dépendant de $n, \frac{1}{n}$ en l'occurrence;
- * les procédures ambiguës consistant à écrire $\lim u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n \rightarrow \frac{1}{n}$ sans qu'on sache pourquoi;
- * les procédures explicitant u_n comme $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n+\beta}$...
- * les procédures du genre $\left| u_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$.

Parmi les procédures correctes, nous avons distingué l'encadrement ("DEC"), la procédure "produit juste" ou "PRO" ($\lim u_n = \lim nu_n \cdot \lim \frac{1}{n}$), et la procédure "équivalents" ou "EQU" ($u_n \sim \frac{1}{n}$ donc u_n tend vers 0).

Restent les copies non terminées.

Nous n'avons pas distingué ici pour les procédures " $\lim u_n = \frac{1}{n}$ " de " $\lim u_n = \frac{1}{n} = 0$ " ou " $u_n \rightarrow \frac{1}{n}$ " de " $u_n \rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ".

Nous avons donc cherché les répartitions de ces différentes procédures par groupe de T.D. (et globalement). Rapidement disons que pour l'exercice deux, on cons-

tate une différence significative entre les procédures des étudiants de Sup C et ceux du DEUG (61 % de réussites chez les premiers contre 15% chez les seconds) et une assez grande homogénéité entre les groupes de DEUG. Par contre pour l'exercice trois, c'est mieux réussi en DEUG et il se marque une plus grande diversité entre les groupes. Ces résultats apparaissent dans les tableaux ci-dessous.

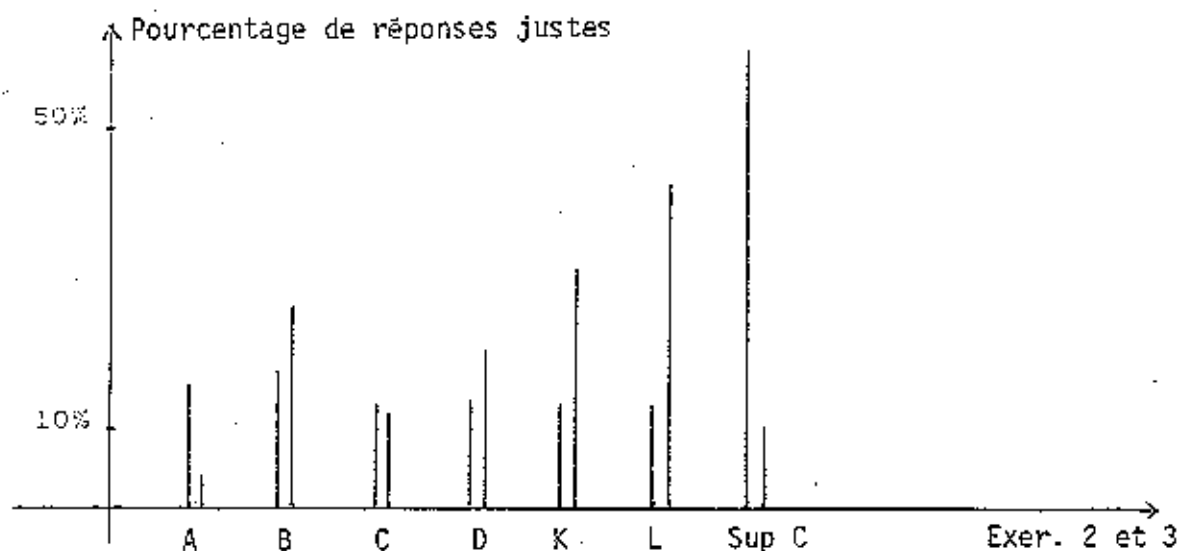
REPARTITIONS DES PROCEDURES AUX DEUX EXERCICES DU POSTEST

EXER. 2 Groupe	Ø	Juste	Juste non S.D.	non ↑ = MAJ	BYMO	Soustr. négal.	Autre faux	total faux	non term.	TOTAL
A	7	3 16%	2	2	4	0	3	12 63%	2	26
B	7	3 18%	1	3	2	1	5	14 82%	1	24
C	5	2 14%	0	2	4	2	3	12 79%	0	19
D	7	2 14%	1	2	1	2	4	11 86%	0	21
K	3	3 14%	0	1	4	6	6	18 86%	0	24
L	10	2 13%	0	1	2	3	2	5 13 87%	0	25
TOTAL	39	15 15%	5	11	17	14	17	19 80%	3	139
SUP C	9	16 61%	0	3	0	3	1	3 38%	0	35
Bac C Deug	8	9 33%	2	4	5	1	4	1 17 63%	1	35

EXER. 3 Groupe	Ø	DEC de EQU	PRO	Total juste	non term.	REC.FO.	SCA	DVG	PLI	$ u_n - \frac{1}{n} $ $\downarrow$ $\Rightarrow u_n = 0$	$u_n = \frac{1}{n}$ $\downarrow$ $\Rightarrow u_n = 1$	FAUX Autre	Total FAUX	Total
A	3	1	0	1 4%	6	2	3	2	2	1	1	5	16 70%	26
B	2	6 27%	0	6 27%	4	3	0	2	1	0	4	2	12 55%	24
C	4	0	2	2 13%	1	0	0	0	6	2	2	2	12 80%	19
D	2	3	1	4 21%	1	3	0	0	0	0	5	6	14 74%	21
K	5	4	2	6 32%	2	0	0	1	2	0	3	5	11 58%	24
L	4	9	0	9 43%	3	2	0	0	1	2	3	1	9 43%	25
TOTAL	20	23	5	28 23%	17	10	3	5	12	5	18	21	74 62%	139
Sup C	11	3	0	3 11%	5	3	0	0	0	6	1	4	16 67%	35
Bac C Deug	4	11	0	11 35%	3	4	0	3	3	0	3	4	17 56%	33
Bac D deug	8	7	0	7 22%										44

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice par ligne.

Répartition des réponses correctes aux exercices 2. et 3. par groupe



On ne retrouve pas les types de groupes dégagés sur les prérequis.

Le tableau ci-dessous permettant l'étude des productions simultanées d'erreurs aux exercices 2. et 3. ne nous semble pas présenter d'autre intérêt que de signaler l'association privilégiée des procédures "soustractions d'inégalités" dans 2. et "juste" dans 3., ce qui peut s'expliquer par le recours à la définition dans les deux cas (c'est toujours à partir de la définition en (ϵ, N) que les étudiants font leur soustraction erronée dans 2.

Production simultanée d'erreurs dans les exercices 2. et 3.

Ex. 3 Ex. 2	DVG	PLI, SCA	RECFO	Ambig.	Autres faux	$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+2}$	vides non ter	juste	Total
non $\nearrow = \searrow$	1	2	1	1	0	3	1	2	11
MAJ	0	3	0	4	1	2	7	1	13
DYMO	1	1	1	1	1	4	1	3	13
Soustrac. inégalit.	0	2	0	0	4	1	2	8	17
Autres faux	1	2	2	0	3	2	4	5	19
Vides non term.	1	3	4	2	6	5	12	5	38
Juste	2	2	2	1	0	1	5	6	19
Total	6	15	10	9	19	18	32	30	135

b) Comparaison prétest/posttest

i) En DEUG

Dans la population ayant rendu un posttest et un prétest (soit 103 étudiants de DEUG) 61 étudiants ont eu plus de 2 sur 6 au posttest, soit 59%; par ailleurs on a comparé à ce pourcentage le pourcentage correspondant calculé sur divers groupes d'étudiants, constitués de ceux s'étant vu attribuer tel ou tel bloc de connaissance.

COMPARAISON PRETEST/POSTEST

BLOCS	O	R	Form. Inter. $\geq F_{1/2}$	Form. usuel. $\geq S_{1/2}$	G	≥ 4 blocs pleins	Form. prim.	G_0	O_0	S_0	F_0	note < 8	> 30
Pourcentage de notes ≥ 2	67%	70%	64%	73%	72%	74%	61%	52%	44%	44%	40%	42%	33%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant un bloc donné.

De plus, parmi les étudiants concernés et ayant passé le baccalauréat l'an dernier, 74% (soit 26 sur 35) des bac C et seulement 45% (soit 19 sur 42) des bac D ont eu plus de 2 au posttest. En conclusion, la corrélation la plus forte entre insuffisance de prérequis et échec au posttest est la présence (quasi rédhibitoire) d'au moins trois blocs vides au prétest, critère le plus significativement lié à l'échec.

Ensuite on aurait la note au prétest inférieure à 8, S_0 et F_0 , O_0 ; série de bac D, G_0 comme plutôt associés à l'échec; au contraire, le bloc G, le type de formulation usuelle, la série de bac C, le bloc R, avoir au moins $S_{1/2}$ et $F_{1/2}$ apparaissent liés à la réussite ainsi qu' une note au prétest supérieure ⁽¹⁾ à 8.

ii) En Sup C, il y a 71% de notes supérieures ou égales à 2. On trouve aussi que les blocs O , $F_{1/2}$ et $S_{1/2}$ sont associés plutôt à la réussite (parmi les étudiants correspondants, il y a 82% et 81% de notes supérieures ou égales à 2); les blocs G_0 , S_0 et F_0 et le fait d'avoir plus de deux blocs vides sont plus associés à l'échec; ceci renforce les résultats précédents (rappelons qu'il y a un bloc de moins en Sup C).

Nous avons relevé, pour un certain nombre de procédures erronées, les prérequis et notes au prétest correspondants; voici le tableau de ces répartitions, les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne.

(1) Inégalité large

REPARTITIONS DES PREREQUIS CORRESPONDANT AUX PROCEDURES ERRONEES

Les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne

Procédures prérequis	DVG	non 2-V	DYMO	Soustr. [négat]	sca, pl	RECFO	MAJ	JUSTE Ex. 2	$u_h = \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n+p}$	Global
note < 10	1	5	2	5	5	2	3	3	6	
note ≥ 10	4	6	5	4	7	6	10	11	9	
form. u.slr.	2	1	2	3	1	2	1	11	1	21%
form. int.	0	2	1	4	4	1	4	2	2	24%
form. prim.	0	5	3	1	5	3	4	4	2	26%
$E_{\emptyset}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
$E_{1/2}$	1	3	3	5	5	3	10	4	9	
E	4 80%	3 27%	4 57%	4 44%	6 50%	5 62%	3 23%	10 71%	6 40%	43%
$O_{\emptyset}$	0	1	2	3	4	3	1	1	1	
$O_{1/2}$	1	3	2	4	6	4	9	3	6	
O	4 80%	7 64%	3 43%	2 22%	2 17%	1 12%	3 23%	10 71%	8 53%	37%
$R_{\emptyset}$	1	1	2	3	4	1	2	1	4	
$R_{1/2}$	1	4	2	5	3	1	5	4	3	
R	3 60%	6 64%	3 43%	1 11%	5 42%	6 75%	6 46%	9 64%	8 53%	46%
$G_{\emptyset}$	0	3	1	2	2	1	2	2	2	
$G_{1/2}$	3	4	2	3	5	5	5	4	7	
G	2 18%	4 36%	4 57%	4 44%	5 42%	2 25%	5 46%	8 57%	6 40%	35%
$F_{\emptyset}$	2	2	2	5	6	5	6	3	5	
≥ $E_{1/2}$	3 60%	9 82%	5 71%	4 44%	5 42%	3 37%	7 54%	11 78%	9 60%	55%
$S_{\emptyset}$	0	1	3	2	4	4	3	2	3	
≥ $S_{1/2}$	5 45%	10 90%	4 57%	7 73%	8 67%	4 50%	10 77%	12 86%	12 80%	69%

Les interprétations que nous allons donner maintenant ne peuvent être qu'indicatives vu les effectifs.

* Remarquons d'abord que les copies où la procédure à l'exercice 2. est correcte ont des performances supérieures à la moyenne (significativement) dans tous les blocs et ce sont les seules ayant cette caractéristique parmi les copies étudiées.

* La procédure "DVG" (raisonnement par l'absurde dans l'exercice 3.) se trouve dans de très bonnes copies ayant tout spécialement les blocs E, O et S. On peut supposer que cette erreur ne sera pas tenace.

* Les procédures "DYMO" (recours à un modèle dynamique monotone ou monotone) se rencontrent dans de bonnes copies aux quelles sont attribuées plus qu'en moyenne les blocs G et F. Faut-il y voir une facilité de recours au graphe ou à la formule, traductions (visuelles) d'une situation ?

* On ne peut rien dire de particulier sur les erreurs du type $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{n+p}$.

* Les erreurs type "reconnaissance de forme" sont dans de relativement bonnes copies où les blocs E et R sont attribués plus qu'en moyenne mais les blocs O et S au contraire attribués moins qu'en moyenne. Il y aurait peut-être là l'indice du fait que faire fonctionner l'ordre sur $\mathbb{R}$ (cf. bloc O) relève d'une autre forme de raisonnement qu'appliquer les définitions élémentaires sur $\mathbb{R}$, y compris sur les inégalités (cf. E), à savoir un raisonnement non "algorithmisable"; de même avoir le bloc R peut signifier savoir les définitions (y compris par coeur) mais pas du tout savoir les faire fonctionner. Cette dernière qualité caractériserait plutôt ceux qui ont le bloc S (sens). Les étudiants correspondant aux erreurs de "reconnaissance de forme" auraient à leur disposition des définitions et des algorithmes mais auraient des difficultés à faire fonctionner des raisonnements d'analyse plus fins.

* Or les erreurs du type "procédure scalaire ou produit faux" ($\lim u_n = n \lim u_n$ ou $\lim u_n = \lim n \cdot \lim u_n$) se trouvent dans des copies où le bloc O est moins attribué qu'en moyenne; et ce sont justement des erreurs correspondant à l'utilisation illégitime ici de raisonnements algébriques donc algorithmisables; cela renforce notre hypothèse sur le bloc O.

* Les soustractions d'inégalités (et autres trafics du même genre) se trouvent dans de moins bonnes copies, où le bloc R, par contre, est moins attribué qu'en moyenne. On retrouverait l'association "savoir ses définitions" et "connaître les règles élémentaires sur $\mathbb{R}$ ": ici déficience simultanée ! Cependant le bloc E est attribué à ces copies dans la même proportion qu'en moyenne, ce qui peut amener à nuancer.

Rappelons que ce type d'erreurs est aussi plus associé que toutes les autres à des procédures justes à l'exercice 3. Le vraisemblable recours assez systématique à la définition que révèle cette association ne se traduit pas de façon évidente au niveau des prérequis.

* Enfin les deux types d'erreurs liés à des conceptions erronées de l'ordre sur $\mathbb{R}$, (une suite non croissante est décroissante et l majorant implique la croissance de la suite) apparaissent dans des copies où le bloc E est moins attribué qu'en moyenne. De plus la première des deux erreurs ci-dessus se retrouve dans des copies où les blocs O, R et F sont plus attribués qu'en moyenne. On aurait là déficience simultanée de l'application des définitions élémentaires sur $\mathbb{R}$ et des définitions élémentaires sur l'ordre, ces erreurs ne correspondant pas à un raisonnement de type non algorithmique, bien au contraire, ceci s'avérant ainsi non contradictoire avec ce qui précède.

Ainsi, il semblerait que le bloc O corresponde à la possibilité de produire des raisonnements de type non algorithmique, le bloc E soit plus lié à une simple utilisation des règles élémentaires (type algorithme) et le bloc R plus lié à l'apprentissage de définitions. Avoir R et E relèverait plus de la mémoire et d'une mise en application simple des règles simples d'où éventuellement leur place dans la hiérarchie dégagée au début de ce paragraphe; avoir O traduirait la capacité de sortir de ce type de démarche; les blocs G et F seraient associés à la possibilité de traduire en graphe ou en formule des signifiés (passage signifié $\rightarrow$ signifiant et jeux de signifiants); et le bloc S correspondrait au passage inverse signifiant $\rightarrow$ signifié, dans tous les types de raisonnements, d'où son importance (prise de sens).

c) Comparaison Sup C et Bac C DEUG (posttest)

On ne retrouve plus du tout les mêmes répartitions de procédures, en tout.

cas pour les exercices 2. et 3. En effet l'exercice 2. est nettement mieux réussi en SupC, l'exercice 3. nettement mieux réussi en DEUG (bac C passé l'an dernier); de plus les répartitions de procédures erronées ne sont pas comparables. Etant donné les résultats obtenus auparavant sur la grande similitude des prérequis, on peut voir dans ces différences le résultat d'effets d'enseignement, d'autant plus intéressants qu'ils ne vont pas toujours dans le même sens. Pour renforcer encore ce constat en faveur des effets d'enseignement, remarquons que parmi les étudiants de DEUG ayant passé le bac D l'an dernier, réputés donc moins bons que les étudiants de Sup C, 22% répondent correctement à l'exercice 3. contre seulement 11% en Sup C...

3) La première interrogation écrite sur les fonctions (DEUG)

Voici son texte, proposé à peu près dans les mêmes termes à tous les groupes; on remarquera l'analogie (volontaire) entre les exercices 2. et 3. du posttest et de ce texte (ces questions-là ayant été posées de façon identique à tous les étudiants). Pour ces deux exercices, on appellera 1re version la version suites (posttest) et 2me version la version fonctions (ci-dessous).

1. Question sur les polynômes
2. Soit f une fonction strictement positive tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Existe-t-il un intervalle $[a, +\infty[$ où f est décroissante ?
3. Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1$. Etudier la convergence de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$. Déterminer les intervalles de continuité de f . Que se passe-t-il en 0 ?
5. Vrai ou faux : $\sin x \sim x \quad (x \rightarrow \pi)$
 $\cot g x \sim x \quad (x \rightarrow 0)$.

a) Comparaison des questions communes au posttest et à l'interrogation fonctions.

i) L'exercice 2. (cf. tableau ci-joint)

On étudie donc les 112 copies où figurent les deux versions.

Dans la deuxième version, l'exercice est mieux réussi (29% de réponses correctes dans la version "fonctions", 12% dans la version suites). Est-ce un effet de répétition ou est-ce dû à la différence suites/fonctions ou y a-t-il eu apprentissage ? ou les trois effets à la fois ? Pour y mieux comprendre, regardons très précisément. D'abord, globalement, les répartitions des procédures erronées changent : s'il y a encore 24% de copies vides ou non terminées, contre 29% en 1re version, les erreurs sont différentes. On constate la disparition de l'erreur "l majorant implique

(u_n) croissante", sous la forme fonction bien sûr; il n'y a presque plus d'erreurs du type "non croissant = décroissant", ni de soustractions d'inégalités, plus que 4% de modèles dynamiques monotones explicites contre 9%, mais il reste 21% de réponses fausses des deux types suivants (essentiellement):

soit on donne un exemple de fonction décroissante à l'appui de l'affirmation de la décroissance de f ; soit on recopie presque intégralement et positivement l'énoncé, on peut même se demander s'il n'y a pas là une émergence implicite d'un modèle dynamique monotone. Signalons de plus dans les autres faux, une erreur spécifique à la version fonction (rencontrée deux fois) : "d'après le théorème des valeurs intermédiaires, s'il existe x_1 tel que $f(x_1)$ soit positif (strictement), comme $f(x)$ tend vers 0, il existe x_2 tel que $0 \leq f(x_2) < f(x_1)$ donc f décroît".

Ceci dit, parmi les 99 copies donnant une réponse erronée à l'exercice 2. version suites, 24 en donnent une correcte à la version fonctions; 16 donnent le résultat correct mais avec un contre-exemple grossièrement faux, essentiellement $\frac{1}{x}$ pour prouver que f peut être croissante, ou bien la fonction nulle, ce qui est plus ambigu, pour prouver que la fonction n'est pas nécessairement décroissante; on peut penser, pour ces étudiants, qu'il y a eu mémorisation du résultat sans mise en place de la bonne représentation; 34 donnent à nouveau un résultat faux, 26 en changeant d'argument et 8 avec la même justification; 12 qui n'avaient pas répondu ne répondent pas plus; 14 ne font rien ou ne terminent pas, là aussi on peut penser qu'il y a eu mémorisation d'un piège.

On peut donc dire, en tout cas, que un quart des étudiants concernés ont amélioré leur conduite.

Pour finir signalons que, parmi ceux qui avaient donné une réponse correcte (13), 8 en redonnent une correcte, 2 ne terminent pas et 3 en donnent une fausse...

Nous allons étudier encore plus précisément les 24 étudiants ayant amélioré leur

procédure, non sans souligner que ces effectifs sont très faibles et que les constats éventuels seront à vérifier sur de plus gros effectifs.

Parmi ces étudiants, 6 avaient produit dans la 1^{re} version une procédure "1 majorant donc la suite est croissante", ce qui permet de constater que sur les 17 étudiants ayant globalement donné une telle procédure, 35% se sont "corrigés"; 7 autres n'avaient pas abordé l'exercice dans la 1^{re} version, ce qui fait 20% de modification parmi les non-réponses; 5 avaient écrit que si la suite n'est pas décroissante elle croît, ce qui fait 55% d'amélioration pour ce type de procédures; 3 avaient soustrait des inégalités terme à terme, soit 21% de mieux; enfin les 2 derniers fournirent un modèle erroné, ce qui fait encore 20% d'amélioration.

Ce serait donc les erreurs liées à des conceptions fausses de l'ordre (sur les fonctions et sur $\mathbb{R}$) qui correspondent à des procédures moins usuelles pour les fonctions, qui disparaîtraient plus que les erreurs liées au modèle de convergence et au fonctionnement des inégalités sur $\mathbb{R}$.

Quant aux étudiants donnant le résultat juste avec une justification fausse ou insuffisante, 29% d'entre eux avaient produit la procédure "1 majorant implique (u_n) croissante", 10% n'avaient pas répondu ou pas terminé ou pas justifié une réponse fausse, 30% avaient fourni un modèle dynamique monotone, 21% avaient soustrait des inégalités. On retrouve que l'erreur la moins tenace, en quelque sorte, est l'erreur "non croissant = décroissant", puisqu'elle n'est le fait d'aucun des étudiants n'ayant pas vraiment changé de représentations. Il n'en reste d'ailleurs qu'une dans la 2^{me} version ce qui renforce encore notre résultat. Vraisemblablement, jouent là deux facteurs au moins: il est plus facile de faire cette erreur sur les suites que sur les fonctions, et elle ne correspond pas à une conception tenace. On constate par contre que les erreurs dues à une représentation erronée de la convergence (on peut le supposer du moins) ou dues à un mauvais fonctionnement des inégalités sur $\mathbb{R}$ sont bien plus résistantes.

COMPARAISON DES PROCEDURES AUX DEUX VERSIONS DE L'EXERCICE 3

Les pourcentages sont calculés sur le total 112

Fonct. Suites	Ø	NON TER	F.S.D.	M A J	DYMO	NON + = ÷	Soustr. inégali	AUTR. FAUX	JSD	J. GEF ^x	J. C.E. dessin	J. META discours	TOTAL
Ø	9	2	2	0	0	0	0	7	0	3	5	1	29
NON TER.	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	4
F.S.D.	3	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	6
M A J	1	1	0	0	0	0	0	4	0	5	5	1	17
DYMO	0	1	0	0	2	0	0	2	0	3	1	1	10
NON + = ÷	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	4	1	9
SOUSSTR. INÉGALITÉ	3	1	0	0	0	1	1	2	0	3	3	0	14
AUTRES FAUX	1	0	1	0	1	0	0	4	0	1	0	0	8
J.GEF ^x	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
J.C.E. dessin	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	7	1	12
J.META discours	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
TOTAL	20	7	3	0	4	1	3	23	0	19	27	5	112
	24%							21%		17%	29%		

L'erreur "l majorant implique (u_n) croît" apparaît plus ambiguë, nous semble-t-il; on peut penser qu'elle ne provient pas des mêmes causes chez tous les étudiants qui la produisent; fausse idée de l'ordre, image erronée.

Pour essayer de renforcer (ou d'infirmer) ces résultats, nous avons mis en rapport les prérequis des étudiants ayant amélioré leur procédure et de ceux qui n'ont amélioré que le résultat, ceci ramenant les effectifs à 21 et 8 (pour avoir un χ^2 test). On constate que parmi ceux qui ont réellement amélioré, 11 viennent de C et 10 de D (contre 44 et 49 globalement sur ceux qui ont passé le bac l'an dernier); 19 (soit 90%) ont une note supérieure ou égale à 10 au prétest; 16 (soit 76%) ont au moins 2 à la somme des trois blocs E, O, R, en affectant 1, 1/2 ou 0 respectivement au bloc entier, moitié ou vide. Parmi les autres, 3 viennent de D et 4 de C; 5 ont une note supérieure ou égale à 10 (soit 62%); et 3 ont au moins 2 à la somme des 3 blocs. Rappelons que globalement 58% des étudiants ont une note supérieure ou égale à 10 au prétest; 60% ont au moins 2 à la somme des trois blocs E, O, R.

Autrement dit les étudiants qui ont amélioré leur procédure sont presque tous parmi les meilleurs étudiants au prétest et ceci indépendamment de leur série de bac. Meilleur est le prétest, plus grande est la chance de s'améliorer.

ii) L'exercice 3. (cf. tableau ci-joint)

On étudie les mêmes 112 copies.

De nouveau, l'exercice est mieux réussi dans la 2me version (44% de procédures correctes dans la version fonction, et 20% dans la version suites).

Les répartitions des procédures erronées sont là encore changées; c'est la procédure " $\lim(xf(x)) = \lim x \cdot \lim f(x)$ " qui est la plus fréquente; la procédure "reconnaissance de formes" a disparu sous sa forme brute, et il y a moins de " $f(x) = \frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x+2}$ ". Parmi les 89 copies donnant une version incorrecte à l'exercice dans la 1re version

COMPARAISON DES PROCEDURES AUX DEUX VERSIONS DE L'EXERCICE 2

Les pourcentages sont calculés sur le total 112

Fonct. Suites	$\emptyset$	SCA	$f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ ($\rightarrow 0$)	PEI	DVG	REC- FO	$f(x) = \frac{1}{2}$	AUTR FAUX	NON TER.	EQU	DEC	PRO	$f(x) = \frac{1}{2}$ $\downarrow$ $\Rightarrow f \rightarrow 0$	TOTAL
$\emptyset$	4	0	1	4	0	0	0	0	1	2	0	2	1	14 12%
SCA	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2 2%
$f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ ($\rightarrow 0$)	1	0	0	2	1	0	0	1	0	1	3	0	0	9 8%
PLI	0	0	0	4	1	0	0	0	0	3	0	1	0	9 8%
DVG	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4	1	0	0	6 5%
REC FO	3	0	0	1	0	1	1	0	2	1	0	0	0	9 8%
$f(x) = \frac{1}{2}$	1	0	0	2	0	0	1	2	1	5	2	1	1	16 14%
AUTRES FAUX	3	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	1	0	9 8%
NON TER.	1	0	1	1	2	0	1	0	2	3	1	1	0	13 12%
EQU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1 1%
DEC	1	2	1	2	0	0	0	0	0	2	5	2	0	18 16%
PRO	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2	0	4 4%
$ f(x) - \frac{1}{2} < \epsilon$ $\Rightarrow f \rightarrow 0$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2 2%
TOTAL	13 12%	3 3%	3 3%	19 17%	4 4%	1 1%	5 5%	6 5%	7 6%	23 21%	16 14%	10 9%	2 2%	112

34 donnent une réponse correcte dans la version fonction, dont 20 avec la procédure " $f(x) \sim x$ " (procédure ayant un rôle d'attracteur parmi ce public particulier puisqu'elle représente 59% des 34 copies concernées contre 47% de toutes les copies où l'exercice est bien traité), 8 avec une procédure d'encadrement, et 6 avec la procédure produit " $\lim f(x) = \lim (xf(x)) \cdot \lim \frac{1}{x}$ " (ce qui représente 24% et 18% des 34 copies étudiées contre respectivement 32% et 20% des copies correctes).

Autrement dit la procédure utilisant les équivalents, bien naturelle sur les fonctions, vu le déroulement du cours, semble être associée à une amélioration des procédures.

Si on regarde pour chaque type de procédures erronées à la 1re version, le pourcentage de procédures devenues correctes dans la 2me version, on trouve

83%	"	"	"	"	du type par l'absurde 1re version ("DVG"),
45%	"	"	"	"	du type $\lim nu_n = \lim n \cdot \lim u_n$ ("PLI") ou $\lim nu_n = n \lim u_n$ ("SCA")
57%	"	"	"	"	du type $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{n+\beta}$
36%	"	"	"	"	du type divers faux
33%	"	"	"	"	vides non terminées ou sans démonstration
11%	"	"	"	"	du type "reconnaissance de formes"
38%	"	"	"	"	globalement.

On constate donc que la procédure "reconnaissance de formes" est très résistante (bien que la procédure correspondante sur les fonctions soit peu naturelle et de fait très rare), alors que les raisonnements par l'absurde se corrigent très bien (ce qui avait été prévu), mieux que les procédures "produit faux" ou "scalaire"; les étudiants ayant écrit que $u_n = \frac{1}{n}$ ou autre transforment facilement leur procédure en équivalence (ainsi 22% des étudiants ayant produit une telle procédure avaient écrit une telle égalité dans la 1re version, alors que seulement 14% des étudiants

globalement l'ont utilisé dans la version suites). Notons enfin que les 2/3 des procédures correctes de la 1re version restent correctes dont 73% exactement les mêmes (encadrement, équivalence, produit juste) et que la procédure "produit faux" est aussi stable (44% les deux fois) que les procédures encadrement et produit.

Si on regarde les prérequis, on note que parmi les 29 étudiants ayant amélioré leur procédure à l'exercice 3. entre les deux versions (et ayant une note au prétest) 23 ont eu plus de 10 (79%); ceci renforce encore le précédent constat.

De plus, parmi les 28 étudiants (sur 94) n'ayant amélioré ni 2. ni 3., et ayant passé le prétest, 36% seulement ont plus de 10 au prétest.

Nous nous sommes enfin intéressés aux 19 étudiants ayant les exercices version fonctions corrects, soit suite à une amélioration, soit que l'un des deux (ou les deux) ait déjà été correct dans la première version. Voici leurs profils:

Les pourcentages sont calculés sur le total 19

prérequis	Note		E			O			R			G			F			S	
	<10	≥10	0	1/2	•	0	1/2	•	0	1/2	•	0	1/2	•	0	≥ 1/2	•	0	≥ 1/2
EFFECTIF	2	17	1	6	12	0	8	11	4	6	9	1	6	12	7	12	7	4	15
					63%			58%			47%			63%		63%			79%
Global					43%			37%			46%			35%		55%			69%

On constate que 89% d'entre eux ont plus de 10 au prétest avec les blocs E, O et G plus attribués qu'en moyenne.

b) Mise en rapport des résultats précédents

Nous avons schématisé ci-dessous la plus ou moins grande possibilité de disparition des erreurs étudiées ci-dessus, en leur associant les blocs remarquables qui leur sont associés plus (resp. moins) qu'en moyenne (marqué par un + (resp. -)) après le sigle du bloc.

	80% amélioration.	50% amélioration	35% amélioration	25% amélioration	10% amél.
EXERCICE3	Raisonnement par l'absurde erreurs E^+, O^+, S^+	Procédures algébriques erreurs O^-			reconnaissance des formes E^-, R^+, O^-, S^-
EXERCICE2		non $\neq$ E^-, O^+, R^+, F^+	1. majorant $\Rightarrow$ suite croissante E^-	modèle dynam. monot. G^+, F^+	soustraction d'inégalités R^-

* On constate que le bloc E n'est pas discriminant, pas plus que le bloc R.

Dans les tâches sur la convergence considérées, ce ne sont pas les connaissances des définitions des réels ni la possibilité d'appliquer les règles simples qui sont associées aux progrès potentiels.

* On ne peut rien dire du bloc F : il n'intervient, et toujours positivement, que pour des erreurs dans l'exercice 2. et se trouve associé aussi bien à un type d'erreurs plutôt tenace qu'à un type d'erreurs qui disparaît vite.

De même le bloc G n'apparaît qu'associé positivement à un type d'erreurs plutôt tenace. Autrement dit les aptitudes à manier les signifiants ne semblent pas discriminantes dans ce genre de tâches. Il pourrait y avoir là une indication pour l'enseignement, qui ne doit pas trop s'appuyer sur la formalisation...

* Pour le bloc O, on peut remarquer qu'il est attribué positivement aux copies correspondant à la production des erreurs les moins tenaces de chaque exercice. Cependant les procédures algébriques erronées, qui disparaissent quand-même de presque une copie concernée sur deux, sont associées à un bloc O^- . Il y aurait là comme une con-

dition suffisante de progrès potentiel (peut-être valable pour certains étudiants et pas les autres).

* Enfin le bloc S, qui n'intervient que pour des erreurs de l'exercice 3., s'avère associé positivement aux erreurs les moins tenaces et négativement aux erreurs les plus tenaces de toutes... Ce bloc semble bien associé aux progrès potentiels pour certaines tâches de convergence.

En conclusion, il semble que les prérequis qui sont le plus associés à des progrès potentiels sur les tâches sur la convergence étudiées ici soient des connaissances sur l'ordre sur $\mathbb{R}$ (mais non de mise en application d'un algorithme ou d'une règle simple) et la possibilité de donner du sens à divers signifiants utilisés en mathématiques (graphes, formules).

Ceci dit, il reste deux interrogations notoires (outre l'indispensable confirmation de ce qui n'est encore qu'interprétation osée de simples tendances à confirmer). D'abord en ce qui concerne le lien entre les prérequis et les conduites: y-a-t-il des types de comportement avec recours spontané systématique à un type de conduites déterminé plutôt qu'à d'autres (correspondant par exemple à un bloc positif) et ceci quel que soit l'enseignement? Cette hypothèse ne nous semble pas absurde dans un premier temps vu les travaux de Lautrey (cf. [1]). Ainsi pourrait-on expliquer l'association privilégiée des erreurs du type recours à un modèle (en l'occurrence erronée) dynamique monotone et du bloc G^+ (associé à une bonne maîtrise de la représentation graphique). De même on pourrait interpréter ainsi l'association privilégiée du bloc O^- et des procédures algébriques erronées (attrait des raisonnements algébriques).

Ensuite une interrogation sur les conséquences sur l'enseignement: faut-il renforcer la tendance naturelle ou au contraire essayer de se placer sur le terrain non de prédilection? Là encore Lautrey, évoqué ci-dessus, semble engager dans la 2^{me} voie.

11-QUELS SONT LES ETUDIANTS QUI REUSSISSENT ?

6

a) Le partiel blanc

Nous nous sommes basées sur les notes mises par les enseignants, un barème assez précis ayant été adopté par tous. Nous avons étudié les copies dont les auteurs avaient fourni au moins déjà une production écrite comptabilisée dans nos tableaux.

REPARTITIONS DES RESULTATS AU PARTIEL BLANC

Groupe	A	B	C	D	K	L	Total	Bac D	Bac C	plus de 3 vides
moenne générale	8,8	10,1	9,4	10	8,9	9,8	9,5	8,2	11,3	7,8
moenne en algèbre (sur 10)	6,7	7,1	7,25	7,5	7,1	8,3	7,3	6,7	8	

On retrouve une hétérogénéité certaine, les positions extrêmes des groupes A et B et la différence notable entre les Bac C et D. Cependant, comme d'habitude nous n'avons envisagé que les Bac C et D de l'année dernière soit respectivement 31 et 28 individus. Rajoutons que leur moyenne en analyse (sur 10) est de 3,2 et 1,6 respectivement. Ces résultats sont encore renforcés par le score suivant: parmi les 21 étudiants ayant plus de 4 sur 10 en analyse, 4 n'ont pas fait le prétest (dont un a la note 3 au posttest sur 6, et les autres 1); sur les 17 restants, 16 ont passé le bac C dont 2 viennent de SUP et 1 redouble, et tous ont plus de 10 au prétest; enfin 16 ont aussi plus de 2 sur 6 au posttest... Pour la petite histoire, voici même la répartition de leurs notes en analyse: un a 7, un a 6, un a 6,5, quatre ont 5,5, cinq ont 5, deux ont 4,5 et sept ont 4. Autrement dit il y a une corrélation nette entre la possibilité de réussir des exercices d'analyse un peu difficiles et peu préparés en T.D. et les prérequis (qui portaient seulement sur l'analyse, rappelons-le).

b) Le partiel

Là encore nous nous sommes basées sur les notes mises par les enseignants. Globalement 49 étudiants sur 159 (soit 31%) ont plus de 9 au partiel. Sur les 110 étudiants ayant rendu un prétest et ayant passé ce partiel, 32 (soit 29%) ont eu plus de 9, ce qui légitime notre étude sur cette population.

Parmi ceux qui ont eu plus de 8 au prétest (84), 33 (soit 39%) ont plus de 9 au partiel, alors que seulement 27% de ceux qui ont eu moins de 8 au prétest ont plus de 9 au partiel. De plus, tous ceux qui ont eu trois blocs vides au moins dans leur prétest ont une note largement inférieure à 9 au partiel. Autrement dit, une fois de plus, des acquis antérieurs suffisants semblent bien nécessaires à la réussite (mais cela ne suffit pas, bien entendu...). On a même vérifié que c'est dans chaque bloc que les prérequis de ceux qui ont plus de 9 au partiel sont meilleurs (cf. tableau ci-dessous). Par ailleurs, 54% de ceux qui ont obtenu le bac C l'an dernier parmi nos 110 étudiants ont plus de 9 au partiel, contre 10% de ceux qui ont obtenu le bac D et encore pour ces derniers avec des notes strictement inférieurs à 10! Enfin, on vérifie que les étudiants issus des classes les plus modestes s'accrochent le plus (cf. tableau ci-dessous).

Les pourcentages qui figurent dans les deux premières lignes sont calculés sur le total de la colonne, la troisième ligne indique le pourcentage global correspondant pour les 4 premières colonnes et les effectifs de la colonne pour les dernières.

REPARTITIONS DES RESULTATS AU PARTIEL PAR BLOC DE CONNAISSANCE ET C.S.P.

	Bloc 0	S ≥ 1/2	F ≥ 1/2	Bloc G	Catégorie socio-prof.			
					2,9,8	3	4	5,6
Note ≥ 9	47%	91%	81%	59%	39%	33%	29%	48%
Note < 9	35%	57,5%	49%	24%				
Global	37%	64%	55%	35%	18	49	28	25

c) L'examen
(à paraître).

d) Quelques remarques

Il faut souligner une grande différence entre les différents contrôles proposés aux étudiants, comme me l'a fait remarquer une des collègues impliquée dans la section. Les textes des interrogations écrites, en effet, sont conçus par les enseignants de T.D. (et eux seuls) et correspondent étroitement à la pratique imposée par le "niveau des étudiants". En particulier on a constaté que la différence entre les Bac C et D n'y apparaît pas dans les résultats. Au contraire, les textes de partiel et d'examen sont de la seule conception de l'enseignant-cours. Et cela entraîne une modification notable des performances et une plus grande différenciation C et D, peut-être due à une ignorance des différences entre les acquis antérieurs des uns et des autres ou à des énoncés faisant plus appel à des aptitudes générales qu'aux connaissances récemment acquises (en T.D. essentiellement).

III ETUDE DES FONCTIONS

a) Classification des tâches

Dans la plupart des enseignements et des manuels, un certain nombre d'exercices concerne explicitement les fonctions réelles d'une variable réelle et c'est ceux-là que nous avons examinés d'abord du point de vue de la tâche. On peut distinguer deux grandes catégories d'énoncés : ceux où on a affaire à une fonction explicite et ceux où on donne une fonction f telle que... Dans ce dernier cas on donne souvent une fonction f vérifiant une (ou plusieurs) propriété soit de signe, soit de majoration (resp. minoration), soit de continuité ou de dérivabilité ; il s'agit alors de démontrer une propriété (parmi les mêmes) soit de f soit d'une fonction définie à partir d'elle. Les outils utilisés sont en général (et suivant les cas) les définitions de la continuité (en (a, ∞)), de la dérivabilité, les propriétés des fonctions continues sur un segment, les propriétés de la dérivée (signe par exemple), les théorèmes de Rolle, des accroissements finis, des valeurs intermédiaires et la formule de Taylor (reste Lagrange ou Young). Les propriétés cherchées sont locales ou globales, ce qui est d'ailleurs une indication importante pour le choix des méthodes. Ce peut être aussi des propriétés d'existence.

Il y a aussi une autre catégorie d'exercices, assez peu posés, la résolution d'équations fonctionnelles simples (trouver toutes les fonctions f vérifiant ...). Un certain nombre de techniques sont à la disposition des étudiants : valeurs particulières, détermination de la fonction sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et passage à $\mathbb{R}$, dérivabilité et essai d'établir une équation différentielle très simple vérifiée par la fonction ... Dans le cas des fonctions explicites, toute une série d'exercices consiste à demander des limites (prolongements par continuité, problèmes de dérivabilité en un point, formes indéterminées isolées ...). Alors, suivant la partie du cours correspondant au moment où est posé l'exercice, il s'agit d'utiliser soit les théorèmes généraux (algébriques) sur les limites, soit les définitions de la continuité ou de la dérivabilité, soit les équivalents, soit les accroissements finis, soit enfin, les développements limités. On trouve aussi des études complètes de fonctions (allant jusqu'au tracé, demandé explicitement, généralement sans aucune utilisation ultérieure) au cours desquelles on doit chercher des limites pour remplir le tableau de variation par exemple. Dans ce cas les difficultés portent surtout sur les études locales.

Parmi ces exercices, quelques-uns ont pour but d'enrichir l'herbier des fonctions usuelles, d'autres n'ont vraiment pour objet que de faire fonctionner les recettes sur des fonctions "tirées du chapeau". Implicitement l'herbier des fonctions

usuelles comprend un certain nombre de fonctions rationnelles, les fonctions sinus cosinus et tangente, les fonctions exp., Log et puissances (dont la racine carrée), et s'enrichit à ce moment là des fonctions inverses des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques et de leurs inverses. Nous disons "implicitement" car il n'est pas d'usage de reprendre les connaissances antérieures sur les diverses fonctions déjà rencontrées de ce point de vue là (sauf exceptions).

Il faut souligner que, dans la plupart des cas, ces exercices permettent l'étude "en soi" de telle ou telle fonction, plus ou moins compliquée, donnée sans commentaire (quant à son origine), et que de plus on a rarement en vue une quelconque application (résolution de $f(x)=0$ ou autres).

Un certain nombre d'exercices mélangent suites et fonctions; il s'agit souvent de l'étude des suites récurrentes ou plus généralement d'exercices où on a à faire fonctionner le théorème " f continue $\Leftrightarrow$ pour toute suite (x_n) tendant vers l , la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(l)$ ".

Ceci dit, il y a deux grands chapitres du cours où interviennent encore les fonctions réelles de variable réelle: l'intégration et les équations différentielles; pour le moment, nous n'avons pas abordé leur étude.

b) Essai de typologie des erreurs.

Notre étude des erreurs dans des productions écrites d'étudiants (de notre section) sur des exercices sur les fonctions (des types précédents) ne nous a pas encore permis de dégager les tenacités relatives de ces erreurs. Les classes d'erreurs que nous avons pu cependant mettre en évidence devront donc être affinées. Dans un premier temps, nous avons cherché à les regrouper suivant les tâches évoquées ci-dessus.

i) Un certain nombre de productions des étudiants contiennent des expressions qui ont l'air de résulter de mauvaises utilisations des techniques mises en fonctionnement et ceci s'applique surtout à des tâches du type "trouver des limites pour des fonctions explicites": on trouve par exemple des sommes d'équivalents abusives, des développements limités aux mauvais ordres, ou de simples erreurs de calcul. Ces erreurs concernent des propriétés locales, à démontrer de façon relativement standard (pas de grand choix de stratégie), bien préparées en séances d'exercices en T.D. On ne peut pas tout à fait parler cependant de raisonnements de type algorithmique, et précisément on remarque que les deux premiers types d'erreurs cités correspondent à une algébrisation (algorithmisation) des techniques: faire une somme d'équivalents pour trouver l'équivalent de la somme, prendre chaque dévelop-

pement limité à l'ordre demandé (par exemple) pour trouver un développement composé...
ii) D'autres erreurs se trouvent surtout lors de la résolution de tâches portant sur une fonction non explicite: on peut les décrire, en première analyse, comme des erreurs de simplifications (implicites) abusives: $\lim(\sup \dots) = \sup(\lim \dots)$; $\lim(\lim) = \lim$; si la suite de fonctions (f_n) continues tend vers la fonction f , f est continue; toute fonction est continue; toute dérivée est continue; suppressions (inconscientes?) de certains quantificateurs dans des expressions formalisées où plusieurs symboles interviennent; l'écriture d'un objet lui confère une existence; tout réel a un successeur, etc...

On peut se demander s'il n'y a pas là mise en fonctionnement implicite et momentanée de conceptions simplistes (non explicites) comme le principe de Leibnitz ("tout passe à la limite"), des représentations mentales incomplètes des fonctions (toute fonction est continue), des représentations incomplètes de $\mathbb{R}$, l'absence de la prise de conscience qu'il existe des règles strictes de manipulation du langage formel (entraînant un manque de contrôle du sens des écritures). Alors les simplifications résulteraient d'un retour à un certain sens des situations concernées, sens faussé par ces conceptions erronées (trop pauvres ou incomplètes). Nous avons rencontré des explications analogues pour les modèles de convergence des suites numériques.

iii) Il y a des types d'erreurs communes à toutes les tâches: d'abord l'utilisation indifférenciée d'arguments locaux ou globaux pour essayer de démontrer des propriétés globales ou locales (emploi de développements limités pour obtenir des inégalités sur un intervalle ...). On peut y voir peut-être une insuffisance des conceptions topologiques de $\mathbb{R}$ (méconnaissance de la différence local/global).

Ensuite les erreurs du type "reconnaissance de formes" dont nous nous demandons si elles ne se produisent pas précisément là où il y a absence complète de modèles permettant de donner un quelconque sens (vrai ou faussé). Le seul recours étant "la lettre", cela devient complètement impossible de contrôler quoique ce soit, puisqu'on ne peut se raccrocher à aucun cadre, dans le quel on retrouverait du sens. On aboutit à des erreurs grossières du type confusion fonction et variables, limites dépendant de x , échange de variables...

Le fonctionnement des étudiants en situation de recherche de problèmes s'expliquerait donc localement en terme de jeux de cadres à certains moments: quand on est devant de l'inconnu, il faut pouvoir relayer cet inconnu par du connu dans un autre cadre; si aucun cadre n'est disponible, il ne peut rien se passer. Cela peut d'ailleurs être mis en relation avec notre constat sur la forte corrélation entre la présence de trois blocs "vides" au moins au prétest et l'échec au posttest.

Là encore il ne se passe rien s'il n'y a pas assez de connaissances préalables dans suffisamment de domaines (cf. jeux de cadres).

Restent enfin les erreurs plutôt liées à des insuffisances précises sur tel ou tel prérequis; on a surtout relevé des erreurs sur les inégalités (ainsi, $a < b, c < d \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, entre autres, au cours d'un calcul dans le quel la dernière inégalité est explicitement demandée).

c) Essai de typologie des comportements erronés

Cette première classification des erreurs sur les fonctions, jointe aux résultats obtenus ci-dessus sur la disparition éventuelle de certains types d'erreurs (communes aux suites et aux fonctions) nous ont amenées à formuler certaines hypothèses sur des types de comportement aux quels certains étudiants ont (spontanément?) recours et qui sont en relation avec leur production d'erreurs. Soulignons que les très bons étudiants semblent échapper à ces classifications.

i) On a pu constater d'abord qu'un certain nombre de procédures erronées relevaient de fautes d'étourderie, de manque de réflexion élémentaire, ce qui est associé à une rapide disparition de telles conduites. Ainsi pour ceux qui écrivent que si une suite n'est pas croissante elle est décroissante, ou qui raisonnent vainement par l'absurde dans l'exercice ($\lim u_n = 1$) en partant de: "si u_n n'avait pas de limite..."; on a pu vérifier que ces étudiants avaient souvent de bons prérequis, sauf dans le bloc E, où ils ont pu justement faire des fautes d'étourderie!

ii) Certains comportements erronés peuvent s'expliquer par une lacune précise dans les prérequis; ceux-là devraient aussi disparaître rapidement, surtout après travail sur le sujet concerné. Ainsi peut-on expliquer la disparition relativement facile de l'erreur "I majorant $\Rightarrow u_n$ croissante" dans l'exercice sur les suites à termes positifs tendant vers 0, erreur liée à une insuffisance dans le bloc D.

iii) D'autres étudiants se cantonnent dans la formule apprise par cœur et l'imitation; ainsi les auteurs de reconnaissance de formes qui ne savent pas faire fonctionner leurs formules. Ce type d'erreurs s'est, lui, avéré tenace (cf. Exercice 3) et semble lié à des prérequis particuliers (S^-).

iv) Certains étudiants semblent avoir recours préférentiellement (même si c'est incorrect) à des conduites de type algorithmique, par exemple réduisant la mise en fonctionnement de R à l'utilisation de sa structure algébrique. Ainsi a-t-on pu mettre en évidence une corrélation entre le choix de procédures algébriques erronées dans l'exercice 3 et les lacunes dans les blocs D (et même R) dans les prérequis.

v) D'autres étudiants adoptent des procédures semblant particulièrement faire appel

à des représentations mentales, plus ou moins complètes d'ailleurs. Ceci serait le cas des procédures évoquant les modèles dynamiques monotones dans l'exercice 2 (version suites); il se trouve d'ailleurs que ces étudiants ont souvent le bloc G (représentations graphiques) dans leurs prérequis ce qui est une forme de renforcement de notre hypothèse. Les erreurs correspondantes peuvent être tenaces, ce qui n'a rien de contradictoire.

vi) Au contraire certains étudiants semblent préférer les raisonnements "logiques" formels, sans support de représentation. Ainsi classons-nous les étudiants ayant produit un raisonnement par l'absurde dans l'exercice 3, étudiants à qui d'ailleurs manque souvent le bloc G dans leurs prérequis!

IV. LES SEQUENCES D'ENSEIGNEMENT EN DEUG (OBSERVATION ET EVALUATION)

a) Observations de quelques séquences en T.D.

Nous avons observé d'une part les premières séances de T.D. sur les suites -dont la toute première avant le cours magistral correspondant et les autres après- et ceci dans un même groupe de T.D.; et, d'autre part, à chaque fois dans un autre groupe, les deux séances où une notion était introduite en T.D. avant le cours en amphitheâtre correspondant. Nous ne donnerons ici qu'un résumé de la chronique de la première séquence sur les suites et que des indications sur le déroulement des autres séances; ces restrictions s'expliquent par la réflexion sur l'évaluation de ce genre d'expérience que nous proposons plus loin.

i) Les séquences sur les suites (cf. annexe et Robert [3])

* La première séance sur les suites (avant le cours) a malheureusement coïncidé avec la première séance de T.D. de l'année. Rappelons que la semaine précédente (rentrée universitaire) il y avait eu deux amphis consacrés à des rappels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et le passage du prétest. Nous avons observé le déroulement de la séance de T.D. (deux heures moins un quart d'heure dû à des retards d'ouverture de salle...). Nous étions placées à des endroits diamétralement opposés dans la salle, à côté d'étudiants, et nous avons peu circulé. Nous n'avions pas pris de magnétophone. Les groupes de T.D. de la section comportent 20 à 25 étudiants, installés en 2 ou 3 rangées parallèles au tableau. Sur l'injonction de leur assistant, les étudiants de notre groupe se sont mis par deux ou trois, ont sorti leur calculatrice (il y en avait bien une par petit groupe) et ont commencé à travailler sur la feuille d'exercices qui venait d'être distribuée par l'enseignant. Sur cette feuille figuraient explicitement dix suites numériques (numérotées de 1 à 10) avec la consigne "représenter graphiquement les suites de terme général suivant ..."; l'assistant indique aux étudiants de se partager le travail en prenant cinq suites par personne. Immédiatement se posent les deux problèmes suivants: que veut dire représenter graphiquement une suite? et quelles sont les variables (sur les axes)? L'assistant intervient alors en faisant figurer au tableau les axes (n, u_n) et en pointant de ce fait la variable. Ensuite le démarrage du travail se fait, mais lentement; dès les premiers tracés apparaît un nouveau problème: doit-on ou non relier les points obtenus? Beaucoup d'étudiants semblent en effet gênés par un tracé discontinu et relient effectivement leurs points. L'assistant intervient de nouveau en faisant réfléchir sur le sens d'un tracé continu.

Dans l'ensemble, tous les groupes terminent leurs tracés (discontinus!) au bout d'une heure environ. L'assistant écrit au tableau la nouvelle consigne:

"Classer les différentes suites représentées en indiquant vos critères de classement"

Jusque-là les étudiants ont travaillé parallèlement; à ce moment s'ébauche un travail à deux (ou trois), rendu cependant difficile par le fait qu'il s'agissait de la première séance de T.D. de l'année. Au départ, les étudiants sont surtout sensibles à l'allure des "courbes" et les premiers critères qui apparaissent concernent la monotonie, la périodicité et les asymptotes des tracés; certains y ajoutent le caractère borné des termes; d'autres proposent des classements suivant la convergence ou le fait de tendre vers une limite (cf. "position limite vers la quelle cela tend"). L'enseignant regroupe au tableau toutes les propositions puis demande à la classe de se déterminer sur le (ou les) critère le plus important. Les étudiants choisissent monotonie et périodicité; d'un dialogue entre l'enseignant et certains leaders du T.D. sort la reconnaissance du critère "se rapprocher d'une limite" comme le plus important ici. Ce critère, exprimé en langage courant, est écrit tel quel au tableau. Les dix suites précédentes sont alors classées à vue suivant ce critère. Un des étudiants du T.D. intervient alors en reproposant une définition monotone de la convergence: pour qu'une suite converge, elle doit croître (ou décroître) régulièrement. Pour lui la suite $(u_n = \frac{1}{n} \cos n)$ ne converge pas... Il y a discussion, puis semi-conviction de l'étudiant contestataire, puis l'enseignant propose la consigne suivante (le III de la séquence n'est pas abordé):

Vrai ou faux

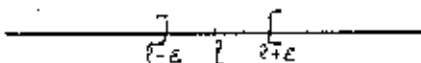
1. Une suite tendant vers 0 par valeurs positives est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

Presque tous les étudiants du groupe pensent que le 1. est faux (cf. discussion précédente); beaucoup moins s'expriment sur le 2., seulement trois petits groupes affirment que c'est vrai, la majorité ne donnant pas d'avis.

Assez vite l'enseignant arrive à dire que pour démontrer le 2. on a besoin d'une définition précise de la limite d'une suite. A partir de là le travail en petits groupes de deux s'arrête complètement, remplacé jusqu'à la fin du T.D. par un dialogue entre l'enseignant et les leaders du T.D. Les autres étudiants vont se contenter de noter ce qui sera écrit au tableau, en remplaçant éventuellement des segments en langue naturelle par des expressions symboliques (volontairement évitées par l'assistant!). Reprenant l'expression "se rapprocher d'une limite", ce dernier la précise en introduisant du langage symbolique pour arriver à la défini-

tion usuelle en $(\mathbb{R}, N)$ avec la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, accompagnée du dessin

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, $d(u_n, l) < \varepsilon$; 

La séance se termine sur la définition équivalente suivante (associée à notre avis à la représentation statique):

Etant donné I intervalle de centre l, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux, sont dans I.

* La séance suivante (après le premier cours en amphî sur les suites), l'enseignant qui avait exprimé l'impression d'avoir été un peu pris de court par le temps la fois précédente, reprend longuement en la démontrant l'équivalence entre les deux définitions précédemment proposées; il utilise divers registres de langage (plus ou moins imagés); il insiste sur la représentation statique. Ensuite sont proposés les trois exercices du début de la séquence n°2:

Vrai ou faux:

i) Une suite à termes positifs non bornée tend vers $+\infty$.

ii) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

iii) (u_n) est une suite convergente vers 1 si et seulement si, pour tout ε , il existe un entier N tel que il existe $n > N$ avec $|u_n - 1| < \varepsilon$.

Un vote à chaud sur la première question donne, sur 20 élèves, 7 vrai et 5 faux...

L'enseignant annonce le résultat correct et demande de trouver un contre-exemple. La confusion évidente que font beaucoup d'étudiants entre "non borné" et "tend vers $+\infty$ " amène l'enseignant à préciser les définitions, ce qui prend encore beaucoup de temps. L'exercice n'est pas terminé, il est à finir à la maison. Il reste juste le temps de faire voter sur le ii), presque personne ne prend part au vote et on se quitte avec la mission pour les étudiants de chercher chez eux les deux questions i) et ii).

* La séance suivante, on redémarre sur un exemple de suite à termes positifs non bornée ne tendant pas vers $+\infty$ (aucun étudiant n'en avait apporté...); plusieurs exemples sont quand même proposés. On passe à l'exercice sur la convergence de $(\cos n)$. L'enseignant développe assez rapidement une solution et demande que ce soit rédigé pour la fois d'après. Ensuite il traite (sous forme de rappel de cours) les suites géométriques.

* Les séances suivantes n'ont plus grand rapport avec les séquences sur les suites sauf qu'il y a eu correction à un moment donné (variable) de toutes les suites du début.

ii) Séquence sur la continuité

Cette séance a eu lieu avant le cours correspondant.

En voici le texte (écrit au tableau):

On cherche les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifient $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout x et tout y réels.

Le démarrage a été très difficile, bien que les étudiants soient regroupés par deux et travaillent ensemble; ils étaient en effet très désarmés par la relation fonctionnelle et souvent ne voyaient pas du tout quoi faire. Péniblement on est arrivé collectivement à $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$; le passage à $\mathbb{R}$ ne s'est pas fait sans l'intervention de l'enseignant. La séance s'est terminée sur la définition de la continuité pour les fonctions et la proposition d'exercices du même type (donnés à regarder à la maison).

iii) Séquence sur les développements limités (avant le cours).

Voici le texte (écrit au tableau)

1. Evaluer les fonctions suivantes pour $x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots$

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_2(x) = 1 + \sin x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad f_4(x) = \sqrt{1+x}, \\ f_5(x) = \sqrt{1+x} - \frac{x}{2}, \quad f_6(x) = 1 - \sin x + x, \quad f_7(x) = 1 + e^{-x}.$$

2. Classer par paquets les fonctions f_i qui "se comportent de la même façon", en précisant les critères.

3. Quelle est la limite quand x tend vers 0 de $f_i(x) - 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 7$?

4. Dans quel paquet placer les fonctions $g_1(x) = 1 + x$, $g_2(x) = 1 + x^2$, $g_3(x) = 1 + x^3$.

5. Quelle est la limite de $\frac{f_3 - 1}{f_1 - 1}$, $\frac{f_6 - 1}{f_3 - 1}$, $\frac{f_1 - f_2}{x}$?

L'assistant a tracé un cadre avec en colonne les valeurs de x (10^{-1} , 10^{-3} ...) et en lignes les différentes fonctions; il a demandé aux étudiants de le remplir et lui-même complétait au fur et à mesure au tableau. Il a fallu éclaircir le problème des décimales variables selon les calculettes. Les premiers classements ont porté sur le fait de tendre vers 1 par valeurs supérieures ou inférieures, ou sur une illusion de périodicité, ... puis le critère de rapidité de convergence est apparu ... grâce à l'enseignant (qui a fait compter le nombre de zéros après la virgule). Ce dernier critère a permis le classement, ensuite beaucoup d'étudiants ont repris un rôle passif, contemplant l'activité de l'assistant.

iv) Impressions générales des collègues du DEUG observé

La première séance (en général sans le III) est jugée trop difficile, surtout vu le moment où cela s'est passé (tout début). Tout le monde s'est accordé sur le fait qu'une telle expérience doit avoir lieu plus tard dans l'année. Quant aux autres séquences, elles semblent avoir souvent bien marché quant à leur déroulement, sans que les collègues aient pu noter quelque effet ultérieur que ce soit...

Rajoutons que, pour notre part, nous estimons qu'effectivement, telles qu'elles se sont déroulées, les séquences ne pouvaient pas avoir grand effet, et c'est ce que nous allons expliquer dans le paragraphe suivant.

b) Evaluation des observations

Ces observations ne nous semblent pas encore pleinement efficaces quant à nos objectifs, et ceci pour plusieurs raisons.

- i) Nous ne pouvons observer individuellement que notre (ou nos deux) voisin immédiat, et encore, d'une part nous gênons si nous faisons remarquer notre projet et d'autre part l'étudiant ne dit pas tout ce qui se passe dans sa tête. Autrement dit un interview d'un seul étudiant ou d'un groupe de deux serait beaucoup plus efficace.
- ii) A fortiori nous ne pouvons observer vraiment le déroulement de l'ensemble du T.D. conçu comme une somme d'individus. L'examen de paquets de copies nous en apprend beaucoup plus.
- iii) Nous pouvons par contre repérer avec relativement de précisions le jeu enseignant-enseignés, c'est à dire d'une part voir un certain nombre de caractères du contrat qui se noue entre eux (attentes implicites respectives) et d'autre part saisir un certain nombre de décisions pas nécessairement explicites de l'enseignant quant à la gestion de son T.D. (et en particulier celles dues à l'angoisse devant le temps qui passe...).

Autrement dit les résultats de nos observations ne concernent pas l'acquisition individuelle pouvant avoir lieu en T.D., pas plus que le comportement des étudiants devant telle ou telle tâche mais le fonctionnement du système des T.D. tel qu'il est pratiqué en général (dans le supérieur). Cela veut dire qu'en aucun cas une quelconque évaluation des séquences ne pourra sortir de ces observations si ce n'est de vérifier leur simple compatibilité avec le système T.D. Alors comment évaluer? Nous serions ramenées aux moyens classiques prétests, postests... dont nous avons dit ailleurs les limites en tant qu'instruments d'évaluation justement (cf Robert [3]). Aussi, dans le cas présent, au lieu de tirer des conclusions improbables du seul postest sur les suites, nous contenterons-nous de donner notre impression toute subjective et idéologique, en soulignant qu'il y a là, de toutes façons, un important problème méthodologique qui ne nous est pas particulier. Cela étant, à notre avis la séance sur les suites ayant précédé le cours n'a pas servi à grand chose, en DEUG tout au moins, pour les raisons (presque théoriques) suivantes. D'abord, pour que cela serve, il aurait fallu, pensons-nous, que non seulement l'activité en question des étudiants compte pour l'apprentissage à venir, compte vraiment au point même de modifier peut-être le cours, mais encore que les étudiants en aient conscience. Or non seulement il était hors de question de faire réellement compter l'activité des étudiants pour le cours (ne serait-ce que pour des questions d'informations!) mais encore ils le savaient

très bien.

Ces simples questions d'organisation des cours et de contrat (implicite) rendent illusoire à notre avis toute expérience artificielle de ce type inversant une fois de temps en temps cours et T.D., alors que le cours se déroule à l'évidence comme si de rien n'était. Le seul petit espoir aurait pu résider dans le rapport, au sein même du T.D., action/institutionnalisation par l'assistant. Là on constate qu'il y a eu effectivement à chaque fois essai d'institutionnalisation par l'enseignant, mais qu'une fois encore (cf. Robert [3]) cette phase n'a pas été reconnue en tant que telle par les étudiants, trop persuadés déjà que ce n'est pas à l'enseignant de T.D. de faire cours, et aussi pas assez habitués à ce que leur activité puisse faire partie du temps du savoir (cf. Chevallard [1]). Si tous les nouveaux concepts un peu délicats étaient introduits ainsi, on pourrait peut-être espérer un changement d'attitude, à force ..., mais cette année en tout cas les expériences ont été trop isolées pour modifier quoi que ce soit. Cela veut dire que les séquences sur les suites doivent être expérimentées au sein d'un système d'enseignement prenant explicitement en compte l'activité préliminaire des étudiants. On ne peut donc à notre avis rien conclure cette année ni dans un sens ni dans un autre. Reste que même si l'expérience est menée dans un tel système, il faudra l'évaluer, et là le problème est entier....

c) Evaluation de l'expérience

Pour en terminer avec ces observations, nous pouvons évoquer les seules choses que nous avons pu repérer (ou vérifier) c'est à dire un certain nombre d'éléments sur la relation enseignant-enseignés et par là même sur l'expérience elle-même. Là encore nos remarques seront en partie idéologiques.

Nous pensons d'abord que le contrat au sein d'une séance de T.D. est très contraignant. Les étudiants attendent de l'assistant des explications, y compris sur le cours le cas échéant, et des recettes leur permettant de réussir l'examen terminal. Donc pour eux, en général ce n'est pas chercher qui est important, mais noter la solution, si possible en la comprenant. Il y a là une énorme contrainte et une grande difficulté à faire chercher les étudiants, surtout si on n'explique pas que c'est peut-être la seule bonne manière pour les étudiants les moins bons de comprendre et d'apprendre. Encore faut-il en être convaincu soi-même. A notre avis tout dépend de l'enjeu que représente leur activité (réelle) pour les étudiants.

Nous ne pensons pas que l'explication (la "monstration") puisse systématiquement remplacer l'action indispensable à la construction du savoir. Mais que c'est dommage! D'abord parce que c'est agréable pour le maître d'expliquer clairement

ensuite qu'on y gagne l'estime de ses étudiants, et puis que ça va vite et que c'est beau! D'autre part l'enseignant veut avoir fait faire à ses étudiants une quantité minimale d'exercices pendant la séance, ce qui peut être contradictoire avec le fait de les laisser chercher; en effet c'est beaucoup plus long et les hétérogénéités (différences de rapidité etc...) rendent la gestion très délicate; il est difficile d'attendre que tout le monde ait produit son maximum avant de corriger; mais alors pour ceux qui ont la correction trop tôt, la recherche n'a servi à rien, d'où découragement et renforcement de la tendance à attendre les solutions... Autrement dit la contrainte de temps renforce la première contrainte de la demande des étudiants et on comprend qu'il soit peut-être nécessaire dans ces conditions d'intervenir explicitement sur ces questions si on veut changer le cours des choses!

Ceci dit, notre petite expérience personnelle sur un enseignement modifié nous a aussi montré que, dans la mesure où l'activité des élèves (inconnue a priori) est à prendre en compte pour le cours, cela augmente l'incertitude de l'enseignant quant à ses interventions (non toutes prévisibles de façon fixée à l'avance) et cela diminue aussi son rôle de "monstrateur" (de magicien, vont jusqu'à dire certains...).

Ce n'est pas une mince affaire dans ces conditions de s'y mettre pour les enseignants, aussi bien que pour les enseignés qui doivent retrousser leurs manches sinon rien ne se passe!...

d) Les permanences

Au premier semestre elles ont été très peu fréquentées (entre 0 et 2 étudiants chaque semaine). Lorsqu'un étudiant vient, c'est en général pour voir son assistant et lui poser énormément de questions sur tout.

CONCLUSIONS

a) Rapports prérequis/acquisitions

Les premiers éléments mis en évidence ici indiquent d'une part l'importance d'un seuil minimum de prérequis, aussi bien pour réussir que pour s'améliorer, d'autre part soulignent les différences C/D dont on ne peut savoir si elles tiennent à l'enseignement dispensé dans chaque section ou au recrutement des élèves (sélection) et enfin permettent de dégager l'importance (en analyse) des connaissances sur l'ordre et sur le sens des signifiants utilisés et peut-être sur les représentations graphiques.

Cependant tout cela demande à être confirmé et élargi éventuellement, la méthode semblant relativement satisfaisante mais devant porter sur de gros effectifs pour qu'à la fin on ait des cases suffisamment remplies. On peut suggérer d'ores et déjà quelques améliorations du prétest (cf. Annexe).

b) Pour une amélioration éventuelle de l'enseignement en DEUG

Tout ce que nous avons observé nous amène à penser qu'une amélioration est indispensable mais qu'elle ne peut être obtenue par des moyens superficiels. Il faut que l'activité des étudiants soit prise en compte réellement, institutionnellement et ceci à l'encontre et de l'organisation actuelle de l'enseignement et des contrats en vigueur ...

c) Questions méthodologiques

Des questions embarrassantes restent en suspens; d'abord pour pouvoir évaluer valablement nos projets de séquences il faudrait que l'enseignement soit modifié dans le sens précédent, ce qui est difficile à obtenir avant une évaluation positive; ensuite, nous ne savons pas bien évaluer et ce sera encore plus difficile s'il n'y a plus de points de comparaison, suite à des modifications en profondeur de l'enseignement ...

d) Perspectives sous formes de questions

Nous aimerions confirmer (ou infirmer) notre classification des erreurs (en l'affinant) ainsi que notre typologie des comportements. Pour cela nous pensons ajouter aux études du type précédent, des interviews sur des exercices (sur des fonctions) présentant une variété de procédures correspondant aux

aux divers types de comportements présumés. De plus, cette typologie pourrait avoir des conséquences sur l'enseignement. Si on repère en effet assez tôt les tendances comme ci-dessus, outre la possibilité de combler les trous dans les prérequis, cela permet d'intervenir de façon différenciée avec certains étudiants. La grande question est alors : faut-il intervenir sur le terrain de prédilection de l'étudiant ou justement à l'inverse ? Les hypothèses sur le fonctionnement cognitif de l'adulte de Vermersch [1] semblent entraîner la 1ère solution alors que les expériences de Lautrey [1] semblent indiquer la 2ème !

De ce fait tout dépend si on considère qu'il y a eu recours à différents "registres" (cf. Piaget - concret, figural, formel ...) ou non. On peut supposer d'ailleurs que les deux analyses s'imbriquent.

Ainsi les étudiants se réfugiant dans le "par-coeur" et l'imitation (erreurs de reconnaissance de forme) nous font penser à un fonctionnement du type "registre figural"; cela nécessiterait alors une action spécifique dans ce registre. Par contre, pour les autres types de comportements, nous aurions tendance à supposer que des interventions sur le terrain non privilégié de chaque type seraient les plus efficaces ... Remarquons que des enseignements différenciés sont plus compatibles avec l'enseignement tel que nous le souhaitons qu'avec le système actuel !

Tableaux T_1 à T_7

Séquences n° 1 et 2 (suites)

Amélioration du prétest

N°	Site	Note	Form	E	O	R	E	F	S	Note	Unit	15	Rec	15	nu	Pb 3
1										3	Wavelength	5		J.S.D.	ENC	PRO DIS
2	C	14	mi	•	1/2	•	1/2	•	1/2							
3		4	•	1/2	•	1/2	•	1/2	•	0	•	•	•	•	non	
4										1	Obje	J		Fe. Expe	DYG	PRO DIS
5	D	9	(mi)	1/2	•	1/2	•	1/2	•	1	FX	•		Fe. non	DYGI	PRO DIS
6		8	•	•	•	•	•	•	•	1	C.F.B.	J.	cont		REC. POL	•
7		14	•	1/2	•	1/2	•	1/2	•	2	•	J	D	MA 5	Exc	•
8	C	14	•	•	•	1/2	1/2	1/2	1/2	4	5	5	J	J. CEF	DYGH	•
9	C	14	•	•	•	1/2	1/2	1/2	1/2	2	Obje	5	5	•	DEC	PRO DIS
10	D	8	(mi)	1/2	•	•	•	1/2	•	4	J	J	Cont	F.S.D.	DEC	•
11	C	13	mi	•	•	•	1/2	1/2	1/2	2	J	J		FX	REC. PD	PRO OUT
12										0	•	•	•	REC. PD	(A)	PRO OUT
13	C	16	•	•	•	•	1/2	1/2	1/2	6	J	J	IN QUO	J.C.E.	DEC	PRO OUT
14										0	C.F.B.	•	•	FX	PLI	
15	C	14	•	•	•	1/2	1/2	1/2	1/2	1	J	J	J	J.S.D.	J. unis	PRO OUT
16										0	J	J		•	•	
17		17	mi	1/2	•	•	•	1/2	•	2	J	J		FX	PRO DIS	
18										2	J	J		•	•	
19	D	6	•	1/2	•	1/2	•	•	1/2							PRO OUT
20	D	11	mi	1/2	•	•	1/2	•	1/2							
21	D	9	mi	•	1/2	•	•	•	•							PRO DIS
22	C	13	•	1/2	1/2	1/2	1/2	•	•	2	J	J		MA 5	PRO OUT	
23	C	14	•	1/2	•	•	1/2	1/2	1/2	4	J	J		J. CEF	PRO OUT	
24	D	15	(mi)	•	1/2	•	•	•	1/2	2	J	J		REC. PD	PRO OUT	
25	D	14	•	•	1/2	•	1/2	1/2	1/2	2	J	J		•	•	
26	C	14	mi	1/2	•	•	1/2	•	1/2	1/2	J	J		REC. PD	PRO OUT	
27	D	14	•	1/2	•	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	J	J		REC. PD	PRO OUT	
28	C	16	•	•	•	•	1/2	1/2	1/2	2	J	J		REC. PD	PRO OUT	

T₂

10	Base	Notes	Turn	E	O	R	G	F	S	Notes	Turn	Notes	Rec	Notes	Notes	Pb 5
1	D	6	0	1/2	0	0	0	1/2	1/2	2	J	J	Conf. 2400	Ex. MAS	U ₀ = 1	
2	D	10	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	J	J	Conf. 2400	Ex. MAS	PLI	PRO AUTO
3	C	14	int	1/2	0	0	1/2	1/2	2	J	J	J	0VMO4	MAS. 1/2	0	PRO SUSTE
4	C	16	int	0	1/2	0	1/2	1/2	1	2	D	J	J	0	PLI	PRO DIS
5	C	8	int	1/2	0	1/2	1/2	1/2	0							0
6	C	18	int	0	1/2	0	1/2	1/2	1	4	J	J	J	J. CE	Don't know	PRO DIS
7	D	4	int	1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	J	JSD	N. 2400	0	PLI	
8	D	7	int	1/2	1/2	0	0	1/2	0	2/5	J	J	J	J. 2400	U ₀ = 1	
9	D	15	int	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	J	JSD	J. 2400	0	U ₀ = 1	0
10	C	16	int	0	1/2	0	1/2	1/2	1	J	J	J	J. 2400	0	PLI	0
11	D	10	int	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2	2	J	J	J	0	PLI	0
12	E	10	int	1/2	0	0	1/2	1/2	0							
13	D	10	0	1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	2	J	J	J	0	PLI	0
14	D	9	int	0	1/2	0	0	1/2	1/2							
15	D	4	0	1/2	0	0	0	1/2	0	0	U ₀ = 1	0	J	0	0	0
16	C	10	int	0	1/2	0	1/2	1/2	1/2							0
17									4	J	J	J	J	0	PRO	0
18	D	11	int	1/2	0	0	1/2	1/2	0	1	J	J	J	0	PRO	PRO DIS
19									3	J	J	J	J	0	PRO	PRO DIS
20									3	J	J	J	J	0	PRO	PRO DIS
21	C	8	int	1/2	0	1/2	0	1/2	1/2	1	0	0	J	0	0	0
22	C	1	0	0	1/2	0	0	0	0							0
23	C	12	int	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2							PRO DIS
24	C	12	int	1/2	0	0	0	1/2	1/2	2	J	J	J	0	PLI	PRO DIS
25	D	3	0	1/2	0	0	1/2	1/2	0	0	U ₀ = 1	0	0	0	0	0
26																
27																
28																

Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes	Notes
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26
27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28

[illegible]

°	K	Back	note	Form	1	0	8	6	7	5	note	1/2	1/4	Rel	1/2	nu ₂	P3	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/2048	1/4096	1/8192	1/16384	1/32768	1/65536	1/131072	1/262144	1/524288	1/1048576	1/2097152	1/4194304	1/8388608	1/16777216	1/33554432	1/67108864	1/134217728	1/268435456	1/536870912	1/1073741824	1/2147483648	1/4294967296	1/8589934592	1/17179869184	1/34359738368	1/68719476736	1/137438953472	1/274877906944	1/549755813888	1/1099511627776	1/2199023255552	1/4398046511104	1/8796093022208	1/17592186044416	1/35184372088832	1/70368744177664	1/140737488355328	1/281474976710656	1/562949953421312	1/1125899906842624	1/2251799813685248	1/4503599627370496	1/9007199254740992	1/18014398509481984	1/36028797018963968	1/72057594037927936	1/144115188075855872	1/288230376151711744	1/576460752303423488	1/1152921504606846976	1/2305843009213693952	1/4611686018427387904	1/9223372036854775808	1/18446744073709551616	1/36893488147419103232	1/73786976294838206464	1/147573952589676412928	1/295147905179352825856	1/590295810358705651712	1/1180591620717411303424	1/2361183241434822606848	1/4722366482869645213696	1/9444732965739290427392	1/18889465931478580854784	1/37778931862957161709568	1/75557863725914323419136	1/151115727451828646838272	1/302231454903657293676544	1/604462909807314587353088	1/1208925819614629174706176	1/2417851639229258349412352	1/4835703278458516698824704	1/9671406556917033397649408	1/19342813113834066795298816	1/38685626227668133590597632	1/77371252455336267181195264	1/154742504910672534362390528	1/309485009821345068724781056	1/618970019642690137449562112	1/1237940039285380274899124224	1/2475880078570760549798248448	1/4951760157141521099596496896	1/9903520314283042199192993792	1/19807040628566084398385987584	1/39614081257132168796771975168	1/79228162514264337593543950336	1/158456325028528675187087900672	1/316912650057057350374175801344	1/633825300114114700748351602688	1/1267650600228229401496703205376	1/2535301200456458802993406410752	1/5070602400912917605986812821504	1/10141204801825835211973625643008	1/20282409603651670423947251286016	1/40564819207303340847894502572032	1/81129638414606681695789005144064	1/162259276829213363391578010288128	1/324518553658426726783156020576256	1/649037107316853453566312041152512	1/1298074214633706907132624082305024	1/2596148429267413814265248164610048	1/5192296858534827628530496329220096	1/10384593717069655257060992658440192	1/20769187434139310514121985316880384	1/41538374868278621028243970633760768	1/83076749736557242056487941267521536	1/166153499473114484112975882535043072	1/332306998946228968225951765070086144	1/664613997892457936451903530140172288	1/1329227995784915872903807060280344576	1/2658455991569831745807614120560689152	1/5316911983139663491615228241121378304	1/10633823966279326983230456482242756608	1/21267647932558653966460912964485513216	1/42535295865117307932921825928971026432	1/85070591730234615865843651857942052864	1/170141183460469231731687303715884105728	1/340282366920938463463374607431768211456	1/680564733841876926926749214863536422912	1/1361129467683753853853498429727072845824	1/2722258935367507707706996859454145691648	1/5444517870735015415413993718908291383296	1/10889035741470030830827987437816582766592	1/21778071482940061661655974875633165533184	1/43556142965880123323311949751266331066368	1/87112285931760246646623899502532662132736	1/174224571863520493293247799005065324265472	1/348449143727040986586495598010130648530944	1/69689828745408197317299119602026129706
---	---	------	------	------	---	---	---	---	---	---	------	-----	-----	-----	-----	-----------------	----	-----	-----	-----	------	------	------	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	---------	---------	---------	----------	----------	----------	-----------	-----------	-----------	-----------	------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	--------------	--------------	--------------	--------------	---------------	---------------	---------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	------------------	-------------------	-------------------	-------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	---------------------	---------------------	---------------------	----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------	------------------------	------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	--	--	--	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	--	--	--

[illegible] T_6

[illegible][illegible]

I. Représenter graphiquement les suites de terme général suivant:

1. $u_n = \frac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité = 2cm.)

2. $u_n = (-1)^n$

3. $u_n = \frac{1}{n} \cos n$

3'. $u_n = \frac{1}{n} |\cos n|$

Attention, sur les calculettes, n en radian!

4. $u_n = \cos n$

5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2$ pour tout $n \geq 5$.

6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité = 10cm.)

7. $u_n = \cos n \frac{\pi}{6}$

8. $u_n = \sin \frac{1}{n}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité = 10cm.)

Attention, sur les calculettes, n en radian!

9. $u_n = n^2 + 1$

10. $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ ($n \geq 2$)

II. Pouvez-vous classer ces dessins? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.

III. Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre 1 et un ^{entier} rang n à partir duquel $|u_n - 1|$ reste inférieure à $\frac{1}{10} (\frac{1}{100})$; mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

IV. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux? Justifier vos réponses par écrit.

ii) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

I. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux?

- iii) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
- iv) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

II. Montrer que si, étant donné une suite numérique (u_n) et l un nombre réel, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l , alors la suite u_n converge vers l .

III. Que peut-on dire de (u_{n-2}) si (u_n) converge?

VI. Etudier la suite de terme général $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $a, b \in \mathbb{R}^{**}$.

V. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall a < 1, \exists N, \forall n > N \quad |u_n - l| < a$$

est convergente?

VI. Construire une suite de terme général $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que une des deux suites (v_n) ou (w_n) diverge.

VII. Etudier les suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

VIII. Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

et qui diverge.

IX. a) Encadrer la suite (u_n) telle que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k^3}$
b) Que pouvez-vous en déduire?

X. Que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0.$$

XI. Que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l ?$$

Application : étudier la suite $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$.

XII. Suites récurrentes (un certain nombre)...

XIII. Etablir le lemme de Césaro avec une application.

XIV Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction réelle f_n par : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour $x \in \mathbb{R}$.

- a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n .
- b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante.
- c) Montrer que la suite (u_n) a une limite qui est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Amélioration du prétest

Nous avons d'abord supprimé les exercices dont nous nous sommes peu servi (fin du 4, 5, 9, 10, 11 d), e)). Nous avons ensuite cherché à ce que, pour chaque bloc de connaissances, il y ait suffisamment d'exercices faisant intervenir de façon explicite les connaissances visées. Ainsi avons-nous enrichi ce qui déterminera les blocs E et G. Enfin, nous nous proposons de distinguer dans la correction du 1. les erreurs d'utilisation des valeurs absolues des erreurs de représentation graphique. Voici ce nouveau texte:

1. Représenter dans le plan

$$A = \{(x, y); x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; |x-1| \leq \frac{1}{2}\}.$$

2. Soient deux réels a et b vérifiant

$$-1 < a < 4, \quad -3 < b < -1;$$

(*) donner un encadrement de $(a-b)$ et de $\frac{a}{b}$.

3. Calculer à la main $(0,3)^2 \times 3,14$.

4. On considère l'ensemble des nombres de la forme $\{1 + \frac{1}{n}\}$ (où n entier strictement positif). Cet ensemble est-il minoré? majoré? Justifier.

5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout x réel. i) Donner son graphe.

ii) Quelles propriétés de f peut-on lire sur ce graphe?

iii) Peut-on trouver deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que

$$f(I \cap J) \neq f(I) \cap f(J) \quad ?$$

Justifier.

6. Déterminer A où $A = \{x; x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon\}$.

7. Définir les nombres rationnels; citer deux nombres irrationnels.

8. Soit (P) la proposition suivante:

$$(P) \quad \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n;$$

Ecrire sa négation. La quelle des deux proposition (P) ou non (P) est vraie?

9. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:

$$i) \forall j (1 \leq j \leq 3), \exists a (a \in \mathbb{R}) f_j(a) = 1.$$

$$ii) \exists j (1 \leq j \leq 3), \forall a (a \in \mathbb{R}) f_j(a) = 1.$$

$$iii) \exists a (a \in \mathbb{R}), \forall j (1 \leq j \leq 3) f_j(a) = 1.$$

10. Ecrire à l'aide des quantificateurs $(\exists, \forall)$ la phrase suivante, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels:

"tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contient un élément de la suite".

(*) Variante: montrer que $-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

Bibliographie

- F. Boschet [1] Cours sur les suites numériques dans les cours de l'enseignement supérieur, thèse de 3^{me} cycle, Université de PARIS VII (1982).
- Y. Chevallard [1] Pour la didactique (II^e école été Didactique des Math. Juillet 1982).
- R. Douady [1] Cahier de didactique des Math. n°3 (Paris 1983).
- J. Lautrey [1] Exposé de séminaire (Paris 1983).
- A. Robert [1] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, thèse d'état, Université PARIS VI, (1982).
- [2] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3, n°3 (1983).
- [3] L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG Bulletin de l'APM n° 340 (1983).
- J. Robinet [1] Cahier de didactique des Math. (Paris) n°1
- P. Vermersch [1] Une approche de la régulation de l'action chez l'adulte. Registres de fonctionnement, déséquilibre transitoire et microgênèse, thèse de 3^{me} cycle, E.P.H.E. III^{me} section (1976).