

i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII
CPESL CNRS EHESS

QUELQUES ELEMENTS DE THEORIE PIAGETIENNE
ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

par Janine ROGALSKI

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
2

0. LES ELEMENTS D'UN CADRE DIDACTIQUE

Notre objet de recherche concerne des notions qui, si elles font partie d'un "développement cognitif spontané", participent également de l'enseignement des mathématiques.

Une étude de leur acquisition doit donc se situer par rapport à un cadre théorique d'ensemble qui puisse prendre en compte, au plan des concepts et ses méthodes, le fait qu'on aborde en quelque sorte un "problème à trois corps" : le sujet, le savoir, l'enseignant.

0.1. Le sujet.

Le sujet dont on étudie les acquisitions cognitives peut être considéré de deux points de vue : comme enfant (ou adolescent, ou adulte le cas échéant) situé dans un certain milieu où s'exercent ses activités, et comme élève (ou étudiant) inséré de façon institutionnelle dans la classe (pour le système d'enseignement dominant actuel). Ces deux points de vue sont étroitement dépendants : un élève, disons : dans l'enseignement obligatoire, est simultanément enfant ou adolescent, et l'enfant est - du fait de sa scolarisation obligatoire - un élève pour une part considérable, voire dominante, de son temps actif.

Il nous paraît néanmoins nécessaire de les différencier, sur le plan conceptuel, au moins dans un premier temps : les relations spécifiques introduites par l'institution scolaire à l'intérieur de la classe doivent pouvoir, à un moment de la recherche, être prises en compte qualitativement.

Elles insèrent en effet les élèves dans un cadre "socio-cognitif" ou "collectivo-cognitif" dans lequel des "pairs" sont - à priori tout au moins - dans une même situation par rapport au maître, quant à l'objet commun en jeu : le savoir.

0.2. Le savoir.

Le savoir quant à lui peut, de manière schématique, être référé à un champ de connaissances social, historique, et intégré dans des pratiques professionnalisées (celles de l'ingénieur, du mathématicien, de l'économiste etc...) ; il

.../...

est également lié à des pratiques individuelles dans divers lieux des activités matérielles et sociales, dont font partie les activités de l'enfant. Par rapport à un savoir qui se réalise dans une pratique précise, localisée dans son temps et dans son objet, le savoir historiquement constitué en champ de connaissances est décontextualisé : à un niveau très élémentaire $2+3=5$ est un savoir distinct de celui du jeune enfant qui réunit 2 billes avec 3 billes et trouve "j'ai 5 billes". Le calcul d'une surface obtenu en additionnant deux surfaces partielles (comme deux demi-triangles rectangles pour obtenir un triangle isocèle) ne fonctionne pas au même niveau que l'additivité de la mesure pour des ensembles dont l'intersection est de mesure nulle...

0.3. L'enseignant.

Il occupe une place déterminée dans le système institutionnel scolaire, place qui définit un rapport à la classe et à l'élève différent de celui qui peut exister entre un enfant et quelqu'un qui lui apprend, même intentionnellement, quelque chose.

Le système institutionnel qui fonctionne avec des niveaux emboîtés (Chevallard,), donne au maître une place de pivot puisqu'il est le décideur des choix qu'il est conduit à faire tout au cours du déroulement du temps de la classe. Il n'est pas seulement celui qui sait (par rapport à l'élève qui ne sait pas) mais celui qui sait ce qui viendra après, dans un temps scolaire organisé et long. Le traitement des situations - problèmes effectivement présentées à l'élève, cette orientation par ce qui sera fait ultérieurement en classe détermine (consciemment ou non) des choix quant aux interventions des élèves qui seront retenues, et quant aux solutions éventuelles qui seront validées par le maître.

1. LE CADRE PIAGETIEN DE L'EPISTEMOLOGIE GENETIQUE

La théorie de Piaget sur le développement des connaissances nous offre un cadre conceptuel général pour prendre en compte les rapports entre le sujet et la connaissance, c'est à dire une partie - décisive selon nous - du problème à trois corps : sujet/ savoir/ enseignant.

En effet, les grands concepts théoriques de l'épistémologie génétique piagétienne se sont avérés d'une très grande productivité dans la recherche sur le développement cognitif; ils nous paraissent d'autre part susceptibles de s'intégrer, à terme, dans une théorie didactique qui fasse toute sa place au sujet. Néanmoins nous nous séparerons de certaines conclusions "piagésiennes" concernant en particulier les stades opératoires, la place du contenu et celle de l'école.

1.1. La construction de la connaissance.

1.1.1. Un premier point clé concerne les rapports de l'action et de la connaissance : il s'agit de la thèse de la construction de la connaissance comme résultat d'un processus d'interaction entre le sujet et le milieu, processus qui produit un système de connaissances organisées et ne peut se réduire à une simple accumulation.

Pour expliciter schématiquement ce point nous allons séparer comme moments distincts des éléments qui appartiennent au triplet { l'accomodation, assimilation, équilibration }

Par ses actions (réelles: sur le monde physique, mais aussi intériorisées) le sujet élabore des instruments de connaissances, des concepts (1) ou modifie ses représentations. C'est le phénomène d'accomodation au réel.

(1) Ces concepts ont le double statut d'outil implicite ou explicite d'action sur la réalité, et d'objet reconnu par une communauté culturelle : par exemple, la forme intervient comme instrument de classification et comme objet culturel de description du réel.

.../...

Réciproquement, la "lecture" des transformations effectuées, les interrogations posées par le sujet sur l'objet organisent le réel : il y a processus d'assimilation (de la part du sujet).

Le moteur de l'évolution des systèmes de connaissances est contenu dans le double jeu de l'accomodation et de l'assimilation. Dès que l'action du sujet conduit à une connaissance sur l'objet celui-ci peut se transformer : de nouvelles questions peuvent se poser à propos de cet objet et sur ces rapports avec d'autres.

Des contradictions peuvent surgir aussi bien des nouvelles questions devenues possibles que de la confrontation de la nouvelle connaissance avec les anciennes.

Un second point clé porte sur la dynamique de ce jeu accomodation/assimilation. Les notions de déséquilibre et de équibration traduisent sur le plan théorique l'idée que "le modèle" (...) que se forme un sujet pour une situation dépend des faits qu'il prend en considération et que simultanément et réciproquement les faits qu'il retient dépendent du modèle auquel il peut faire appel (CF Vergnaud, 1981, P.13)

Le processus d'équibration conduit à déterminer à la fois le modèle (plus ou moins "local" par rapport à la situation) et les opérations que le sujet met en oeuvre. Bien entendu il ne s'agit pas d'un déterminant unique : l'investissement du sujet dans la situation peut jouer un rôle considérable).

Il faut préciser que nous prenons les termes d'objet et d'action en un sens large qui contient aussi bien l'action matérielle élémentaire sur un objet proprement dit ("lâcher un jouet" par exemple) que l'organisation d'une expérimentation sur un système (comparer les effets sur le volume de diverses transformations ou du travail sur un concept ou dans un champ conceptuel - pris comme objet (comparer des classes de fonctions selon leur variation, ou leur continuité).

1.1.2. Concernant l'épistémologie Piaget introduit la notion de dépassement interne d'un système, qui nous paraît pertinente

.../...

.../...

Pour la conception de situations didactiques : "la notion même de dépassements internes est une notion dialectique [...] (elle) [la construction de la connaissance] implique l'apparition continue d'oppositions à surmonter et de synthèses à effectuer [...] (car) l'objet existe mais se modifie : il se modifie en fonction de deux facteurs complémentaires. Le premier est que l'objet ne se présente pas sur un seul plan (...), le second est que si l'objet se modifie et si ses modifications ne sont atteintes qu'à travers les coordinations du sujet, celui-ci s'élabore en fonction des éléments matériels ou intériorisés qu'il façonne pour agir sur l'objet". (Piaget, 1967, p.1260 sq).

Nous voyons, dans ces lignes écrites à propos des courants de l'épistémologie scientifique, des questions au coeur de la didactique : on n'étudie pas en effet le processus d'enseignement et d'acquisition des connaissances mathématiques sans un modèle - fût-il flou et implicite de ce qu'est le savoir. Or les conceptions que nous présenterons brièvement plus loin et que résumant assez bien l'injonction de Lebesgue "le professeur de mathématiques doit être un professeur d'action", nous semblent s'intégrer "naturellement" à ces notions que Piaget a développées.

1.2. Fonction symbolique, représentations, invariant opératoire.

1.2.1. Un autre point clé dans la théorie Piagétienne touche à la fonction symbolique : le processus d'intériorisation des actions (et donc, en particulier de représentation du réel) permet un dépassement de l'action matérielle sur un objet présent en un lieu et en un temps donnés, (1); il caractérise la pensée conceptuelle.

(1) Un processus de décontextualisation est déjà à l'oeuvre dans l'intériorisation, au sens où l'objet - et plus largement la situation - est détaché de son cadre spatio-temporel.

.../...

.../...

Différents systèmes de signes en constituent une transcription matérielle : langage parlé et écrit, schémas, graphismes, codes spécifiques. Ces systèmes - ces signifiants - contribuent à l'efficacité opératoire des représentations ils permettent de "calculer" donc d'anticiper des résultats comme de déterminer des possibles.

Nous nous référons au concept piagétien d'intériorisation lorsque nous parlons de représentation du sujet ou de "modèle" (pour le sujet).

1.2.2. Enfin le concept d'invariant opératoire joue pour Piaget un rôle fondamental dans la dynamique du développement cognitif. Les recherches piagésiennes sur la conservation du nombre, des quantités continues, des longueurs, surfaces et volumes etc. sont bien connues. On sait aussi l'impact qu'a eu en psychologie génétique le métaconcept de conservation révélateur du développement opératoire. En fait la place théorique que nous assignons aux concepts d'invariants opératoires et de conservations reprend l'orientation des travaux piagésiens portant sur l'épistémologie génétique de champs de connaissances spécifiques : nombre, espace, quantités physiques, (1).

Or dans ce cadre, l'existence de "décalages horizontaux" dans les conservations pose de sérieux problèmes théoriques. Il y a "décalage horizontal" lorsque certaines conservations sont acquises à des moments très différents du développement, alors que les notions correspondantes ne dépendent pas les unes des autres). D'une manière analogue les sériations sont considérées comme le résultat d'opérations logiques s'appuyant sur un invariant lié à l'ordre. Or l'existence d'une transitivité précoce (eu égard à l'ensemble des études sur la sériation) observée par de Boysson-Bardies (de Boysson-Bardies, 1973) ne rentre pas dans le cadre théorique des invariants logiques : ou

(1) Ces textes ont été publiés de 1941 à 1950. Le terme utilisé par Piaget est en fait précisément "invariant représentatif" (introduction à l'épistémologie génétique - Tome 2), et il n'est pas considéré comme se situant encore au niveau "logique".

.../...

.../...

ou bien on l'interprète comme un artefact (non expliqué par ailleurs) ou bien on la traite comme une remise en cause théorique. Aussi tout en maintenant à la construction d'invariants un rôle central dans la constitution de la connaissance, nous nous séparons de Piaget quant à la place théorique assignée aux concepts de conservations et d'invariants : pour nous ils ne relèvent pas d'une logique générale de la pensée qui serait dégagée des contenus, mais ont une signification spécifique par rapport aux objets en jeu (dans les divers champs conceptuels).

2. DOMAINE DE VALIDITE DES OPERATIONS COGNITIVES.

Dans les rapports entre sujet et connaissance, nous nous séparons ici de la logique des "stades opératoires" dans laquelle s'inscrivent des affirmations comme "l'enfant en est au stade sensor-moteur" ou "c'est seulement vers douze ans que l'enfant atteint le stade des opérations formelles".

La notion de stade nous paraît une unité trop globale : elle ne permet pas de rendre compte des divergences constatées entre certaines acquisitions conceptuelles : aux conservations déjà citées on peut ajouter l'exemple de la relative stabilité dans l'évolution des classifications qui s'oppose aux décalages considérables à propos de l'espace (1).

Certes la recherche d'invariants généraux est une démarche qui a prouvé sa productivité. Les divers "champs conceptuels" correspondant à l'élaboration des connaissances ne sont pas clos : les instruments de pensée construits dans l'un d'entre eux peuvent être réinvestis dans d'autres.

Néanmoins, attribuer - comme le font certains textes de Piaget - à une "résistance du réel" le fait de ne pas retrouver les mêmes opérations cognitives dans divers champs conceptuels nous apparaît une impasse théorique quant à la compréhension des processus en cause et quant à l'intervention destinée à provoquer l'évolution des connaissances de l'élève.

2.1. La prise en compte effective des contenus (au sens de champs conceptuels spécifiés : espace, mesures, structures additives ou multiplicatives, topologie...) est un enjeu théorique décisif pour la didactique : la connaissance est toujours connaissance de quelque chose : la théorie doit intégrer l'interaction entre des invariants (généraux) du fonctionnement cognitif et les contenus spécifiés à propos desquels ce fonctionnement est actualisé.

(1) On peut trouver des problèmes de représentation spatiale maîtrisés par certains enfants de 6 ans qui posent des problèmes sérieux à certains adolescents - sans que cela soit en rapport avec d'autres différences cognitives.

.../...

Cela est évident à propos de contenus sur lesquels l'enseignement intervient mais concerne également des connaissances moins institutionnalisées.

On peut prendre l'exemple des quantités physiques ou spatiales, pour lesquelles les connaissances "spontanées" précèdent l'enseignement sur ces notions.

Pour Piaget, les conservations en ce domaine relèveraient d'une logique générale de la connaissance ; le recours aux arguments d'identité et de réversibilité (pour soutenir les conclusions de conservation) est aussi interprété en relation avec l'accès au stade opératoire. (1) Or les conservations de la longueur, du volume, du poids, s'appuient sur des propriétés du monde physique, indépendantes des actions propres du sujet : c'est parce que les liquides sont incompressibles, parce que le champ de gravité terrestre est (relativement) constant, que les volumes et les poids sont conservés dans certaines transformations spatiales. A contrario, lorsqu'on étire un élastique et qu'on considère la longueur, on détermine une transformation réversible, dans une situation où on peut appliquer l'identité, qui a les mêmes caractéristiques "logiques" qu'une déformation de boulette de plastiline, et pourtant il n'y a pas conservation de la longueur de l'élastique...

2.2. En fonction de ces remarques théoriques, nous considérons comme productif d'introduire la notion de domaine de validité des opérations cognitives que le sujet (enfant, adolescent, adulte) peut engager dans des situations définies (à la fois précises quant au(x) contenu(s) concerné(s) et à l'actualisation particulière de ce(s) contenu(s).

Cette notion prend en compte les propriétés "objectives" (au regard de la connaissance scientifique acquise, et à l'échelle des phénomènes matériels considérés) ; elle permet une opérationnalité de concepts généraux, et n'enferme pas l'analyse dans un modèle trop spécifique.

(1) La logique de l'enfant est alors celle du "groupe INRC" (identité, négation, réciprocity, contradiction) de la logique des propositions.

.../...

.../...

Une transitivity précoce n'est plus alors nécessairement soit un artefact soit une mise en cause théorique ; les difficultés à rendre compte d'une évolution qui retrouve pour les notions spatiales les grands stades piagétien peuvent être abordées avec plus de sérénité théorique. Si on considère les problèmes de didactique dans un domaine particulier, la construction "spontanée" de la connaissance tout comme l'appropriation du savoir enseigné à l'école peuvent alors être analysées à la fois du point de vue de l'extension du domaine de validité de certaines opérations ou certains invariants, et du point de vue de la réorganisations des systèmes de représentations. On peut également se poser le problème des variables didactiques sur lesquelles jouer pour que l'extension du domaine de validité produise des restructurations de connaissances, ou engage la dialectique déséquilibre/équilibration.

3. LE STATUT SOCIAL DE LA CONNAISSANCE.

Centré sur la recherche d'invariants dans le fonctionnement de la pensée "épistémologique", Piaget - s'il situe les actions de transmission éducative et de culture comme intervenant dans le développement cognitif - n'opérationnalise pas sa thèse que "l'intelligence humaine se développe chez l'individu en fonction d'interactions sociales" (Piaget 1967). Dans les expérimentations piagétienne les interventions sociales, comme le discours évoqué d'un autre enfant (dans les suggestions et contre exemples, par exemple), ne sont pas analysées sur le plan de leurs caractéristiques sociales mais traitées au même titre que les autres éléments de la situation-problème.

3.1. Or, d'une part l'enfant occupe une certaine place sociale : dans sa famille, dans son milieu de vie, à l'école ; d'autre part en tant qu'élève il a un statut dans le milieu institutionnel de l'école. Les interactions sociales dans la construction de ses connaissances sont donc multiples. En ce qui concerne la place de l'enfant dans son milieu, l'expérimentation n'est pas possible et la connaissance directe exige des conditions très spécifiques permettant des "études de cas" ; nous n'y ferons référence que pour avancer quelques hypothèses générales pour l'analyse de nos résultats.

Pour le second point (l'enfant à l'école) il faut souligner le caractère institutionnel de l'école, la régulation de son fonctionnement à travers le réseau des manuels, le système de contrôle (l'inspection...), de la formation spécifique ou "sur le tas" (avec la double référence du passé d'élève de l'enseignant et de la pratique des autres enseignants), les programmes et les instructions (1). Cela permet une approche plus précise de l'analyse de l'intervention du système scolaire dans le développement cognitif.

(1) Validité différente par rapport en France et dans d'autres pays.

.../...

3.2. L'étude que l'on peut faire sur le plan de la didactique entre développement individuel et organisation sociale laisse néanmoins de côté l'analyse du caractère social de la connaissance elle-même.

La thèse de l'intervention décisive, sur le plan théorique, du fait collectif et social dans la construction même de la connaissance(1) a été opérationnalisée par Doise, Perret -Clermontx Mugy. Néanmoins le poids mis dans leur analyse sur les notions de centration (et décentration) et le choix d'une certaine catégorie d'expériences dans lesquelles le contenu joue un rôle mineur nous paraît poser les mêmes problèmes que la non prise en compte théorique des contenus dans la théorie des stades opératoires. Nous ferons donc une référence nuancée à leurs apports théoriques, à propos des séquences didactiques sur la surface et le volume, en retenant essentiellement le caractère local (dans le temps) des effets des conflits socio-cognitifs.

(1) A la limite de la connaissance serait collective avant d'être individuelle non seulement sur le plan historique mais pour la psychogénèse.

4. LES MATHÉMATIQUES, SCIENCES D'ACTION.

Une analyse de l'appropriation par l'enfant de notions mathématiques, tout comme une étude didactique du processus d'enseignement de concepts mathématiques sous entend une certaine représentation de ce que sont les connaissances en mathématique.

4.1. Une telle représentation, même implicite, précise plus ou moins ce qu'est un "problème" de mathématiques. La construction de situations didactiques, comme l'interprétation des productions et des conduites des élèves, sont elles mêmes dépendantes de la notion de problème.

Ainsi "résoudre un problème du premier degré" peut signifier: trouver la succession des transformations d'écriture à partir d'une certaine formule pour aboutir à $x = A$ où A est une écriture numérique (2,5 ; $7/8$; $1 - \pi$...) ; cela peut aussi signifier "trouver la (ou les) valeur(s) d'une grandeur vérifiant une certaine relation de type linéaire" (le lieu de rencontre de deux trains circulant sur le même trajet, à vitesse constante, par exemple).

La définition des situations-problèmes pertinentes à un certain contenu mathématique étudié dépend de la position adoptée sur cette question.

La conception à laquelle nous nous rattachons rejoint celle développée par Piaget à propos de la connaissance. Elle s'appuie sur deux faits : la spécification des mathématiques comme champ de savoir particulier est le résultat d'un long processus, et l'interaction des mathématiques avec d'autres champs de savoir scientifique (la physique, la biologie, l'économie...) ne fonctionne pas exclusivement en sens unique.

4.2. Des notions, comme le nombre, la grandeur, l'espace et les déplacements, qui organisent une connaissance sur le monde, fonctionnent comme des précurseurs de notions mathématiques.

.../...

Ces notions mathématiques sont (ensuite) l'objet d'un développement autonome au cours duquel s'organisent des champs conceptuels proprement mathématiques ; le fonctionnement même des concepts les transforme en nouveaux référents possibles à partir desquels s'élaborent de nouvelles notions. Les perspectives ainsi modifiées permettent à leur tour d'interroger différemment le réel.

A côté d'un fonctionnement autonome - dont la part varie selon les concepts et leur place historique - la "mathématisation" correspond à un double processus : constitution d'un nouveau concept à partir d'une action sur le réel (pour résoudre un problème à propos de ce réel) et investissement de concepts "déjà mathématisés" pour représenter la réalité. L'existence de ce double processus nous a conduit à la formulation de "mathématiques, sciences de l'action". Nous reprenons là l'accent mis par Lebesgue sur le caractère des mathématiques : abordant le problème des rapports entre logique et arithmétisation, il souligne " les mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins (...) Le professeur de mathématiques doit rester un professeur d'action" (Lebesgue, 1975 (réed, p 180). Il a par ailleurs insisté sur le passage qualitatif que comporte le premier volet de la mathématisation. "une mesure géométrique commence physiquement, elle ne s'achève que métaphysiquement" (id, p 81) et de même "le nombre (auquel) nous ne parviendrons que par une opération de l'esprit" (id, p. 82).

On peut voir le processus complet à l'oeuvre à propos des distributions : lorsque Dirac travaille avec sa "fonction" (qui n'en n'est plus une) il y a opération avec un concept nouveau pour avoir prise sur une réalité dans un champ de la physique, élaboration ultérieure de la théorie des distributions : on est passé d'un concept "précuseur" : la "fonction" de Dirac à une notion mathématique insérée dans un fonctionnement d'ensemble : la distribution. Le réinvestissement ultérieur en physique est le moment le mieux reconnu du processus de mathématisation.

.../...

.../...

- 4.3. Bien entendu, nous ne pensons pas que les rapports respectifs des "moments" que nous distinguons (pour les besoins de l'exposition) dans la constitution de concepts nouveaux, le développement propre de systèmes conceptuels mathématiques, puis le réinvestissement comme instrument opérationnel sur le réel, soient les mêmes pour l'histoire des mathématiques et celle du développement de l'individu. Le rôle joué par le temps n'est pas non plus le même.

Nous ne pensons pas d'avantage que les moteurs dans l'évolution de ces processus soient analogues : l'enfant ne fait pas de recherche en miniature...

Le seul invariant que nous postulons c'est l'existence d'une double articulation avec le réel et le fonctionnement autonome possible des notions organisées en système de connaissances mathématiques. (éventuellement inappropriées).

Nous voudrions pour terminer sur ce point, insister sur deux différences fondamentales : - l'enfant (l'élève) agit, construit et s'approprie des connaissances dans une situation sociale où existent des savoirs scientifiques organisés, qui ont "diffusé" pour partie au-delà des professionnels ; - dans l'institution scolaire, le maître existe qui dirige, dans le temps, le travail (individuel ou de la classe) sur les notions enseignées : le savoir (social) déjà acquis et transposé comme objet d'enseignement.

La dialectique que l'on peut mettre en jeu pour modifier les systèmes de connaissances des élèves peut donc être profondément différente de celles que montrent et l'histoire des mathématiques et la pratique de la recherche actuelle.

5. LA NOTION DE CHAMP CONCEPTUEL.

Nous allons présenter quelques éléments généraux sur la notion de champ conceptuel. Le point de fond est le fait qu'à la fois un concept est à l'oeuvre dans une variété de situations et dans une situation donnée plusieurs concepts sont en jeu, ce qui conduit à rejeter l'étude de concepts isolés, identifiés à un type de situations.

5.1. De façon schématique, les concepts peuvent être considérés comme des noeuds d'un réseau de relations ; un champ conceptuel correspond à une partie de ce réseau qui possède certains caractères, relativement à un ensemble de situations.

Par exemple sont pris dans le champ conceptuel des structures multiplicatives : les concepts de produit cartésien, de mesure-produit, d'applications linéaires sur $\mathbb{R}$, d'opération, de multiplication dans divers ensembles numériques ($\mathbb{N}, \mathbb{D}, \mathbb{O}, \mathbb{R}$).

Réciproquement la surface (comme mesure) se rattache aux champs conceptuels des quantités physiques et des opérations de mesure, de la construction des nombres positifs, de l'espace et ses modèles, aux structures additives (comme mesure simple), aux structures multiplicatives (comme produit de mesures "linéaires"). Nous venons de citer des champs conceptuels référés essentiellement au domaine du déjà - mathématisé, mais cette notion reste significative pour d'autres référents à partir desquels se constituent des concepts "précurseurs".

Ainsi, la construction d'une collection complète et sans répétition de formes colorées à partir de formes et de couleurs données indépendamment, fait déjà intervenir les concepts de forme et de couleur : pour frustes qu'ils apparaissent au regard de la connaissance mathématique, ils n'en nécessitent pas moins un processus d'appropriation par le tout jeune enfant.

.../...

.../...

Une telle construction fait aussi intervenir les notions d'identité et de différence pour des couples, éventuellement la cardinalité des ensembles, la distributivité (qui assure sur toute forme est associée successivement à chaque couleur). On voit se dessiner un champ conceptuel en rapport avec la combinatoire des dimensions.

L'exemple d'une situation de repérage dans un quadrillage orthogonal fini, fait appel à des concepts topologiques (être voisin de, être sur le bord...), à des concepts projectifs (l'alignement sur telle "horizontale"...), à des relations binaires liées à la métrique (près, loin) ou à l'orientation de l'espace (à droite/à gauche)...

5.2. La notion de champ conceptuel, que nous avons présentée ci-dessus, concerne la théorisation du développement cognitif au sens suivant : elle servira à l'analyse des situations problèmes et à l'interprétations des activités des élèves au cours de ces situations ; elle contribuera à orienter les observations, donc à définir le corpus.

Cela signifie que cette notion n'est pas relative au sujet, enfant ou élève, dont on étudie les acquisitions cognitives. Néanmoins rien ne permet d'avancer que le découpage de champs conceptuels concernés par une situation (ou un ensemble de situations) pourrait être déterminé à priori et de façon univoque par la situation, indépendamment des problèmes que la recherche se propose d'étudier.

En fait, ce découpage dépend, en particulier, des savoirs préalablement établis sur la transmission et l'appropriation des connaissances. Ainsi - pour prendre un exemple - les notions prises en compte pour découper le champ conceptuel des mesures spatiales ne seront pas les mêmes selon qu'on se propose d'étudier un enseignement sur la mesure des surfaces à des élèves de 6^{ème} ou sur la théorie de la mesure à des étudiants de mathématiques.

.../...

.../...

La notion de champ conceptuel - et celle de concept - fonctionne ainsi à des niveaux multiples ; ceux-ci par ailleurs, ne nous semblent guère pouvoir être hiérarchisés entre eux ni rapportés à un niveau absolu de référence qui serait par exemple, celui d'un "savoir savant". (1)

(1) La transposition d'un objet de savoir en objet d'enseignement nous paraît poser un problème similaire quant à la délimitation de l'"objet de savoir".

6. LES SYSTEMES DE REPRESENTATION DU SUJET

Nous venons de présenter le champ conceptuel comme un domaine découpé à propos d'un certain contenu dont on étudie l'enseignement et/ou l'acquisition par les enfants. Il doit être assez gros pour constituer une unité significative de relations interconceptuelles, et assez circonscrit pour opérationnaliser au niveau de la recherche les questions que l'on se pose.

A ce découpage correspondent des hypothèses sur les représentations du sujet. De même que l'analyse d'un contenu en champs conceptuels suppose qu'il n'y a pas de concept isolé, de même notre analyse du fonctionnement cognitif prend pour hypothèse de base qu'il n'y a pas des représentations isolées mais des systèmes de représentation.

6.1. Dans une situation donnée un ou des systèmes de représentation vont produire des règles d'action, qui s'actualisent en procédures de modification de la situation et/ou en production de signifiants (réponses verbales, écrites, schémas, graphiques, formules, codes spécifiques...) - cela dès lors tout au moins que la situation - problème, appelant une intervention du sujet pour transformer l'état de la situation.

Lorsqu'il s'agit de concepts logico-mathématiques ces règles d'action peuvent être des "théorèmes en acte" s'identifiant dans le résultat produits - sa régularité et sa stabilité - à l'effet de véritables théorèmes.

Or une partie considérable de ce qu'on qualifie d'"intuition" en géométrie à ce statut de "théorème en acte", mais c'est aussi le cas dans les structures arithmétiques par exemple (l'associativité, la commutativité de l'addition se manifestent précocement dans le fonctionnement du sujet qui calcule).. Des "théorèmes en acte" peuvent évidemment être "faux" - au regard d'un certain niveau de connaissances - mais fonctionner de manière stable dans tout un ensemble de situations.

.../...

En ce qui concerne les règles d'action dans leur généralité, nous devons souligner plusieurs points. D'abord, tout comme les systèmes de représentations, on peut se poser à leur propos la question du domaine de validité.

Ensuite dans la mesure où elles s'actualisent dans une situation spécifique, elles rencontrent des problèmes de mise en oeuvre pour devenir "effectives".

Enfin, bien qu'étroitement liées aux systèmes de représentation, les règles d'action s'en différencient ; En particulier des règles d'action "issues d'un certain système de représentations peuvent être gardées (conservées) par le sujet dans une situation nouvelle qui relève* d'un autre système de représentation. Cela ^{*(1)} peut se produire "localement" dans le temps : au cours d'une même expérience, ou d'une même séance scolaire ; cela peut aussi se traduire à plus long terme, en donnant lieu à des fonctionnements par analogie productifs, et/ou éventuellement abusifs (en algèbre, par rapport à l'arithmétique par exemple). En tenant compte de ces points, on peut alors traiter certaines caractéristiques de la situation (par exemple la "niche informationnelle" pour tout ce qui touche au domaine numérique) comme des variables didactiques permettant, en particulier en jouant sur le domaine de validité des règles d'action, d'agir en retour sur les systèmes de représentation qui les ont produites.

6.2. Il faut souligner que les règles d'action ne sont pas directement observables, pas plus que les systèmes de représentation.

Le schéma ci-après est une proposition de représentation graphique de l'organisation des différentes notions introduites sur les rapports champs conceptuels, représentations...

(1) Le travail dans des cadres tels que les définit R.D (... , thèse en cours) peut contribuer à la gestion didactique des conservations ou changements de règles d'action.

.../...

Est entouré - en traits pleins tout ce qui se rapporte au sujet.

- en tirets ce qui se rapporte à la réalité, en soulignant à nouveau qu'ici "réalité" concerne évidemment la réalité matérielle mais aussi la réalité construite par le fonctionnement même du savoir - y compris au niveau individuel.

- en pointillés ce qui se rapporte à l'observateur, et qui fait partie des décisions prises quant au cadre théorique dans lequel seront posées des interrogations spécifiques. Les rectangles représentent un schéma classique au niveau de l'analyse du langage - qui se situe sur un plan différent.

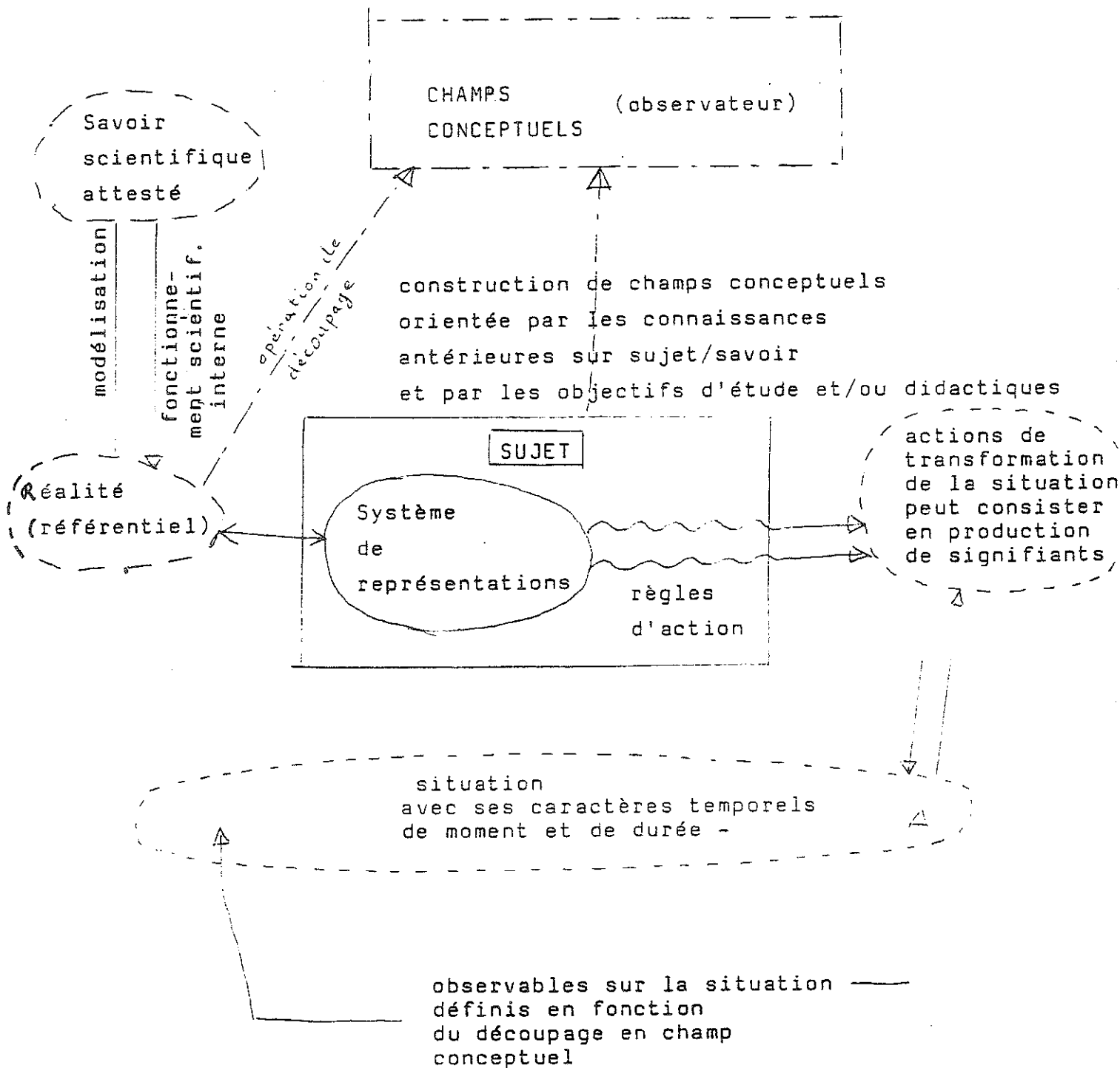


Schéma des rapports internationaux concernant

l'interaction sujet / savoir

("réalisé")

(sujet)

(dans un système
(organisé)

réfèrent

signifié

signifiant

Analyse du discours

(théorie du langage)

Le fonctionnement de l'observateur est dans ce schéma le suivant :

- on (part de) construit une situation dans laquelle (est) on met le sujet (ce peut être une situation-problème, ou une situation didactique).
 - On détermine (par les connaissances acquises et y compris après coup) des observables dans l'interaction sujet/situation.
 - ces observables sont l'objet que l'on va analyser pour "remonter" au couple systèmes de représentations/règles d'action.
 - les hypothèses quant aux rapports entre champs conceptuels et situations sont utilisées pour dégager des propriétés des systèmes de représentation eux-mêmes (en jouant sur les situations).
 - on détermine (c'est l'objectif de la didactique) des variables didactiques pour construire une (nouvelle) situation didactique ("séquence" didactique - si on veut un terme qui connote le rôle du temps) candidate à produire une modification voulue dans les systèmes de représentation et les règles d'action (le système de connaissances "déclaratives" et "procédurales" de l'élève).
 - on analyse le fonctionnement de cette situation didactique (sur les effets produits sur les systèmes de représentations) en "bouclant" sur le point de départ.
-