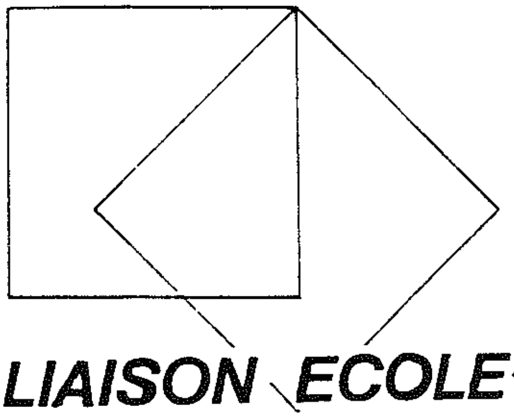
Université PARIS VII

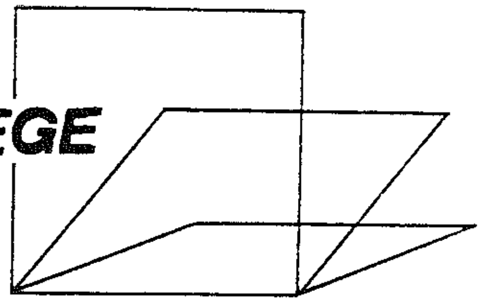
IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

48

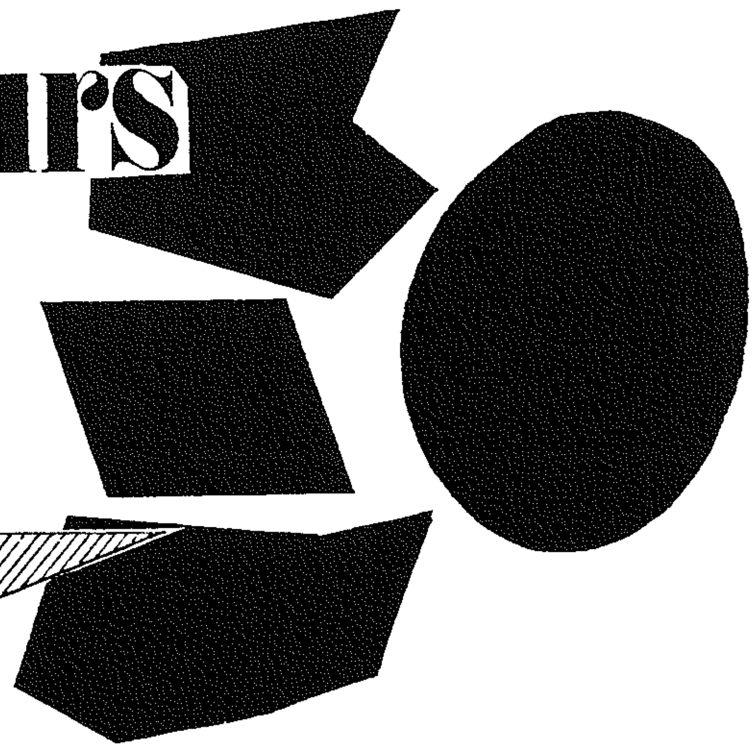
Septembre 1983

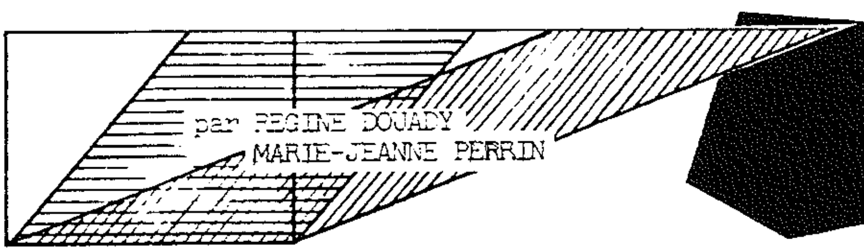




LIAISON ECOLE-COLLEGE

mesure des longueurs et des aires



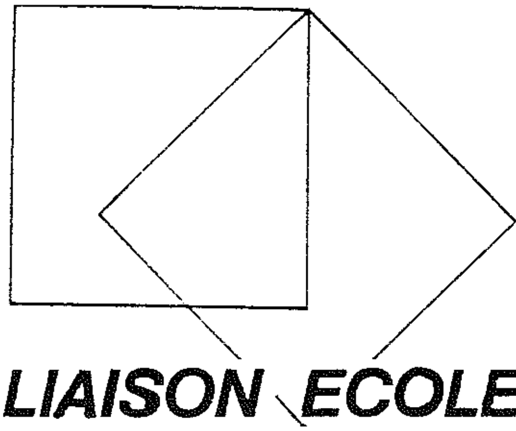


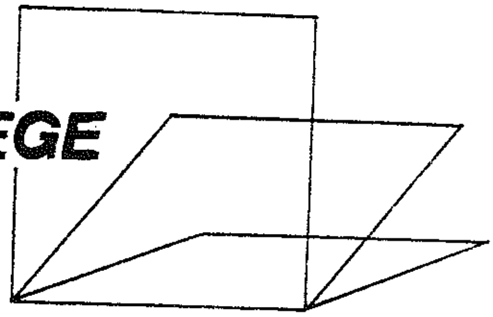
par REGINE DOUADY
MARIE-JEANNE PERRIN

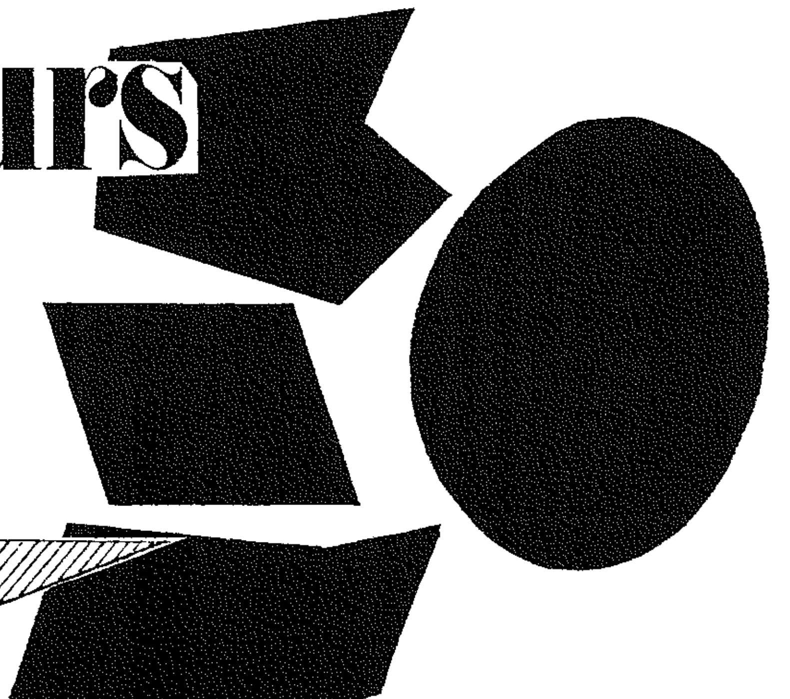
NIVEAU	Ecole elementaire - CE_2 - CM_1 - CM_2 - Premier cycle - 6° - 5°
PUBLIC	Maitres de l'école élementaire - Professeurs de Math. du ler cycle
SUJET	La construction des concepts de longueur et d'aire. L'intervention de ces concepts dans l'enrichissement du domaine numerique. Analyse didactique des sequences d'enseignement.
OBJECTIF	Informations sur un apprentissage qui se poursuit du CE_2 à la 5°

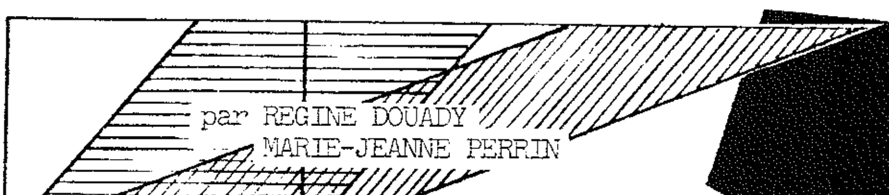
LIAISON ECOLE-COLLEGE

mesure des longueurs et des aires









par REGINE DOUADY
MARIE-JEANNE PERRIN

INTRODUCTION

*****

Cette brochure s'adresse aux maîtres de l'Ecole Elémentaire (CE_2, CM_1, CM_2) et aux professeurs de Collège (6°, 5°).

L'objectif de cette brochure est l'enseignement de la mesure des longueurs et des aires, à travers une suite de situations - problèmes. Dans ces situations interviennent en interaction des points de vue numériques et non numériques. Cette interaction évolue dans le temps. Par exemple, on peut au CE_2 compter le nombre de carreaux contenus dans un rectangle dessiné sur papier quadrillé, on peut, au CE_2 ou au CM_1, construire par découpage et recollement d'autres surfaces ayant le même nombre de carreaux, continuer en construisant sur papier blanc des surfaces ayant même aire qu'une suface donnée, aborder la mesure des aires par pavage arbitraire au CM_1 ou au CM_2, mesurer des aires diverses en cm^2 par exemple, en CM_2 ou en 6°, se poser les questions d'invariance des aires et périmètres de surfaces données suivant les transformations géométriques qu'on leur fait subir, en 6° ou en 5°. A chaque étape les situations proposées prennent en compte ce que les élèves savent pour poser de nouvelles questions et construire de nouvelles connaissances intégrant les anciennes.

Dans toutes les situations choisies, nous avons eu le souci de faire fonctionner les notions dont on visait l'apprentissage, et pas seulement d'en faire un catalogue.

La plupart des séquences proposées ont été expérimentées en CM_1 et en CM_2 dans les classes de Mme D'Agostino, MM. Ducousset et Fabarez à l'école Dunoyer de Segonzac à Antony et dans la classe de M. Méré à l'école du Mail des Cuverons à Bagneux. Qu'ils soient ici remerciés pour leur collaboration sans laquelle ce travail n'aurait pu se faire.

Toutes remarques, critiques, interrogations et suggestions seront les bienvenues; les adresser aux rédactrices :

Régine DOUADY
Marie-Jeanne PERRIN GLORIAN

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

MESURE DES LONGUEURS - RECOURS AUX FRACTIONS.

Objectifs.

Le travail que nous allons décrire dans ce chapître a pour objet :

- l'utilisation de fractions pour désigner des mesures de longueur qu'on ne sait pas désigner par des nombres entiers avec l'unité donnée et pour calculer sur ces mesures

- l'explicitation de relations entre des unités de mesure u et v et des relations entre les mesures correspondantes d'une même longueur.

I. - CHOIX DE LA SITUATION.

1) Correspondance longueurs-nombres

Nous expliquons dans la première partie de la brochure 62 "Nombres décimaux" l'importance que nous accordons au choix de problèmes qui permettent de travailler sur plusieurs cadres en interaction. Le choix du cadre se fera en fonction des questions posées et des informations dont on dispose. Ici, nous allons poser un problème dans le cadre des longueurs. Pour le résoudre, les élèves auront besoin de le traduire en termes de nombres. La traduction complète exige de savoir mesurer n'importe quelle longueur dans une unité donnée.

Une unité de longueur u étant choisie, à certaines longueurs on peut associer un nombre entier, à d'autres non. Le problème va être d'enrichir l'ensemble des nombres pour enrichir l'ensemble des longueurs mesurables en u.

2) Recherche de relations entre unités de mesure.

Soient u et v deux longueurs non nulles.

Supposons par exemple $v < u < 2v$. On ne peut mesurer en nombre entier ni v en u, ni u en v. Toutefois u et v peuvent servir chacune d'unité de mesure.

Si une longueur ℓ a une mesure entière p en u et une mesure entière q en v, il est clair que $p \neq q$. En effet, on a dans le cadre des longueurs :

$\ell = p.u = q.v$ et $v < u$ donc

$p\,v < p\,u$ donc $p\,v < q\,v$ donc $p < q$.

Dans les problèmes on pourra substituer, si besoin est, p.u à q.v ou q.v à p.u. Mais il peut arriver que u ou v intervienne autrement que par leur multiple p.u ou q.v. On voudra indifféremment calculer avec u ou avec v. Il faudra pour cela qu'on sache exprimer u en fonction de v ou v en fonction de u. Une telle expression fait nécessairement intervenir p et q.

3) Incidence didactique du choix du rapport entre l'unité de mesure et la longueur à mesurer.

Selon que l'unité demesure est très grande par rapport à la longueur ℓ à mesurer, très petite ou du même ordre de grandeur, les enfants peuvent adopter des procédures différentes (cf[R.R.]) [[R.R] : Ratsimba - Rajohn - thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I. 1981] .

a) Si u est très grand par rapport à ℓ; on peut s'attendre à ce que les élèves reportent ℓ dans u. Si ce rapport tombe juste, u est de la forme $n.\ell$ et la mesure de ℓ en u est un inverse d'entier : $\ell = \frac{1}{n}$. u. Si le report ne tombe pas juste $u = n.\ell + r$ avec $r < \ell$; si on peut négliger r, on est ramené au cas précédent, si on ne peut pas négliger r, la situation devient compliquée :

- ou bien on itère le procédé en reportant r dans u ; même dans le cas facile où le report tombe juste, on aura $u = qr = n\ell + r$ et il est difficile d'exprimer ℓ en fonction de u.

- ou bien on reporte r dans ℓ et, en admettant que ce report tombe juste, on aurait $pr = \ell$ et $u = n\ell + \frac{1}{p}\ell$ ce qui n'est pas facile non plus.

On peut cependant s'en tirer en cherchant des multiples entiers $k.u$ de u et $n.\ell$ de ℓ tels que $k.u = n.\ell$.

On écrira : $\ell = \frac{k}{n}$ u où $\frac{k}{n}$ est caractérisé par

$n \times \left(\frac{k}{n}\right) = k.$

C'est le cas si l'on veut mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier par l'intermédiaire d'une pile de n feuilles d'une épaisseur de k cm (cf. BROUSSEAU - Recherches en Didactique des Mathématiques 1981 -2.1 p.88 et suivantes)

b) Si u est très petit par rapport à ℓ, les élèves vont reporter u dans ℓ. On aura $\ell = n.u + r$ avec $r < u$. Dans le cas où u est très petit par rapport à ℓ (n grand), les élèves seront tentés de négliger r et de se satisfaire d'une mesure entière. La situation n'est pas propice au recours aux fractions.

c) Si ℓ est du même ordre de grandeur que u, c'est le cas si $\ell < u$ mais pas trop petit, ou si u peut être reporté un petit nombre p de fois dans ℓ. On a $\ell = p.u + r$ avec $r < u$.

(Le cas $l < u$ correspond à $p = 0$). Si r n'est pas négligeable devant u, le problème est alors de mesurer r en u. Si u n'est pas trop petit, une des procédures est de fractionner u en longueurs v telles que $n.v = u$. On mesure r à l'aide de v et on exprime cette mesure en fonction de u grâce à la relation $v = \frac{1}{n} . u$. Si $r = k.v$, on écrit $r = k \times (\frac{1}{n} . u) = \frac{k}{n} . u$ et $\ell = (p + \frac{k}{n}) . u$. L'expression $\frac{k}{n}$ est caractérisée par $\frac{k}{n} = k \times \frac{1}{n}$ et $n \times \frac{1}{n} = 1$.

Nous avons choisi de mesurer des longueurs avec une unité de l'ordre de quelques centimètres. On pourra ainsi la fractionner facilement et la reporter quelquefois sur un trait dessiné sur une feuille de papier (le cas c).

4) Extension des nombres et des opérations.

Le problème est de savoir si les nouvelles expressions vont fonctionner comme des nombres. Peut-on les comparer aux entiers, les comparer entre elles, et comment ; peut-on leur étendre les opérations qu'on savait faire sur les entiers ?

Les opérations et comparaisons sur les longueurs vont donner lieu à des opérations et comparaisons sur leurs mesures (nombres entiers ou nouvelles expressions) et réciproquement. Dans cette correspondance, les nouvelles expressions acquièrent le statut du nombre.

II.- ORGANISATION DE LA SEQUENCE.

1) Matériel

Feuilles de papier blanc (sans lignes), petites bandes de carton fin servant d'unité de longueur (environ 6 cm) en au moins autant d'exemplaires que d'élèves.

2) Organisation de la classe

Les élèves sont binômés par deux : émetteur, récepteur, placés assez loin l'un de l'autre dans la classe pour pouvoir travailler séparément. Chaque élève est émetteur d'un message vers un camarade et récepteur d'un autre message (provenant de ce camarade ou d'un autre).

3) Consigne :

Vous dessinez un trait. Votre récepteur doit reproduire un trait * de même longueur. Pour cela, vous allez lui donner, sans vous servir de votre règle graduée, l'information nécessaire . Vous lui envoyez cette information dans un message écrit sans dessin. Si le récepteur a besoin d'informations supplémentaires, il les demande par écrit sur le message. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs traits pour voir s'ils ont bien la même longueur.

4) Analyse de la tâche.

Pour satisfaire à la consigne, émetteur et récepteur ont besoin de disposer d'une même unité de longueur. L'information pertinente que doit transmettre l'émetteur est alors la mesure de son trait avec l'unité donnée.

Nous avons expliqué dans le premier paragraphe le choix fait de l'unité. Il reste à déterminer le moment où on va distribuer cette unité. Cela peut être avant que les élèves aient dessiné leur trait ou après qu'ils l'aient tous dessiné.

a) si on donne l'unité avant, l'émetteur peut choisir la longueur de son trait en se servant de l'unité fournie, par exemple en la reportant un nombre entier de fois. Son message sera alors facile à rédiger et facile à lire.

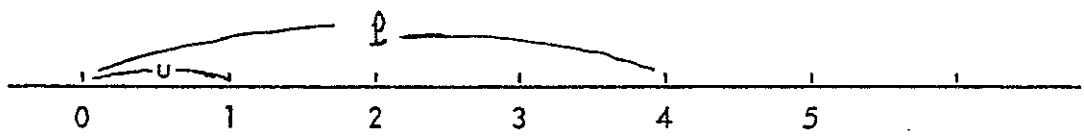
b) si on donne l'unité après, la longueur du trait a de fortes chances de ne pas avoir une mesure entière. Pour écrire un message efficace, l'émetteur sera amené à choisir une unité plus petite par exemple en subdivisant celle qui a été donnée (cf I.3.c.). Dans ce cas la rédaction du message sera plus difficile. L'émetteur pourra décrire sa procédure de subdivision et l'utilisation qu'il en a faite. Il pourra coder ses opérations. Dans tous les cas, la lecture d'un tel message sera plus difficile aussi. Mais c'est dans ce contexte que le recours aux fractions sera efficace et indispensable pour raccourcir les messages.

* La consigne est formulée ici pour de jeunes élèves (CE2-CM1) qui ne connaissent pas le mot "segment". Il va de soi qu'avec des élèves de 6ième, on utiliserait le mot "segment".

Remarque : Le changement d'unité n'est pas indispensable. On peut construire une nouvelle longueur L telle que $L = p.\ell = q.u$ où ℓ est la longueur du segment et u l'unité de mesure (cf I.3.a). Cette procédure n'a aucune chance d'apparaître ici. Il faudrait pour cela que l'élève, de sa propre initiative, complexifie la situation proposée en construisant un nouveau segment plus grand ; il lui faudra ensuite repérer les relations entre ce nouveau segment et son objet d'étude : ℓ et u pour en déduire la relation cherchée entre ℓ et u.

5) Choix des conditions.

Au moment où le travail ci-dessus est proposé, les enfants ont une pratique des additions et comparaisons de longueurs dans diverses situations : mise bout à bout de baguettes en carton, de traits dessinés sur une feuille. Ils savent faire des comparaisons directes par superposition ou indirectes par un intermédiaire. Ils savent construire des longueurs en reportant une longueur donnée. En particulier, ils savent graduer un trait en nombres entiers pour une unité donnée.



$\ell = 4\,u$ par exemple.

Dans un premier temps, nous donnons la consigne sous la forme a (unité donnée avant) pour permettre aux élèves d'utiliser des reports de longueurs et des codages en nombres entiers, autrement dit de se référer à leurs connaissances antérieures. Ils peuvent toutefois procéder autrement. Dans un deuxième temps, nous donnons la consigne sous la forme b (unité donnée après). Cette fois ils sont contraints de procéder autrement. Les procédures décrites ci-après correspondent à la forme b proposée à deux reprises :

- une première fois sans parler de la longueur du message.
- une deuxième fois en précisant que le message doit être le plus court possible.

III - DESCRIPTION DES PROCEDURES.

1) Procédures de l'émetteur.

P.1. Dessiner un segment qu'on peut décrire par rapport à la feuille (exemple une diagonale ou un segment obtenu en allant d'un côté de la feuille au côté opposé parallèlement au bord de la feuille).

A ce moment là les élèves se réfèrent directement à la feuille et n'ont pas besoin de mesurer leur segment avec l'unité donnée. Ils savent que les feuilles distribuées par le maître sont les mêmes pour tous. Pour bloquer cette procédure, on peut imposer que le trait dessiné ne touche aucun bord de la feuille.

P.2. On reporte u autant de fois qu'il est possible sur la longueur choisie ℓ. On se ramène à évaluer le reste $r = \ell - nu$.

a) r est tout petit devant u (par défaut ou par excès) et on le néglige : le message comporte alors le nombre n de reports et une information qualitative sur le reste ("un tout petit peu plus" ou "c'est presque n u").

Si r est notable, on cherche à évaluer r.

b) On plie u pour obtenir une unité plus petite v qu'on sait relier à u. Comportement majoritaire : pliage en deux itéré. On plie u en deux, on reporte $\frac{1}{2}$ u dans r si possible; si on ne peut pas ou s'il reste encore quelque chose, on plie à nouveau en deux, on obtient une nouvelle unité $\frac{1}{4}u = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}u)$ etc ... et on itère le pliage en deux tant que ce pliage est possible et tant que le reste n'est pas négligeable (le piage en deux est matériellement possible trois ou quatre fois).

Autre pliage : si le pliage en deux fournit une unité trop grande et le pliage en quatre une unité trop petite, on estime que le pliage en trois devrait convenir et on le teste.

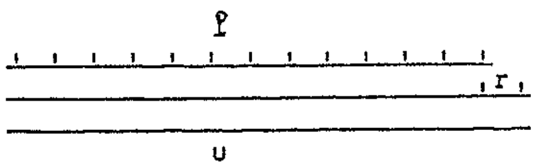
S'il donne un reste négligeable on utilise les 1/3, si-non on revient au pliage en deux.

c) On reporte r dans l'unité u. Si le report tombe juste (ou presque) r est de la forme $(1/n)u$. Si le report ne tombe pas juste, cette procédure est abandonnée.

Exemple rencontré :

Un élève a tracé un segment de longueur ℓ légèrement plus petit que u, il a marqué r sur u et a reporté r dans ℓ. Il a pu reporter la longueur r 12 fois dans ℓ et donc 13 fois dans u et a écrit.

$$\ell = \frac{12}{13} u$$



d) on choisit la largeur de la baguette unité comme nouvelle unité plus petite pour mesurer le reste. Pour bloquer cette procédure le maître choisit pour matérialiser u des baguettes de longueur u mais de largeur variable. Emetteur et récepteur savent que leurs baguettes sont de même longueur mais pas forcément de même largeur.

2) Ecriture des messages.

On repère trois catégories de messages :

- l'émetteur décrit en français la suite de ses actions. Le message peut être suffisant pour reconstruire le segment ou comporter des ambiguïtés. Exemple : "tu prends la baguette dans le sens de la longueur, tu la places sur ton trait, tu mets un trait, ... il reste un petit bout, tu plies en deux, etc......."

- l'émetteur envoie des indications sur la mesure de son segment , indications qu'il note en français. Exemple : "mon trait fait 3 unités et le demi du demi de u".

- l'émetteur envoie la mesure de son segment avec un codage chiffré, soit complètement, soit partiellement.

  Exemples : $2u + \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} u$

  $\frac{1u}{2}$ + un demi du quart de u.

La première fois que cette consigne b est posée, les messages émis sont majoritairement du premier type. Ceci n'est pas étonnant, pour écrire un tel message, l'émetteur n'a pas besoin d'analyser son travail, il lui suffit de décrire ce qu'il a fait. La description pose cependant des problèmes d'expression en français. Les phrases sont longues, pas toujours claires, et on risque d'oublier certaines étapes. Le récepteur peut ne pas comprendre le message ou obtenir un segment de longueur différente.

Après une phase de compte-rendu avec discussion des premiers messages et bilan des premières écritures codées, on repose la même consigne b. en demandant que les messages soient le plus court possible. Le troisième type de messages devient alors majoritaire.

3) Travail du récepteur et confrontation des deux segments

Au cours du premier échange de messages (consigne b) le récepteur rencontre des difficultés pour lire le message et le décoder, soit parce qu'il est long et mal construit, soit parce qu'il manque des informations, soit parce qu'il ne comprend pas le codage de l'émetteur.

Au cours du deuxième échange, les messages sont en général bien écrits et bien décodés. Les segments de l'émetteur et du récepteur ne se superposent pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux. Emetteur et récepteur ont alors à se mettre d'accord sur les causes du décalage observé et sur la précision de la mesure qu'il est raisonnable d'exiger.

4) Premières écritures dégagées de la comparaison des messages.

Dès le premier bilan qui suit les échanges de messages, des écritures fractionnaires sont utilisées :

$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = 1u$ $\qquad 2 \times (\frac{1}{2}u) = 1u$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}u) = \frac{1}{4}u$

$\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u = \frac{1}{2}u$ $\qquad 2 \times (\frac{1}{4}u) = \frac{1}{2}u.$

$\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u = 1u = 4 \times (\frac{1}{4}u)$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{8}u$ $\qquad \frac{1}{2}(\frac{1}{8}u) = \frac{1}{16}u$

$\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u = 1u.$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}u) = \frac{1}{6}u$ $\qquad 2 \times (\frac{1}{6}u) = \frac{1}{3}u.$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{6}u) = \frac{1}{12}u.$

$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = 2 \times (\frac{1}{4}u) + \frac{1}{4}u = 3 \times (\frac{1}{4}u) = \frac{3}{4}u.$

Elles sont reprises en compte par l'ensemble de la classe pour écrire de nouveaux messages lors de la 2ème consigne b

IV.- DEVELOPPEMENT DES ECRITURES ET ENRICHISSEMENT DE LA GRADUATION.

1° Codage d'autres subdivisions de l'unité.

Lors de la consigne b sous sa deuxième forme (messages le plus court possible), les écritures fractionnaires sont largement utilisées dans les messages. Au cours du bilan qui suit, pour améliorer la précision, les élèves sont amenés à itérer le pliage en deux de l'unité u. Au delà du 1/8 ou à la rigueur du 1/16, le pliage effectif n'est plus possible. Certains élèves proposent des désignations orales ou écrites telles que $\frac{1}{1024}$ u ou $\frac{1}{2048}$ u avec le sens

$$\frac{1}{1024} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{512}\right) \text{ et } \frac{1}{2048} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1024}\right)$$

il s'agit là d'une extension formelle de la subdivision en 2 qui se produit chez des élèves qui ont une bonne pratique du calcul oral. Si ce n'est pas le cas, ce travail sera de toute façon repris à propos des fractions décimales. Si les élèves ne les ont pas encore envisagées, le maître propose d'autres subdivisions plus difficiles à réaliser matériellement :

$\frac{1}{5}$ u, $\frac{1}{10}$ u = ... avec le sens $5 \times \frac{1}{5}$ u = 1.u,
$10 \times \frac{1}{10}$ u = 1.u. Les élèves utilisent diverses écritures telles que $\frac{p}{5}$ u = p $\times \frac{1}{5}$ u. Plus généralement pour des valeurs entières de p et n ils utilisent des écritures du type :

$\frac{p}{n}$ u = p $\times \frac{1}{n}$ u avec n $\times \frac{1}{n}$ u = 1.u

2) Correspondance longueurs-nombres.

L'unité de longueur u étant choisie, à toute longueur ℓ obtenue en reportant u un nombre entier de fois, on associe le nombre n de reports, qu'on appelle la mesure de ℓ en u. Mais il y a des longueurs qui ne sont pas de la forme n.u, le problème est de leur associer une mesure en u. Les codages fractionnaires vont permettre de le faire pour certaines d'entre elles. Par exemple 1/2 est la mesure de la longueur 1/2 u, $2 + \frac{3}{4}$ est la mesure de la longueur $2u + 3 \times \frac{1}{4}$ u. Les opérations et comparaisons entre longueurs vont se traduire en opérations et comparaisons entre les mesures : par exemple $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; $2 + \frac{3}{4} < 3$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

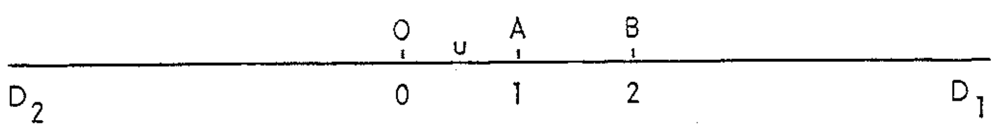
Des questions sur le statut de ces écritures se posent : on les additionne, on les compare comme des nombres ; pourtant l'extension des règles de calcul ne va pas de soi. Citons la remarque d'un élève : "c'est drôle, la moitié de 12 c'est 6, et la moitié de $\frac{1}{12}$ c'est $\frac{1}{24}$, la moitié de $\frac{1}{6}$ c'est $\frac{1}{12}$ ".

Ces nouvelles écritures vont acquérir le statut de nombre au fur et à mesure de l'extension des opérations (+, - , x , :) et des comparaisons.

3) <u>Représentation des longueurs et de leur mesure</u> :

<u>Points marqués sur une droite ; graduation d'un axe</u>.

a) Soit D une droite, O un point marqué sur D. Il partage D en 2 demi-droites D_1 et D_2.
Soit u une longueur



On peut reporter u sur chaque demi-droite à partir de O . Choisissons D_1 par exemple. Le report permet de marquer sur D_1 un point A tel que la distance OA de O à A soit u. Nous associons au nombre 0 le point O et au nombre 1 le point A. Reportons à nouveau u, cette fois à partir de A. Notons B le point de D_1, autre que O, tel que AB = u. On a aussi OB = 2 u. Au nombre 2, nous associons le point B. Plus généralement, à chaque entier n nous associons le point M_n de D_1 obtenu en reportant n fois sur D_1 l'unité u toujours dans le même sens. On a $OM_n = n\,u$. Le nombre n, mesure en u de la longueur OM_n est appelé <u>abscisse</u> de M_n.

- <u>Correspondance</u> $\mathbb{N} \longrightarrow D_1$

Nous venons ainsi d'établir une correspondance $n \longmapsto M_n$ entre l'ensemble des entiers et certains points de D_1 qui a les propriétés suivantes :

. à un entier n donné correspond un point M_n déterminé de façon unique.

. quels que soient les entiers p et q distincts, les points M_p et M_q correspondants sont distincts.

D'autre part, étant donnés 2 points M et N de D_1 d'abscisses x_M et x_N, supposons $x_N \geqslant x_M$, on a

$x_N = x_M + |MN|$ où $|MN|$ désigne la mesure en u de la distance de M à N.

Ce faisant, nous sommes en train de construire une <u>graduation</u> de D_1 dont l'origine est O et u l'unité.

- Correspondance $\mathcal{L} \longrightarrow D_1$

On peut représenter n'importe quelle longueur (qu'elle soit de la forme n.u ou pas) par un point de D_1 en associant à la longueur ℓ le point M_l de D_1 tel que $OM_l = \ell$.

. A toute longueur de la forme n.u on sait faire correspondre 1 point de D_1 et 1 nombre : l'abscisse du point.

. A toute longueur qui n'est pas de la forme n.u on sait faire correspondre un point de D_1 auquel on n'a pas encore associé d'abscisse.

Si toute longueur ℓ était mesurable en u on pourrait associer au point M_ℓ, la mesure de ℓ en u. On pourrait ainsi associer un nombre à tout point de D_1. Le problème est bien d'étendre l'ensemble des nombres de manière que toute longueur soit mesurable en u.

L'axe gradué D_1 sera alors une représentation de l'ensemble des longueurs et de leurs mesures. Il permettra d'ailleurs de représenter n'importe quelle grandeur physique par l'intermédiaire de sa mesure dans une unité donnée.

Les nombres décimaux permettront soit de désigner, soit d'approcher d'aussi près qu'on veut les mesures cherchées.

b) Pour qu'un axe gradué (D_1, O, u) soit un outil efficace de résolution de problèmes, les élèves ont besoin de savoir que :

(P 1) l'abscisse x_M d'un point M de D_1 désigne la mesure en u de la distance OM de O à M.

$$OM = x_M . u$$

(P 2) la distance AB entre 2 points A, B de D_1 est

$AB = (x_B - x_A)\ u$ si $x_B > x_A$

ce qui s'écrit aussi $x_B = x_A + |AB|$, en notant $|AB|$ la mesure en u de AB.

(P 3) la distance AB est invariante par translation le long de l'axe. Ceci s'exprime de la manière suivante sur les abscisses :

pour tout nombre c, soient M et N les points d'abscisses respectives $x_M = x_A + c$ et $x_N = x_B + c$ on a

$$|MN| = (x_M - x_N) = (x_B - x_A) = |AB|, \quad \text{si } x_B > x_A.$$

4) Activités proposées aux élèves.

Les élèves ont mesuré au CE des longueurs. Ils savent en principe se servir d'une graduation en nombres entiers. Les activités que nous allons décrire ont pour but de vérifier d'abord que c'est bien le cas et ensuite d'enrichir la graduation en y indroduisant les mesures non entières trouvées. Ceci est un pas dans l'acquisition du statut de nombre par ces mesures.

a) Une unité de longueur u est choisie pour toute la classe. Le maître demande à chaque élève de dessiner sur sa feuille, une demi-droite d'origine O et d'y placer le point u d'abscisse 1.

Consigne 1 : travail par deux, émetteur-récepteur.

Chaque élève joue les 2 rôles, émetteur puis récepteur.

. Chacun choisit 2 points A et B différents de O, où il veut sur son axe. Il marque les abscisses x_A de A et x_B de B. Il envoie un message à un camarade pour que celui-ci place sur son axe (axe du récepteur) un point C tel que la distance OC de O à C sur l'axe du récepteur soit égale à la distance AB de A à B sur l'axe de l'émetteur, i.e OC = AB. Le récepteur marque sur son axe, le point C et son abscisse.

Commentaires.

Les messages peuvent être de 3 types :

1 - donnée de AB

2 - donnée de x_A et x_B

3 - donnée de AB et de x_A et x_B.

L'émetteur utilise au moins P_1 pour marquer 1, x_A et x_B

Dans le cas 1 et 3, le récepteur connaît la distance AB. Il doit seulement placer C et marquer son abscisse. Il utilise P_1 et P_3. Dans le cas 2, le récepteur peut calculer AB. Il utilise alors P_1, P_2 et P_3. S'il reporte AB après avoir placé A et B, il utilise seulement P_1 et P_3. Pour que P_2 soit nécessaire, il faut sortir des limites de la feuille : l'élève est alors obligé de calculer $AB = x_B - x_A$. Dans une deuxième phase, le maître propose des valeurs de x_A et x_B correspondant à des points hors de la feuille; les élèves calculent x_C et placent le point C si c'est possible.

Consigne 2 : Travail par deux : émetteur-récepteur. Chaque élève joue le rôle d'émetteur vers un camarade puis le rôle de récepteur d'un camarade. L'émetteur choisit 2 points A et B où il veut sur son axe, puis un point M_1 d'abscisse non entière ($x_{M_1} \notin N$). Il envoie un message à un camarade pour que celui-ci place sur son axe un point M_2 tel que $x_{M_2} = x_{M_1}$ et un point N tel que la distance M_2N sur l'axe du récepteur soit égale à AB (i.e. $M_2N = AB$). Le récepteur marque sur son axe les abscisses de M_2 et de N.

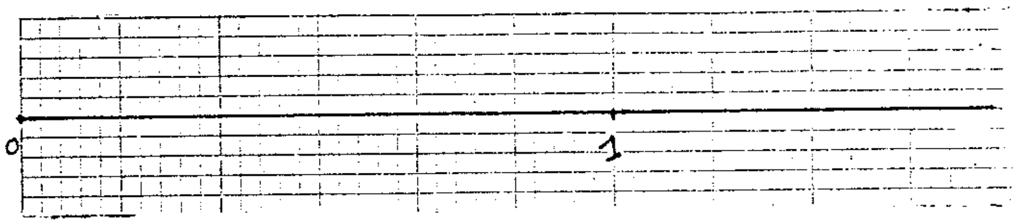
Commentaires.

Pour faire son travail le récepteur utilise P_2 et P_3. D'autre part la consigne 2 oblige émetteur et récepteur à graduer des points intermédiaires et à utiliser P_2 et P_3 pour des points d'abscisse non entière, ce qui était évitable dans la consigne 1.

Remarque : En cas de difficulté à organiser un jeu émetteur-récepteur dans la classe cf(I-3) le maître peut assurer le rôle d'émetteur pour tous les élèves en faisant varier la nature des données (donnée de la distance AB ou donnée des abscisses x_A x_B) et les valeurs numériques (points d'abscisses entières ou fractionnaires, distances entières ou fractionnaires).

Consigne 3 : travail individuel.

On distribue une feuille de papier quadrillé sur laquelle on a dessiné un trait, marqué une origine et une unité (voir échantillon).



Chacun gradue l'axe, choisit un point A d'abscisse entière et un point B d'abscisse non entière. Le maître demande de marquer sur l'axe plusieurs points -par exemple 5 points - M_1 M_2 ..... M_5, dont il donne les abscisses (le maître a choisi de ne prendre ni des entiers, ni des $\frac{1}{2}$ mais par exemple des $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$,

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ faciles à repérer si on a pris 3 grands carreaux pour u). Puis le maître demande de marquer les points N_1, ..., N_5 tels que $M_1N_1 = M_2N_2 = M_5N_5 = AB$ et leurs abscisses.

Commentaire :

les élèves sont obligés d'utiliser P_2 ou P_3. Dans le cas où ils utilisent les deux, chacune sert de contrôle à l'autre.

Consigne 4 : Travail par équipe de 4.

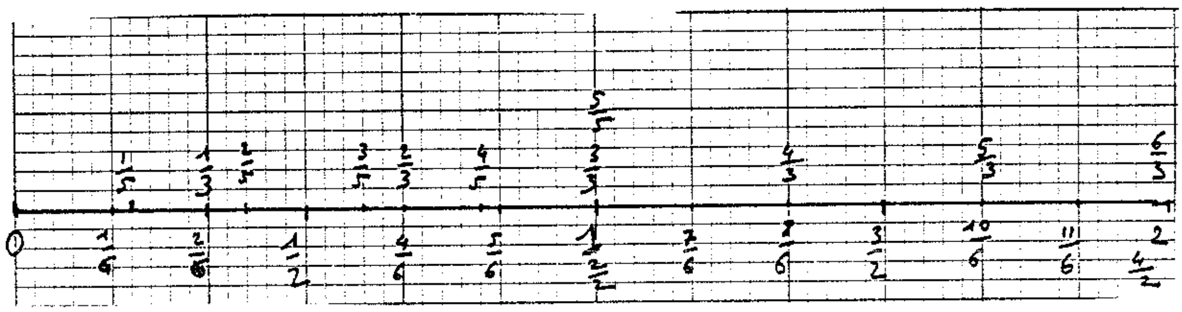
On distribue à chacun une bande de papier quadrillé de 12 carreaux de long, sur laquelle un trait est dessiné (modèle consigne 3).

Le travail de l'équipe consiste à construire une longue règle graduée en recollant des portions d'axe gradué par chacun dans l'équipe : l'un gradue de 0 à 2, le suivant de 1 à 3, le 3ème de 2 à 4 et le 4ème de 3 à 5.

Commentaire :

Pour que le recollement soit possible, les élèves d'une même équipe doivent avoir choisi une même unité pour graduer chacun des morceaux. En effet, 2 points surperposés devront avoir même abscisse. Une même abscisse pourra être écrite de plusieurs manières.

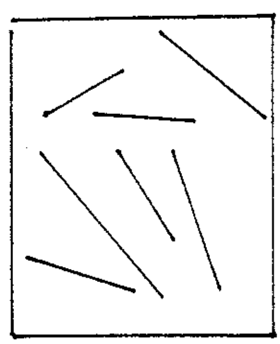
Exemple :



b) Utilisation d'une graduation pour mesurer des longueurs.

L'objectif de cette séquence est d'enrichir la correspondance entre les points de D_1 et les mesures de longueur .

a) Matériel + une feuille polycopiée sur laquelle sont dessinés des segments, distribués n'importe où dans la feuille et dans des directions différentes. Les longueurs des segments sont assez voisines (par exemple : 8cm, 12 cm, 10 cm, 9 cm, 10 cm 1/2, 13 cm 1/2, 12 cm 3/4, 9cm3/4 11 cm).



+ Une unité de mesure de longueur (par exemple 6 cm) matérialisée par une petite bande de carton.

+ une bande de papier de 20 cm environ

Consigne : classer tous les segments selon leur longueur.

La disposition des segments dans la feuille et leur longueur ont été choisies de façon que le classement ne puisse se faire à l'oeil pour tous les segments. Les élèves peuvent

- soit mesurer les segments avec l'unité u et comparer les mesures obtenues
- soit reporter les longueurs des segments sur la bande de papier à partir d'une même origine, et déduire le classement des segments de celui de leurs extrémités.

La deuxième procédure est commode mais ne permet pas de connaître les mesures des longueurs des segments avec l'unité u. Un moyen de réunir les avantages des deux procédures est de graduer la bande de papier à l'aide de l'unité u (en marquant les entiers les $\frac{1}{2}$, les $\frac{1}{3}$, les $\frac{1}{4}$, etc....)

b) Dans un deuxième temps, on distribue une deuxième feuille polycopiée donnant une série de longueurs de segments mesurés en u (différents de ceux de la première feuille). La consigne est d'ordonner tous les segments selon leur longueur, ceux de la première feuille et ceux de la deuxième feuille.

Trois procédures sont possibles :

- procédure numérique : mesurer en u les segments dessinés et comparer les mesures (donc ordonner des nombres).

- procédure géométrique : représenter par des segments les longueurs données et reporter tous les segments sur un axe à partir d'une même origine. On obtient ainsi des segments emboîtés.

- procédure mixte : repérer sur un axe gradué avec l'unité u les mesures fournies, reporter à partir de O sur l'axe gradué les segments de la première feuille. Comparer les longueurs revient à repérer l'ordre des points marqués.

Avec cette procédure, les élèves ont un moyen de contrôle de l'ordre des nombres par l'emboîtement des longueurs correspondantes.

V.- AUTRES ACTIVITES SUR LES LONGUEURS.

Voici maintenant quelques thèmes que nous ne développons pas.

1) Calcul de distances sur un itinéraire.

2) Utilisation des unités légales de longueur et les relations entre elles.

3) Calcul de périmètres de figures variées présentant ou non des symétries, entre autres périmètres de polygones réguliers ou non, de carrés, de rectangles, de triangles. Classement de figures selon le périmètre.

4) Recherche de rectangles à périmètre donné.

Cette activité sera décrite dans le chapître IV.

Les mesures qui interviennent dans ces activités peuvent être entières ou fractionnaires (avec les fractions dont on dispose).

Pour les calculs et classements de périmètres par exemple les élèves pourront être amenés à ajouter ou à comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Il ne s'agit en aucun cas de faire l'apprentissage de la technique de réduction au même dénominateur dans un cadre général. Les élèves pourront résoudre ce problème dans des cas particuliers. Certains cas pourront même rester sans solution pour l'instant.

Pour comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, d'autres procédés que la réduction au même dénominateur apportent souvent la solution : comparaison à l'unité, comparaison au demi.

Exemple : * $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ parce que $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ et

$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

* $\frac{17}{18} < \frac{22}{21}$ parce que $\frac{17}{18} < 1$ et

$\frac{22}{21} > 1$ $(1 = \frac{18}{18} = \frac{21}{21})$

* $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$ parce que "déjà $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$

et il y a un septième de plus que de huitièmes"

ou encore $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7}$.

* $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$ parce que $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

* Pour comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$ c'est plus difficile mais la comparaison au demi ou à l'unité donnent quand même des résultats :

. $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

. ou encore "il manque $\frac{3}{7}$ à $\frac{4}{7}$ pour faire 1.

il manque $\frac{3}{8}$ à $\frac{5}{8}$ pour faire 1 et $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$

donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$ ".

Pour ajouter deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, il est nécessaire de trouver "une unité commune" à $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{q'}$. Ceci est facile si les deux fractions appartiennent à une même "chaîne" par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ ou encore $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{64}$. Ceci est encore assez facile pour des dénominateurs petits : par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ ou encore $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$.

D'autres dénominateurs communs pourront être recherchés. Mais ce sera toujours pour résoudre un problème précis. On ne fera d'apprentissage systématique de la réduction au même dénominateur que dans le cas où les dénominateurs sont de la forme 10, 100, 1000 ... c'est-à-dire des puissances de 10. Ce travail dont l'outil essentiel est la numération en base dix, est nécessaire à la construction des nombres décimaux. Un autre outil essentiel pour cette construction est la proportionnalité : en effet il faut savoir que

si $\frac{1}{10} \longmapsto \frac{10}{100}$, alors $4 \times \frac{1}{10} \longmapsto 4 \times \frac{10}{100}$.

CHAPITRE II

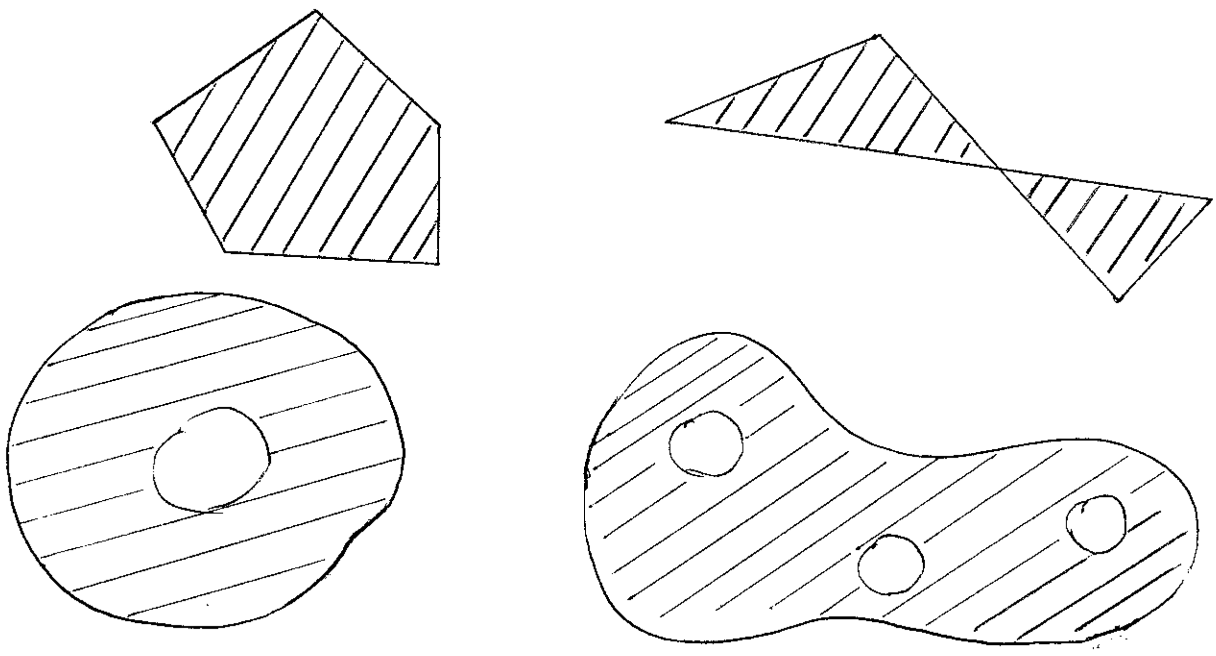
AIRES DE SURFACES PLANES

I.- ANALYSE DE LA NOTION D'AIRE.

a) Position du problème

Par surfaces planes on entend des parties bornées du plan dont l'intérieur (non vide) est limité par une ou plusieurs courbes fermées de longueur finie

Exemples :



Chaque surface peut être réalisée dans du carton ou tout autre matériau (carton, bois,...) dont on ne considère pas l'épaisseur.

Par déplacement, on peut amener certaines surfaces à se superposer ou à s'inclure les unes dans les autres. Elles occupent plus ou moins de place dans le plan. Pour d'autres surfaces, leur forme ne permet ni superposition ni inclusion. La notion d'aire a pour but de mesurer l'occupation du plan indépendamment de la forme.

b) Avoir même aire.

Envisageons une approche géométrique(*) de l'aire :

- deux surfaces S_1 et S_2 qu'un déplacement amène en coïncidence occupent autant de place dans le plan, ou encore "cachent" la même partie du plan. Nous dirons que S_1 et S_2 ont même aire.

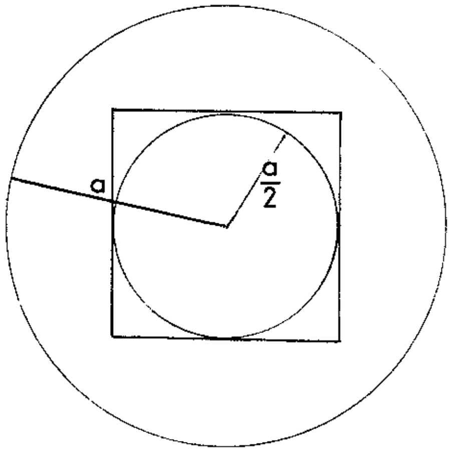
- Soit S une surface, S' une surface obtenue en découpant S en pièces et en recollant les pièces sans perte ni chevauchement. Nous dirons encore que S et S' ont même aire.
  Si S et S' sont dessinées sur papier quadrillé, elles contiennent le même nombre de carreaux.

Par les procédés ci-dessus, on peut comparer certaines surfaces, mais pas toutes.

Problème : étant donné un carré, existe-t-il un disque de même aire ?

On ne peut jamais découper un carré en un nombre fini de pièces et assembler ces pièces sans chevauchement pour obtenir un disque. Pourtant, considérons un disque de centre le centre du carré, de rayon r. Faisons varier r en lui donnant des valeurs croissantes de $\frac{a}{2}$ à a où a est la dimension du carré.

(*) Cette approche s'appuie sur des conceptions disponibles chez la plupart des élèves de CM 1 (9 - 10 ans).



- Pour $r = \frac{a}{2}$, le disque est contenu dans le carré.
- Pour $r = a$, le disque contient le carré.
- Il est raisonnable de penser qu'au cours de sa variation, le disque passera par un état où il aura même aire que le carré.

Mais pour quel r ?

En fait l'énoncé de ce problème n'a pas de sens tant qu'on n'a pas défini l'aire d'une surface. Par exemple, on aimerait pouvoir répondre aux questions suivantes :

- Peut-on à toute surface, attribuer une aire ?

- Deux aires sont-elles toujours comparables ?

Envisageons une approche physique de l'aire par référence à la masse. Soient S_1 et S_2 deux surfaces, P_1 et P_2 deux pièces réalisant respectivement S_1 et S_2 dans un même matériau homogène, d'épaisseur constante (carton ou lino par exemple). On dira que S_1 et S_2 ont <u>même aire</u> si P_1 et P_2 ont <u>même masse</u>.

Ce critère a le mérite de ne pas faire intervenir la forme des pièces. Il est justifié par les deux propriétés suivantes :

- de petites erreurs dans la réalisation donnent lieu à de petites erreurs sur les masses.
- le fait que P_1 et P_2 aient même masse ne dépend pas du choix du matériau pourvu que le matériau soit homogène.* et d'épaisseur constante. Nous dirons que P_1 et P_2 sont des réalisations convenables de S_1 et S_2. Grâce à cela, on peut comparer des réalisations convenables de surfaces

(*) Il est difficile de définir ce qu'est un matériau homogène sans se référer à la notion de volume qui n'est pas plus simple que la notion d'aire. On peut s'en tirer en décrivant des procédés de préparation de matériau homogène.

données dans un matériau choisi : un disque et un carré réalisés dans du carton par exemple. La réponse dépend de la précision de la balance utilisée.

Comparons les deux points de vue :

\+ Deux surfaces de même aire au sens géométrique ont des réalisations convenables de même masse. En effet, la masse est conservée après découpage pourvu qu'on utilise tous les morceaux. Donc, "même aire au sens géométrique" implique "même aire au sens physique".

\+ Réciproquement, pour deux surfaces ayant même aire au sens physique, il n'est pas sûr qu'elles aient même aire au sens géométrique puisque la réponse dépend de l'existence d'un découpage amenant l'une sur l'autre

Des enfants de CM_1 à qui nous avions proposé des séquences mettant en jeu les deux points de vue en ont explicité la non équivalence. Cependant, leur formulation s'appuyait sur une conception géométrique de l'aire. Mais, dans la suite, l'équilibre des masses a été utilisé comme argument pour convaincre des contradicteurs que deux formes biscornues obtenues par découpage et recollement à partir de deux surfaces superposables avaient même aire.

Nous conviendrons, par définition, que deux surfaces ont même aire si des réalisations convenables ont même masse.

Le recours à la masse est un artifice permettant d'assurer qu'on peut toujours comparer les aires de deux surfaces réalisables puisqu'on peut comparer les masses des réalisations et mesurer les aires comme on mesure les masses.

Le pavage des surfaces, puis la mesure des aires en fonction d'une unité permet de prévoir les résultats de l'expérience sur les masses de réalisations matérielles sans avoir besoin de réaliser l'expérience.

c) Comparer des aires.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces. L'aire de S_1 est inférieure à l'aire de S_2 si S_1 a même aire qu'une surface contenue dans S_2.

Notation : notons $A(S)$ l'aire d'une surface S.

Si $A(S_1)$ est inférieure à $A(S_2)$ nous écrirons :

$A(S_1) < A(S_2)$

Si $A(S_1)$ est inférieure ou égale à $A(S_2)$ nous écrirons $A(S_1) \leqslant A(S_2)$ en adoptant la notation "$\leqslant$" déjà utilisée entre nombres.

d) Additionner des aires.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces, S la surface obtenue en recollant sans chevauchement S_1 et S_2. L'aire de S ne dépend pas du choix de S_1 et S_2 mais seulement de leur aire.

Par définition, la somme $A(S_1) + A(S_2)$ est l'aire $A(S)$.

En particulier, si $A(S_1) = A(S_2)$ on a $A(S) = 2A(S_1)$.

Soient P_1, P_2, P des réalisations convenables respectivement de S_1, S_2 et S. Soient m_1, m_2, m les masses respectives de P_1, P_2 et P. On a $m = m_1 + m_2$. Si on recolle P_1 et P_2 en les faisant chevaucher on obtient une pièce P' réalisant une surface S' pour laquelle $m(P') = m = m_1 + m_2$, mais seulement

$A(S') < A(S_1) + A(S_2)$.

Dans ce cas, P' n'est plus d'épaisseur constante.

Remarque : si $A(S_1) < A(S'_1)$

et $A(S_2) < A(S'_2)$ alors

$$A(S_1) + A(S_2) < A(S'_1) + A(S'_2)$$

on dit que l'ordre est compatible avec l'addition.

e) Mesure des aires.

Soit s une surface, a son aire. On dit que l'aire A(S) d'une surface S est mesurable en a s'il existe un nombre k tel que

$$A(S) = ka.$$

Pour le moment, cette écriture n'a de sens que pour k entier. On aimerait étendre l'ensemble des nombres pour que toute aire soit mesurable en a. Cela nécessite le recours aux nombres réels. L'objectif du chapître III est d'utiliser les fractions pour étendre l'ensemble des aires mesurables en a.

II.- CHOIX DU CONTENU DES SEQUENCES DIDACTIQUES.

L'analyse précédente nous conduit à proposer pour la notion d'aire, après une phase de travail sur papier quadrillé, une approche géométrique sur papier blanc , puis une approche physique . Nous abordons ensuite la mesure par une étape géométrico-numérique grâce au pavage , et continuons par une étape numérique après choix d' une unité d' aire .

Enonçons maintenant les objectifs qui nous ont servi de guide pour la construction des séquences.

1) Donner du sens à l'expression "deux surfaces ont même aire".

a) en explicitant un critère géométrique permettant à partir d'une surface d'obtenir des surfaces de même aire, d' aire plus petite ou d' aire plus grande :

- en découpant S et en recollant tous les morceaux sans chevauchement , on obtient une surface S' de même aire .
- en prenant moins de morceaux ou en chevauchant , on obtient une surface d' aire plus petite .

b) Si l' une des conditions suivantes est réalisée , S_1 et S_2 ont même aire :

- S_1 et S_2 superposables
- on peut construire deux surfaces S_1' et S_2' superposables en découpant successivement S_1 et S_2 et en recollant convenablement (*) les morceaux .
- en décalquant S_1 et S_2 sur papier quadrillé, on obtient deux surfaces S_1' et S_2' contenant le même nombre de carreaux
- des réalisations matérielles dans un même matériau homogène d' épaisseur constante (carton par exemple) ont même masse .

Cette liste n' est pas exhaustive.

c) en différenciant la notion d' aire de la notion de masse :

- soient S_1 et S_2 deux réalisations d' une surface S dans des matériaux différents : par exemple du carton et du bois . Alors S_1 et S_2 ont la même aire sans avoir même masse .

d) en différenciant la notion d'aire de la notion de longueur :

- comparaison des périmètres de surfaces de même aire
- comparaison des aires de surfaces de même périmètre dessinées sur papier quadrillé
- modifier une surface en diminuant l' aire et en augmentant le périmètre
- modifier une surface en augmentant l'aire et en diminuant le périmètre

---

(*) Les morceaux de S_1 constituent S_1' les morceaux de S_2 constituent S_2' . Le recollement se fait sans chevauchement en utilisant tous les morceaux .

2) Comparer les aires de deux surfaces S_1 et S_2

a) critère physique : on réalise les surfaces dans un même carton et on compare les masses des pièces obtenues. L'aire est d'autant plus grande que la pièce correspondante est plus lourde. De ce point de vue, deux aires sont toujours comparables. Le résultat dépend de la précision de la balance.

b) Inclusion.

Si on a $S_1 \subset S_2$ ou $S'_1 \subset S_2$ où S'_1 est une surface obtenue par découpage et recollement à partir de S_1, alors

$$A(S_1) < A(S_2)$$

ces inclusions se vérifient sur des réalisations des surfaces.

c) Transitivité.

Supposons qu'il existe une surface T telle que

$A(S_1) < A(T)$ et $A(T) < A(S_2)$

alors on a $A(S_1) < A(S_2)$

d) Pavage.

Nous dirons qu'une surface S est pavable avec une surface s si on peut recouvrir S avec un nombre entier n de copies de s sans laisser de trous, sans chevauchement.

Le nombre n ne dépend pas de la façon de paver. Il dépend seulement de S et s.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces pavables avec s. Soient n_1 et n_2 le nombre de copies de s nécessaires pour paver respectivement S_1 et S_2. Si $n_1 \leqslant n_2$, alors $A(S_1) \leqslant A(S_2)$.

3) Mesurer l'aire $A(S)$ d'une surface S

a) Mesure : soit s une surface, a son aire.

1er cas : $A(S)$ est $\mathbb{N}$-mesurable (c'est-à-dire mesurable en nombre entier) en a si on peut paver soit S, soit une surface S' de même aire que S avec s. Soit n le nombre de copies de s nécessaires au recouvrement. Le nombre n ne change pas si on remplace s par une surface s' de même aire a que s. On dit que n est la mesure de $A(S)$ avec l'unité d'aire a et on écrit $A(S) = n\,a$.

2ème cas : $A(S)$ n'est pas $\mathbb{N}$-mesurable en a. On peut alors trouver deux surfaces S_1 et S_2 $\mathbb{N}$-mesurables en a telles que $S_1 \subset S \subset S_2$

Soient $A(S_1) = n_1\,a$ $\quad A(S_2) = n_2\,a$

on a $n_1\,a \leqslant A(S) \leqslant n_2\,a$

b) Changement d'unité

La mesure de $A(S)$ dépend de l'unité choisie. En effet, plus la surface avec laquelle on pave S est petite, plus il faut de copies de s pour la recouvrir.

Soient a_1 et a_2 deux unités d'aire.

* supposons $a_1 < a_2$. Si nous pouvons écrire

  $A(S) = n_1\,a_1 = n_2\,a_2$, alors $n_1 > n_2$

* Si $a_2 = k\,a_1$ où k est un nombre entier, on peut préciser la relation entre n_1 et n_2.

  On a : $n_2\,a_2 = n_2\,k\,a_1$ et $n_1 = n_2\,k$.

4) <u>Utilisation des mesures pour comparer les aires</u> A(S) et A(T) de deux surfaces S et T.

- Soit a une unité d'aire. Supposons S et T mesurables en a. On peut écrire $A(S) = p\,a$, $A(T) = q\,a$.

  Comparer les aires A(S) et A(T) revient à comparer leurs mesures p et q en a.

- Soient a_1 et a_2 deux unités d'aire.
  Supposons $a_1 < a_2$, la surface S mesurable en a_1
  la surface T mesurable en a_2

  a) Si $A(S) = n\,a_1$ et $A(T) = n\,a_2$

  alors $A(S) < A(T)$

  b) Supposons $a_2 = k\,a_1$ où k est un entier

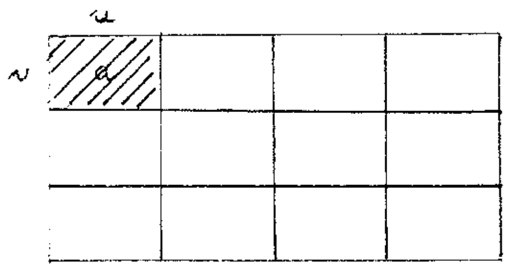
  $A(S) = n\,a_1$ et $A(T) = p\,a_2$

  alors $A(T) = p\,k\,a_1$ et comparer A(S) et A(T) revient à comparer les mesures n et p k en a_1.

  c) Soit a une aire telle que :

  $a_1 = k_1\,a$ et $a_2 = k_2\,a$. On peut exprimer A(S) et A(T) avec la même unité a. Là encore la comparaison des aires revient à la comparaison des mesures.

5) <u>Aires de rectangles</u> : relation entre mesure des aires et mesure des longueurs.



Soient u et v deux unités de longueur R un rectangle de dimensions n u et p v où n et p sont des entiers. Le rectangle R est pavable avec n x p rectangles r de dimensions 1 u et 1 v.

Posons A(r) = a. On a A(R) = (n x p)a. On dit que a est l'unité d'aire adaptée aux unités de longueurs u et v. Si u = v, l'unité d'aire adaptée est l'aire du carré de côté u. C'est le cas des unités légales (par exemple m et m^2). Avec un tel choix d'unité d'aire, la <u>mesure de A(R) est le produit des mesures</u> des dimensions de R.

Dans le chapître III, nous étendrons cette relation au cas des mesures non entières.

III.- <u>CONSTRUCTION DE SEQUENCES DIDACTIQUES</u>.

Approche géométrique et physique de la notion d'aire.

1°) <u>Approche sur papier quadrillé</u>.

<u>Première séquence</u> :

<u>organisation</u> : équipes de 2 élèves

<u>matériel</u> : surfaces dessinées sur papier quadrillé par le maître (1 par page) , environ 6 formes différentes , 2 ou 3 d' entre elles contiennent le même nombre de carreaux.

<u>Consigne 1</u> : Chaque équipe dispose d' une surface dessinée sur papier quadrillé et de plusieurs feuilles de papier quadrillé . Chacun doit dessiner 3 surfaces sur le papier quadrillé :

- une surface contenant le même nombre de carreaux que la surface donnée
- une surface contenant moins de carreaux que la surface donnée
- une surface contenant plus de carreaux que la surface donnée

Les 2 coéquipiers doivent dessiner des surfaces de formes différentes.

Consigne 2 : Comparer les surfaces et les ordonner de la plus petite à la plus grande selon la place occupée sur la feuille. On considère d' abord les surfaces d' une équipe puis les surfaces de deux équipes.

Bilan : - La place occupée par une surface s'évalue au nombre de carreaux que contient la surface.

- Deux surfaces non superposables peuvent occuper autant de place. On dit qu' elles ont la même aire.
- Pour des surfaces dessinées sur papier quadrillé, on peut mesurer l' aire en carreaux : supposons que S_1 contienne n_1 carreaux et S_2 contienne n_2 carreaux

  si $n_1 < n_2$ l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2

  si $n_1 = n_2$, S_1 et S_2 ont même aire.

Deuxième séquence :

matériel : feuille quadrillée sur laquelle le maître a dessiné un rectangle et des segments en diverses positions sur la feuille, de même longueur : l'une des dimensions du rectangle, papier calque.

consigne : construire sur la feuille des rectangles dont l'un des côtés est l'un des segments dessinés et ayant la même aire que le rectangle donné. A chaque segment correspond un rectangle.

bilan : en déplaçant un rectangle de n'importe quelle façon, par exemple en le faisant tourner autour d'un point ou en le faisant glisser le long d'un rail, on obtient un rectangle superposable. En particulier, les dimensions et l'aire sont conservées. Les deux rectangles contiennent le même nombre de carreaux.

Troisième séquence :

organisation : équipes de 2 élèves ; les équipes sont associées par deux.

matériel : un jeu de surfaces par équipe ; un jeu comprend :

- les surfaces dessinées par le maître pour la 1° séquence
- une surface avec des demi carreaux
- un rectangle
- le même rectangle tourné
- un parallélogramme de même aire que le rectangle.

consigne : - comparer les surfaces selon l'aire
- contrôler, par message écrit, les résultats avec ceux de l' équipe associée.

bilan : - pour comparer les aires, on compare le nombre de carreaux des surfaces.
- 2 demi carreaux réunis comptent pour un carreau entier.
- en découpant un triangle du parallélogramme, en le déplaçant et en le recollant convenablement, on obtient un rectangle pour lequel on peut compter les carreaux.

Quatrième séquence :

organisation : équipes de 2 ; deux équipes associées.
matériel : une des surfaces précédentes par équipe,en 2 exemplaires.
consigne 1 : vous disposez chacun d' une surface sur papier quadrillé ; chacun -reproduit cette surface sur papier blanc en deux exemplaires
- découpe chaque exemplaire en 5 ou 6 pièces de forme simple
- recolle ses pièces de façon à obtenir deux surfaces différentes de la surface donnée mais dont l'une a la même aire que la surface donnée et l'autre une aire plus petite.

consigne 2 : reproduire les surfaces construites, sur papier blanc envoyer l' une de ces surfaces à l' équipe associée avec un message expliquant comment elle a été construite L'équipe réceptrice doit dire si elle a reçu la surface de même aire ou celle d'aire plus petite.

bilan : 2 équipes associées présentent à tour de rôle leurs résultats La classe contrôle et éventuellement arbitre. Les conditions d'un recollement convenable pour obtenir une surface de même aire sont : - utiliser tous les morceaux
-recoller sans chevauchement
- les trous ne font pas partie de la surface

2°) Approche sur papier blanc :

Objectif : Extension de la notion d'aire à des surfaces dessinées sur papier blanc ; construction de surfaces de même aire qu'une surface donnée ; comparaison de surfaces selon l'aire.

Déroulement des séquences.

Première séquence :

- Organisation de la classe : équipes de 4
- Matériel : des rectangles en carton, des enveloppes, des feuilles blanches
  * un jeu de 6 rectangles identiques par équipe : un rectangle par élève, 2 rectangles témoins.
  * des rectangles différents d'une équipe à l'autre qu'on puisse ordonner par inclusion.

Consigne 1 :

Chacun dispose d'un rectangle en carton. Il y en a 6 par équipe de 4 élèves.

- Chacun dans l'équipe réalise un puzzle en carton ayant entre 5 et 8 pièces, c'est-à-dire découpe son rectangle en carton en pièces, sans perdre aucun morceau.

- Ensuite, il assemble les pièces découpées sans les chevaucher de manière à obtenir une nouvelle surface, en un seul morceau, différente du rectangle donné.

- On veut 4 formes différentes dans une même équipe.

Informations complémentaires : pour réaliser la nouvelle surface
* on colle convenablement toutes les pièces découpées sur une feuille
* on dessine le bord de la surface obtenue sur une nouvelle feuille de papier et on hachure la partie cachée par le carton. La surface hachurée est la nouvelle surface.

- Avec un des deux rectangles on découpe un puzzle mais on ne colle pas les morceaux. On les rangera dans une enveloppe.

Commentaires .

Compte tenu de notre objectif de conservation de l'aire par découpage et recollement, on a intérêt à avoir des pièces simples et en nombre pas trop grand. Sinon, il risque d'y avoir perte de papier dans le découpage sans compter la perte de temps.

Pour dessiner le bord des nouvelles surfaces, on peut soit découper la surface construite en carton, soit la décalquer. Le découpage a l'avantage de matérialiser l'aire. Mais si la forme est compliquée, le découpage peut être fastidieux et même mener à des erreurs. On aura alors intérêt à décalquer.

Questions.

Au sein d'une même équipe, les parties hachurées par les membres de l'équipe occupent-elles autant de place, plus ou moins de place ?

Qu'est-ce qui change d'une surface à l'autre ?

Qu'est-ce qui ne change pas ?

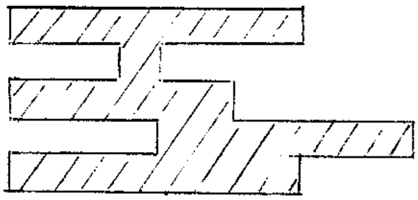
Analyse de la tâche.

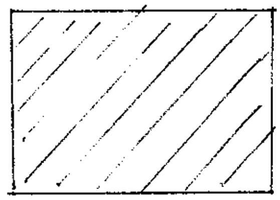
Pour répondre aux questions de façon correcte et économique, chaque enfant doit mettre en oeuvre implicitement et éventuellement explicitement les 2 principes suivants :

* chaque nouvelle surface a la même aire que le rectangle témoin puisqu'elle est obtenue en découpant et recollant sans perte ni chevauchement.

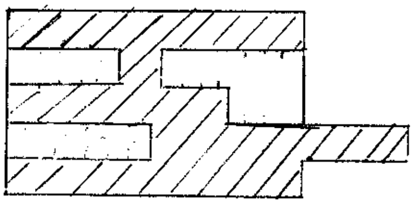
* Dans une même équipe, les différentes surfaces ont la même aire puisque chacune d'elles a la même aire que le rectangle témoin. Cependant il se peut que des enfants se réfèrent encore à des superpositions de nouveaux découpages ou à la simple perception visuelle. Ce dernier moyen est source d'erreur :

Pour des surfaces S_1 et S_2 comme ci-dessous :





bien que $A(S_1) < A(S_2)$, les enfants ont tendance à déclarer que S_1 est plus grande que S_2 . En effet la perception visuelle se réfère plus à la place occupée par la surface obtenue en bouchant les creux :



L'aire se rapporte précisement à la partie hachurée et caractérise un invariant des parties hachurées par les membres d'une même équipe , et cela par convention.
Cette convention est justifiée par le fait que , pour des surfaces dessinées sur papier quadrillé, par découpage et recollement convenable, le nombre de carreaux est invariant.

Bilan.

- dans une même équipe , toutes les surfaces ont la même aire
- d'une équipe à l'autre , on ne sait pas , l'aire peut être plus ou moins grande.

Le maître récupère tout le matériel en vue de la séquence suivante.

Deuxième séquence :

matériel : les surfaces hachurées réalisées par les enfants,
les rectangles témoins.

Organisation de la classe :

Les équipes sont associées par 2. Deux équipes associées échangent 2 de leurs surfaces et en conservent deux autres (dans la pratique, c'est le maître qui assure l'échange). Chaque équipe dispose aussi de son rectangle témoin.

Consigne 2.

- Chaque équipe compare l'aire des surfaces dont elle dispose
- Chaque équipe peut demander par écrit à son équipe partenaire les informations dont elle estime avoir besoin pour répondre à la question posée ou au moins se faciliter la tâche.
- Les 2 équipes associées comparent leurs résultats.

Objectif : utiliser la conservation de l'aire par découpage et recollement.

Analyse de la tâche.

On pourrait comparer directement les aires puisqu'on dispose des surfaces. De nouveaux découpages coûteraient beaucoup de travail, même si ce travail n'est pas nouveau. Or comparer les aires des surfaces revient à comparer les aires des rectangles dont elles sont issues. L'information pertinente à connaître est celle qui permet de disposer des deux rectangles à la fois. Chaque équipe en a un, elle peut demander une copie de l'autre ou seulement les dimensions. La comparaison est aisée parce que les rectangles choisis s'emboitent.

Consigne collective et bilan.

Comparer l'aire de toutes les surfaces produites par la classe.

Institutionnalisation:

* des surfaces différentes peuvent avoir même aire.
* Si S_1 est contenu dans S_2, l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2
* Si S_1 est contenue dans S_2 et S_2 contenue des S_3, l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_3.
* Pour comparer l'aire de 2 surfaces non superposables, on peut les remplacer par des surfaces de même aire et plus commodes à comparer.

3) Approche physique de la notion d'aire.

Objectif

1) Expliciter les conditions dans lesquelles on peut convenir valablement que la comparaison des aires de 2 surfaces S_1 et S_2 revient à la comparaison des masses de 2 réalisations respectives P_1 et P_2 :

a) On compare plusieurs pièces découpées dans du carton de 2 épaisseurs différentes ou dans du carton et un autre matériau de densité différente (lino par exemple)

- selon la masse
- selon l'aire quand cela est possible.

b) on pointe les conditions dans lesquelles l'ordre est le même (pièces découpées dans le même matériau) et celles dans lesquelles il est différent (pièces découpées dans des matériaux différents)

c) on répond à la question "les 2 surfaces S_1 et S_2 ont-elles même aire ?" en utilisant le critère :

Si des réalisations de S_1 et S_2 dans le même matériau ont même masse, S_1 et S_2 ont même aire.

2) Désigner, nommer les objets d'étude : pièces matérielles, surfaces, aires, masses. Traduire les manipulations en relations entre désignations.

Déroulement des séquences.

- travail par équipe de 3

Matériel
(1 jeu de 8 pièces par équipe
(4 pièces découpées dans du lino
(4 pièces découpées dans du carton fort
(1 balance roberval pour 1 ou 2 équipes

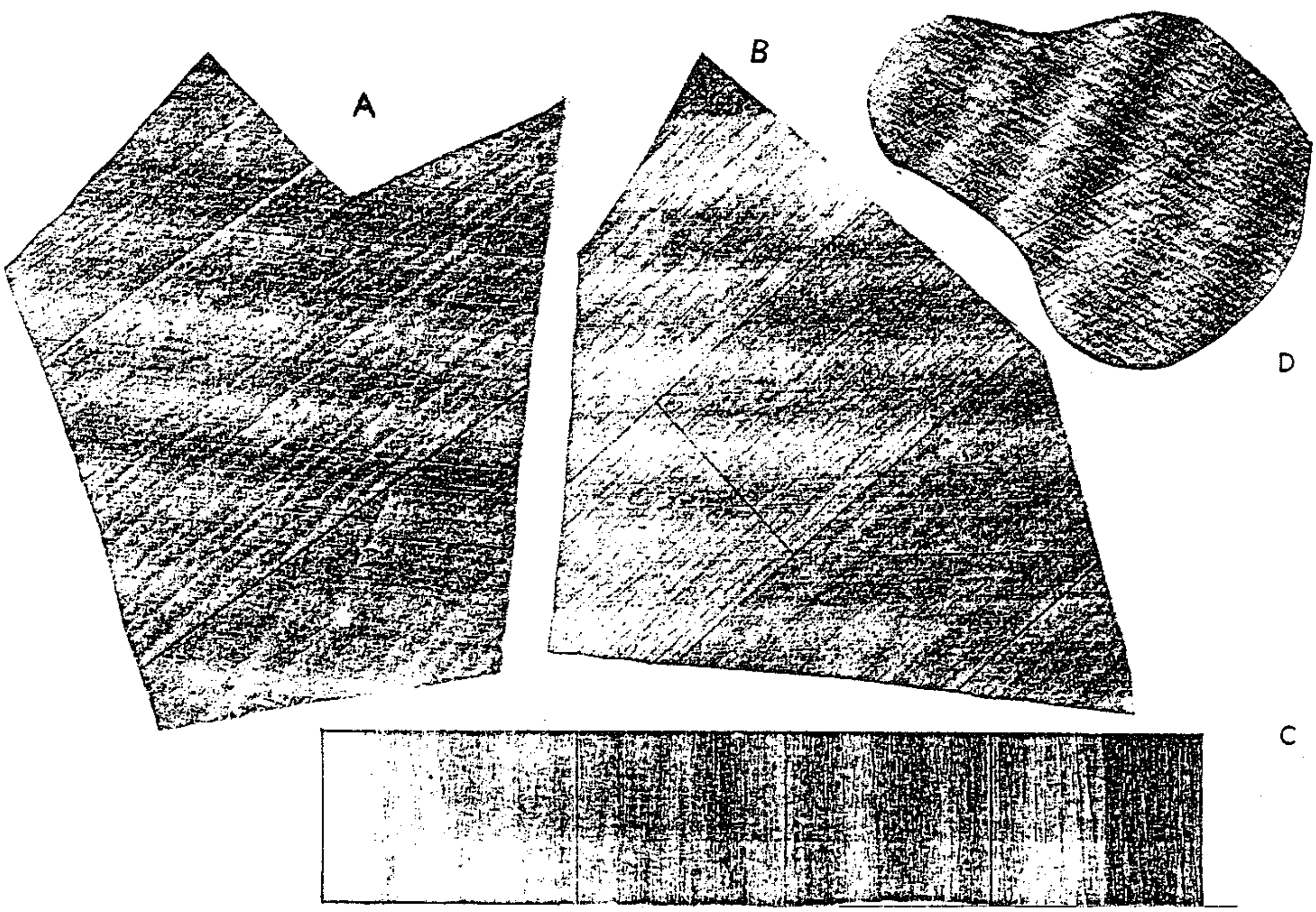
Description des pièces : nommons A, B, C, D les pièces en lino
E, F, G, H celles en carton

Remarque : Pour réaliser des pièces, on a intérêt à choisir un matériau suffisamment dense pour qu'une petite variation de masse appréciable à la balance corresponde à une variaton d'aire aussi petite que possible. (le carton doit être assez fort et le papier n'est pas utilisable).

A et F sont superposables, donc A et F ont même aire au sens géométrique. Elles sont réalisées dans des matériaux de densité différente. Elles ont des masses différentes.

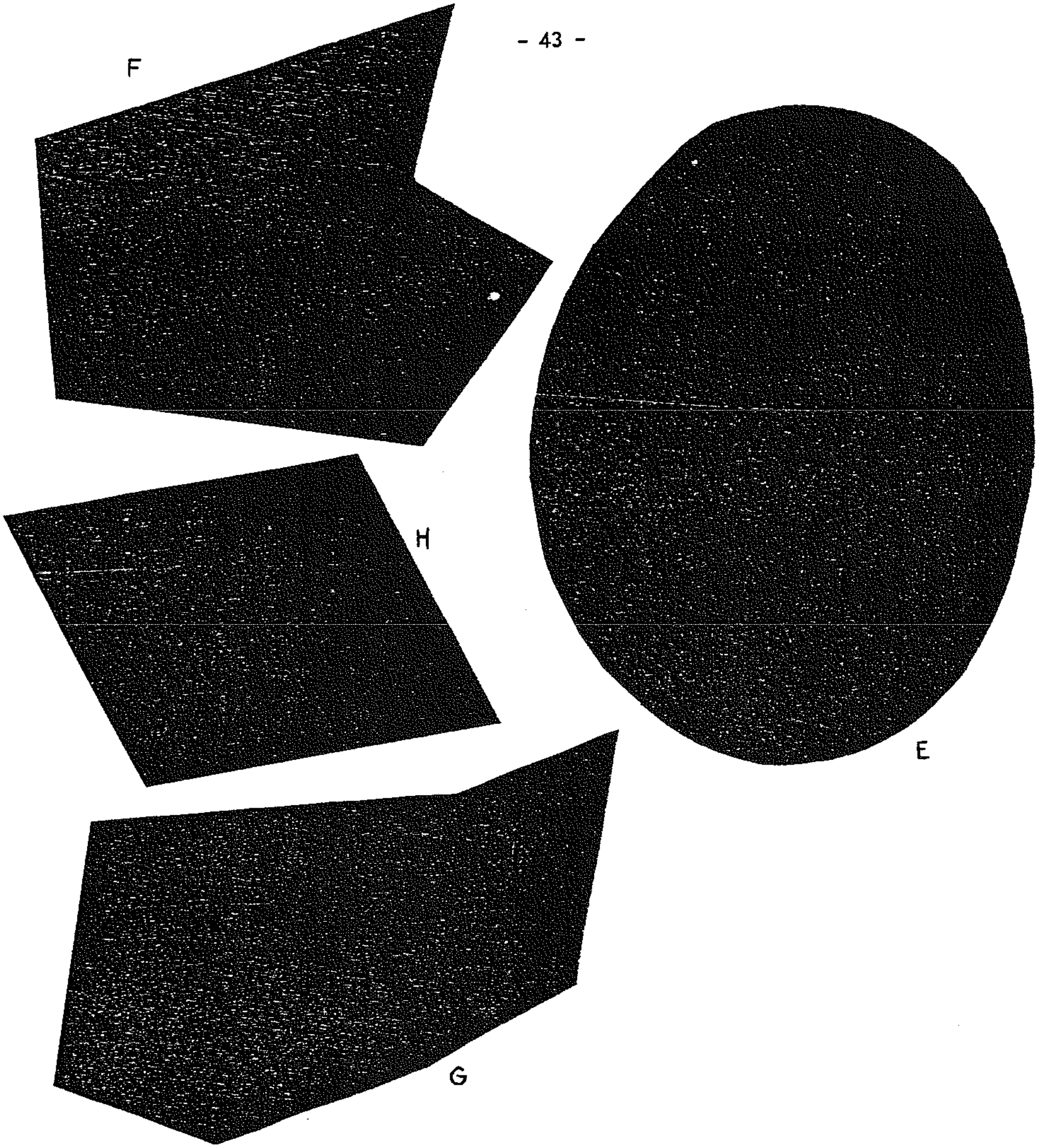
On a fabriqué G à partir de F par découpage et recollement. Elles ont par construction même aire au sens géométrique, mais ce n'est pas perceptible. Elles sont toutes deux réalisées dans le même carton. Elles ont donc même masse. On a fabriqué B dans le même lino que A de façon que B ait même masse que A mais une forme différente.

D s'inclut dans toutes les pièces mais est plus lourde que la plus grande en carton E.



Voici en modèle réduit les figures proposées en lino.

L'ordre du plus léger au plus lourd est D C (A B) A et B ont même masse.



Voici en modèle réduit les figures proposées en carton. Du plus léger au plus lourd, l'ordre est H (F G) E F et G ont même masse.

Consigne : dans chaque équipe comparer les pièces :

- selon la masse
- selon l'aire

- Y a-t-il des questions auxquelles vous ne savez pas répondre ?
- Y a-t-il des pièces de même masse et d'aires différentes ?
- Y a-t-il des pièces de même aire et de masses différentes?
- Y a-t-il des pièces de même aire et de même masse?

Analyse de la tâche :

1) Masse : a priori, il faut comparer tous les objets 2 à 2 sur la balance. L'utilisation de la transitivité peut économiser des pesées dans la mesure où on garde en mémoire les résultats des comparaisons déjà faites. Nous pensons que le nombre depièces qu'ils ont à comparer est suffisant pour que les enfants ne puissent se fier à leur seule mémoire. Un moyen efficace consiste à avoir des traces écrites des comparaisons faites et pour cela à désigner les pièces et écrire des inégalités ou égalités entre les désignations. Les pesées permettent d'ordonner les pièces selon la masse : H (F G) E D C (A B) du plus léger au plus lourd

2) Aire : plusieurs pièces ont une aire comparable au sens géométrique :

   A et F sont superposables

   D est contenue dans toutes les autres
   E contient toutes les autres.

   A et F ont même aire, mais leurs masses sont différentes.

   D a la plus petite des aires de toutes les pièces, sa masse est la plus petite parmi les quatre pièces en lino mais pas parmi les pièces en carton.

E a une aire plus grande que celles de toutes les autres pièces. Sa masse est la plus grande parmi les pièces en carton.

On admet que l'ordre des pièces selon la masse ou selon l'aire est le même à condition que les pièces soient réalisées dans un même matériau, du carton par exemple, d'épaisseur constante. Ceci mène à l'ordre suivant pour les aires

$$D \begin{matrix} C \\ \\ H \end{matrix} \quad (A\ B\ F\ G)\ E$$

* D a la plus petite aire
* A B F G ont la même aire
* C et H ont chacune une aire comprise entre celle de D et celle de A
* E a la plus grande aire
* On ne sait pas comparer les aires de C et H

<u>2 moyens</u> :

1°) réaliser C et H dans un même matériau : par exemple reproduire C dans le même carton que H et comparer les masses

2°) utiliser des découpages et recollements pour les comparer au sens géométrique; aux erreurs de mesure près, les deux méthodes doivent donner le même résultat. Les pièces ont été choisies pour que ce soit effectivement le cas, sans être gêné par les erreurs de mesure.

<u>Bilan</u> :

1°) la comparaison des masses donne des renseignements pour comparer les aires dans le cas où les surfaces ont été réalisées dans un même matériau homogène d'épaisseur constante.

2°) 2 aires sont toujours comparables puisqu'on peut toujours comparer les masses de réalisations convenables, du moins dans les limites de la balance dont on dispose.

IV.- DIFFERENCIATION DES NOTIONS D'AIRE ET DE LONGUEUR.

Notre objectif est maintenant de différencier les notions d'aire et de longueur en comparant des surfaces données (en particulier celles fabriquées au cours de la première séquence) d'une part selon l'aire, d'autre part selon le périmètre. Nous modifierons des surfaces de façon à faire varier différemment l'aire et le périmètre. Nous comparerons aussi les polygones selon l'aire et selon les longueurs des côtés.

Nous ne parlons pas ici des différences et des relations entre longueurs et aires liées aux dimensions (dimension 1 pour les longueurs, dimension 2 pour l'aire : si on reproduit une figure à l'échelle k, les longueurs sont multipliées par le nombre k et les aires par le nombre k^2). Cet aspect essentiel, dont l'étude s'étend sur plusieurs années, sera abordé plus loin.

1°) Comparaison des périmètres de différentes surfaces de même aire.

a) Description de la situation.

Matériel - les surfaces en carton réalisées précédemment (voir III 2) .

- Bobine de fil (ficelle de boucher ou fil métallique fin : l'essentiel est qu'il ne s'allonge pas quand on tire dessus)
- règle graduée
- colle ou scotch

Organisation de la classe.

Les élèves travaillent par équipes de quatre : les mêmes que précédemment (voir III 2).

Consigne.

La consigne se donne en deux temps

1) Commander par écrit la longueur de fil nécessaire pour border exactement la surface réalisée et vérifier si la longueur est bonne en collant ce fil sur le bord.
Commentaire : les commandes sont passées par écrit pour qu'il en reste des traces et qu'on puisse éventuellement comparer la commande à la livraison, en particulier dans le cas où le fil ne borde pas exactement la surface (la colle ne doit pas être trop forte pour qu'on puisse décoller le fil au besoin).

2) Quand toutes les surfaces sont bordées, on demande aux élèves, à l'intérieur de chaque équipe, de comparer les périmètres de ces surfaces.
Remarque : Si le mot périmètre n'est pas connu c'est l'occasion de l'introduire.

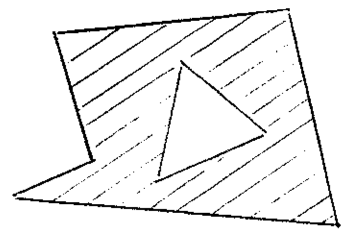
b) Analyse de la tâche des élèves.

1 : Pour faire leur commande de fil, les élèves doivent mesurer le périmètre de la surface qu'ils ont fabriquée . Pour cela, plusieurs moyens sont leur disposition :

- promener leur règle autour de la surface, les longueurs s'ajoutent directement sur la règle
- mesurer chacune des longueurs qui interviennent dans le périmètre et les ajouter.

Pour être efficace, la première méthode demande de disposer d'une règle dont on connaisse la longueur et sur laquelle il soit facile de repérer un point marqué, par exemple une règle de carton. Mesurer le périmètre revient à compter le nombre de reports et à mesurer avec une règle graduée seulement le bout restant. Du point du vue calcul on a à faire une multiplication et une addition. Avec une règle en plastique, la première méthode amène à des erreurs de manipulation, surtout si le bord de la surface est un peu compliqué. Avec la deuxième méthode, le risque d'erreur est reporté sur la lecture des mesures et sur le calcul. Il est d'autant plus grand que la forme est biscornue.

Remarque : Il sera peut-être nécessaire depréciser ce qu'est le bord d'une surface trouée.



on doit border le bord extérieur
et le bord intérieur.

Quand les élèves ont collé leur fil, ils peuvent savoir si la longueur est bonne :

- ou bien la longueur de fil a juste suffi à border la surface (on admet une petite erreur de 1 ou 2 cm due aux manipulations et aux arrondis) et la commande était bonne.

- ou bien il y a un décalage (trop de fil ou pas assez de fil) et l'élève doit rechercher les causes d'erreur :

  * livraison non conforme à la commande
  * côté oublié ou compté deux fois
  * erreur de report sur la règle
  * erreur d'addition
  * mesure du bord du rectangle témoin en pensant que les surfaces ayant même aire, elles auraient même périmètre.

Quand il a trouvé la cause de l'erreur, l'élève passe une nouvelle commande et borde à nouveau sa surface.

Remarque : on considère comme improbable le cas où il y aurait erreur à la commande et erreur à la livraison qui se compensent exactement.

2 : Il y a peu de chances pour que les quatre élèves d' une même équipe aient des surfaces de même périmètre , en tous cas cela ne se produira pas dans toutes les équipes . Les surfaces réalisées ont la même aire mais pas le même périmètre .

Pour classer les surfaces selon le périmètre , les élèves ont à ordonner des nombres : les mesures en cm des longueurs de fil commandées (quand la commande est bonne !)

c) Compte-rendu collectif et bilan

Les équipes rendent compte de leur travail avec les difficultés éventuellement rencontrées :

- difficultés matérielles pour mesurer si on a réalisé une surface biscornue
- méthodes utilisées pour mesurer le périmètre
- décalage entre la longueur de fil nécessaire et la longueur de fil commandée : distinction entre erreurs dues à l' imprécision des mesures , aux manipulations et aux calculs , et erreurs de méthode .
- quelle erreur peut-on admettre (à cause de l' imprécision) ?
- cause des autres erreurs
- différents périmètres obtenus dans chaque équipe
- pour la même aire , plus la forme est biscornue , plus le périmètre est grand .

Conclusion : - deux surfaces de même aire n' ont pas nécessairement le même périmètre .
- pour comparer les aires de deux surfaces , il ne sert à rien de comparer les périmètres .

2°) Indépendance des variations d' aire et de périmètre

a) Description de la situation

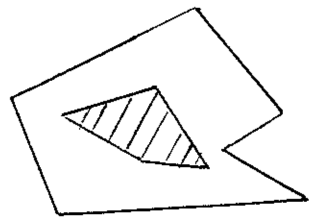
Travail individuel par équipes de deux .

Consigne : Dessiner une surface S (polygonale) quelconque . Cette surface a une certaine aire A(S) et un certain périmètre P(S) . Modifier S de façon à obtenir une surface d' aire plus petite et de périmètre plus grand .

Remarque : On peut faire travailler les élèves par deux . Chacun modifie la surface dessinée par son coéquipier . De cette façon , la surface que chacun étudie est arbitraire .

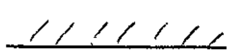
b) Analyse de la tâche

* Une manière efficace de répondre à la consigne est d' enlever une pièce à l' intérieur de la surface donnée . De cette façon , on diminue l' aire et on augmente le périmètre en créant un bord . Par exemple , dans le dessin ci-contre , on enlève la partie hachurée .



Cette procédure a peu de chances d' apparaître si les enfants n' ont pas une certaine pratique des surfaces à trou .

* Une autre manière consiste à découper une pièce sur le bord . On est assuré de diminuer l' aire . On n' augmente le périmètre que si la longueur du bord supprimé est inférieure à celle du bord créé . Un procédé est d' augmenter l' irrégularité du bord : par exemple transformer un bord droit en une ligne brisée , ou encore remplacer un bord droit par un bord courbe .

 devient  ou 

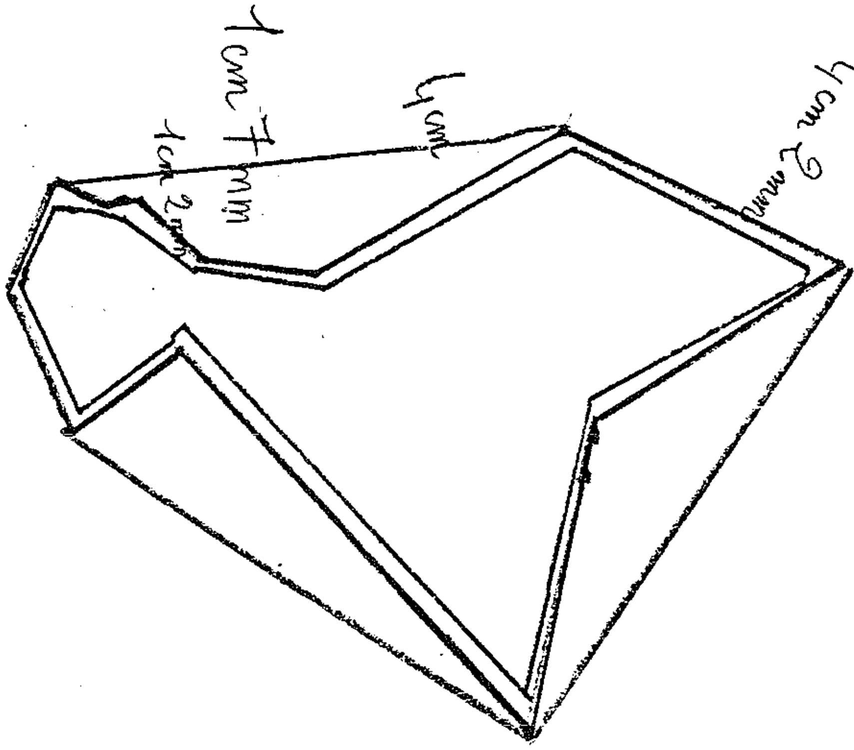
* Une troisième procédure consiste à dessiner une surface incluse dans la précédente mais à bord suffisamment irrégulier pour être sûr que le périmètre soit plus grand .

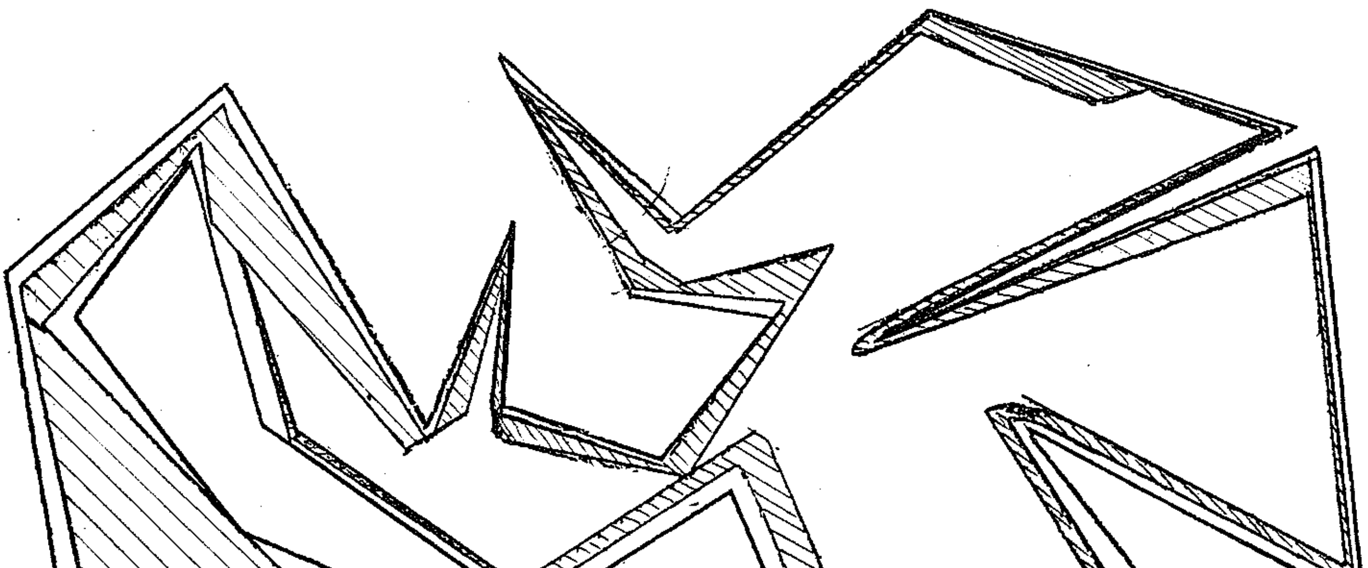
c) Procédures observées

La première procédure n'a pas été utilisée . La deuxième a été majoritaire dans ses deux formes (avec un net avantage pour les lignes brisées) . La troisième a été observée comme correction à une première tentative qui donnait une surface incluse dans la surface donnée mais dont le périmètre n'était pas évidemment plus grand : l' élève a alors dessiné une bande étroite suivant à peu près le bord de la surface donnée avec l' explication suivante : l' aire est plus petite et le périmètre est à peu près double . (voir travaux des enfants ci-dessous) .

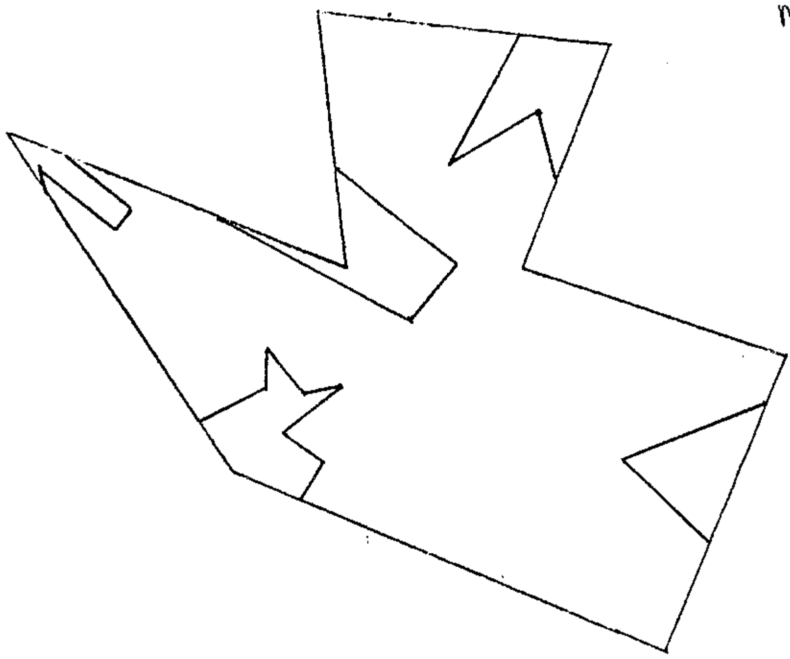
Quelques élèves n' ont pas proposé de solution .

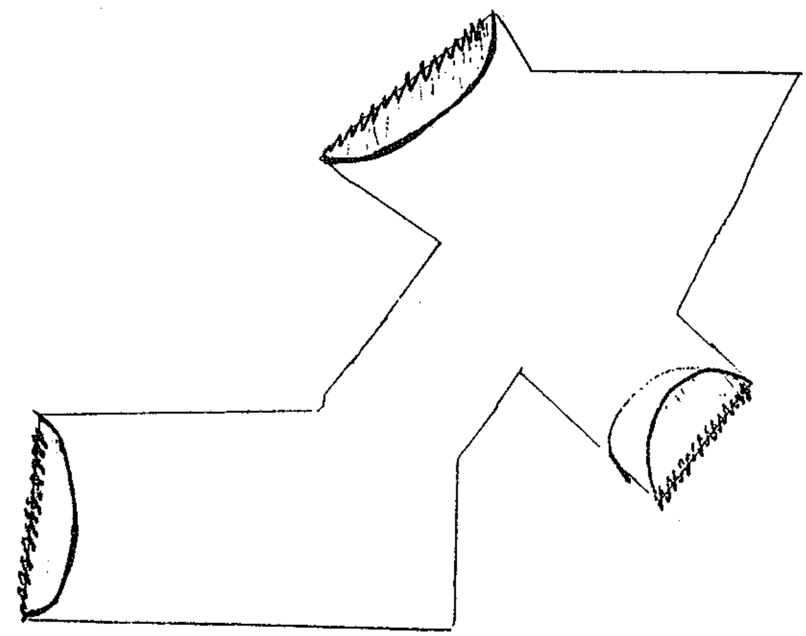
Un élève a augmenté l' aire et diminué le périmètre en régularisant la surface .


4cm 2mm
4cm
1cm 7mm
1cm 2mm



modif. Aude





demi Hélène

d) Bilan

Le compte - rendu des diverses propositions a permis d' établir l' indépendance des variations d' aire et de périmètre : on a trouvé des surfaces S_1 et S_2 telles que $A(S_1) < A(S_2)$ et $P(S_1) > P(S_2)$, des surfaces S_3 et S_4 telles que $A(S_3) > A(S_4)$ et $P(S_3) < P(S_4)$, des surfaces de même aire et de périmètres différents ; il reste à fabriquer des surfaces de même périmètre et d' aires différentes .

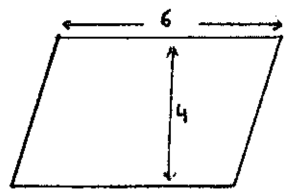
3°) Comparaison selon divers critères de figures géométriques simples .

a) Objectif

Même si les élèves ont établi qu' aire et périmètre pouvaient varier dans des sens différents , ils ont tendance à recourir à nouveau à la comparaison des longueurs pour comparer les aires de formes géométriques simples . Le but des consignes suivantes est de se convaincre que cette procédure n' est pas valable . La dernière sert de test et de renforcement .

b) Consigne

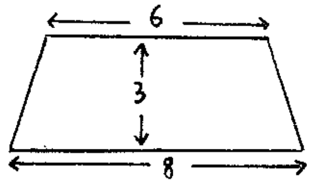
1°) Voici un parallélogramme S_1



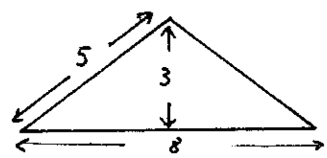
(échelle ½)

En découpant S_1 et en recollant convenablement les morceaux , on peut obtenir un rectangle . Dessiner un tel rectangle R_1 .
Comparer les longueurs des côtés de R_1 et de S_1 .
Comparer les périmètres de R_1 et de S_1 .
Comparer les aires de R_1 et de S_1 .

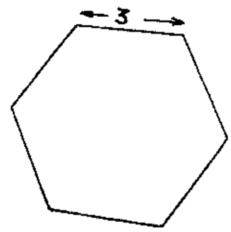
2°) Faire le même travail pour chacune des surfaces ci-dessous : S_2 est un trapèze isocèle , S_3 est un triangle isocèle , S_4 est un hexagone régulier .



S_2



S_3



S_4

Les surfaces sont représentées à l' échelle ½ .

3°) Trouver deux surfaces de même périmètre et d' aires différentes

c) Analyse de la tâche

Pour comparer les périmètres , on a besoin de connaître les longueurs des côtés de R_i et de S_i . Pour comparer les aires , ces mesures ne seront d' aucune utilité : la procédure pertinente consiste à se référer à la construction de R_i et de S_i : par construction R_i et S_i ont même aire (i = 1 , 2 , 3 ou 4) . Compte tenu des séquences précédentes , on prévoit que dans l' ensemble les élèves seront convaincus que R_i et S_i ont même aire . Tous devraient l' être au moment du bilan .
S_3 et S_4 ont même périmètre et des aires différentes , ce qu' on vérifie facilement en essayant de superposer . Il est possible de fabriquer d' autres surfaces répondant à la question .

d) Bilan

Après découpage et recollement convenable des surfaces , l'aire n' a pas varié , alors que les longueurs des côtés et le périmètre eux ont varié . On a trouvé deux surfaces de même périmètre et d' aires dfférentes . La comparaison des longueurs des côtés et des périmètres ne donne aucun renseignement pour comparer les aires , sauf si cela assure que les surfaces sont superposables ou que l' une est incluse dans l' autre .

4°) Rectangles à périmètre constant

Jeu à deux .

Matériel : papier quadrillé , un rectangle dessiné sur papier quadrillé .

Consigne : Voici un rectangle . Chacun à son tour propose un rectangle différent de même périmètre .

- si le périmètre a changé , on perd 1 point
- si le périmètre est conservé et que l' aire a diminué , on gagne 1 point .

On joue 5 coups chacun ; le gagnant est celui qui a le plus de points .

Objectif de la leçon : Montrer que l' aire peut devenir très petite sans que le périmètre change .

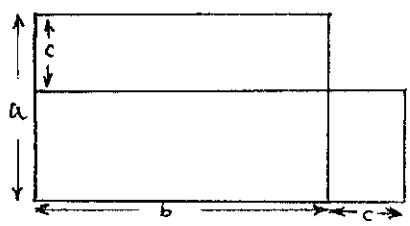
Analyse de la tâche : Le premier travail consiste à trouver une manière de modifier le rectangle sans changer le périmètre .

1) procédure "ficelle"

On peut entourer le rectangle avec une ficelle . On doit alors réaliser un rectangle différent qu' on puisse entourer avec cette ficelle . Ceci nécessite de faire fonctionner les propriétés géométriques du rectangle : côtés opposés de même longueur , quatre angles droits .

2) procédure géométrique

On peut dessiner des rectangles en utilisant une compensation sur la longueur des côtés comme ci-dessous :



Ces procédures fonctionnent aussi pour des rectangles dessinés sur papier blanc .

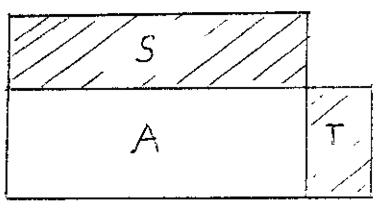
3) procédure numérique

On peut exprimer le problème en termes de mesures : on mesure le périmètre l du rectangle donné en choisissant une unité de longueur (le cm ou le côté d' un carreau du quadrillage par exemple) . Le problème revient à trouver les dimensions a et b d' un rectangle de façon que 2a+2b = l . Le problème est pratiquement numérique . Une réduction du problème consiste à utiliser le fait que si le périmètre est donné ,le demi-périmètre l' est aussi . Exprimé en termes numériques , le problème se traduit par la recherche de deux nombres dont on connaît la somme . Ici on dispose d' une solution : les dimensions du rectangle donné . Une manière d' en trouver d' autres est d' utiliser une méthode de compensation : ajouter à une dimension ce qu' on enlève à l' autre . Une autre méthode est de choisir l' une des dimensions et de déterminer l' autre par soustraction .

* Pour savoir si on marque 1 point ou non , il faut pouvoir apprécier la variation de l' aire .

  - la procédure ficelle conduit à une appréciation perceptive de l' aire , ce qui fonctionnera en cas de grande variation . En posant bien la ficelle sur le quadrillage , on peut mesurer la variation d' aire en comptant les carreaux du quadrillage .

  - dans la procédure géométrique , la variation d' aire est la différence entre les aires S et T (voir figure) .



On peut conclure sur le sens de variation par comparaison directe de S et T . Ici T < S . Donc l'aire a diminué .

  - une autre possibilité est de calculer les aires des rectangles en fonction des dimensions et de les comparer . Pour les élèves concernés , le calcul n' est possible que pour des dimensions entières .

* Pour être sûr de marquer 1 point , il faut prévoir le sens de variation de l' aire .

  - la procédure ficelle permet une prévision empirique après quelques essais : en diminuant toujours le petit côté (ou en augmentant le grand) , l' aire diminue .

- la procédure géométrique est une validation de la procédure ficelle : en diminuant le petit côté , l' aire T ajoutée est plus petite que l' aire S enlevée . Dans cette procédure , on n' a pas besoin de mesurer . Elle est utilisable pour des rectangles dessinés sur papier blanc .
- par le calcul , la variable pertinente (ici b-a) à prendre en compte pour prévoir le sens de variation de l' aire est difficile à repérer . Cependant , comme avec la ficelle , des essais numériques peuvent conduire à une prévision correcte .

En CM2 , seule la procédure géométrique permet une explication des résultats . La validation de la procédure numérique résulte d' un calcul algébrique qui relève des compétences d' un élève de 4° ou plus .

<u>Bilan</u> :

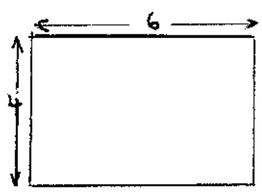
1) Le compte-rendu des jeux des différentes équipes permet d'expliciter l' objectif de la leçon et de renforcer le bilan précédent .

2) On pose la question : peut-on continuer à diminuer l' aire ? Y en a-t-il une plus petite que toutes les autres ?

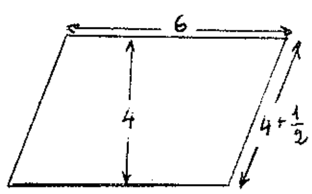
Sauf si on admet qu' un segment est un rectangle particulier , il n' y a pas d' aire minimum . Matériellement , on est limité dans le jeu ; géométriquement , on peut concevoir que le jeu ne s'arrête pas . Sa traduction numérique , à chaque pas , dépend des nombres qu' on connaît .

5°) <u>TEST</u>

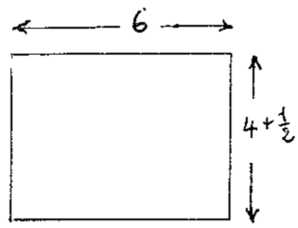
Comparer les surfaces suivantes selon l' aire .



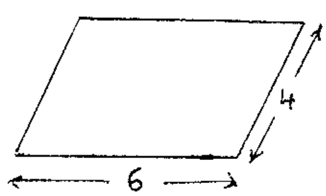
A



B



C



D

Analyse de la tâche

Dans la consigne du §3 (comparaison selon divers critères de figures géométriques simples) , découpage et recollement font partie des données ; le test a pour but de leur faire jouer le rôle d' outil pour répondre à la demande de comparaison des aires , sans qu' il y soit fait explicitement référence .
On leur demande de comparer seulement les aires et non aires et périmètres pour ne pas éveiller leur méfiance : on veut voir s' ils recourent eux-mêmes au bon modèle ou si c' est encore le modèle de comparaison des longueurs qui l' emporte .
La correction de ce test sera une occasion de renforcement des conclusions établies au cours de ce chapitre .

6°) Exercices

1. Pour les sufaces S_1 S_2 S_4 du §3 , fabriquer des triangles de même aire . Même question pour A et C (voir test) .
2. a) A partir d' un rectangle donné , fabriquer une surface de même aire et de périmètre plus grand .
   b) Peut-on fabriquer un rectangle qui répond à la consigne ?
3. a) A partir d' un rectangle donné , fabriquer une surface de même périmètre et d' aire différente .
   b) Peut-on fabriquer un rectangle répondant à cette consigne ?
4. a) Etant donnés deux rectangles R_1 et R_2 d' aires différentes : par exemple $A(R_1) < A(R_2)$, peut-on fabriquer une surface de même aire que R_1 (ou plus petite) et de périmètre supérieur à celui de R_2 ?
   b) Peut-on fabriquer un rectangle répondant à ces conditions ?

V PAVAGE - MESURE D'AIRES - UNITES D'AIRE -

Objectifs

* Comparer les aires de surfaces planes données, par pavage des surfaces à l'aide d'un "carrelage" ou par encadrement de la surface par deux surfaces qu'on sait paver à l'aide d'un carrelage donné. Utilisation de la transitivité.

* Mesurer une aire à l'aide d'une unité

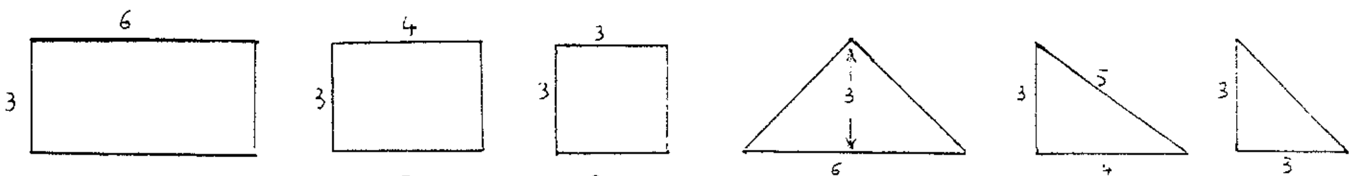
- La mesure d'une aire dépend de l'unité choisie.
- Mesure d'une aire avec des unités différentes.
- Relations éventuelles entre ces mesures.
- Pour ramener la comparaison des aires à celles de leurs mesures, les aires doivent être mesurées avec la même unité.
- choix d'une unité d'aire commode pour comparer différentes aires données.

1) Choix de la situation

Notre objectif est d'utiliser une mesure pour comparer des aires de surfaces planes. Les surfaces choisies sont des figures géométriques dessinées sur une feuille de papier et polycopiées. La collection des surfaces a été choisie de façon que la comparaison directe et les comparaisons à l'oeil ne donnent rien. La seule manière de s'en tirer est de passer par l'intermédiaire de la mesure. (on exclut les découpages et recollements).
La mesure sera d'abord obtenue, quand c'est possible, par pavage de la surface à l'aide de "carrelages". Nous rappelons que la surface S est pavable avec le carrelage C si on peut recouvrir S avec un nombre entier de copies de C sans chevauchement et sans laisser de trous. Une première série de surfaces est choisie de manière que chacune d'elles soit pavable avec un ou plusieurs des carrelages donnés mais pas avec tous. Les premières mesures seront obtenues directement à partir des pavages. Ensuite, en utilisant à la fois les relations entre aires des carrelages et la substitution, nous obtiendrons pour les surfaces des mesures à l'aide d'unités qui ne pavent pas la surface : ces unités paveraient une surface de même aire que la surface donnée.
On introduit ensuite une surface qui n'est pavable avec aucun des carrelages donnés mais dont la mesure s'exprime en nombre entier avec certains carrelages. Pour le voir il faudra utiliser l'additivité des aires et par exemple utiliser plusieurs des carrelages donnés et les relations entre leurs aires : la mesure se détache du pavage.
Dans une troisième étape (Cf Page 99)on donne des surfaces quelconques et des grilles à maille carrée, la seule solution sera alors d'encadrer les mesures des surfaces en prenant comme unité la maille de la grille.

a) choix des carrelages.

Nous avons choisi les carrelages suivants :



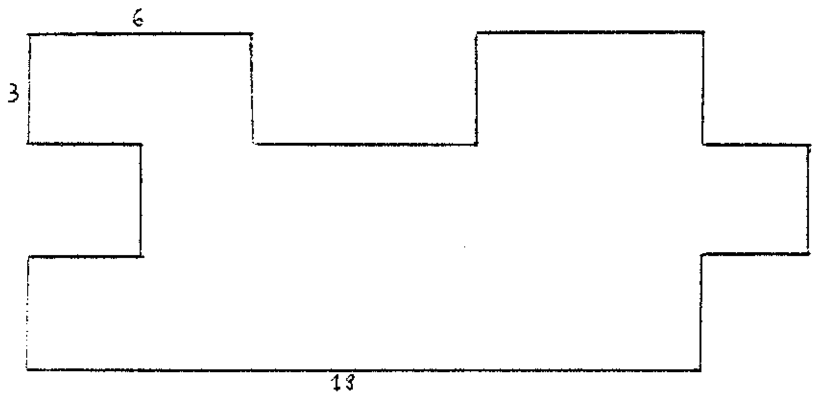
R_6 R_4 C_3 T_6 T_5 T_3

Remarque : ils sont représentés ici à l'échelle ½ pour les longueurs. Les notations introduites le sont pour la commodité de la rédaction et ne sont pas nécessairement celles utilisées par les enfants.
Certains rapports d'aires entre les carrelages sont entiers, ou inverses d'entiers. Les autres rapports sont moins simples.
Si nous désignons par exemple par r_6 l'aire du rectangle R_6 et ainsi de suite pour les autres, nous avons :

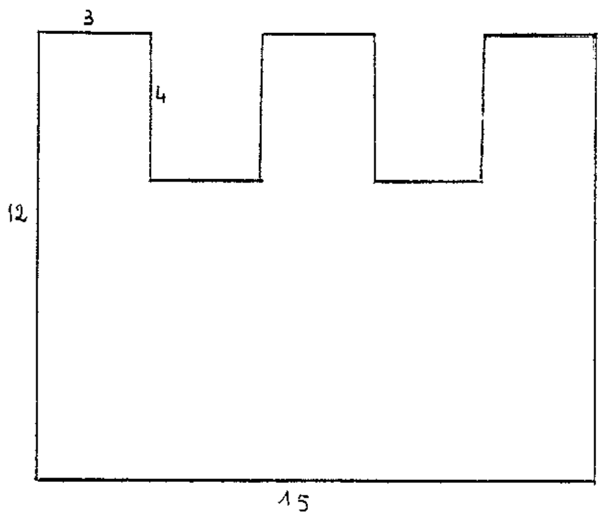
$$r_6 = 2\ c_3 = 2\ t_6 = 4\ t_3$$
$$r_4 = 2\ t_5$$

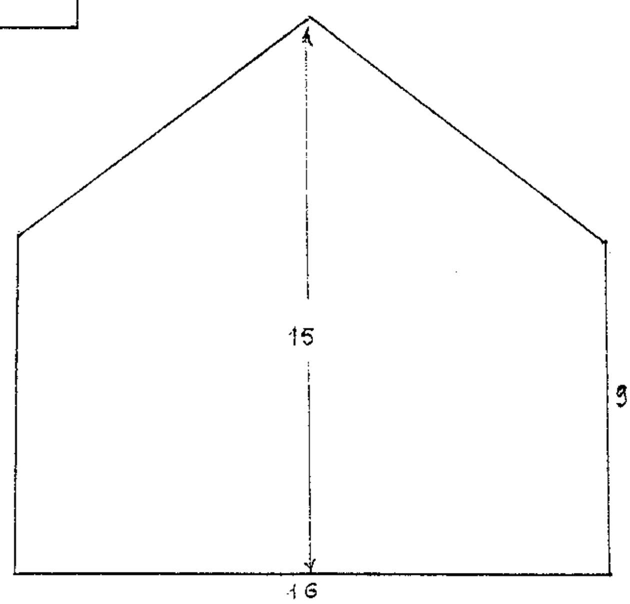
Nous avons ainsi deux types de carrelages : R_6, C_3, T_6 et T_3 d'une part, R_4 et T_5 d'autre part. Le rapport des aires de deux carrelages d'un même type est entier ou inverse d'entier.

b) Choix des surfaces .



S_1

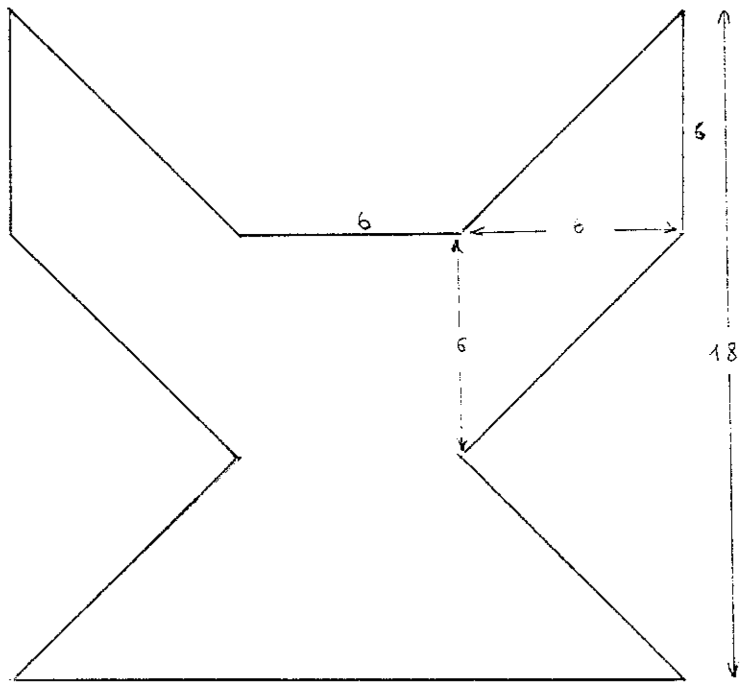




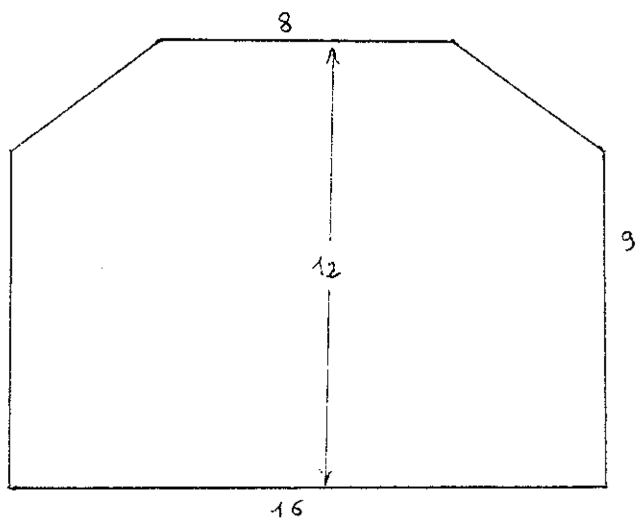
S_2 S_3

Les figures sont représentées ici à l'échelle $\frac{1}{2}$.

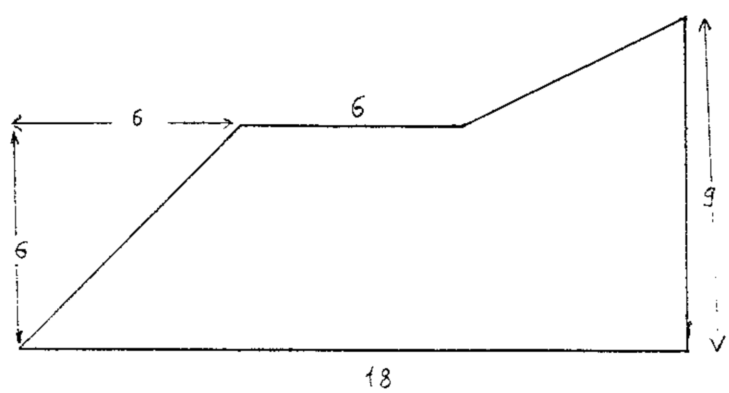
S_4



S_5



S_6



Les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ont été choisies de façon à être pavables exactement par au moins un des carrelages proposés. Elles ont des aires assez voisines et des formes assez différentes pour qu'on ne puisse pas les comparer directement.

Nous désignons par A_i l'aire de la surface S_i

$(i = 1,2,3,4,5,6)$

S_1 peut être pavée avec R_6, C_3, T_3 :

$A_1 = 8\ r_6 = 16\ c_3 = 32\ t_3 \quad (= 144\ cm^2)$

S_2 peut être pavée avec R_4 et T_5 :

$A_2 = 13\ r_4 = 26\ t_5 \quad (= 156\ cm^2)$

S_3 peut être pavée avec T_5 :

$A_3 = 32\ t_5 \quad (=192\ cm^2)$

S_4 peut être pavée avec T_6 et T_3 :

$A_4 = 20\ t_6 = 40\ t_3 \quad (= 180\ cm^2)$

La surface S_5 peut s'inclure dans S_3.

Elle peut aussi être pavée avec T_5:

$A_5 = 30\ t_5 \quad (= 180\ cm^2)$

On a donc $A_5 = A_4$ mais il est impossible de s'en apercevoir à l'aide des pavages.

Pour les 5 aires fournies on a l'ordre suivant :

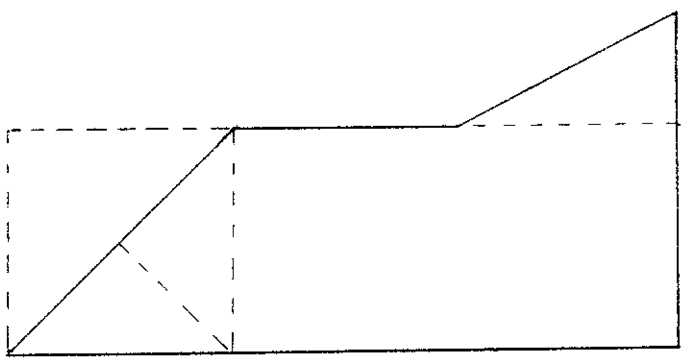
$$A_1 < A_2 < A_4 = A_5 < A_3$$

On ne peut obtenir ce classement qu'après avoir fait le choix d'une unité commune et après avoir mesuré A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 avec cette unité. Cette unité commune pourra être par exemple le rectangle de dimensions 1 cm et 3 cm dont nous notons l'aire r ou le carré de 1 cm de côté d'aire c.

Nous avons: $r_6 = 6r = 18c$; $r_4 = 4r = 12c$; $C_3 = 3r = 9c = t_6$;

$t_5 = \frac{1}{2}c_4 = 2r = 6c$; $t_3 = \frac{1}{2}\ c_3 = \frac{3}{2}\ r = \frac{9}{2}\ c$

Nous aurons donc les mesures de A_i en r ou c (ces mesures s'expriment par des nombres entiers)
La surface S_6 n'est pas pavable avec les carrelages proposés. Si on dispose de toutes les surfaces, la comparaison de A_6 aux autres aires est facile : S_6 peut s'inclure dans S_1 et donc $A_6 < A_1$ et on a les autres résultats par transitivité. La comparaison directe de S_6 aux autres surfaces donne d'ailleurs aussi de bons résultats.
Si l'on ne dispose pas des autres surfaces, pour comparer A_6 aux autres aires, on doit recourir à la mesure. S_6 ne peut être pavé avec aucun des carrelages proposés, ni même avec le carré de 1 cm de côté. Mais on peut mesurer son aire en décomposant S_6 et en se servant de l'additivité.



On peut par exemple voir que
$A_6 = \frac{1}{2} r_6 + 4 r_6 + 2 t_6$ ou encore que
$A_6 = \frac{1}{2} r_6 + 4 r_6 + \frac{1}{2} (2r_6)$
donc $A_6 = (5 + \frac{1}{2}) r_6 = 11 c_3 = 11 t_6 = 22 t_3 = 99$ c

2) Mesure, par pavage, des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

<u>Organisation de la classe.</u>

Les élèves sont répartis par équipes de quatre.
On distribue à chaque équipe une collection de surfaces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et à chaque élève une collection de carrelages.
Les carrelages sont découpés dans du carton fin de différentes couleurs.
Chaque surface est polycopiée sur papier blanc.

Objectifs

- Faire un travail géométrique de pavage des surfaces données avec les carrelages donnés.

- Expliciter des relations entre aires de carrelages.

- En déduire des relations entre mesures d'une aire avec des unités différentes et entre lesquelles on a des relations.

- Exprimer l'aire d'une surface en prenant pour unité l'aire d'un carrelage avec lequel on ne peut pas paver.

Consigne

Chacun des membres de l'équipe choisit une des surfaces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Vous disposez de petits carrelages. En choisissant bien l'un de ces carrelages, on peut paver la surface choisie.
a) Pavez-la. Combien de copies du carrelage avez-vous utilisées ? Est-ce possible avec d'autres carrelages ?
b) Pouvez-vous avec chacun des carrelages fabriquer une surface de même aire que la surface choisie. Pour chacun d'eux, dites de combien de copies vous avez besoin.

Analyse de la tâche.

Le pavage des surfaces à l'aide d'un carrelage permet de déterminer le nombre de copies nécessaires pour reproduire la figure donnée, autrement dit la mesure de l'aire en prenant comme unité l'aire du carrelage qui a servi au pavage.
On peut réaliser 9 pavages différents :

S_1 peut être pavée avec R_6, C_3, T_3.
S_2 .... R_4 et T_5.
S_3 peut être pavée avec T_5
S_4 .... T_6 et T_3.
S_5 .... T_5.

Le pavage de S_1 par R_6, C_3, T_3 doit permettre d'expliciter les relations entre R_6, C_3, T_3 et donc entre leurs aires. De même le pavage de S_2 doit permettre d'expliciter les relations entre R_4 et T_5 et celui de S_4 les relations entre T_6 et T_3.
Par l'intermédiaire de l'aire t_3, on trouvera des relations entre c_3 et t_6 par exemple.
Le travail peut aussi se faire dans l'autre sens : quand on a découvert des relations entre carrelages, on en déduit des pavages possibles. Par exemple : chaque fois qu'une surface peut être pavée avec R_6, elle pourra l'être avec C_3 et avec T_3.
Le pavage des surfaces aide à trouver des relations entre carrelages et les relations entre carrelages aident à trouver de nouvelles manières de paver les surfaces.

Certains des carrelages ne permettent pas de paver la surface choisie mais grâce aux relations entre aires de carrelages, on pourrait quand même fabriquer, à l'aide de ces carrelages, des surfaces de même aire que la surface choisie, autrement dit exprimer l'aire de la surface choisie en prenant pour unité l'aire d'un carrelage avec lequel on ne peut pas la paver :

Par exemple, on ne peut pas paver S_1 avec T_6, mais comme $t_6 = 2\ t_3$ et $c_3 = 2\ t_3$, on a $t_6 = c_3$ Comme $A_1 = 16\ c_3$, on a aussi $A_1 = 16\ t_6$. En prenant 16 T_6, on pourrait fabriquer une surface de même aire que S_1.
De même $A_3 = 32\ t_5$ et $2\ t_5 = r_4$ donc $A_3 = 16\ r_4$.

Remarques sur la situation didactique

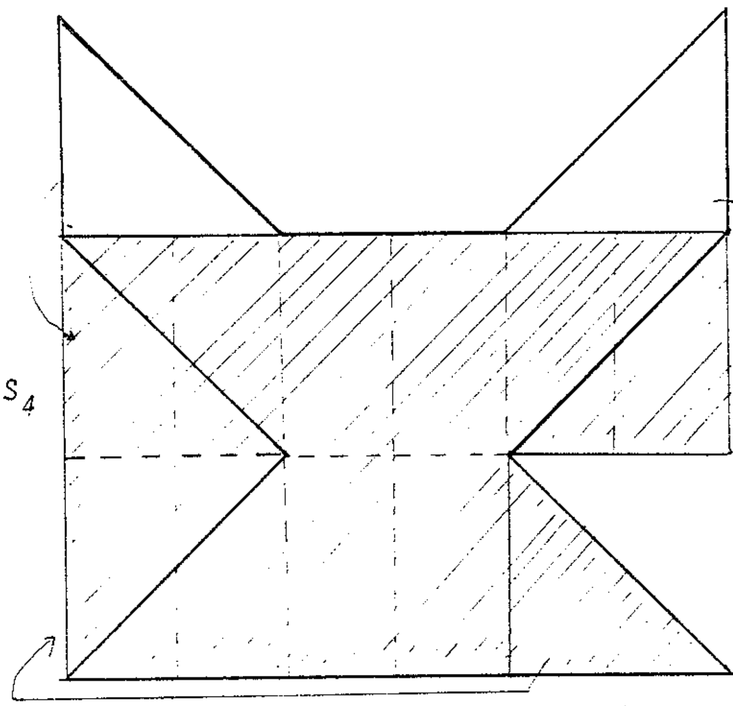
1. Si on demande seulement de paver (a) de la consigne ci-dessus) il faut s'attendre à ce que les enfants ne donnent que les mesures et les relations entre carrelages qui découlent directement du pavage : Même s'ils observent d'autres relations, ils ne les croient pas légitimes puisqu'il faudrait couper les carrelages : on ne peut plus paver avec des carrelages entiers.
Dans une classe, nous avons seulement proposé la consigne a) et c'est ce qui s'est produit. On a alors donné la consigne b) et les élèves ont proposé d'autres relations.

Dans une autre classe, on a donné directement la consigne b). Compte-tenu des séquences antérieures, construire une surface de même aire qu'une surface donnée revient à découper la surface et recoller convenablement les morceaux. C'est ce que certains élèves ont proposé en oubliant qu'il fallait se servir des carrelages. Quand on le leur a rappelé, ils n'ont pas vu d'autre moyen que de paver la surface donnée. Ils ont alors produit des relations, les unes liées au pavage, les autres non.
Cependant une autre procédure était possible : commencer à paver la surface choisie avec un des carrelages puis la modifier sans changer son aire de façon que la surface ainsi modifiée soit pavable complètement.

Par exemple :

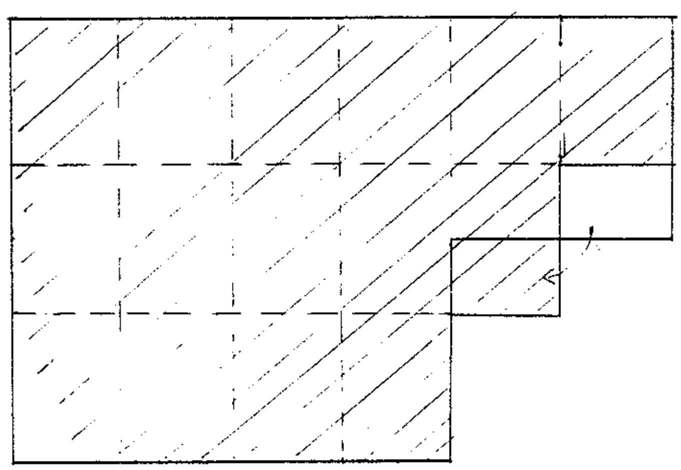
La surface modifiée S'_4 est pavable avec R_6 et avec c_3, alors que la surface initiale S_4 ne l'était pas

$A'_4 = A_4 = 10\ r_6 = 20\ c_3$



et même, en modifiant encore cette surface, on obtient S''_4, pavable avec R_4.

$A''_4 = A'_4 = A_4 = 15\ r_4$.
(et donc $A_4 = A_5$!)



De telles modifications exigent de bien exploiter les propriétés géométriques des figures proposées et donc déjà de pouvoir les repérer, d'autre part elles exigent d'en anticiper les conséquences sur le pavage : on ne réalise une modification que si elle conduit à une surface pavable, éventuellement après quelques essais.
Cette procédure a peu de chances d'apparaître. De toute façon notre objectif n'est pas d'utiliser le pavage systématiquement mais d'exprimer des mesures d'aire indépendamment de la possibilité effective de paver. C'est pourquoi, pour bloquer cette procédure, nous posons d'abord la consigne de pavage puis celle de construction de surface de même aire. Les élèves n'ont pas besoin de construire les surfaces de même aire pour savoir combien d'exemplaires d'un carrelage ils utiliseraient.
Toutefois, nous favoriserons plus tard une telle procédure pour exprimer l'aire de figures géométriques classiques (triangle, parallélogramme, trapèze) en fonction de l'aire du rectangle.

2. On distribue 5 surfaces pour 4 élèves. La surface S_1 ne pose en général aucun problème et le pavage est vite terminé. L'élève qui s'en est occupé peut paver la dernière surface.
Il est utile de prévoir plusieurs collections de surfaces par équipe : les élèves qui ont trouvé tous les pavages possibles de leur surface peuvent s'intéresser à une autre ; inversement, si un élève a des difficultés en commençant avec S_3 par exemple, il peut s'occuper de S_1 ou de S_2 qui sont plus faciles.

Remarques sur le comportement des élèves.

Il n'y a en général pas de problème pour le pavage de S_1 (par R_6 ou C_3) ou de S_2 par R_4. Les autres manières de paver S_1 et S_2 s'obtiennent souvent après avoir remarqué les relations entre carrelages : par exemple on met 2 T_3 dans C_3, donc on peut aussi paver S_1 avec T_3.

Pour S_3, S_4, S_5, c'est beaucoup moins évident surtout pour S_3. Les élèves essaient des triangles mais les placent souvent dans des positions qui ne leur permettent pas de continuer.

Par exemple, pour S_4, ils essaient T_6 en le posant comme indiqué sur la figure 1 alors que seule la disposition de la figure 2 permet de continuer le pavage.

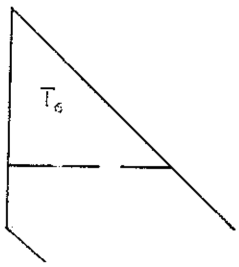


Fig. 1

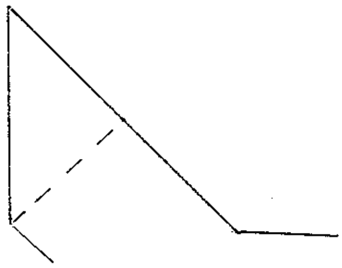


Fig. 2

Pour S_3, les élèves choisissent un des triangles mais ils essaient souvent de mettre l'angledroit dans l'angle du toit de la maison (Fig 1) ou ils essaient plusieurs angles aigus (Fig. 2)

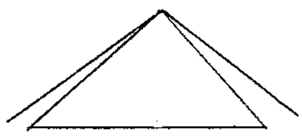


Fig. 1

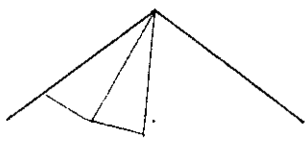


Fig. 2

ceci avec tous les triangles proposés avant de penser à utiliser les caractéristiques géométriques de la figure : soit la symétrie, soit séparer le toit du reste de la maison. Pour S_5 le problème est à peu près le même mais plus facile : la position correcte de T_5 se repère plus facilement.

Bilan

Le bilan collectif permet de récapituler tous les pavages possibles ; il est l'occas ion d'introduire les mots "mesure de l'aire avec l'unité..." et d'expliciter des relations entre les différentes unités d'aires proposées (mais pas toutes), et les différentes mesures des aires des surfaces selon l'unité choisie :

$r_6 = 2\ c_3 = 2\ t_6 = 4\ t_3$

$C_3 = t_6 = 2\ t_3$, $r_4 = 2\ t_5$ etc..... et leurs inverses.

.../...

$A_1 = 8\ r_6 = 16\ c_3 = 32\ t_3 = 16\ t_6$

$A_2 = 13\ r_4 = 26\ t_5$

$A_3 = 32\ t_5 = 16\ r_4$

$A_4 = 20\ t_6 = 40\ t_3 = 20\ c_3 = 10\ r_6$

$A_5 = 30\ t_5 = 15\ r_4$

Dans une classe observée, les élèves ont proposé de consigner les résultats dans un tableau à partir du moment où les relations écrites ont été trop nombreuses pour s'y retrouver facilement : quand un élève proposait une relation, il était difficile de savoir si elle était nouvelle. L'organisation en tableau a répondu à ce moment là à un souci d'économie et de plus grande efficacité.

Ce tableau est intéressant parce qu'il rend commode l'utilisation des relations entre unités d'aire pour exprimer des mesures indépendamment du pavage. Il met en évidence les couples d'unités d'aire entre lesquels on a des relations et ceux entre lesquels on n'a pas encore de relation.

Toute aire mesurée avec une unité u peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec U. cette diversité des expressions d'une même aire sera très utile quand il faudra comparer plusieurs aires. La situation idéale est de pouvoir exprimer toutes les aires en fonction d'une même unité et donc de ramener la comparaison des aires à la comparaison des nombres. C'est ce qui se produira ici, si on remplit le tableau ; l'unité commune choisie pourra aussi être une unité qui n'est pas dans le tableau (vois séquences ultérieures : § 3 - 4 - 5)

Pour que ce tableau remplisse effectivement son rôle, il faut qu'il garde son sens de résumé d'information et que toute relation écrite puisse au besoin se traduire en termes de surfaces.

Dans une classe où ce tableau est apparu trop tôt, un petit nombre de relations ont été utilisées, les autres n'ont été qu'un jeu d'écritures qui n'a pas permis d'enrichir les relations entre aires de surfaces.

.../...

Modalité pratique

Pour éviter les erreurs de lecture, il y a intérêt à écrire les relations complètement dans les cases comme ci-dessous :

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5
r_6	$r_6 = r_6$	$r_6 = 2c_3$	$r_6 = 2t_6$	$r_6 = 4t_3$		
c_3	$c_3 = \frac{1}{2} r_6$	$c_3 = c_3$	$c_3 = t_6$	$c_3 = 2t_3$		
t_6	$t_6 = \frac{1}{2} r_6$	$t_6 = c_3$	$t_6 = t_6$	$t_6 = 2t_3$		
t_3	$t_3 = \frac{1}{4} r_6$	$t_3 = \frac{1}{2} c_3$	$t_3 = \frac{1}{2} t_6$	$t_3 = t_3$		
r_4					$r_4 = r_4$	$r_4 = 2t_5$
t_5					$t_5 = \frac{1}{2} r_4$	$t_5 = t_5$

3) Comparaison des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

Objectifs :

. Utilisation de mesures pour comparer des aires, plus précisement utilisation des pavages faits à la séquence précédente et des relations obtenues au bilan pour comparer certaines des aires.

. Nécessité de choisir une unité commune permettant de mesurer toutes les aires pour achever la comparaison.

Consigne

Ordonner les aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 de la plus petite à la plus grande.

On ne dispose plus de surfaces mais seulement des carrelages et des mesures des aires déjà trouvées.

Analyse de la tâche.

Le bilan effectué au cours de la séquence précédente a donné diverses expressions des aires :

$A_1 = 8\ r_6 = 16\ c_3 = 32\ t_3 = 16\ t_6$

$A_2 = 13\ r_4 = 26\ t_5$

$A_3 = 32\ t_5 = 16\ r_4$

$A_4 = 20\ t_6 = 40\ t_3 = 20\ c_3 = 10\ r_6$

$A_5 = 30\ t_5 = 15\ r_4$

En rapprochant ces résultats, on a facilement $A_1 < A_4$ d'une part et $A_2 < A_5 < A_3$ d'autre part.
De plus $A_3 = 32\ t_5$ et $A_1 = 32\ t_3$, mais $t_3 < t_5$ donc $A_1 < A_3$.

Mais pour les autres résultats, il faudrait mesurer toutes les aires avec la même unité ou revenir à des comparaisons directes, éventuellement après modification des surfaces conservant l'aire. On a bloqué cette procédure en ne donnant pas les surfaces. La seule issue est alors la recherche d'une unité commune permettant de mesurer toutes les aires.

. Si les élèves ont repéré que $c_3 = \frac{3}{4} r_4$ ou que $r_6 = (1 + \frac{1}{2}) r_4$ (qui sont les relations fractionnaires les plus faciles à repérer) et ont assez de pratique du calcul sur les fractions simples et la substitution, ils peuvent très bien choisir r_4 par exemple comme unité commune et exprimer toutes les aires en r_4. Cela ne sera pas possible sans ces prérequis.

. Il se peut cependant que des élèves établissent la relation $2\ r_6 = 3\ r_4$ par exemple par juxtaposition des rectangles. Ils peuvent alors par substitution comparer toutes les aires.
Par cette méthode certaines substitutions sont plus faciles que d'autres.

. D'autre part, à la séquence précédente, les élèves ont exprimé les mesures des aires avec plusieurs unités (en particulier r_6, c_3, r_4) . Pour répondre à la question, il suffit de trouver un carrelage qui pave à la fois C_3 et R_4, ou R_6 et R_4. Ce carrelage peut être le rectangle R de dimensions 1 cm et 3 cm, le carré de côté 1 cm ou le rectangle R' de dimensions 2 cm et 3 cm ; on note respectivement leurs aires r, c, r'. Il faudra alors utiliser des substitutions pour exprimer toutes les aires en fonction d'une même unité.

Nous avons $c_3 = 3r = 9c$

$r_4 = 4r = 12c = 2r'$

$r_6 = 6r = 18c = 3r'$

donc $A_1 = 16\ c_3 = 48r = 144c = 8r_6 = 24r'$

$A_2 = 13r_4 = 52r = 156c = 26r'$

$A_3 = 32t_5 = 16r_4 = 64r = 192c = 32r'$

$A_4 = 20t_6 = 20c_3 = 10r_6 = 60r = 180c = 30r'$

$A_5 = 30t_5 = 15r_4 = 60r = 180c = 30r'$

Nous avons donc :

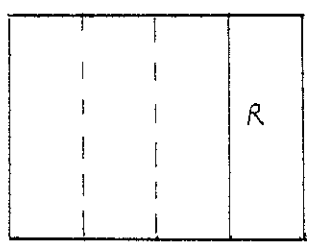
$A_1 < A_2 < A_4 = A_5 < A_3$

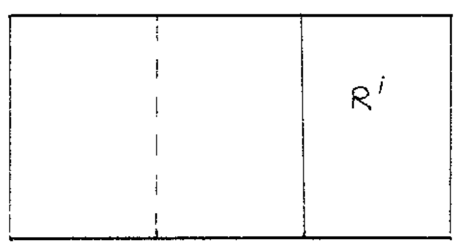
<u>Un bilan</u> est nécessaire pour faire le point à chaque étape et pour :

- ramener la comparaison des aires à la recherche d'une unité qui permette de les mesurer toutes facilement.
- ramener la recherche d'une unité commune à celle d'un carrelage permettant de paver à la fois C_3 et R_4 par exemple.
- établir l'ordre demandé.

<u>Remarques</u> :

. Dans la classe observée, les 3 unités r, r' et c ont été utilisées. Les équipes qui ont utilisé r ou r' l'ont fait , en nommant le bout qui dépasse après superposition de R_4 et C_3 (ou R_4 et R_6). Ce nouveau rectangle a été reporté sur R_4 et C_3 (ou R_4 et R_6)





Ces manipulations ont d'ailleurs débouché sur la découverte des relations entre r_4 et c_3 d'une part, r_4 et r_6 d'autre part, (voir § 4).

. Si les élèves n'ont pas choisi c comme unité commune pour effectuer la comparaison, on pourra, à titre d'exercice, leur demander de trouver la mesure de toutes les aires en prenant c comme unité. Cela nous sera utile par la suite quand nous utiliserons les quadrillages à maille carrée pour encadrer les aires de figures quelconques. On pourra alors comparer ces encadrements aux aires mesurées en c.

4) Mesure d'une aire donnée dans une unité donnée.

Objectif : . Augmenter le stock des aires mesurables avec une unité donnée.

. Se familiariser avec le calcul sur les petites fractions à l'occasion des mesures d'aires comme on l'avait fait pour les mesures de longueurs.

Consigne : . Exprimer chacune des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 à l'aide de toutes les unités (r_6, c_3, t_6, t_3, r_4, t_5, c) les élèves disposent des mesures déjà trouvées, des carrelages, de papier quadrillé et de papier blanc.

Analyse de la tâche :

La tâche consiste à mesurer chacune des aires dans diverses unités. Certaines mesures ont déjà été calculées. Il faut trouver un moyen efficace de repérer celles qui manquent et ensuite de les calculer. Les outils nécessaires sont la substitution et le calcul sur des petites fractions (multiplication ou division d'une fraction par un entier).

Une manière de s'organiser est de noter les informations connues dans un tableau de la forme :

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5	c
A_1	$8r_6$	$16c_3$	$16t_6$	$32t_3$			144 c
A_2					$13r_4$	$26t_5$	156c
A_3					$16r_4$	$32t_5$	192c
A_4	$10r_6$	$20c_3$	$20t_6$	$40t_3$			180c
A_5					$15r_4$	$30t_5$	180c

Les cases vides indiquent les relations à chercher.
Répondre à la consigne, c'est compléter le tableau.

- Pour mesurer A_1 en r_4 on peut utiliser :
  . soit la relation $3\ r_4 = 2\ r_6$, alors $A_1 = 8r_6 = 4\ X(2r_6) = 4\ X(3r_4) = 12\ r_4$
  . soit la relation $c_3 = \frac{3}{4} r_4$, alors $A_1 = 16c_3 = 16\ X(\frac{3}{4} r_4) = \frac{48}{4} r_4 = 12r_4$
  . soit la relation $r_4 = 12c$, alors $A_1 = 144\ c = 12\ X(12c) = 12r_4$.

S'il est facile de repérer que $8 = 4 \times 2$ sans avoir recours à une division, l'utilisation de "$r_4 = 12c$" exige de chercher un nombre x tel que $12\ X\ x = 144$, et donc de recourir à la division.

- les mesures de A_1 en t_5 se déduiront de celles de r_4 en utilisant la relation $r_4 = 2\ t_5$. Les mesures en t_5 sont obtenues en multipliant par 2 les mesures en r_4. Cette procédure est ancienne mais ce travail est l'occasion de rappeler que si la nouvelle unité est moitié de l'ancienne, la nouvelle mesure est double de l'ancienne.
- Pour mesurer A_2 en r_6, la relation $3r_4 = 2r_6$ n'est pas immédiatement utilisable car 13 n'est pas un multiple de 3.

La mesure de A_2 en r_6 n'est pas un nombre entier.
Un moyen est de recourir à $r' = \frac{1}{2} r_4 = \frac{1}{3} r_6$.
d'où $A_2 = 13 r_4 = 26 r' = 26 \times \frac{1}{3} r_6 = \frac{26}{3} r_6 = (8 + \frac{2}{3}) r_6$.

On peut aussi repérer que $r_4 = \frac{2}{3} r_6$ d'où
$A_2 = 13 r_4 = 13 \times (\frac{2}{3} r_6) = 26 \times (\frac{1}{3} r_6) = \frac{26}{3} r_6$

Une autre solution consiste à utiliser c (ou r)
$A_2 = 156$ c et $r_6 = 18$ c. On est conduit à chercher x tel que
$18 \times x = 156$.
La division donnerait : $156 = 18 \times 8 + 12$.
On se ramène à chercher un nombre a tel que $18 \times a = 12$. On y arrive en se servant du fait que $\frac{1}{18}$ est le nombre y tel que $18 \times y = 1$ et que $a = 12 \times y$, donc $a = \frac{12}{18}$ et $x = 8 + \frac{12}{18}$.
Ce raisonnement est possible pour résoudre directement $18 \times x = 156$:
$x = 156 \times y$, donc $x = \frac{156}{18} = 8 + \frac{12}{18}$

Cependant 156 et 12 n'ont pas le même ordre de grandeur : il n'est pas sûr que ce qui peut se faire avec 12 puisse immédiatement s'étendre à 156.

Il reste à voir que $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{156}{18} = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$

On peut prévoir que cette dernière procédure (utilisation de c) a peu de chances d'aboutir à un résultat exact, mais elle peut aboutir à un encadrement (entre 8 et 9).
Les mesures de A_2 en c_3, t_6, t_3 se déduisent par multiplication par 2 ou 4 de celles en r_6.

Pour A_3, le problème est le même que pour A_2 puisque 16 n'est pas un multiple de 3.
Pour A_4 et A_5, il suffit de se servir du fait que $A_4 = A_5$.
D'ailleurs, il est facile de voir que $10 = 2 \times 5$, donc $A_4 = 10\ r_6 = 15\ r_4$. De même pour A_5, 15 est un multiple de 3, donc $15\ r_4 = 5 \times (3 r_4) = 5 \times (2 r_6) = 10 r_6$.

.../...

Bilan :

Le bilan permet d'expliciter les différentes méthodes utilisées et de contrôler les calculs, chaque méthode servant de contrôle à l'autre. Il permet aussi de compléter le tableau :

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5	c
A_1	$8\ r_6$	$16\ c_3$	$16\ t_6$	$32\ t_3$	$12\ r_4$	$24\ t_5$	$144c$
A_2	$(8+\frac{2}{3})r_6$	$(17+\frac{1}{3})c_3$	$(17+\frac{1}{3})t_6$	$(34+\frac{2}{3})t_3$	$13\ r_4$	$26\ t_5$	$156c$
A_3	$(10+\frac{2}{3})r_6$	$(21+\frac{1}{3})c_3$	$(21+\frac{1}{3})t_6$	$(42+\frac{2}{3})t_3$	$16\ r_4$	$32\ t_5$	$192c$
A_4	$10\ r_6$	$20\ c_3$	$20\ t_6$	$40\ t_3$	$15\ r_4$	$30\ t_5$	$180c$
A_5	$10\ r_6$	$20\ c_3$	$20\ t_6$	$40\ t_3$	$15\ r_4$	$30\ t_5$	$180c$

On doit trouver le même ordre sur les aires, quelle que soit l'unité utilisée pour les mesurer, donc, dans chaque colonne, le même ordre sur les nombres de la colonne.

5) Recherche de toutes les relations entre les aires des carrelages

Objectif : Calcul sur les fractions.

Si les enfants ont proposé un tableau pour consigner tous les rapports entre aires des carrelages, il reste dans ce tableau des blancs que l'on a envie de combler. Si l'on veut exprimer la mesure de toutes les aires $A_1 \ldots . A_5$, avec toutes les unités proposées, il sera nécessaire de compléter ce tableau.

Remarque :

Si l'occasion ne s'est présentée, une autre situation pour aborder les fractions d'aires est proposée au chapitre suivant.

Consigne :

Compléter le tableau des relations entre aires et carrelages. Les élèves disposent du tableau incomplet, des carrelages, de papier blanc et de papier quadrillé.

Analyse de la tâche :

Il reste les lignes et colonnes de r_4 et t_5 en fonction de r_6, c_3, t_6, t_3.
Si l'on a rempli les cases relatives à r_4, pour celles relatives à t_5, il faudra doubler dans un cas (colonne) et diviser par 2 dans l'autre (ligne).
On a déjà utilisé, pour répondre à la consigne précédente, les relations suivantes :
$r_6 = \frac{3}{2} r_4$ ou $c_3 = \frac{3}{4} r_4$ et $r_4 = \frac{2}{3} r_6$.

Les autres s'obtiennent par substitution et proportionnalité (double et moitié) sur des fractions.
Par exemple de $c_3 = \frac{3}{4} r_4$ et
$t_3 = \frac{1}{2} c_3$, on peut déduire que $t_3 = \frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} r_4 = \frac{3}{8} r_4$ car $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ et $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$.
Pour le moment, ce n'est pas un produit de fractions.
$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ est la solution de $2 \times x = \frac{3}{4}$

donc $x = \frac{3}{4} : 2$ $\qquad \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$

Nous étendrons le produit des 2 nombres entiers aux fractions dans le cadre du calcul d'aires de rectangles.
Pour finir de remplir le tableau, on va faire fonctionner à nouveau la substitution, la proportionnalité (doubles et moitiés) et le résultat :
"si la nouvelle unité est moitié de l'ancienne la mesure est double de l'ancienne (et réciproquement)".

En effet $r_4 = 2\ t_5$, $t_5 = \frac{1}{2}\ r_4$, $r_6 = 2\ c_3$, $c_3 = \frac{1}{2}\ r_6$
$c_3 = 2\ t_3$, $t_3 = \frac{1}{2}\ c_3$.

Bilan :

On arrive au tableau suivant

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5
r_6	$r_6 = r_6$	$r_6 = 2c_3$	$r_6 = 2t_6$	$r_6 = 4t_3$	$r_6 = \frac{3}{2}\ r_4$	$r_6 = 3t_5$
c_3	$c_3 = \frac{1}{2}r_6$	$c_3 = c_3$	$c_3 = t_6$	$c_3 = 2t_3$	$c_3 = \frac{3}{4}\ r_4$	$c_3 = \frac{3}{2}\ t_5$
t_6	$t_6 = \frac{1}{2}r_6$	$t_6 = c_3$	$t_6 = t_6$	$t_6 = 2t_3$	$t_6 = \frac{3}{4}\ r_4$	$t_6 = \frac{3}{2}\ t_5$
t_3	$t_3 = \frac{1}{4}r_6$	$t_3 = \frac{1}{2}c_3$	$t_3 = \frac{1}{2}\ t_6$	$t_3 = t_3$	$t_3 = \frac{3}{8}\ r_4$	$t_3 = \frac{3}{4}\ t_5$
r_4	$r_4 = \frac{2}{3}r_6$	$r_4 = \frac{4}{3}c_3$	$r_4 = \frac{4}{3}t_6$	$r_4 = \frac{8}{3}\ t_3$	$r_4 = r_4$	$r_4 = 2\ t_5$
t_5	$t_5 = \frac{1}{3}r_6$	$t_5 = \frac{2}{3}c_3$	$t_5 = \frac{2}{3}\ t_6$	$t_5 = \frac{4}{3}\ t_3$	$t_5 = \frac{1}{2}\ r_4$	$t_5 = t_5$

Remarque :
Nous nous sommes référées à la proportionnalité dans la situation qui consiste à mesurer diverses aires dans une même unité :
si $A = n \times a$, alors $2 \times A = (2 \times n) \times a$ et $\frac{1}{2}\ A = \frac{1}{2}\ (na) = \frac{n}{2}\ a$
(passage d'une ligne à l'autre dans une même colonne).
Nous nous sommes référées à la substitution dans la situation où on mesure la même aire avec des unités différentes :
passage d'une colonne à l'autre dans une même ligne.

.../...

$A = n \times a$ $\qquad a = \frac{1}{2}\, b$ $\qquad A = n\,(\frac{1}{2} b) = \frac{n}{2}\, b$

$a = 2 \times b$ $\qquad A = n\,(2\,b) = 2\,n\,b.$

6) Mesure de l'aire de la surface S_6

Travail individuel.
Chaque élève dispose des mesures des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (travail des séquences précédentes) de la surface S_6 polycopiée sur papier blanc et de sa collection de carrelages.

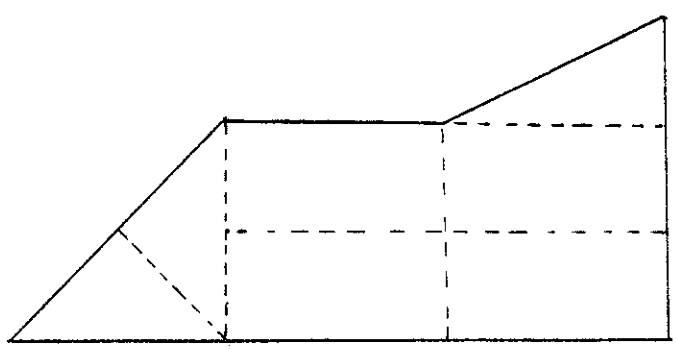
Consigne : Comparer l'aire A_6 aux autres aires.

Objectif :

Mesure d'une aire qui n'est pavable avec aucun des carrelages proposés : utilisation de l'additivité et de la substitution.

Analyse de la tâche :

Comme on ne dispose plus des autres surfaces, mais seulement des mesures de leurs aires, le problème est d'évaluer l'aire A_6. La comparaison s'en déduira immédiatement.
S_6 n'est pavable avec aucun des carrelages proposés : il est nécessaire d'utiliser un découpage de S_6, une partie de la surface peut être pavée, il reste un triangle qui ne peut pas l'être et qu'il faut évaluer en se servant des unités r_6 ou c_3.

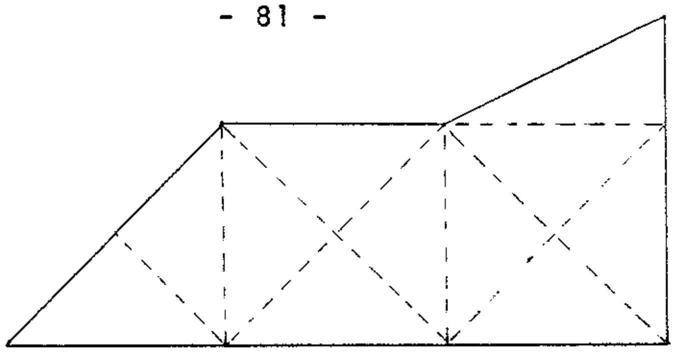


Par exemple :
$A_6 = 4\,r_6 + 2\,t_6 + \frac{1}{2}\,r_6 = (5+\frac{1}{2})\,r_6$

.../...

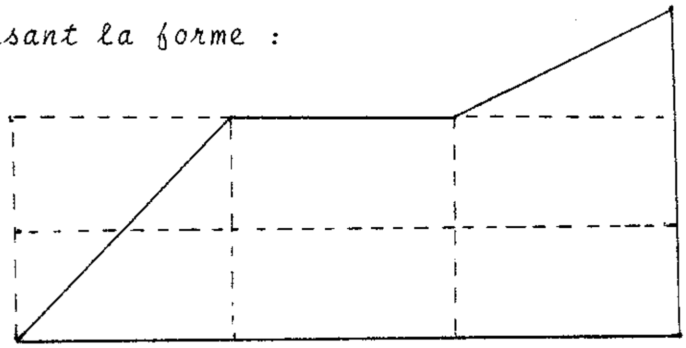
Ou encore

$$A_6 = 10\ t_6 + \frac{1}{2}\ r_6$$
$$= 11\ t_6$$
$$= (5 + \frac{1}{2})r_6$$



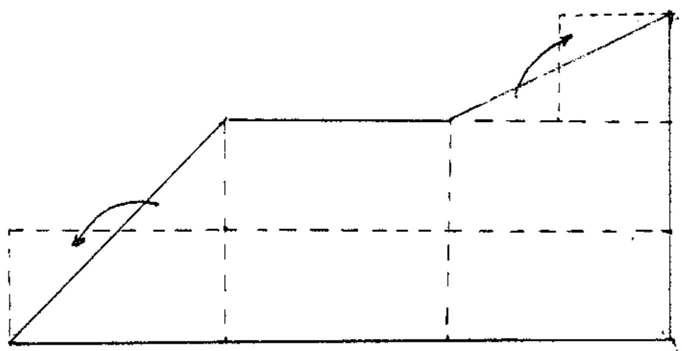
On peut aussi en régularisant la forme :

$$A_6 = 4\ r_6 + \frac{1}{2}\ r_6 + \frac{1}{2}(2r_6)$$
$$= (5 + \frac{1}{2})r_6$$



Ou encore :

$$A_6 = 5\ r_6 + c_3$$
$$11\ c_3 = (5 + \frac{1}{2})r_6.$$



<u>*Remarque sur le comportement des élèves*</u> :

Dans la classe observée, les élèves ont d'abord voulu paver et ont été très déçus de constater que R_4 ne pavait pas le triangle du haut. Le pavage avait donné de bons résultats pour les surfaces précédentes et ils pensaient que c'était cela que nous attendions. Il a fallu leur dire explicitement que le pavage n'était pas possible pour qu'ils cherchent autre chose.
Ils ont alors très vite trouvé toutes les méthodes exposées ci-dessus et encore d'autres variantes.

Bilan :

Pour mesurer une aire, on peut aussi la découper en plusieurs morceaux et mesurer chacun des morceaux dans une même unité et additionner les mesures. On peut aussi fabriquer une surface de même aire et plus facile à mesurer avec l'unité choisie.

Exercices :

Calculer la mesure de A_6 *avec chacune des unités utilisées dans ce chapitre* (r_6, c_3, t_6, t_3, r, c, r', r_4, t_5).
Le calcul en r', r_4 *et* t_5 *est plus difficile et oblige à utiliser le calcul sur les fractions* :

Par exemple : $r_6 = 3\ r'$ *donc*

$$A_6 = (5 + \frac{1}{2}) \times 3\ r' = (16 + \frac{1}{2})\ r'$$

$$c_3 = \frac{3}{4} r_4 \quad \text{donc } A_6 = 11 \times \frac{3}{4} r_4 = \frac{33}{4} r_4$$

$$r_4 = 2\ t_5 \text{ donc } A_6 = \frac{33}{4} \times 2\ t_5 = \frac{66}{4} t_5 = \frac{33}{2} t_5$$

VI CAS DU RECTANGLE : RELATION ENTRE MESURE DES COTES ET MESURE DE L' AIRE.

1) Aire du rectangle .

Objectifs : - désignation d'un rectangle par ses dimensions
- mesure de l'aire d'un rectangle avec un rectangle unité
- relation entre mesures des dimensions et de l'aire d'un rectangle avec des unités bien choisies (dans le cas où ces mesures sont entières).

restructuration de connaissances anciennes sur le comptage de carreaux à l'intérieur d'un rectangle en termes de mesure d'aire.

Organisation de la classe :

Les élèves travaillent par deux : émetteur , récepteur Chacun est à la fois émetteur d'un message et récepteur d'un message venant d'un autre camarade.

Ils disposent de papier blanc (non quadrillé) et de 3 ou 4 rectangles polycopiés (par exemple 2 cm sur 5 cm ; 3cm sur 4 cm ; 1 cm sur 2 cm).

Consigne : Chacun de vous choisit un de ces petits rectangles et dessine un autre rectangle pavable à l'aide du rectangle choisi. Il écrit ensuite un message sans dessin à un camarade pour que le récepteur puisse dessiner le même rectangle (i.e. superposable).Le récepteur pave à son tour le rectangle trouvé avec le carrelage de son choix. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs rectangles et le nombre de pièces utilisées pour paver.

Dans un 2° temps , on pose la question suivante : Etait-il possible de paver avec d'autres carreaux? Si oui lesquels ? Si non pourquoi ?

Analyse de la tâche :

a) émetteur : L' émetteur doit d'abord dessiner son rectangle . Pour qu'il soit pavable à l'aide du rectangle élémentaire choisi, le plus simple est de reporter un nombre entier de fois la longueur et un nombre entier de fois la largeur (ou encore de prendre des dimensions multiples de celles du rectangle élémentaire choisi).

Pour rédiger son message, l'émetteur doit décrire le rectangle qu'il a dessiné. Pour cela, il peut :

- soit donner ses dimensions en cm
- soit décrire la construction à partir du rectangle élémentaire choisi : nombre de reports de la longueur, nombre de reports de la largeur. Dans ce cas, il doit aussi décrire le rectangle élémentaire choisi. Comme on n'a pas droit aux dessins et qu'aucun codage n'a été établi, l'émetteur peut décrire le rectangle élémentaire choisi en donnant ses dimensions en cm ou en utilisant des périphrases : " le petit, le moyen, le grand " (désignation ambigüe en ce qui concerne les rectangles (2,5) et (3,4). Le codage par un couple est bien adapté.

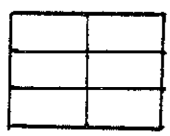
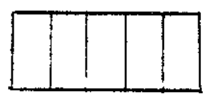
b) récepteur : Si le message est correct, la construction du rectangle ne doit pas poser de problèmes.

Si le message est descriptif de la construction (et correct) , le pavage choisi par l'émetteur se déduit de la construction. Le récepteur peut alors choisir le même pavage ; il doit alors utiliser le même nombre de pièces que l'émetteur. Il peut aussi chercher un autre pavage.

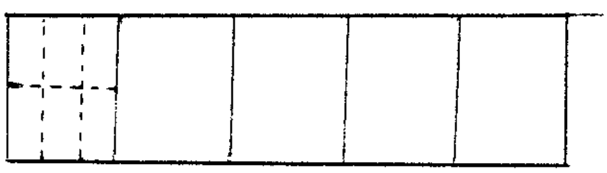
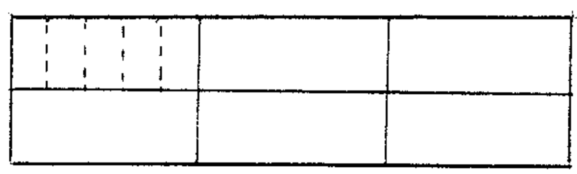
Si le message donne les dimensions du rectangle, le récepteur doit d'abord déterminer le (ou les) rectangle (s) élémentaire (s) qui permet(tent) de paver et réaliser le pavage ou prévoir le nombre de carreaux par le calcul.

Remarque : le rectangle (1,2) devrait toujours convenir avec les rectangles élémentaires choisis ici.

c) confrontation : Emetteur et récepteur doivent avoir des rectangles superposables. Mais le nombre de carreaux utilisés pour paver peut être différent. Ils doivent alors faire la relation entre les nombres trouvés et les carreaux utilisés. Par exemple, si l'émetteur a utilisé n carreaux (3,4) , le récepteur p carreaux (1,2) , on doit avoir $p = n \times 6$

Il se peut également que l'émetteur ait utilisé le carreau (3,4) et le récepteur le carreau (2,5) .
Par exemple pour le rectangle (4,15) , il faut 5 carreaux (3,4) ou 6 carreaux (2,5).

La vérification peut alors se faire en utilisant le carreau (1,2) : dans un rectangle (2,5), on met 5 rectangles (1,2), dans un rectangle (3,4), on met 6 rectangles (1,2) ; on trouve finalement le même nombre de carreaux (1,2).

De tels exemples peuvent faire l'objet d'exercices après le bilan.

Bilan collectif :

Il permet d'expliciter les points suivants :

- un rectangle est déterminé par ses dimensions.
- pour paver un grand rectangle avec un petit rectangle, il faut pouvoir reporter un nombre entier de fois l'une des dimensions du petit rectangle sur l'une des dimensions du grand rectangle , et reporter un nombre entier de fois l'autre dimension du petit rectangle sur l'autre dimension du grand.
- si on a un petit rectangle de dimensions u, v et un grand rectangle de dimensions a=nu , b=pv , l'aire du grand rectangle vaut n p fois l'aire du petit. Autrement dit, la mesure de l'aire du grand est n p quand on prend l'aire du petit comme unité d'aire.
- dans le cas particulier où u = v , si les dimensions du rectangle sont mesurées avec l'unité u, et si l'aire est mesurée en prenant comme unité l'aire du carré de côté u , la mesure de l'aire du rectangle est le produit des mesures des dimensions.

2) Variation de l'aire du rectangle en fonction de la variation des côtés.

Objectifs :

- situation de renforcement de la situation précédente
- prise en considération de la bidimensionnalité de l'aire : si un côté reste constant, l'aire est proportionnelle à l'autre côté ; si les 2 côtés varient, l'aire est proportionnelle séparément à chacun des côtés.

a) Consigne 1

Matériel : Papier quadrillé à maille rectangulaire (ou carrée). Appelons u et v les dimensions de la maille et r l'aire de la maille.

Organisation de la classe :

Les élèves sont par équipes de 2. Un des élèves E_1 dispose d'une bande de papier de largeur fixe (a = 7u par exemple) découpée dans le papier quadrillé; l'autre E_2 dispose d' un papier blanc et d'un crayon.

La largeur de la bande peut varier d'une équipe à l'autre.

Consigne : Jeu à deux :
E_1 choisit une longueur b de bande (donc mesurée en v). Il l'annonce à E_2 qui la note sur son papier et chacun évalue séparément l'aire du rectangle en prenant r pour unité et note son résultat. E_1 et E_2 comparent leurs résultats. S'ils sont d'accord, tous deux marquent 1 point ; sinon, ils comptent ensemble les carreaux sur le quadrillage : si l' un des deux avait le résultat, il marque 1 point. On échange ensuite les rôles. On joue au moins 5 coups chacun.
Les résultats sont consignés dans un tableau, par exemple:

a = 7u	b	A calculé par E_1	A calculé par E_2	A vérifié
	4v	28	28	28
	5v	33	35	35

Analyse de la tâche :

Pour prévoir la mesure de l'aire, E_2 doit multiplier le nombre annoncé par E_1 par la mesure fixe de la largeur de la bande. Il s'agit de faire fonctionner les résultats énoncés au bilan précédent. E_1 peut calculer comme E_2 mais il a l'avantage de pouvoir vérifier sur pièces.

Bilan :

Au cours du bilan, on explicite que l'aire est proportionnelle au côté variable : A = bx7 par exemple ; et on calcule l'aire de rectangles dont la longueur dépasserait celle de la bande de papier , par exemple b = 126v , b = 237v etc...

Remarque :

L'étude de la bidimensionnalité de l'aire est abordée de façon plus détaillée dans la brochure 62 "Nombres décimaux" pages 106 à 120. (Cf. ci-contre la page 120 extraite de cette brochure).

b) Consigne 2

Objectif supplémentaire : approche de la division.

Organisation : travail individuel.

Matériel : Le maître dispose de bandes de papier quadrillé de largeur fixée, par exemple 8u (cf consigne a). La largeur de bande varie d'une équipe à l'autre : par exemple 5u, 3u, 7u, 12u .

Consigne : Le maître fixe une aire à atteindre , la même pour toute la classe , par exemple 32r, ou 104r, 150r, 256r, 300r, 416r, 517r.
L'élève doit commander une longueur de bande qui lui permette de découper une surface ayant l'aire demandée et en gâchant le moins possible de papier. Il évalue ensuite la chute de papier. On joue plusieurs fois en faisant varier l'aire demandée (comme ci-dessus).

Analyse de la tâche

Pour gâcher le moins de papier, il faut que la surface soit la plus proche possible d'un rectangle ayant une dimension égale à la dimension imposée. Pour déterminer la longueur d'un tel rectangle, il faut mettre en œuvre le résultat établi au bilan précédent : si un côté reste fixé à 8u parexemple, la mesure de l'aire en r sera 8 b , où b est la mesure en v de l'autre côté. Pour 150r par exemple, on cherche donc b tel que $8 \times b = 150$, ou au moins $8 \times b$ le plus près possible de 150 . Il reste alors à encadrer le nombre donné entre deux multiples de 8. Par exemple,

$$144 = 18 \times 8 < 150 < 19 \times 8 = 152$$

Il faut commander une longueur 19v , il reste 2r non utilisés.

Bilan : On établit la procédure d' encadrement du nombre entre deux multiples.
On compare les chutes suivant la largeur de bande utilisée, et ceci pour chaque aire donnée.

c) Consigne 3

Les élèves sont par équipes de 2.
E_1 dispose d'une bande de papier quadrillé de largeur fixée connue de E_2 . E_2 choisit une aire à atteindre A et l'écrit sur sa feuille, il commande à E_1 la longueur de bande nécessaire pour réaliser l'aire choisie en gâchant le moins possible de papier. E_1 , avant de livrer la commande, donne un encadrement x, y de l'aire choisie par E_2 . Si on a bien $x \leqslant A < y$, E_1 livre la longueur commandée. Sinon une discussion s' engage entre E_1 et E_2 jusqu'à accord et contrôle par la réalisation de la surface.

Bilan:

Pour une largeur donnée pu, on peut énumérer les restes possibles pour l'aire : 0,1r,2r, ... (p-1)r.

d) Consigne 4

Les élèves travaillent par équipes de 2.
Ils disposent de papier quadrillé et de 2 dés.
L'équipe dessine un rectangle R de dimensions (au,bv) sur le papier quadrillé et mesure l'aire A(R) en prenant comme unité l'aire r de la maille du quadrillage , autrement dit l'équipe compte le nombre de carreaux à l'intérieur du rectangle.
E_1 lance les dés , il obtient deux nombres n_1 et n_2 , et il doit prévoir le nombre de carreaux que contiendra le rectangle de dimensions $(n_1 x a).u$, $(n_2 x b).v$.
E_2 dessine le rectangle et vérifie la prévision de E_1 . Si la prévision est juste, E_1 marque 1 point.
On échange les rôles.
On joue 5 coups chacun.

Analyse de la tâche :

Pour faire sa prévision, E_1 peut
- soit calculer les nouvelles dimensions $(n_1 x a).u$ et $(n_2 x b).v$ et ensuite calculer la nouvelle aire en faisant le produit $(n_1 x a) x (n_2 x b)$
- soit multiplier l'ancienne aire par $n_1 x n_2$.

Il y a une multiplication de moins dans le 2° cas.
Il se peut que $n_1 = n_2 = n$, l'aire est alors multipliée par n^2.

Bilan : - l'aire d'un rectangle est proportionnelle à chacune des dimensions.
- si les dimensions d'un rectangle sont multipliées par un même nombre n, l'aire est multipliée par n^2.

VII UNITES LEGALES.

1°) Etude de l'aire 1 cm^2.

Les enfants ont déjà utilisé à plusieurs reprises le carreau de 1 cm de côté comme unité d'aire (cf V et VI). Il s'agit maintenant d'introduire la dénomination "centimètre carré" et la notation cm^2. Cette notation a un gros inconvénient pour les élèves : elle les incite à confondre unité d'aire et unité de longueur et à traiter par les longueurs un problème où il s'agit d'aires.

L'objectif de cette leçon est d'attacher le cm^2 à une aire et non à la figure carrée de 1cm de côté, et, donc, entre autres, à distinguer le cm^2 du cm : "1 centimètre carré" est souvent entendu par les enfants comme "un carré de 1 centimètre de côté" et dans cette logique, "½centimètre carré" est compris comme "un carré de ½ centimètre de côté" ; et cela ne contredit pas toujours , pour les élèves, le fait qu'il y ait 4x"½ centimètre carré" dans " 1 centimètre carré ".

Organisation : Elèves par équipes de 2.

Matériel : Papier quadrillé au ½ cm (papier à petits carreaux du commerce).

Consignes :

1. Colorier chacun 3 ou 4 surfaces différentes d'aire 1 cm^2 (dont au moins un triangle).
2. Partager l'une de ces surfaces en 2 pièces de même aire; partager une autre de ces surfaces en 4 pièces de même aire. Quelle est l'aire de chacune de ces pièces ?
3. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{2}$ cm^2 (dont au moins un triangle).
4. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{4}$ cm^2 (dont au moins un triangle).

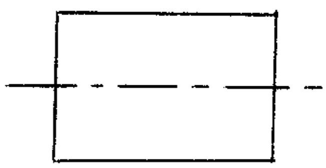
5. Colorier des surfaces différentes d'aire 12 cm^2 (dont au moins 3 rectangles).

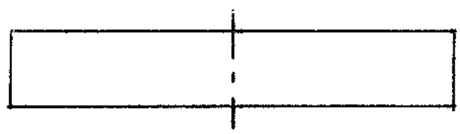
Analyse de la tâche :

Les élèves peuvent répondre à toutes les questions en comptant les carreaux du quadrillage, ou en coupant des carreaux en 2 (pour fabriquer des triangles). Pour la consigne 5, on peut attendre au moins tous les rectangles ayant pour dimensions un nombre entier de fois $\frac{1}{2}$ cm.

Bilan :

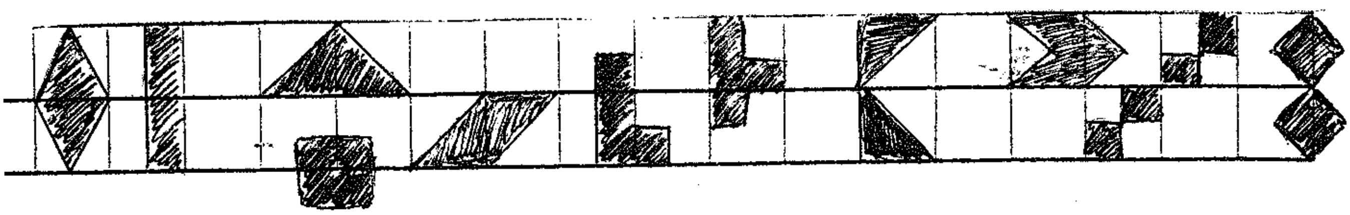
- on peut faire beaucoup de surfaces d'aire 1 cm^2
- une surface d'aire 1 cm^2 contient 2 surfaces d'aire $\frac{1}{2}$ cm^2 et quatre surfaces d'aire $\frac{1}{4}$ cm^2
- un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm a pour aire $\frac{1}{4}$ cm^2
- on peut fabriquer beaucoup de rectangles d'aire 12 cm^2 , avec par exemple le procédé de fabrication suivant : couper en deux, remettre au bout





Remarques sur le comportement des élèves:

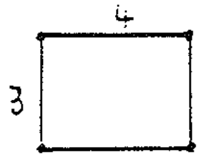
Dans une classe, en réponse à la 1° consigne, les élèves ont fourni des productions variées dont voici quelques exemples :

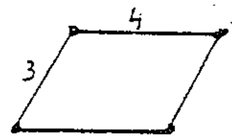


Par la suite , quelques élèves ont cependant interprêté "un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm " comme " $\frac{1}{2}$ centimètre carré". C'est pourquoi nous avons ici ajouté les consignes 2, 3, 4.

Une autre difficulté pour les élèves est de se persuader qu'un parallélogramme d'aire 1 cm^2 n'a pas tous les côtés de longueur 1 cm. C' est pourquoi nous proposons les consignes suivantes :

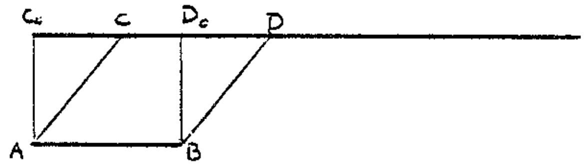
Consigne 6 :





On dispose d'un rectangle d'aire 12 cm^2 . Ce rectangle est articulé et peut se déformer en un parallélogramme ; les longueurs des côtés sont fixes .
Que devient le périmètre du rectangle dans cette déformation?
Que devient son aire ?
Est-il possible d'obtenir un parallélogramme d'aire plus petite que 8 cm^2, que 4 cm^2, que 1 cm^2 ? Dessiner les parallélogrammes correspondants .

Consigne 7 :



La barre AB a une longueur de 4 cm ; à une distance de 3 cm de AB , parallélement à AB, on place un rail sur lequel peut coulisser une barre CD de longueur 4 cm . On joint AC et BD par des élastiques .
En position de départ, ABC_oD_o forme un rectangle; son aire est 12 cm^2 ; son périmètre 14 cm.
A chaque position de la barre CD correspond un parallélogramme ABCD. Que devient le périmètre du rectangle , que devient l'aire ?

Bilan : Dans le premier cas, les longueurs des côtés ne varient pas, le périmètre non plus, en revanche l'aire diminue.
Dans le second cas, un côté reste de longueur fixe, l'autre côté voit sa longueur augmenter; le périmètre augmente mais l'aire reste fixe. Tant que C est entre C_o et D_o on s'en convainc en découpant un triangle à droite et en le reportant à gauche du parallélogramme (voir IV 5). Pour C au-delà de D_o , il faut faire un calcul algébrique (décomposition d'une même aire de 2 manières différentes : voir VIII).
A l'occasion du bilan, on peut aussi pointer les faits suivants

- un parallélogramme (losange) non carré dont tous les côtés mesurent 1 cm a une aire plus petite que 1 cm^2.
- un parallélogramme non rectangle dont un des côtés mesure 1 cm et l'aire 1 cm^2 a l'autre côté de longueur strictement supérieure à 1 cm.

2°) Correspondance entre les unités légales.

On utilise les propriétés établies au § VI dans le cas particulier où $n_1 = n_2 = 10$. Par exemple 1 m = 10 dm = 100 cm ;
soit un rectangle R de dimensions $l = a.(1\ m)$ $L = b.(1\ m)$, alors
$A(R) = (a \times b).(1\ m^2)$
$l = (10 \times a).(1\ dm)$, $L = (10 \times b).(1\ dm)$; $A(R) = (100 \times a \times b).(1\ dm^2)$
$l = (100 \times a).(1\ cm)$, $L = (100 \times b).(1 cm)$; $A(R) = (10000 \times a \times b).(1\ cm^2)$.

Le tableau de conversion intervient pour faciliter la présentation des correspondances.

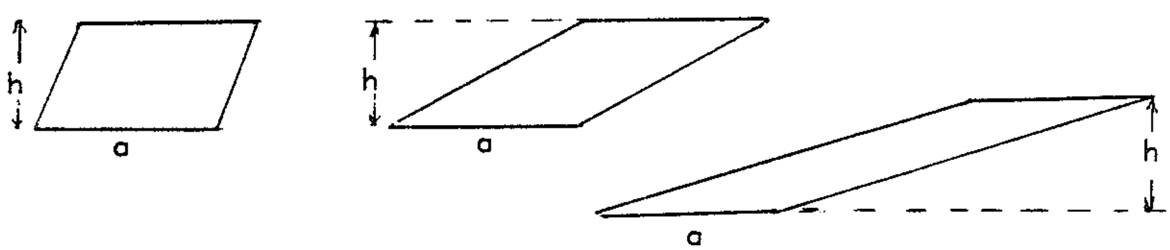
VIII SURFACES USUELLES.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les formules usuelles du calcul d'aire. Il s'agit d'une suite d'exercices en travail individuel ou par équipes de deux élèves.

1°Aire du parallélogramme.

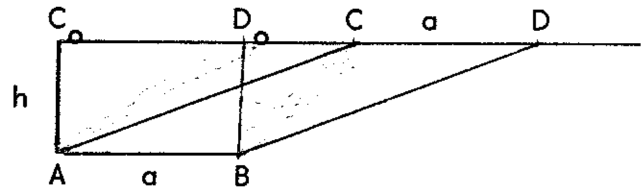
Consignes :

1) On donne un parallélogramme, on demande
   a) de dessiner un rectangle de même aire
   b) de calculer l'aire du parallélogramme.
2) Dessiner plusieurs parallélogrammes d'aire donnée.
3) Comparer les aires des parallélogrammes suivants :



Analyse de la tâche :

1) Utilisation de résultats déjà établis (voir IV 5 et VII)
2) Une possibilité est de dessiner plusieurs parallélogrammes dérivés du même rectangle.
3) Pour les deux premiers parallélogrammes donnés, on peut facilement reconstituer le rectangle; pour le troisième, on est obligé de repenser la démonstration et d'en trouver une qui sera valable dans tous les cas: décomposer une même aire astucieusement choisie de deux manières différentes :



aire du trapèze $ABDC_o$: $A(T)$

aire du triangle ACC_o : $A(t_1)$

aire du triangle BDD_o : $A(t_2)$

aire du rectangle ABD_oC_o : $A(R)$

aire du parallélogramme ABDC : $A(P)$

On a les relations :

$A(T) = A(t_1) + A(P) = A(R) + A(t_2)$

D'autre part, $A(t_1) = A(t_2)$ puisque les triangles t_1 et t_2 sont superposables , donc $A(P) = A(R)$

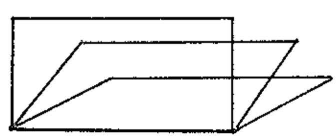
Remarque : Le fait de nommer les longueurs et les aires sur lesquelles on travaille est fondamental dans tout ce paragraphe.

Conclusion :

Soit un segment AB de longueur a et une droite Δ parallèle à AB à une distance h de AB, tous les parallélogrammes ayant pour sommets A, B et deux points de Δ ont même aire axh.

Exercices :

1. Calculer l'aire de différents parallélogrammes obtenus à partir d'un rectangle articulé (pour différentes valeurs de h) (voir VII 1)



2. On multiplie un côté d'un parallélogramme par un nombre n, que devient l'aire ?
3. On multiplie les deux côtés d'un parallélogramme par un même nombre n, que devient l'aire ?

2°) Aire du triangle

a) triangle rectangle.

Consigne : Etant donné un triangle rectangle ABC , construire un rectangle dont 3 des sommets sont A, B, C.

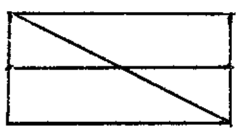
a) comparer l'aire du triangle et l'aire du rectangle; les calculer en cm^2.

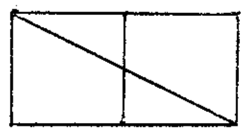
b) construire un rectangle de même aire que le triangle.

Analyse de la tâche et bilan

Si les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ont pour longueur a cm et b cm, l'aire du rectangle est axb cm^2,et donc l'aire du triangle est $\frac{1}{2}$(axb) cm^2.

Pour construire un rectangle de même aire que le triangle, on coupe le grand rectangle en deux rectangles de même aire.





b) autres triangles :

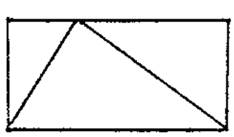
Consigne 1 :

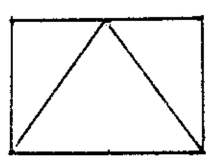
On donne deux triangles non rectangles dont un isocèle. Pour chacun 1. construire un rectangle dont un côté est un côté du triangle et dont un côté contient le 3° sommet du triangle.

2. comparer l'aire du triangle et l'aire du rectangle correspondant.
3. calculer les aires des triangles en cm^2.
4. construire des rectangles de même aire.

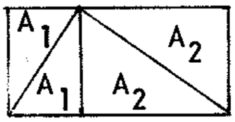
Analyse de la tâche :

La construction du rectangle ne devrait pas poser de problème.

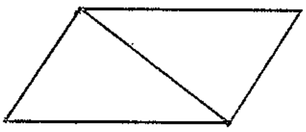




Pour le triangle isocèle, la symétrie permet de trouver la relation cherchée entre les aires.
Pour un triangle quelconque, il faut penser à dessiner la hauteur et à décomposer le triangle en 2 triangles rectangles. En cas de difficulté, on suggère de dessiner la hauteur et de s'intéresser aux aires des 2 triangles rectangles obtenus.



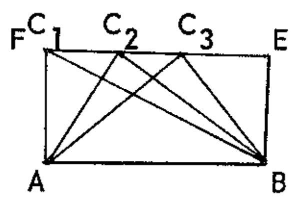
Une autre manière de procéder est de voir le triangle comme un demi parallélogramme. Le problème se ramène alors à la recherche de l'aire d'un parallélogramme, donc à l'aire d'un rectangle.



Consigne 2 :

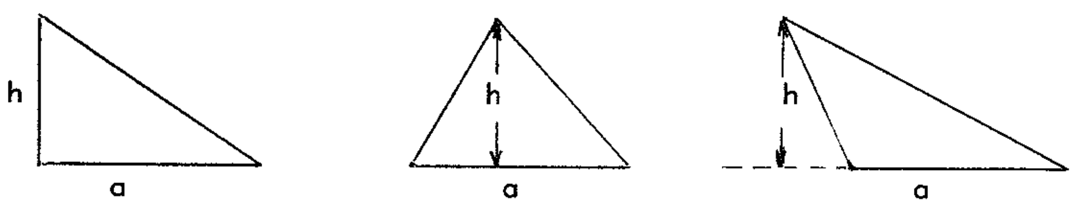
Dessiner 3 ou 4 triangles différents d'aire donnée (14 cm^2 par ex.)

Une manière de répondre est de dessiner un rectangle d'aire double (28 cm^2) et de choisir plusieurs triangles ayant un côté confondu avec un des côtés du rectangle et le troisième sommet sur le côté opposé du rectangle.



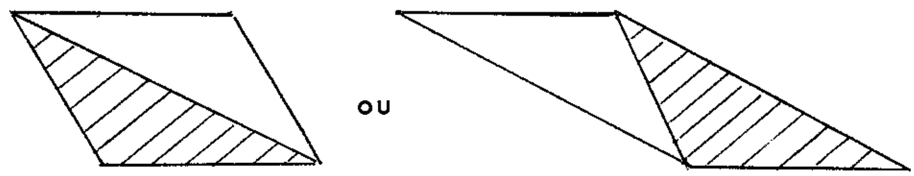
Si ce n'est pas la méthode retenue par les élèves, le maître la propose au bilan et l'institutionnalise : quelle que soit la position du point C sur le côté EF , le triangle ABC a même aire , la moitié de celle du rectangle.

Consigne 3 : Comparer les aires des triangles suivants :



Analyse de la tâche :

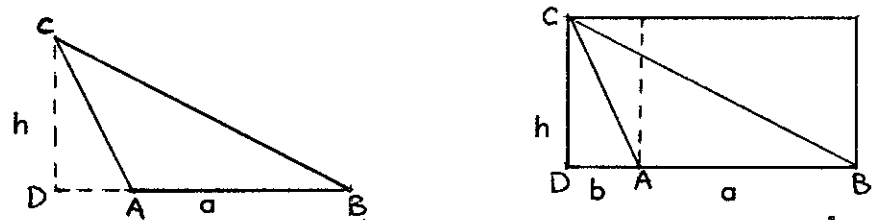
Les deux premiers triangles se ramènent à des demi rectangles. Pour le troisième triangle, on peut se ramener à un parallélogramme :



On peut aussi remarquer que l'aire du triangle ABC est la différence des aires des deux triangles rectangles BCD et ACD. Cette différence est donc la moitié de la différence entre les aires des rectangles correspondants :

$(a + b)xh - bxh = axh$

donc l'aire de ABC est bien la moitié de l'aire du rectangle de dimensions a et h.

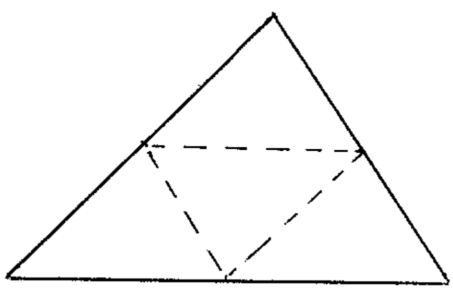


Les trois triangles donnés ont donc même aire: $\frac{1}{2}(axh)$.

Bilan : On établit la formule usuelle de calcul de l'aire d'un triangle, que la hauteur tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Exercice :

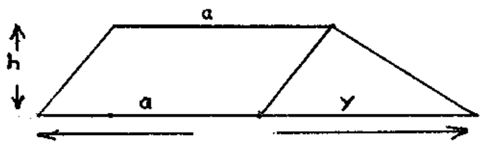
On multiplie les côtés d'un triangle par un même nombre n , que devient l'aire ?



3°) Aire du trapèze :

Pour calculer l'aire d'un trapèze, plusieurs procédures sont possibles.

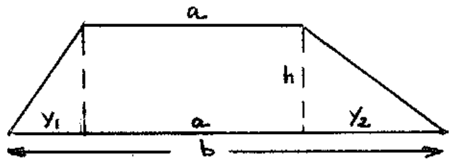
a) découper le trapèze en surfaces dont on sait calculer l'aire :



$b = a + y$

$A = (a \times h) + \left(\frac{y \times h}{2}\right) = (a \times h) + \left(\frac{(b-a) \times h}{2}\right)$

Un calcul algébrique permet de trouver $A = \frac{(a + b) \times h}{2}$

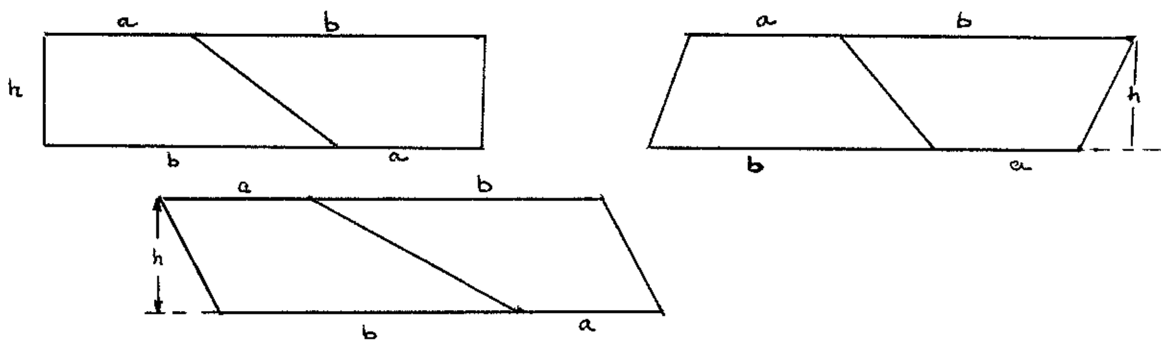


$b = a + y_1 + y_2$

$A = (a \times h) + \left(\frac{y_1 \times h}{2}\right) + \left(\frac{y_2 \times h}{2}\right)$

Uncalcul algébrique donne : $A = \frac{(a+b) \times h}{2}$

b) construire un parallélogramme d'aire double :

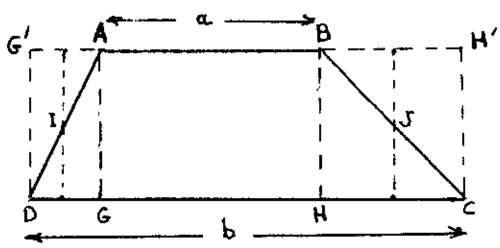


Dans le cas d'un trapèze rectangle, le parallélogramme d'aire double est un rectangle.

Dans tous les cas, l'aire du parallélogramme est $(a+b) \times h$, et l'aire du trapèze est

$$A = \frac{(a+b) \times h}{2}$$

c) construire un rectangle de même aire :



L'aire du trapèze est égale à la somme des aires du rectangle ABHG et des triangles AGD et BHC ou encore à la somme des aires du rectangle ABHG et des demi rectangles AG'DG et BH'CH, ou encore à l'aire du rectangle de dimensions h et IJ où I et J sont les milieux respectifs de AD et BC. En calculant l'aire par la méthode du b) on en déduit que IJ = $\frac{a+b}{2}$.

Suivant le trapèze, on choisira l'une ou l'autre des méthodes. Dans tous les cas, l'aire d'un trapèze de bases a, b et de hauteur h est $\frac{(a+b)xh}{2}$

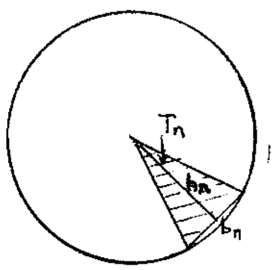
4°) Exercices.

1. Aire de polygones divers par triangulation : on peut toujours décomposer un polygone en triangles.

2. Quand on multiplie les côtés d'un polygone par un nombre n, que deviennent le périmètre et l'aire ?

5°) Aire du disque.

On peut encadrer le disque par des polygones inscrits et exinscrits à 2^n côtés. Pour n assez grand, l'aire du disque est proche de $2^n x A_{Tn}$ où A_{Tn} est l'aire d'un triangle au centre.



Pour ce triangle Tn, la hauteur hn est peu différente du rayon R du cercle et la base bn est peu différente de la longueur ln de l'arc de cercle correspondant.

A(Tn) = $\frac{hnxbn}{2}$ et ln = $\frac{L}{2^n}$ où L est la longueur du cercle.

A(Tn) est d'autant plus proche de $\frac{lnxR}{2} = \frac{LxR}{2^{n+1}}$ que n est grand;

donc l'aire du disque est d'autant plus proche de $2^n xA(Tn)$ que n est grand. Il reste à montrer que la limite est bien $\frac{R \times L}{2}$.

Si on a vu d'autre part que $L = 2\pi R$, on en déduit que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

Problème :

Si on multiplie le rayon d'un disque par un nombre entier n, que devient le périmètre ? Que devient l'aire ?

On se ramène à l'étude des périmètres et aires des polygones inscrits et exinscrits.

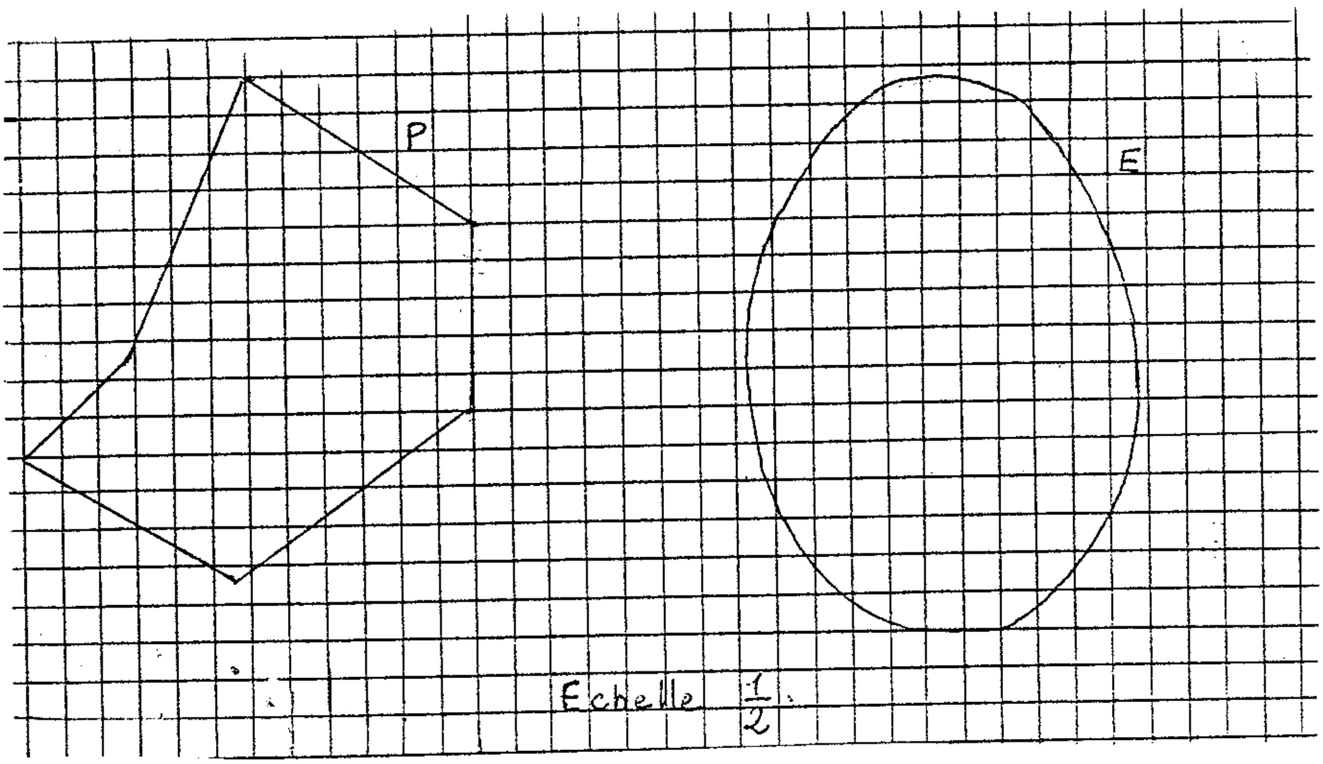
IX ENCADREMENTS.

Objectifs :

- Encadrement de la mesure dans le cas où on ne peut pas trouver de mesure exacte.
- Utilisation de cet encadrement pour comparer des aires.
- Affinement de l'encadrement - Mesure approchée.

Matériel :

Surfaces polycopiées sur papier quadrillé au cm : une surface polygonale, une surface à bords arrondi.



Consigne :

1. Donner une valeur en cm^2 aussi proche que possible de l'aire de la surface donnée. Comparer ces deux surfaces (pour l'aire).
2 Dans chaque cas dessiner un rectangle d'aire aussi proche que possible de l'aire donnée.

Analyse de la tâche :

a) Pour évaluer l'aire des surfaces

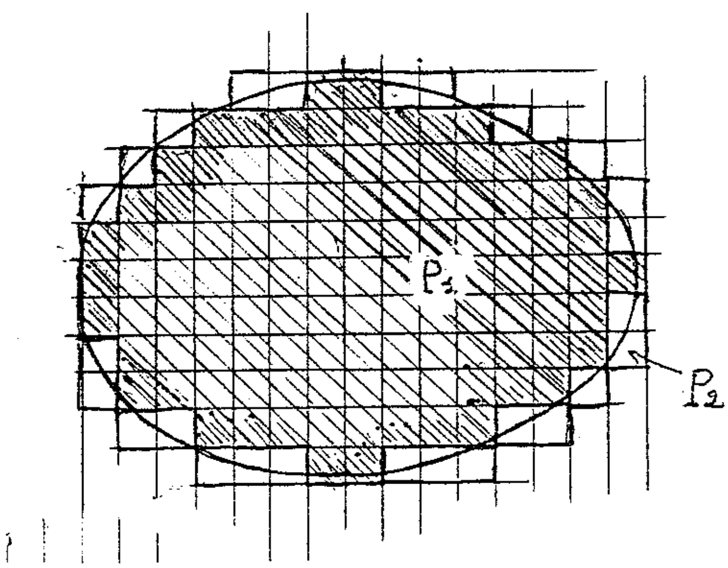
Pour la surface P , on peut

- soit décomposer en triangles et calculer l'aire de chaque triangle à partir de longueurs effectivement mesurées sur la figure.
- soit compter les carreaux et encadrer la mesure de l'aire.

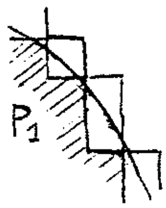
Pour la surface E , seule la deuxième solution est possible.

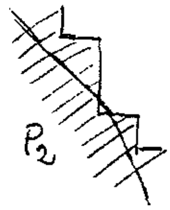
* Par la méthode de triangulation, les erreurs de mesure vont s'ajouter et l'incertitude sur le résultat peut être assez grande, ce qui va se traduire par des valeurs numériques différentes obtenues si plusieurs élèves évaluent P par cette méthode.

* Pour les évaluations par encadrements, la méthode consiste à inscrire un polygone P_1 pavable avec les carreaux du quadrillage dans la surface E (ou P), ce qui donnera pour le polygone une aire plus petite que celle de E, et à inscrire E dans un polygone P_2 dont l'aire sera plus grande que celle de E. L'encadrement de E (ou P) par des polygones sera d'autant meilleur que la différence des aires entre ces polygones est petite.



Même si, pour déterminer P_1 et P_2 on tient compte de certaines compensations légitimes (cf. exemples ci-dessous)





on n'obtiendra de toute façon qu'un encadrement de l'aire de E.

Pour améliorer l'encadrement et obtenir une valeur plus précise de l'aire de E, on affine le quadrillage, par exemple, en distribuant du papier millimétré transparent aux élèves. Sur ce papier, on peut dessiner deux polygones P'_1 et P'_2 suivant de plus près le contour de E.

b) pour construire un rectangle

Le problème revient à construire un rectangle dont l'aire est donnée en cm^2 ou en mm^2 : n'importe quel rectangle dont l'aire est comprise entre celles de P'_1 et P'_2 répond à la question.

CONCLUSION.

Reprenons les questions posées au début : Peut-on à toute surface associer une aire ? Un disque étant donné, peut-on trouver un carré de même aire ?

La réponse à ces questions passe par la mesure des surfaces avec une surface unité donnée s . On voudrait à chaque surface associer un nombre de manière à ramener les opérations et comparaisons à propos de surfaces à des opérations et comparaisons sur les nombres et chemin faisant sur les aires. On construit ainsi par étapes le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \text{Surfaces} \arrow[rr, "m_s"] \arrow[dr, "A"'] & & \text{Nombres} \\ & \text{Aires} \arrow[ur, "m_a"'] & \end{tikzcd}$$

A certaines surfaces (celles pavables avec s ou une fraction de s), on sait associer un nombre entier ou fractionnaire.
Cela définit m_s sur ces surfaces. On a des procédés pour étendre m_s à d'autres surfaces : Soit S une surface non pavable avec s

1- supposons qu'on puisse, par découpage et recollement convenable remplacer la surface S par une surface S' qu'on sait mesurer avec s. Les surfaces S et S' ont par définition même aire et on pose $m_s(S') = m_s(S)$.

   Notons A l'application qui à toute surface S associe son aire A(S) (i.e. la classe des surfaces obtenues à partir de S par découpage et recollement convenable). On peut à A(S) associer un nombre $m_a(A(S)) = m_s(S)$, où a est l'aire de s.

2- supposons qu'on puisse, par découpage et recollement convenable remplacer l'unité s par une unité s' de même aire a et qui pave la surface S. Alors, on pose

$$m_s(S) = m_a(A(S)) = m_{s'}(S) \ :$$

les applications m_s et $m_{s'}$ sont égales

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, mapsto, shift left, "m_s"] \arrow[rr, mapsto, shift right, "m_{s'}"'] \arrow[dr, "A"'] & & n \\
& A(S) \arrow[ur, mapsto, "m_a"'] &
\end{tikzcd}$$

Il reste cependant des surfaces pour lesquelles la procédure de découpage et recollement ne suffit pas, le disque par exemple. Pour une telle surface S on procède par encadrements de S par des surfaces pavables avec l'unité s ou une fraction de s.

Prenons pour simplifier le cas où S est un disque et s un carré. Soit Q_o un quadrillage dont la maille est s; soit (Q_n) une suite de quadrillages dont chacun est un raffinement du précédent. A chaque quadrillage Q_n correspondent deux polygones P'_n et P''_n dont les côtés suivent les lignes du quadrillage, et encadrant S le plus près possible. Soient $m_s(P'_n)$ et $m_s(P''_n)$ les mesures de P'_n et P''_n en s. Plus le quadrillage est fin, plus les mesures $m_s(P'_n)$ et $m_s(P''_n)$ sont proches . Il reste à montrer que les suites $m_s(P'_n)$ et $m_s(P''_n)$ sont convergentes vers une même limite qui par définition est $m_s(S)$. Pour cela, on a besoin de tous les nombres réels. (voir Analyse en terminale et en DEUG.)

TITRE :

Mesure des longueurs et des aires

AUTEUR (S) :

Douady Régine
Perrin Marie-Jeanne

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1983
ISBN : 2-86612-020-5