

NOMBRES A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Seconde édition modifiée

par M. ARTIGUE
F. COLMEZ
R. DOUADY
M-J. PERRIN
J. ROBINET

<u>NIVEAU</u>	Enseignement élémentaire
<u>PUBLIC</u>	Maîtres de l'école élémentaire
<u>SUJET</u>	La construction du nombre à l'école élémentaire
<u>OBJECTIF</u>	Présentation de situations didactiques

NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

S O M M A I R E

Introduction	p. 1
Une certaine approche du nombre à l'école élémentaire	p. 5
Jeu de cible*	p. 19
Soustraction*	p. 31
Multiplication*	p. 39
Découpage d'un carré en carrés	p. 77
Courses chronométrées	p. 99

* Ces articles figurent partiellement ou totalement dans la brochure "Aides pédagogiques pour le CE" rédigée par la COPIRELEM et éditée par l'APMEP (Elém. Math. V). Le "jeu de cible" est paru de plus dans la revue "Grand N" de décembre 1979/N°19.

INTRODUCTION

Cette brochure présente divers aspects de la construction des nombres par les jeunes élèves à travers certains moments de l'activité scolaire. Les textes rassemblés résultent des travaux de l'équipe de recherche sur l'enseignement élémentaire et en particulier des observations dans les classes de suites de séquences construites en vue d'un certain apprentissage.

Ils sont le témoignage d'une pratique didactique rapportée dans ses grandes lignes, avec dans certains cas davantage de détails et une analyse du déroulement.

Notre travail est fondé sur quelques idées exposées ci-dessous. Pour les mettre en oeuvre la difficulté consiste à imaginer des situations didactiques et à les décrire de façon à dégager les paramètres pertinents pour pouvoir les reproduire et les analyser.

Voici quelques idées importantes qui nous ont guidés :

- Pour les enfants, comme pour les adultes, les concepts se construisent à l'occasion d'actions. Ils prennent leur sens grâce aux problèmes qu'ils permettent de résoudre. Chaque nouveau problème sert de référence pour enrichir le concept.
- Un problème fait en général intervenir plusieurs concepts. Chacun prend aussi son sens dans les relations qu'il entretient avec les autres concepts impliqués dans le problème.
- Les notions mathématiques fournissent des moyens de décrire la situation et de faire des prévisions sur le résultat d'actions non encore effectuées. Ces prévisions pourront être contrôlées par l'action et éventuellement remises en cause. Pour faire ces

descriptions, ces prévisions et les communiquer ont est amené à construire un langage oral et écrit rendant compte des objets de la situation et des relations entre eux.

- Le même langage peut ensuite être utilisé dans d'autres situations si les relations qu'on y étudie sont de même nature ; il devient polysémique et peut alors fonctionner sur tout un ensemble de références sans qu'il soit besoin de préciser à chaque fois de laquelle il s'agit : il devient autonome. De plus la justification par les enfants de leurs affirmations au fur et à mesure que le langage s'enrichit se fait non plus par une référence à une situation donnée mais en utilisant d'autres énoncés précédemment validés.
- En ce qui concerne les nombres, et, pour commencer, les nombres naturels, leur appréhension par les élèves et leur construction se fait de manière différente selon leur taille. Pour chaque créneau ainsi repéré il faut trouver des situations de référence dans lesquelles les nouveaux problèmes ont un sens mais pour lesquels les anciennes méthodes sont inopérantes. Il s'agit ainsi de proposer aux élèves une suite d'activités présentant entre elles suffisamment de similitude pour que des questions qui se posent aient un sens et suffisamment de dissemblance pour que l'imagination de nouvelles procédures soit nécessaire.
- Chaque extension du domaine de nombres nécessite d'étudier :
 - + d'une part comment les procédés déjà connus s'appliquent aux nombres introduits (parmi ceux-ci figurent les systèmes de notation et les opérations qui sont partie constitutive du concept).
 - + d'autre part, comment les nouveaux procédés utilisés s'appliquent aux nombres déjà connus.

- Les distinctions nécessaires à certains moments entre signifiants et signifiés, écritures et nombres, par exemple, ne sont pas toujours possibles dans le feu de l'action, mais leur mise en évidence est un progrès considérable dans la construction du concept. Un bilan collectif peut en être l'occasion.
- Les notions de fonction, variable, inconnue, constante interviennent dans la construction des nombres par certains aspects (cf découpage d'un carré en carrés - courses). Il ne s'agit pas de notion de fonction en général. Il s'agit d'utiliser ces notions pour résoudre des problèmes numériques.

Les quelques articles sélectionnés ici ne rendent compte que d'une partie de nos travaux : en particulier l'article nombre brosse un tableau très rapide de la progression suivie. Des articles très détaillés ont été publiés sur ce sujet par l'I.R.E.M. de Bordeaux. Nous sommes conscients que beaucoup d'affirmations peuvent paraître insuffisamment étayées ou erronées et nous serions heureux que cette publication n'apparaisse pas comme une prétention à la vérité mais comme une invitation au dialogue.

Toutes remarques, critiques, interrogations, suggestions seront les bienvenues, les adresser à :

Equipe élémentaire
I.R.E.M.
Université PARIS VII
2 place Jussieu
75005 PARIS

L'observation dans les classes a été menée dans les Ecoles de l'ALMONT II à MELUN et de la rue de Bagneux à MONTRouGE. Que les maîtres de ces écoles soient ici remerciés pour leur active collaboration sans laquelle ce travail n'aurait pû se faire.

Michèle ARTIGUE
François COLMEZ
Régine DOUADY
Marie-Jeanne PERRIN
Jacqueline ROBINET

UNE CERTAINE APPROCHE DU NOMBRE A L'ECOLE ELEMENTAIRE.

Une des grandes tâches de l'école élémentaire est d'amener les enfants à élaborer le concept de nombre entier. Notre expérience nous a montré que le but n'est pas toujours atteint ; en premier lieu, les enfants restent souvent prisonniers de l'écriture usuelle en base dix, ils ne reconnaissent pas forcément comme nombres les écritures comportant des nombres et des signes opératoires et par conséquent ils ne savent pas profiter de la souplesse que confère l'existence d'écritures équivalentes pour résoudre leurs problèmes et faire leurs calculs. En deuxième lieu, ils utilisent mécaniquement les techniques opératoires qu'on leur a apprises et celles-ci leur masquent des propriétés importantes de la structure des nombres, dont la connaissance aiderait souvent l'enfant à ajuster son calcul au problème qui lui est posé.

Nous n'avons pas la prétention de connaître la recette qui permet d'éviter ces inconvénients, mais l'observation des classes nous a donné l'idée d'une progression pour la construction du nombre dont nous pensons qu'elle pourrait améliorer les choses. Notre propos n'est pas de décrire ici leçon par leçon la lettre de cette progression, mais plutôt d'essayer d'en dégager une certaine philosophie, en mettant l'accent sur les faits importants à nos yeux.

NIVEAU C.P.

Beaucoup d'enfants arrivant au C.P. ont déjà des connaissances sur les petits nombres. Certains affirment des choses du genre : "il y a autant de pions que de bouchons, il y en a quatre". Certains aussi connaissent le mot nombre au sens de résultat de l'utilisation de la comptine pour dénombrer une collection. Ce sont ces connaissances que l'on va pouvoir utiliser pour faire bâtir par l'enfant la notion de nombre.

La construction de cette notion va se faire progressivement en utilisant les compétences des enfants, puis en les plaçant dans des situations qui vont mettre en échec cette compétence, les obligeant à l'améliorer.

Au début du C.P. les enfants savent presque tous comparer des collections ne comportant pas plus de 5 ou 6 objets car ils en ont une vision globale. Certains peuvent même utiliser la comptine pour dénombrer des collections ayant une dizaine d'objets. Mais pour comparer des collections comprenant 15 à 30 objets, ils vont devoir trouver autre chose et généralement ils vont réussir à comparer les collections en faisant des correspondances d'objet à objet. Pour des collections encore plus importantes, ils vont devoir inventer d'autres moyens et généralement, ils vont commencer à grouper les objets en paquets puis à compter les paquets. Ce sera le début de la numération.

Parallèlement aux manipulations, il va falloir introduire un langage qui permettra de décrire les manipulations et de faire des prévisions.

Nous allons maintenant détailler de façon plus précise chacune des phases de la construction.

Première phase : autant que, plus que, moins que, le même nombre, le plus grand nombre, etc...

Dans cette phase, il s'agit moins d'introduire les expressions citées, déjà connues des enfants dans le cas de très petites collections, que d'élargir le domaine des nombres où ces phrases ont un sens. C'est à travers des collections variées par leur nombre et par les possibilités de manipulations qu'elles offrent que les enfants vont prolonger le domaine d'utilisation de autant que, plus que, etc...

Les collections peuvent être très diverses et comporter des nombres d'objets très différents (trente au grand maximum), par exemple : les enfants eux-mêmes, leurs signes, leurs habits, leurs porte-manteaux, des morceaux de carton, des cubes, des pions, des bouchons. Ces collections peuvent aussi être plus abstraites : gommettes collées sur un carton, lentilles collées sur les cases d'un quadrillage, dessins sur une feuille de papier etc...

Avec ces collections, on peut imaginer plusieurs types d'activités :

- . comparer entre elles 2 ou 3 collections
- . construire une collection ayant même nombre d'objets qu'une collection donnée.
- . construire une collection plus ou moins nombreuse qu'une collection donnée.

Remarque Beaucoup d'enfants connaissent déjà une partie de la comptine : un, deux, trois, quatre et certains la récitent correctement assez loin. Cependant, très peu sont sûrs d'eux au delà de dix et parmi ceux qui décomptent correctement plus loin que dix, bien peu savent utiliser le résultat de leur comptage.

Dans cette première phase la transitivité de la comparaison n'est en général pas acquise pour des collections importantes, même dans le cas de l'égalité (ce qui explique l'échec de la comptine même correctement utilisée). La manière, dont les enfants mettent en oeuvre cette transitivité, dépend beaucoup de la nature des objets et de la signification dans chaque situation de la mise en correspondance un à un; en particulier la transitivité apparaîtra assez tôt dans le cas de collections d'objets non déplaçables dans des collections bien différenciées et beaucoup plus tardivement dans le cas de la comparaison d'une partie d'une collection et de cette collection.

Deuxième phase : Classement des collections, introduction du nom et de l'écriture des petits nombres.

Les manipulations vont être faites avec des collections de faible encombrement qui ne peuvent être ni détruites, ni mélangées par inadvertance. Elles sont construites de telle sorte qu'on peut en distinguer facilement les différents éléments, par exemple : Cartons où l'on a collé des gommettes, cartons où l'on a dessiné des objets, morceaux de quadrillage où l'on a différencié chaque case soit par un rond de couleur, soit par une lentille collée, etc...

Lorsque la classe dispose d'un grand stock de telles collections, le maître fait le choix de 4 ou 5 nombres, et ils sélectionnent les collections comportant ces nombres d'objets (4, 2, 5 et 7 par exemple). Les enfants vont trier les collections et mettre dans une même boîte celles qui comportent le même nombre d'objets. Lorsque le tri est achevé, on nomme chaque boîte pour se rappeler ce qu'on a mis dedans. Par exemple, la boîte, enfermant les collections à quatre éléments, va s'appeler boîte quatre et porter le symbole 4. Cette activité se prolonge par la construction de nouvelles collections à ranger dans les boîtes que l'on vient de nommer.

Ensuite il convient de ranger les boîtes, pour cela on doit comparer des collections prises arbitrairement dans chacune d'elles, et constater que ce choix n'a pas d'influence sur le rangement.

On introduit le vocabulaire habituel sur les nombres : plus petit ou inférieur, plus grand ou supérieur et les signes correspondants < et >.

Une fois les boîtes rangées, les enfants vont construire de nouvelles collections qui se rangeront dans ces boîtes; puis on leur demandera d'en construire de nouvelles dont la boîte s'intercalera entre deux boîtes déjà rangées. Par exemple, s'ils ont rangé les boîtes 2, 4, 5 et 7, ils vont pouvoir fabriquer des collections ayant 3 ou 6 éléments qui se rangeront dans des boîtes intermédiaires. Ils prennent ainsi conscience qu'entre les boîtes 4 et 5, on ne peut pas intercaler de boîtes, pas plus qu'entre 2 et 3 ou 5 et 6. Pour construire une collection allant dans une boîte intercalée entre la boîte 5 et la boîte 7, ils vont mettre en oeuvre deux méthodes : enlever un élément d'une collection à 7 objets ou ajouter un élément à une collection à 5 objets.

Troisième phase : Construction de nouvelles collections par réunion.

Ecritures de nombres sous forme de sommes.

Tout d'abord, les enfants travaillent par équipes de deux, chaque enfant construit une collection (par exemple un enfant dessine 5 fleurs sur un carton, l'autre colle 7 cailloux sur un carton), puis ils réunissent ces deux collections en scotchant leurs cartons; ils doivent alors écrire un message pour qu'une autre équipe puisse réaliser une collection allant dans la même boîte que la leur, et une collection qui n'aille pas dans la même boîte. Les enfants inventent des messages du genre 5 et 7, ou $5 \sqcup 7$ en représentant le morceau de scotch.

Les nouvelles collections sont alors rangées dans les boîtes et si elles ne rentrent pas dans des boîtes déjà nommées, on introduit de nouvelles boîtes. Ces nouvelles boîtes vont devoir être nommées à leur tour, si par exemple des enfants ont construit une nouvelle collection à 17 éléments en réunissant une collection à 8 et une collection à 9 éléments, ils proposent 8 et 9 ou $8 \sqcup 9$ etc... Comme nouveau nom de la boîte car ils ne connaissent pas 17. Le maître propose alors la notation utilisée par les adultes : $8 + 9$, il écrit aussi 17 sur la boîte si un enfant le connaît. Dans l'écriture $8 + 9$, "+" symbolise l'action qui a permis de construire la nouvelle collection.

L'activité se prolonge par un regroupement des équipes : les enfants travaillent par quatre, chacun des enfants construit une collection, et les collections sont scotchées entre elles pour fabriquer une nouvelle collection.

Chaque équipe écrit alors un message pour qu'une autre équipe construise une autre collection ayant exactement le même nombre d'objets, et une autre ayant un nombre d'objets différent.

Cette activité permet de découvrir d'autres écritures des nombres. Ces nouvelles collections sont à leur tour rangées dans les boîtes et les nouvelles écritures sont écrites sur les boîtes. Cela conduit les enfants à dire des phrases telles que : "le nom de la boîte est $3 + 2 + 5 + 5$ ", "le nombre de gommettes jaunes est $3 + 5 + 5 + 2$ ", "le nombre de gommettes rouges est $7 + 7 + 1$ ", "il y a autant de gommettes jaunes que de gommettes rouges" et l'écriture des égalités :

$$3 + 5 + 5 + 2 = 3 + 2 + 5 + 5$$

$$3 + 2 + 5 + 5 = 7 + 7 + 1$$

ne pose aucun problème puisque $3 + 5 + 5 + 2$, $3 + 2 + 5 + 5$, $7 + 7 + 1$ sont les noms différents d'une boîte.

De nombreuses manipulations et vérifications permettent de constituer pour chaque boîte une liste de noms différents et d'obtenir de nombreuses égalités et inégalités (les boîtes sont toujours classées dès qu'elles sont introduites).

A ce stade là, la comparaison des nombres se fait en utilisant concurrentement différents moyens : constitution de collections comportant les nombres d'objets donnés puis comparaison des dites collections un par un ou par paquets, comparaison sur les écritures, utilisation d'égalités ou d'inégalités déjà répertoriées. Dans le cas où la comparaison se fait sur les écritures, les enfants doivent justifier leurs affirmations. On remarque alors l'utilisation d'équilibrage, par exemple : " $6 + 3 > 4 + 4$, parce que on en prend un de 6, on le met au 3 on a $5 + 4$ et 5 c'est plus grand que 4".

On peut prolonger ces activités en demandant aux enfants de résoudre des problèmes tels que $5 + x = 7$. Ils résolvent ce genre de problèmes, en fabriquant effectivement les collections, ou en utilisant des égalités déjà connues.

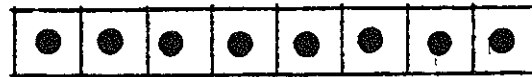
Remarque Les enfants ont du mal à donner un sens à $x + 5$, car ils ne peuvent imaginer d'ajouter quelque chose à une collection qu'ils ne connaissent pas. Ce qu'ils maîtrisent le mieux, ce sont les égalités de la forme $7 = 5 + x$ auxquelles ils accordent comme sens : "pour faire 7, j'en prends 5 puis je cherche combien il faut en rajouter".

Les différents moyens utilisés par les enfants pour comparer des nombres sur leurs écritures sont mêlés au cours d'une même séance, et chaque

enfant expose sa méthode; cela permet à certains de se rendre compte que le travail sur les écritures peut être fiable et qu'il est beaucoup moins fastidieux que les manipulations.

Complément aux trois premières phases

Parallèlement à la construction des boîtes, les enfants vont travailler sur l'aspect ordinal des nombres. Pour cela dans chaque boîte introduite et nommée il y a une collection qui est faite de lentilles collées sur les cases d'un quadrillage, par exemple dans la boîte 8

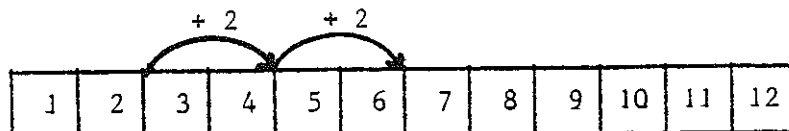


Les enfants se servent de ces collections pour graduer une grande bande de papier, en les posant sur la grande bande et en cochant l'endroit qu'elles atteignent. C'est un moyen de visualiser la suite des nombres. Elle est affichée au mur et elle permet aux enfants d'utiliser la comptine à coup sûr.

Au cours de la première phase, cette droite permet de favoriser l'utilisation de la transitivité dans certaines conditions : par exemple, ils ont une collection de cartons et ils doivent trouver s'il y en a plus ou moins que 17. Pour cela ils peuvent scotcher leurs cartons, chacun en dessous d'un nombre, d'une part cela leur permettra de résoudre leur problème, d'autre part ils pourront se rendre compte que quelque soit l'ordre dans lequel ils scotchent les cartons, ils arrivent toujours au même nombre.

Au cours de la deuxième phase, on peut leur demander de construire les bandes de quadrillage qui se mettent dans la boîte juste avant ou juste après une boîte donnée. Ils prennent alors conscience du fait que pour se déplacer d'un cran vers la droite on rajoute un carré et que pour se déplacer d'un cran vers la gauche, on enlève un carré.

Au cours de la troisième phase, on peut accrocher sous chaque nombre un carton sur lequel sont écrites quelques écritures équivalentes de ce nombre. On peut aussi jouer au jeu de l'oie, cela permet de relier l'addition translation



à l'addition réunion de collections. (Si on pose la bande

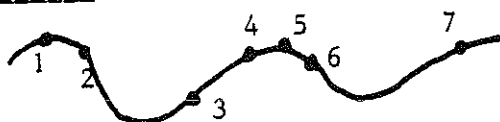


et la bande  bout à bout, on obtient la bande 6. De la même façon

si l'on est à la case 4 et si l'on avance de deux cases, on arrive à la case 6.

Arrivés à ce stade les enfants ressentent aussi le besoin d'avoir un signe qui signifie enlever. On peut alors introduire le signe, $5 - 2$ signifiant que l'on a enlevé 2 objets à une collection qui en comprenait 5. La bande graduée va permettre de relier ce signe - et la translation : Si on enlève 2 carreaux à la bande 6, on obtient la bande 4, et si l'on est à la case 6 et que l'on recule de deux cases, on arrive à la case 4.

Remarque Certains utilisent un "serpent des nombres", la bande graduée est



un serpent des nombres qui est en plus allongé sur une droite et régulièrement gradué, car nous voulons que les enfants

puissent utiliser leurs intuitions géométriques pour améliorer leur connaissance des nombres. (Par exemple, la conservation de la distance par translation est maîtrisée bien plus tôt par les enfants que la propriété $(a+c) - (b+c) = a-b$).

Quatrième phase : Comparaison de sommes, utilisation d'égalités ou d'inégalités dans des substitutions d'écritures.

Les enfants vont maintenant étudier deux choses : chercher différentes écritures d'un même nombre, chercher à reconnaître que des écritures désignent un même nombre. Par exemple, les enfants sont invités à chercher parmi une dizaine de cartons portant des écritures telles que $3+4$, $1+2+3$, $1+2+1+2$, $2+3+2$, $5+4$ etc ... tous les nombres égaux à $3+4$. La vérification du travail fait apparaître des validations telles que $3+4 = 2+3+2$ parce que $2+2 = 4$, parfois visualisé par des représentations :

$$\begin{array}{c} 2 + 3 + 2 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 3 + 4 \end{array}$$

$$\text{ou } \textcircled{2} + 3 + \textcircled{2} = 3 + 4 \text{ etc....}$$

En examinant les différentes écritures d'un nombre les enfants s'aperçoivent qu'elles sont plus ou moins longues; pour allonger ou raccourcir les écritures, ils sont obligés de mettre en oeuvre des règles de substitution: par exemple, on peut substituer $1 + 2$ à 3 ou 3 à $1 + 2$.

Les enfants peuvent aussi se servir de la règle graduée, comme d'un jeu de l'oie et trouver des règles de déplacement. Combien faut-il pour aller de la case 3 à la case 5?, de la case 9 à la case 6? etc....

C'est au cours de cette phase que les enfants vont s'apercevoir qu'il y a des résultats intéressants à mémoriser:

les $a + b$ avec $a + b \leq 10$, les doubles $2 + 2$, $6 + 6$, etc...., les compléments à 10 etc...

Cinquième phase : Vers la numération de position.

Les enfants travaillent par équipes de deux, chaque équipe reçoit deux collections dessinées sur des feuilles (par exemple 48 et 53 objets) et les enfants doivent comparer les deux collections. En général, les enfants essaient de toucher en même temps (ou de barrer, ou de cocher) un objet dans chaque collection, mais très vite ils se désynchronisent et ils sont perdus. Certains ont ensuite l'idée de faire des paquets (ou des trains en reliant un certain nombre d'objets), ensuite ils comparent le nombre de paquets (ou de trains). Une fois le travail fait, on échange les collections entre équipes, et chaque équipe vérifie le travail de l'autre. Si des équipes n'ont pas trouvé de stratégies ou seulement des stratégies farfelues, cela leur permet de découvrir le travail des autres : groupement par paquets réguliers.

Une autre activité intéressante est de partager les enfants en deux grands groupes, chaque groupe a une collection très nombreuse et chaque groupe doit envoyer un message à l'autre de façon que l'on puisse comparer les deux collections à l'aide des messages. Les premiers messages sont de la forme
 $5 + 6 + 7 + 8 + 3 + 7 + 6 + \text{---}$
 $6 + 7 + 7 + 7 + 4 + 3 + 5 + \text{---}$ et les enfants sont incapables de comparer. Au cours d'une discussion entre les enfants, il est probable qu'apparaisse la nécessité de faire des paquets réguliers car les enfants savent comparer

$$\begin{array}{c} 6 + 6 + \text{-----} + 6 + 4 \quad \text{et} \quad 6 + 6 + \text{-----} + 6 + 5 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{10} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_9 \end{array}$$

Au cours de ces activités, les enfants se rendent compte que pour que le groupement par paquets soit efficace, le nombre de paquets ne doit pas être trop grand, donc le nombre d'objets dans chaque paquet assez grand (mais pas trop pour pouvoir le trouver à coup sûr). En général la solution optimale choisie par les enfants se situe entre 5 et 8. Il y a tout intérêt à favoriser 5 s'il apparaît, on passe ensuite à $10 = 5 + 5$.

Très vite, les enfants trouvent fastidieux d'écrire $5+5+5+5+5+5+5+3$ et ils trouvent des écritures raccourcies du type $7 \text{ p } 5 + 3$ ou $7 \times 5 + 3$ etc...

A partir de ce moment là, il est très facile d'amener les enfants à écrire les nombres dans un tableau de numération :

paquets de 5	isolés
7	3

qui est une autre écriture raccourcie de $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3$, et quand ils en sont aux paquets de 10,

ils ont l'écriture habituelle en recopiant ce qui est écrit dans leur tableau s'il n'y a qu'un chiffre dans la colonne des isolés :

paquets de 10	isolés
5	4

que l'on écrit de manière encore plus condensée 54 et qui est équivalent à $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4$ et à $5 \text{ p } 10 + 4$.

Remarque 1 Des écritures du type $7 \text{ p } 10 + 3$ permettent aux enfants de manipuler des nombres supérieurs à 100 sans qu'il soit nécessaire d'introduire la centaine; en effet on peut arriver, par exemple, à $12 \text{ p } 10 + 3$ en utilisant la même convention que pour 73, $12 \text{ p } 10 + 3$ s'écrit 123. On peut dire alors que $10 \text{ p } 10$ qui s'écrit 100 s'appelle cent.

Remarque 2 Il ne nous semble pas utile de faire étudier exhaustivement des bases autres que la base 10. Nous avons pour cela plusieurs raisons :

- L'expérience nous a montré que les enfants ne transportent pas les propriétés et les techniques, découvertes dans les petites bases, dans la base 10. En effet, pour que les enfants puissent faire le transfert, il faudrait qu'ils soient conscients que ces propriétés et ces techniques sont indépendantes de la base, ce qui n'est pas simple. Cela impliquerait que les enfants savent manier des concepts dont on ne sait pas s'ils les ont construits ou non

- Certains maîtres ont constaté que des enfants avaient du mal à travailler dans les bases autres que 10. Il ne nous semble pas rentable de créer des problèmes à certains enfants pour un bénéfice qui nous paraît bien mince.

- L'étude de plusieurs bases entraîne une multitude de manipulations qui risquent de retarder la construction du concept de nombre qui va être remplacée par des manipulations et des écritures de manipulations.

- Il ne faut pas pour autant rejeter des écritures telles que $7 \text{ p } 5 + 3$ ou $12 \text{ p } 14 + 11$, qu'il ne faut pas considérer comme un travail en base 5 ou en base 14, mais comme un travail sur la multiplication en base 10.

Sixième phase

Elle se place en fin de C.P., lorsque beaucoup d'enfants commencent à abandonner les manipulations effectives de matériel pour n'utiliser que des représentations dessinées ou pour ne travailler que sur des écritures.

Les enfants vont être confrontés à des situations, à des problèmes qui vont les conduire à comparer, additionner et retrancher des nombres. Pour se faire, ils vont développer des techniques personnelles adaptées à chaque comparaison ou calcul. Pour favoriser les inventions de techniques artisanales, il peut être intéressant d'introduire les arbres de calcul, les programmes de calcul, les calculs parenthésés, de faire discuter sur la méthode de chacun en calcul mental, à propos de résultats justes ou faux, etc...

Il n'est pas nécessaire de faire expliciter aux enfants du C.P. des règles de comparaison des nombres sur leur écriture, ni une technique d'addition stéréotypée; en effet si on fait un apprentissage technique trop précoce, les enfants risquent de se réfugier dans des mécanismes de fonctionnement au lieu de réfléchir aux propriétés des nombres. En particulier, on pourra remarquer qu'un enfant, placé dans l'obligation de développer des techniques artisanales, mémorise plus tôt un répertoire intéressant, car au cours de ses calculs, il retrouve souvent les résultats de ce répertoire et le fait de les avoir mémorisés simplifie sa tâche.

A la fin du C.P., les enfants doivent avoir acquis quelques convictions sur les propriétés des nombres inférieurs à 100 et ils doivent pouvoir se débrouiller, par des techniques personnelles, pour les comparer et faire des calculs simples utilisant des additions et des soustractions.

NIVEAU C.E.

Nous pensons qu'une condition nécessaire préalable à l'agrandissement du domaine des nombres utilisés par les enfants est une bonne maîtrise des nombres inférieurs à 100. Avant de démarrer l'étude des nombres plus grands que 100, il convient donc de placer les enfants dans des situations qui leur permettront d'assurer leurs connaissances sur les "petits" nombres. Pour cela diverses activités sont possibles :

- Le compte est bon

Les enfants ont 6 nombres par exemple 7, 25, 12, 30, 45 et ils doivent essayer d'approcher par exemple 85 en combinant ces nombres.

- Les envahisseurs

Les enfants jouent par deux, ils ont une liste de 3 nombres, et en combinant ces nombres (plusieurs fois le même s'ils le veulent), ils doivent fabriquer le plus possible de nouveaux nombres.

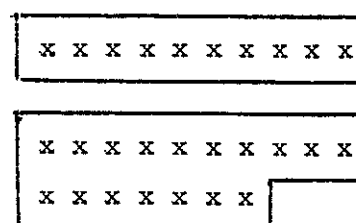
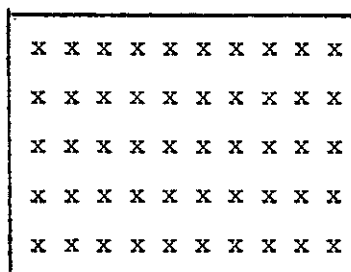
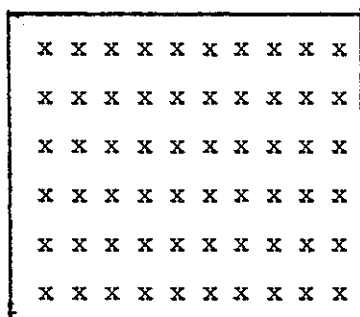
- Jeux de cibles (voir plus loin article réalisé à Montrouge).

- Train (voir article sur le train)

Une fois les connaissances sur les nombres inférieurs à 100 à peu près assurées, on pourrait penser que les enfants vont automatiquement reporter ces connaissances sur les autres classes de nombres, en fait, l'expérience prouve qu'il n'en est rien et que les enfants sont obligés de refaire une partie de la démarche faite au C.P. pour se convaincre que les nouveaux nombres (supérieurs à 100) ont bien les mêmes propriétés et les mêmes modes de fonctionnement que les nombres inférieurs à 100.

Les enfants vont donc recommencer à comparer des collections d'objets, mais maintenant ces collections auront plus de cent éléments; cela nécessite un matériel un peu élaboré pour que les enfants ne perdent pas d'objets.

Les enfants sont groupés par quatre, chaque équipe reçoit quatre enveloppes dans lesquelles on trouve des croix dessinées sur du papier par rangées de 10, voici par exemple, le contenu d'une enveloppe :



Les enfants doivent comparer le contenu des enveloppes; le matériel est tel que les enfants utilisent très vite les rangées de 10, et le contenu dénombré est 13 rangées de 10 et 7. Si on augmente (entre 40 et 50) assez considérablement le nombre de paquets de 10, les enfants commencent à se tromper en les comptant et ils groupent les paquets de 10.

Il est alors aisé de leur conseiller de grouper les paquets de 10 par 10, et ils le font d'autant plus volontiers qu'ils connaissent le nombre 100.

Pendant une période transitoire les nombres seront écrits 177 qui signifiera soit $17 \text{ p } 10 + 7$ soit $1 \text{ p } 100 + 7 \text{ p } 10 + 7$. On peut alors profiter de cette variété d'écritures pour faire comparer des nombres sur leurs écritures. Par exemple on peut demander aux enfants de comparer 729 et $500 + 230$, il est alors adroit de reconnaître 729 comme $7 \text{ p } 100 + 2 \text{ p } 10 + 9$ soit encore $5 \text{ p } 100 + 22 \text{ p } 10 + 9$, ou encore comme $500 + 229$. Cependant ces manipulations où les enfants fabriquent des centaines, où les 100 objets restent visibles, ne doivent pas être les seules activités de numération. En effet, certains enfants ont du mal à considérer une centaine comme un seul élément alors qu'ils y voient les 100 éléments. Il convient donc de ne pas trop s'attarder dans ces manipulations, même pour les enfants qui ont un peu de mal, il vaut mieux passer à d'autres activités telle que l'utilisation d'abaques ou de monnaie fictive qui permettent de visualiser une centaine bien que les cent objets ne soient pas visibles.

- Par exemple, les enfants travaillent en équipes de trois et doivent comparer leurs fortunes respectives:

1 ticket blanc vaut 10 tickets bleus, 1 ticket rouge vaut 10 tickets blancs.

et les fortunes respectives sont par exemple :

15 blancs, 11 bleus, 3 rouges pour l'un; 2 blancs, 13 bleus, 4 rouges pour le deuxième; 11 blancs, 9 bleus, 3 rouges pour le troisième.

Une fois la comparaison faite, les équipes échangent leurs tickets et chaque équipe vérifie le travail de l'autre. Les enfants peuvent aussi chercher comment avoir pour une fortune donnée le moins de tickets possibles, le plus de tickets possibles, le plus de tickets d'une couleur donnée etc...

- Pour les abaques, on peut donner tout le matériel aux enfants et leur laisser le soin d'inventer une méthode qui permette de compter. Ils pourront alors s'en servir pour comparer des nombres, pour les additionner, les retrancher.

Une fois des nouveaux nombres introduits, les enfants vont pouvoir reprendre les activités du début avec ces nouveaux nombres (compte est bon, envahisseurs, train, cibles, problèmes etc...). Le calcul mental est toujours aussi nécessaire car il demande aux enfants de trouver une technique différente

adaptée à chaque calcul, il fait donc utiliser à fond toutes les propriétés des nombres (il serait stupide de calculer de la même façon $124 + 235$ et $124 + 197$, pour le premier on imagine par exemple $124 + 200 = 324$ $324 + 35 = 359$, pour le deuxième $114 + 200 = 324$ $324 - 3 = 321$, et on utilisera encore une méthode différente pour $123 + 277$ $123 + 277 = 125 + 275 = (100 + 200) + (75 + 25) = 400$).

Avant d'introduire toute technique ou toute règle de comparaison, il est nécessaire de laisser les enfants se débrouiller par des techniques personnelles. En particulier, ils doivent trouver des moyens pour additionner des nombres plus grands que 100; lorsque beaucoup d'enfants auront inventé des techniques d'addition, le maître pourra exhiber la technique la plus couramment employée, comme moyen d'unifier toutes les techniques personnelles.

Pour la soustraction le problème est un peu plus délicat, un article y est consacré (voir plus loin)

Tout au long de la première année de CE, il est intéressant de placer les enfants dans des situations où interviendraient des multiplications ou des divisions. Si les nombres en jeu ne sont pas trop grands, les enfants doivent pouvoir résoudre ce genre de problèmes à l'aide de tâtonnements, d'additions répétées ou de calculs mentaux.

Un article est spécialement consacré à la multiplication, un autre aux situations de division pouvant être traitées au CE (voir plus loin).

A la fin du cycle élémentaire, les enfants sont armés pour se débrouiller dans les situations où interviennent les nombres entiers, leurs connaissances s'affineront et se perfectionneront avec l'expérience.

JEU DE CIBLE

Régine DOUADY et Marie-Jeanne PERRIN (IREM de Paris-Sud).

Chronique et analyse d'activités de classe.

I. Présentation des activités.

I.1. Intentions.

Les principaux intérêts de ces activités pour les enfants sont :

- Faire des groupements et des décompositions (numération)
- Additionner plusieurs nombres et utiliser des propriétés de l'addition pour étendre le domaine des nombres maîtrisés.
- Aborder d'un certain point de vue la multiplication, la division euclidienne.
- Communiquer entre équipes.
- S'organiser et élaborer une stratégie.
- Développer son adresse physique.

I.2. La situation et les principaux paramètres sur lesquels portent les choix du maître.

I.2.1. Le jeu.

Il s'agit de lancer une balle dans une cible dessinée sur le sol. Les enfants jouent, individuellement ou par équipes, un nombre de coups décidé à l'avance. Diverses règles du jeu sont possibles.

I.2.2. Paramètres de la situation.

Selon l'âge des enfants et le type de groupements qu'on aimerait les voir faire, on peut faire varier :

- le nombre des cercles de la cible,
- les points de chaque zone,
- le nombre d'équipiers,
- le nombre de coups pour chacun,
- le nombre de parties.

I.2.3. Choix de la cible.

L'expérience nous amène à souligner qu'il est important que tous les points puissent être marqués, c'est-à-dire que toutes les zones de la cible puissent être atteintes avec autant de chances a priori ; c'est le cas par exemple si la cible est dessinée sur le sol, ou matérialisée par des cerceaux.

Choix du nombre de points : en C.P., nous avons pris des nombres assez petits de manière à exploiter le domaine opératoire des enfants et à l'étendre progressivement en augmentant le nombre de coups à jouer.

Nous avons joué avec 3 - 6 - 9 et 2 - 5 - 10.

Le choix de 3 - 6 - 9 favorise les groupements d'une manière générale et plus particulièrement les groupements par 9 : on rencontre effectivement beaucoup de manières d'obtenir des 9 ($3 + 6$, $3 + 3 + 3$, $6 + 6$, $9 + 3$).

Le choix de 2 - 5 - 10 favorise la base dix. La cible 2 - 5 - 10 a été exploitée dans une classe où beaucoup d'enfants utilisaient les nombres à 2 chiffres et les écrivaient sans avoir fait de groupements et donc sans comprendre l'écriture des nombres. Mais il est pauvre du point de vue groupements (on n'a guère rencontré que $5 + 5$, d'autant plus que la cible avait été réalisée de telle sorte qu'il était pratiquement impossible de faire un 2).

Au C.E.1 (mois de mai) nous avons repris cette situation avec 25 - 50 - 75 - 100 de manière à manipuler des nombres assez grands.

Cette situation a permis de développer et de renforcer les méthodes de calcul rapide (plus particulièrement multiplication) et de les étendre à des nombres de l'ordre de 1 000 ou 2 000.

I.2.4. Règles du jeu. Voici celles qui ont été utilisées.

- **Première règle du jeu** : celui qui a le plus de points gagne.

On a joué dans deux C.P. avec des variantes :

- Cible 3 - 6 - 9 ; jeu individuel ; 3 lancers chacun (en mai).
- Cible 2 - 5 - 10 ; jeu individuel ; 3 lancers chacun (en mars).
- Cible 3 - 6 - 9 ; jeu par équipes de 4 avec 3 lancers chacun ;
 - 1) une partie
 - 2) deux manches et classement général.

- **Deuxième règle du jeu** : l'équipe qui a atteint un nombre donné de points ou s'en approche le plus gagne.

- Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 1 lancer chacun ; 18 points.
- Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 3 ; 2 lancers chacun ; 27 points.
- Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 3 lancers chacun ; 50 points.

II. Chroniques commentées.

II.1 Jeu individuel.

Règle : chaque enfant effectue 3 lancers. Cible 3 6 9.

Cette consigne ferme de façon délibérée une possibilité de travail avec un nombre de lancers et un nombre de points indéterminés.

Dans un premier temps, la maîtresse explique la règle du jeu et les enfants jouent avec enthousiasme.

Au moment de savoir qui a gagné, certains enfants ne se souviennent plus de leur score. Ils découvrent alors la nécessité de s'organiser et d'avoir des traces écrites du jeu. Cela fait l'objet d'une discussion collective au cours de laquelle sont validés certains des moyens proposés.

Il nous semble important que, dans un premier temps, les enfants jouent effectivement sans se préoccuper de l'exploitation qui peut en être faite en classe.

Dans un deuxième temps, on leur demande de décrire et commenter leur jeu, et c'est en voulant répondre aux questions qu'ils se posent qu'ils sont amenés à s'organiser et à prévoir.

II.2. Jeu par équipes et étude des scores.

II.2.1. Organisation du jeu.

Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 3 lancers par élève

Les conditions imposées ici limitent le champ d'investigation des nombres.

Les informations à retenir sont suffisamment abondantes pour qu'ils éprouvent le besoin de les noter.

Comme ils ont déjà utilisé des tableaux à double entrée dans d'autres situations, chaque équipe en prépare un avant de jouer.

Dans cette phase, il y a réinvestissement d'un outil déjà connu.

Exemples : Scores réalisés par trois équipes sur les sept.

Olivia	0	0	0
Christophe	0	0	0
Marc	0	0	0
Yannick	0	3	3

Kamel	6	9	0
Gilles	3	6	9
Virginie	3	0	3

Bastien	9	9	6
Patrick	6	6	9
Louison	0	0	0
Frédéric	3	3	6

II.2.2. Exploitation des tableaux de résultats.

a) Les questions.

Après le jeu, la maîtresse recopie au tableau les résultats que lui dicte chaque équipe, puis demande aux élèves quelles *questions* se poser.

Voici quelques propositions de recherche :

- L'équipe gagnante.
- L'équipe perdante.
- Les équipes ex-aequo.
- Les enfants qui ont marqué le même nombre de points dans une même équipe ou dans des équipes différentes.
- Les enfants qui ont fait trois fois la même chose.
- Le gagnant ou le perdant à l'intérieur de chaque équipe.
- Le gagnant ou le perdant pour toute la classe.

Les propositions des enfants conduisent à un travail dans le domaine numérique ; essentiellement, comparaison de nombres écrits sous différentes formes.

Pour que les discussions puissent être fructueuses, l'organisation choisie pour l'exploitation des résultats a une grande importance. Si les enfants avaient eu à remplir des tableaux tout préparés comportant une colonne supplémentaire destinée à recevoir le total, ils n'auraient plus eu qu'à faire des additions et la situation aurait été considérablement appauvrie : on aurait perdu l'activité de recherche d'autres moyens de répondre à la question, en particulier par groupement ou compensation.

La réflexion de Bastien :

"De 0 à 3, il faut rajouter 3, de 3 à 6, il faut rajouter 3, c'est toujours + 3, tu n'as pas fait cela par hasard".

permettrait de déboucher sur les relations numériques du type $n \rightarrow n + a$. A ce moment du travail, une telle étude serait prématurée.

b) Les réponses. On peut distinguer plusieurs étapes :

- Proposition de traitement de l'information. Transformation des écritures.

Hélène: "On peut compter les points de chaque équipe".

- Affirmations sur un mode intuitif sans validation.

Eric : "Je sais qui a perdu, c'est l'équipe d'Olivia" (cf. tableau) "elle a beaucoup de zéros et après il n'y a que des 3, et c'est le plus petit".

– Celui qui a le plus de zéros a perdu.

– Grégoire : "Celle qui a le plus de 9 a gagné".

- Procédure de validation d'une affirmation. Traitement des données.

– Gilles : "C'est pas forcé, avec 6 et 3 on fait 9".

– "On peut faire 9 rien qu'avec des 3".

- Calcul.

Toute la classe étudie les résultats de l'équipe d'Hélène, et Gilles ajoute : "Quand on a 6 et 6, on enlève un 3 d'un 6, on le met avec l'autre 6 et ça fait 9".

Pour pouvoir écrire les points de cette équipe, les élèves éprouvent le besoin d'utiliser un signe pour "paquet". Cette situation pourrait être exploitée dans le cadre de l'introduction de l'écriture multiplicative.

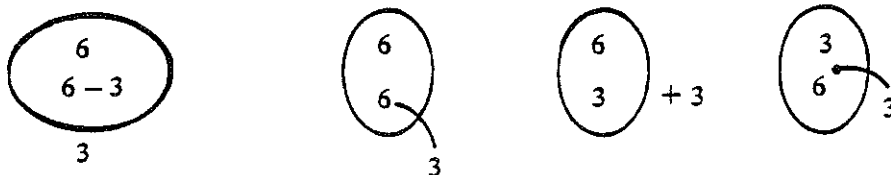
Bastien écrit : $(3 \text{ p } 9) + 3$; un autre : $(3 \square 9) + 3$. La classe adoptera la deuxième écriture.

Un membre de chaque équipe vient au tableau compter le nombre de paquets de 9 de l'équipe.

La décomposition du $6 + 6$ en $9 + 3$ présente des difficultés pour certains.

La remarque de Gilles à ce propos n'a pas beaucoup aidé les autres : chacun doit faire sa propre démarche.

Pour se convaincre, ils proposent plusieurs écritures :



La difficulté à transformer $6 + 6$ en $9 + 3$ semble accrue par la complexité du contexte.

Finalement tous les résultats sont écrits sous la forme :

6 (équipe d'Olivia) ; $(4 \square 9) + 3$ (équipe de Kamel) ; $(6 \square 9) + 3$ (équipe de Bastien).

● Cela va permettre un travail sur la reconnaissance de différentes écritures d'un même nombre.

Sur ces écritures, les élèves comparent les différents résultats puis cherchent combien chaque équipe a de plus que la suivante ; pour noter leurs conclusions, ils sont amenés à désigner le score de chaque équipe : ils choisissent l'initiale du mot français désignant le nombre de paquets de l'équipe (il se trouve que les équipes avaient des nombres de paquets différents).

Exemple : S (initiale de *six*) pour $(6 \square 9) + 3$.

Ces lettres désignent bien des nombres puisque les élèves les comparent, les retranchent et les insèrent dans des écritures comme

$$S = Q + (2 \square 9)$$

Pour les calculs de différence, ils traitent séparément les nombres de paquets de 9 et les restes.

Cela ne fait intervenir que des petits nombres, qui leur sont familiers. Ils ont cependant rencontré le problème des retenues. Par exemple, pour calculer la différence entre $(4 \square 9)$ et $(1 \square 9) + 3$, ils prélèvent un paquet de 9 sur les 4, puis 3 points sur un deuxième paquet.

II.2.3. Calcul des scores.

Les élèves ne savent toujours pas combien de points a réalisé chaque équipe. Ils veulent le savoir.

Ce qui suit engage un travail sur la numération.

- *Réinvestissement de l'outil "groupements", et "écriture d'un nombre sous forme d'une somme". Même si certains élèves ne connaissent pas le "nom" du nombre 45, ils utilisent l'écriture 45 en lisant quatre paquets de dix plus cinq.*
- *Premier pas vers l'élaboration de techniques d'addition et de soustraction avec ou sans retenue.*

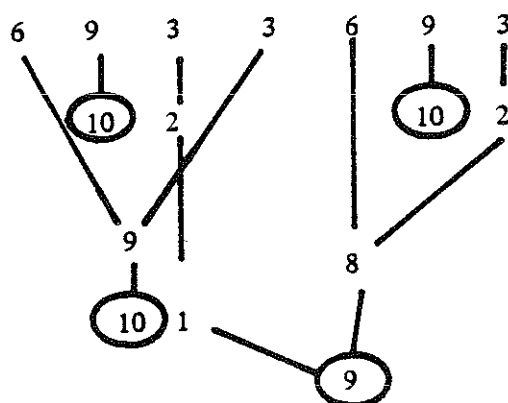
Les élèves comptent le nombre de points qu'il y a dans un paquet de 9, deux paquets de 9

Ils proposent plusieurs moyens :

- a) Le calcul $9 + 9 = 18$ fait déjà partie du répertoire ; ensuite :
- $$18 + 9 = (18 + 2) + 7 = 20 + 7 = 27.$$

Ce calcul se fait mentalement : d'une part les enfants disposent d'un certain répertoire qu'ils étendent au fur et à mesure de leur pratique, en particulier pour les doubles ; d'autre part, ils ont l'habitude de faire des groupements de 10 pour calculer, quitte à prélever sur un nombre le complément à 10 d'un autre nombre.

Dans une autre classe, des enfants, qui notaient les scores de leur équipe par une suite de nombres ont réalisé des paquets de 10 à partir de paquets de 9 en prélevant une unité "ailleurs", autant que nécessaire.



b) La représentation des paquets de 9 par des réglettes découpées dans du papier quadrillé (1 carreau pour 1 point) et le décompte des carreaux de ces réglettes :

une réglette de 9 carreaux pour $1 \square 9$;

deux réglettes de 9 carreaux mises bout à bout pour $2 \square 9$, etc.

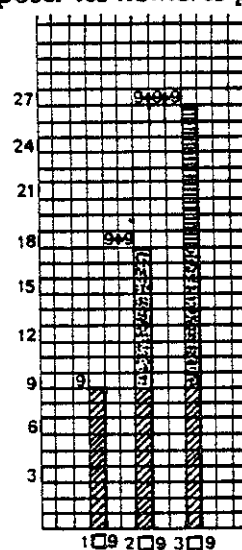
Ces réglettes ont été utilisées de deux manières :

- d'une part, suivant l'idée des enfants, en groupant les carreaux par 10 ("C'est facile, 9 c'est presque 10").

Cela a surtout permis de visualiser le calcul précédent et ainsi de le justifier pour certains enfants qui ne pensaient pas encore à décomposer les nombres pour grouper autrement.

- d'autre part selon une suggestion de la maîtresse, en collant ces réglettes sur une feuille de papier quadrillé (le même que celui dans lequel ont été découpées les bandes) en les appuyant sur un axe horizontal et en lisant le nombre de points correspondant à chaque baguette sur un axe vertical numéroté convenablement.

Certains enfants écrivent les nombres de 3 en 3 (cf. la figure ci-contre) en expliquant que, dans leur jeu, on ne peut faire que des 3.



Notons que les enfants ont déjà utilisé des quadrillages gradués pour repérer deux séries de renseignements. Ici les deux variables sont le nombre de paquets de 9 et le nombre de points correspondant. Ce mode de représentation sera exploité par la suite pour l'étude de fonctions.

Les enfants prennent conscience de l'intérêt de cette présentation. ("C'est facile, on n'a pas besoin de calculer").

Un graphique collectif est dessiné sur une grande feuille quadrillée affichée au tableau.

c) Un autre moyen de calcul apparaît quand la maîtresse demande de noter sur le graphique le nombre des points obtenus par chaque équipe:

"Pour ajouter 9, on ajoute 10 et on prend celui d'avant"

Il semble que beaucoup d'enfants aient pris conscience à ce moment là seulement, des relations entre paquets de 9 et paquets de 10.

II.2.4 Nouvelle partie

L'enthousiasme des enfants et l'envie de faire mieux ont nécessité cette deuxième manche.

Les enfants rejouent, puis font un classement général. Les scores sont notés, en ajoutant des indices aux lettres déjà choisies (par exemple, pour l'équipe de Bastien : on note S à la première manche, S₁ à la deuxième, et S₂ au classement général).

Ce n'est pas la première fois que l'on constate, chez ces enfants, un souci de cohérence dans le choix des notations.

Pour la deuxième manche, comme pour la première, ils écrivent les résultats sous forme de paquets de 9 ; avec ces écritures, ils comparent les résultats des deux manches pour une même équipe, et d'une équipe à l'autre ; enfin ils calculent toutes les différences d'une équipe à l'autre, au cours d'une même manche.

Le problème du groupement de second ordre s'est posé pour les totaux, car certains dépassaient la centaine.

Tous ces résultats sont transcrits, trouvés ou retrouvés sur graphique.

Quelques remarques des enfants :

- il y a des équipes ex-aequo qui n'étaient ex-aequo à aucune manche.
- l'équipe gagnante à la 1^{ère} manche n'est pas sûre de gagner au total.
- celui qui a le plus de points n'est peut-être dans aucune équipe gagnante.

Au cours des différentes phases du jeu, le domaine des nombres connus des enfants, et plus particulièrement ceux sur lesquels ils savent calculer, s'est considérablement étendu. Dans la phase qui suit, la maîtresse cherche à tester les acquisitions des enfants.

II.2.5. Comparaison avec les résultats d'une autre classe.

La maîtresse présente aux enfants les scores imaginaires d'une classe voisine ; le total de chaque équipe est communiqué en écriture décimale. Pour comparer ces résultats à leurs propres scores, les enfants utilisent deux méthodes différentes.

a) Certains cherchent le nombre de paquets de 9 réalisés dans chacun des scores.

Pour cela, ils se servent en général du graphique. Les résultats ainsi trouvés sont vérifiés par le calcul.

Ces enfants restent attachés à une stratégie déjà éprouvée, malgré les difficultés qu'elle engendre dans cette nouvelle situation.

b) D'autres exploitent directement les écritures données, ce qui est techniquement beaucoup plus simple.

La façon dont les scores imaginaires ont été communiqués aux élèves (scores globaux, écritures décimales), provoque une confrontation fructueuse des deux méthodes. Cela n'aurait probablement pas été le cas si l'on avait transmis le tableau des scores partiels.

II.3 Jeu par équipe en vue de réaliser un score fixé à l'avance.

II.3.1. Faire 18 points.

a) Règle du jeu : 4 joueurs par équipe ; 1 lancer chacun ; l'équipe qui marque 18 gagne.

Nous avons choisi un jeu à 18 (et non pas un nombre plus grand) pour que la recherche d'une stratégie adaptée à ce nouveau problème ne soit pas gênée par des difficultés de calcul.

b) Prévisions de jeu.

Avant le jeu, les enfants prévoient des manières de réaliser 18.

Les enfants ont tout de suite vu les relations entre 9 et 18, entre 3, 6, 9 et 18, ce qui leur a permis de prévoir des scores.

Exemple de prévisions :

9	9	0	0
9	3	3	3
9	6	3	0

c) Les réalisations :

Equipe de Bastien	9	9	0	0
Equipe de Grégoire	6	9	3	0
Equipe d'Olivia	6	0	0	9
Equipe d'Isabelle	6	3	6	6
Equipe de Gilles	6	3	3	0
Equipe de Mathieu	3	0	6	6
Equipe de Kamel	9	6	3	0

Les deux premiers joueurs cherchent à réaliser 9, les 2 autres joueurs ajustent pour réaliser 18.

Equipe Bastien : pour nous, ça a été facile, les 2 derniers ont fait exprès de faire 0.

Equipe Grégoire : après Grégoire et Coralie, on a réfléchi, il manquait 3. Eric a fait 3 et Hélène a fait exprès de faire 0.

Equipe Isabelle : je devais faire 3, j'ai fait 6, alors on a 21. On a perdu.

La maladresse semble avoir empêché certaines équipes de réaliser le contrat. C'est ce que les enfants expliquent au cours de la discussion collective qui suit le jeu. En tout cas, cette discussion permet à tous de prendre conscience d'une stratégie gagnante comme le prouve leur comportement au cours d'une deuxième partie.

Dans l'élaboration de la stratégie, l'habileté est prise en compte comme paramètre déterminant : les enfants établissent un ordre sur les joueurs en fonction de l'habileté.

II. 3.2 Faire 27 points.

Dans un autre C.P. où le nombre à atteindre était 27 en 6 coups, les enfants ont repéré tout de suite que 27, c'était 3 paquets de 9 et ont essayé de réaliser des 9, éventuellement en faisant des "6 et 3". Mais les enfants d'une équipe ont été déroutés par la réalisation de quatre 6 ce qui sortait de leurs prévisions ; ils ont continué à jouer et ont fait encore deux 6.

On peut penser que ces enfants ne calculaient pas assez bien de tête pour totaliser les quatre 6 et comparer à 27 et qu'ils ne maîtrisaient pas assez bien la transformation de $6 + 6$ en $9 + 3$ pour retrouver leurs paquets de 9 et prévoir le dernier coup.

II.3.3. Faire 50 points.

Cible $3 - 6 - 9$; les enfants sont par équipe de 4 ; 3 lancers chacun. L'équipe qui a 50 a gagné.

La maîtresse, par le choix de cette règle (score élevé et impossible à atteindre), oriente la recherche vers les questions d'écart et d'approximation.

Les enfants jouent et dépassent presque tous largement 50.

Exemples de scores :

Equipe de Franck :	Equipe de Mathieu :	Equipe de Bastien :
9 6 6 6	3 9 3 3	3 6 6 9
6 6 9 0	6 9 3 3	0 9 6 6
6 6 6 9	6 3 3 0	6 0 0 3

Il semble que les enfants n'aient pas transposés à 50 la stratégie élaborée pour 18 ; 50 leur a paru un grand nombre et ils ont cherché à faire beaucoup de points.

Au cours d'une séance collective, les élèves calculent le score de chaque équipe, ligne par ligne. Quand la classe a fini le calcul des deux premières lignes (27 et 21) de l'équipe de Franck, la maîtresse demande à cette équipe :

- Qu'avez-vous fait après avoir lancé deux fois ? Saviez-vous combien il vous manquait ?
- Non.
- Vous étiez-vous donné une consigne ?
- Non Faire des 9.

A ce moment les autres élèves de la classe réagissent : "Il fallait chercher combien il leur manquait, il fallait compter : $27 + 21 = 48$ ".

La maîtresse : "Combien il fallait ?"

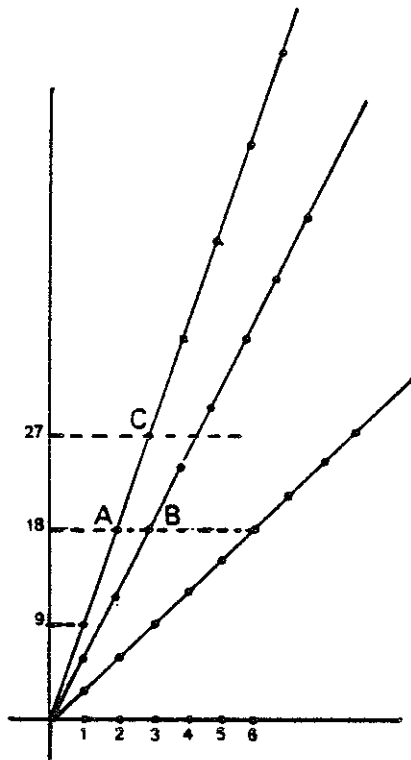
Les enfants : "2, mais on ne pouvait pas, le mieux, c'était de faire 3".

Il est clair que l'équipe de Franck n'avait encore aucune stratégie au moment de la discussion, mais qu'un certain nombre d'enfants de la classe avait commencé à en avoir l'idée au cours du calcul.

Et c'est au cours de la discussion et du calcul des résultats de chaque équipe que les enfants prennent peu à peu conscience de l'existence d'une stratégie leur permettant de se rapprocher au mieux de 50.

A partir de scores effectivement réalisés (51, 18, 45), ils en imaginent d'autres qu'ils pourraient réaliser (36, 39, 48), par addition de 2 nombres atteints, ou d'un nombre atteint et d'un multiple de 3, et ils se persuadent qu'ils ne peuvent pas réaliser un nombre de points qui diffère de 1 ou 2 d'un nombre qu'on peut atteindre.

II.3.4. Par la suite, les élèves ont étudié les scores possibles et impossibles avec la cible 3, 6, 9. Pour cela, ils se sont servi des représentations graphiques des multiples de 3, 6 et 9 jusqu'à 60 environ.



Les graphiques ont suscité des remarques sur :

- les multiples de 9 et les multiples de 6 ;
- les multiples de 9 et les multiples de 3, etc.

Ainsi, pour 18, le point A (voir figure) de l'alignement $y = 9 \times x$ montre que 18 est un multiple de 9 ; en suivant l'horizontale passant par A, on rencontre B sur l'alignement $y = 6 \times x$ qui montre que 18 est aussi un multiple de 6.

Par contre, pour 27, l'horizontale qui passe par C ne rencontre pas de points de l'alignement $y = 6 \times x$.

LA SOUSTRACTION

I. Le problème didactique

La soustraction a toujours posé, tant au niveau conceptuel qu'au niveau technique, beaucoup de problèmes aux enfants.

Au niveau conceptuel, les difficultés sont pour une part importante la conséquence de deux facteurs, l'un lié à la complexité inhérente à la soustraction, l'autre lié au choix didactique d'introduction de la soustraction.

I.1. La complexité vient du fait que les situations pour lesquelles les calculs peuvent faire intervenir des différences sont de nature très diverses. Nous allons en donner quelques exemples :

— "J'ai 18 billes, des rouges et des bleues ; 7 sont bleues, x sont rouges. Trouver x ".

Cette situation peut se traduire par les écritures suivantes :

$$7 + x = 18$$

(ou les écritures équivalentes

$$x + 7 = 18, 18 = 7 + x, 18 = x + 7)$$

ou

$$x = 18 - 7.$$

— "J'avais 18 billes ; j'en ai perdu 7 ; il m'en reste x . Trouver x ".
Celle-ci peut se traduire par

$$7 + x = 18, x = 18 - 7 \text{ ou } 18 - x = 7.$$

— "J'avais 18 billes ; j'en ai perdu x , il m'en reste 7. Trouver x ".
Cette situation conduit aux mêmes écritures que la situation précédente.

— "J'ai 18 billes, tu en as 7. J'en ai x de plus que toi. Trouver x ".
Cette situation peut se traduire par

$$7 + x = 18, 7 = 18 - x \text{ ou } 18 - 7 = x.$$

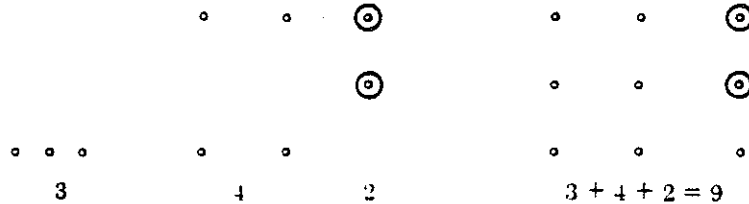
I.2. La difficulté liée au choix didactique tient au fait que la complexité décrite plus haut va devoir être prise en compte et qu'en même temps il va falloir montrer l'unité de toutes les situations au niveau des nombres.

Dans l'état actuel des recherches, l'enseignement de la soustraction n'a pas fait l'objet de découvertes fondamentales ; cependant, on peut essayer de dégager des travaux des divers expérimentateurs une ligne générale pour l'étude de la soustraction.

Nous allons rappeler brièvement la manière dont est actuellement introduite l'addition au C.P.

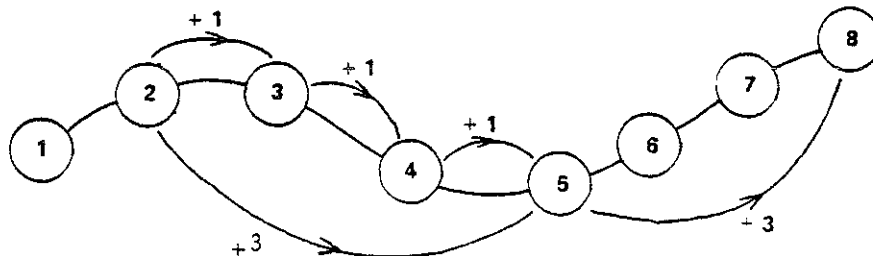
Soustraction

- Les enfants réunissent des collections d'objets, puis écrivent le nombre d'objets de la nouvelle collection ainsi obtenue :

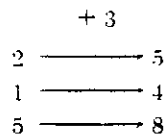


L'addition est alors introduite comme loi interne sur les naturels, c'est-à-dire que dans $2 + 3 = 5$, 2 et 3 ont exactement la même nature.

- Ensuite les enfants étudient l'autre aspect de l'addition lié à l'ordre des nombres.



Passer d'un nombre au suivant, cela se fait en ajoutant 1 ; on découvre l'addition comme "translation" sur les naturels :

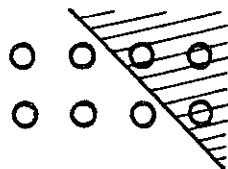


Ici, dans $2 + 3 = 5$, 2 et 3 n'ont pas la même nature : 2 est le code d'un point et 3 est le nombre de "pas" pour aller de 2 à 5.

- Les enfants vont ensuite, tout au long de leur scolarité, étudier de nombreuses situations mettant en oeuvre les deux aspects de l'addition ; petit à petit, l'expérience aidant, ils en viendront à utiliser les propriétés évidentes de l'addition "interne" pour l'addition "translation" et vice-versa.

Pour la soustraction, il est possible de suivre une démarche tout à fait similaire.

Les enfants amputent des collections d'objets puis écrivent le nombre d'objets d'une des collections ainsi obtenues :

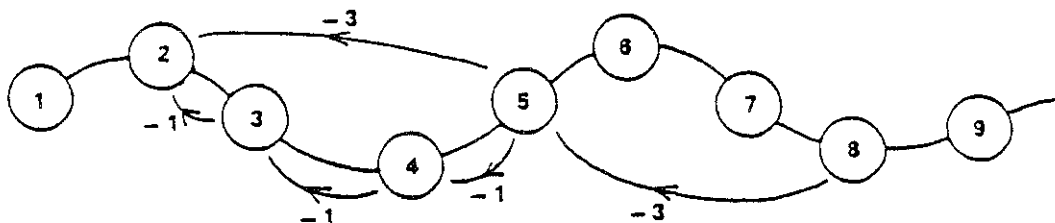


$$8 - 3 = 5$$

Soustraction

La soustraction n'apparaît pas clairement comme opération inverse de l'addition ; en effet, il faut prendre en compte $8 - 3 = 5$ et $8 - 5 = 3$ pour bien décrire une situation équivalente à $5 + 3 = 8$; c'est une des premières difficultés.

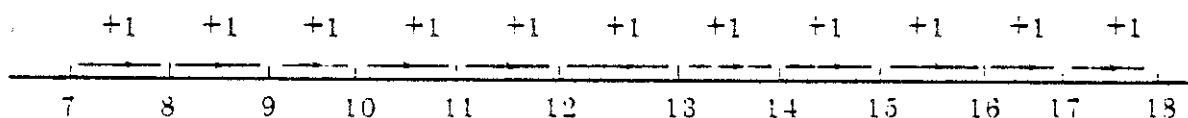
Ensuite, il convient, comme pour l'addition, d'étudier l'aspect de la soustraction lié à l'ordre des nombres :



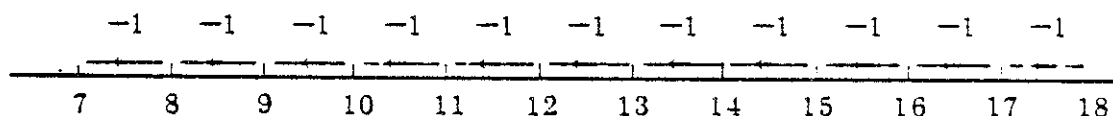
Passer d'un nombre au nombre précédent, cela se fait en retranchant 1 ; on étudie alors la soustraction comme "translation" sur les naturels, et dans ce cas elle apparaît évidemment comme l'inverse de l'addition "translation".

Il est des problèmes dont on ne peut pas dire s'ils sont d'addition ou de soustraction tant la symétrie de l'addition "translation" et de la soustraction "translation" est patente :

"J'ai 18 billes, tu en as 7, combien en ai-je de plus que toi ?" Cela peut se traduire par : Qu'est-ce qu'on doit ajouter à 7 pour arriver à 18 ?



Mais cela peut se traduire aussi par : Qu'est-ce qu'on doit retrancher à 18 pour arriver à 7 ?



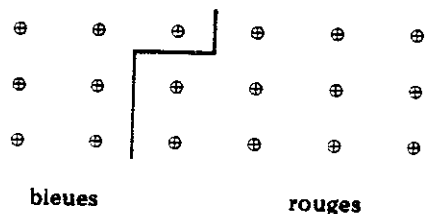
Pour passer de l'un à l'autre des deux nombres 7 et 18, on ajoute 11 à 7 ou on retranche 11 à 18.

Dans le début de leur scolarité, les enfants vont donc avoir mis en place deux sortes de soustractions. Le but de l'enseignement sera de leur faire étudier un grand nombre de situations variées qui les amèneront progressivement à choisir dans chaque situation l'aspect le mieux adapté, puis finalement à faire l'unité entre les deux aspects de la soustraction.

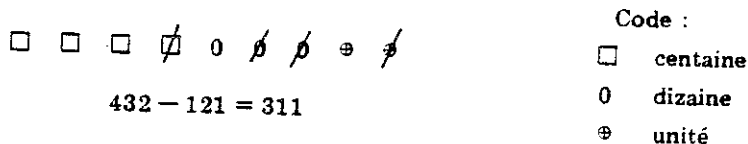
II. Usage des représentations

Comme pour l'addition, l'enfant a besoin, dans les situations où les calculs conduisent à des soustractions, de s'aider de représentations. Les enfants en inventent spontanément certaines ; ce sera le rôle du maître que d'en suggérer d'autres ; en effet, les représentations spontanées ne sont pas toujours efficaces, ni utilisables.

Dans une situation telle que "J'ai 18 billes en tout ; 7 sont bleues ; les autres sont rouges", les jeunes enfants ont tendance à utiliser des représentations du type :



Ces représentations sont pratiques lorsque les nombres en jeu sont petits ; elles peuvent être adaptées à des nombres plus grands par l'utilisation de symboles différents pour les centaines, les dizaines et les unités. Par exemple, si on veut illustrer le calcul de $432 - 121$, on peut dessiner :



Dans un calcul tel que celui de $200 - 129$, cette représentation devient difficile à utiliser puisqu'il faut penser à remplacer un par dix , puis un de ces par dix .

Un autre type de représentation que les enfants ont l'habitude de rencontrer est une droite (ou une courbe) graduée par des naturels ; numéros des maisons d'une rue, jeu de l'oie, codage d'un quadrillage, etc. Ces représentations peuvent aider à imaginer des calculs de soustraction.

Par exemple :

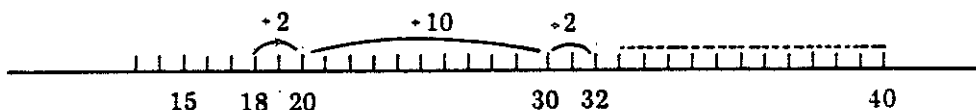
J'avais 61 billes ; j'en ai perdu 33 ; combien m'en reste-t-il ?



$61 - 33 = 28$. Il m'en reste 28.

Soustraction

J'ai 18 francs ; tu en as 32 ; qui en a le plus et combien ?



Pour chaque situation, le maître a intérêt à faire confronter toutes les représentations utilisées par les enfants ; cela permet de reconnaître celles qui étaient le mieux adaptées à la situation, et cela permet de faire prendre conscience de propriétés telles que

$$18 + x = 32 \quad \text{est équivalent à} \quad x = 32 - 18$$

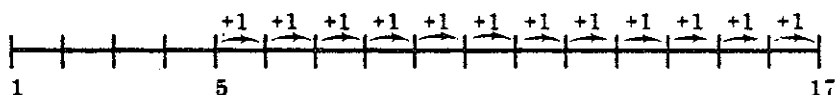
III. Techniques opératoires

Nous allons maintenant aborder l'autre facette du problème posé par la soustraction, c'est-à-dire la difficulté de l'apprentissage d'une technique opératoire.

Un des pièges possibles est de demander aux enfants d'apprendre trop tôt une technique opératoire. Au contraire, en s'abstenant d'instaurer précocement une technique opératoire, on incite les enfants, placés devant des calculs où il y a des soustractions, à développer des techniques artisanales pour arriver au bout de leurs calculs. C'est en provoquant ces tâtonnements que l'on oblige les enfants à utiliser, au moins implicitement, les propriétés de la soustraction sur lesquelles est fondée toute technique opératoire élaborée. Si l'on exige des enfants un apprentissage avant qu'ils aient bien pratiqué les propriétés de la soustraction, il ne peut s'agir que d'un conditionnement avec tous les risques d'oublis et de blocages que cela comporte.

III.1. Nous allons montrer, sur un exemple de représentation, comment peut évoluer une des techniques artisanales que les enfants, ayant travaillé sur des situations telles que celles du petit train par exemple, pourraient éventuellement mettre en place.

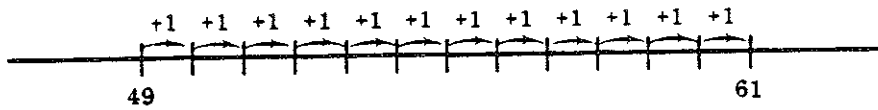
Pour chercher x tel que $5 + x = 17$, la technique la plus sommaire consiste à représenter tous les nombres entre 1 et 17 par un trait de graduation, puis à compter un par un les intervalles :



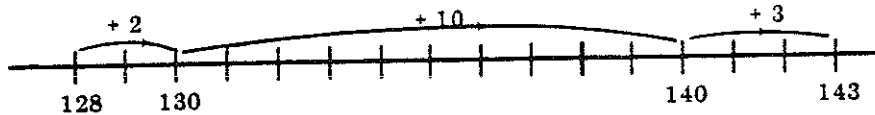
La première abstraction consiste à ne pas faire figurer la graduation à partir de 1 mais à choisir un intervalle utile.

Soustraction

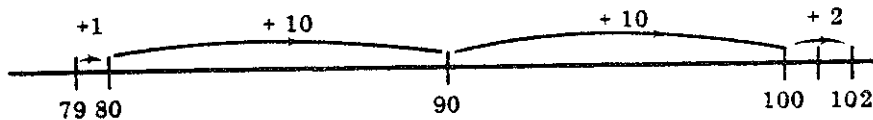
Ainsi pour chercher x tel que $49 + x = 61$:



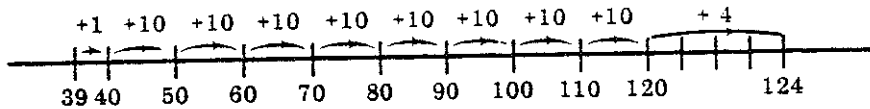
Une amélioration consiste à faire apparaître des segments contenant dix intervalles. Ainsi, pour $128 + x = 143$;



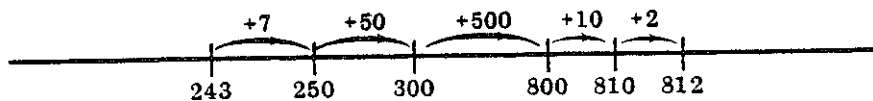
Ensuite, la graduation dans chaque segment de dix intervalles s'avère inutile. Ainsi, pour $79 + x = 102$:



Une deuxième abstraction consiste à utiliser par exemple un demi-carreau pour les unités et un carreau pour les dizaines. Ainsi, pour $124 = 39 + x$.



De proche en proche, on parvient au schéma le plus élaboré. Ainsi, pour trouver $812 - 243 = 569$:



Remarque : C'est le changement de la taille des nombres qui est le moteur principal de l'évolution.

Soustraction

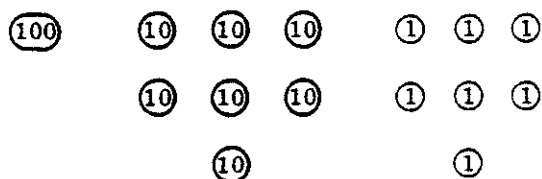
III.2. Nous allons étudier certaines techniques actuellement en usage, et pour chacune d'elles dégager les propriétés de la soustraction qui sont utilisées.

III.2.1.

$$\begin{array}{r} 177 \\ - 89 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \cancel{1} \quad \cancel{7} \quad 17 \\ - \quad 8 \quad 9 \\ \hline \end{array}$$

Cette technique fait allusion à une manipulation représentée par :



On ne peut retirer directement 8 dizaines et 9 unités ; il faut donc transformer en



Cette technique utilise des connaissances assez frustes sur la soustraction ; par contre, elle demande une assez grande virtuosité en numération. Sur un plan pratique, la nécessité de barrer et de surcharger des chiffres est assez malcommode. Pourtant, le plus grand inconvénient vient de la difficulté que recèle cette technique dans les cas du type suivant : $200 - 64$; car il faut transformer directement une centaine en 9 dizaines et 10 unités

$$\begin{array}{r} 200 \\ - 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \\ \cancel{2} \quad \cancel{0} \quad 10 \\ - \quad 6 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

Soustraction

III.2.2.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 17 \quad 17 \\ -1 \quad 81 \quad 9 \\ \hline \end{array}$$

Cette technique fait allusion à la propriété suivante : si on ajoute 10 unités au 1er terme et 1 dizaine au 2ème terme d'une différence, cela ne change pas le résultat ; puis, si on ajoute 10 dizaines au 1er terme et 1 centaine au 2ème terme, cela ne change pas le résultat.

Cette technique utilise des connaissances très complexes à la fois sur la soustraction et sur la numération ; elle ne peut donc être abordée par les enfants que lorsqu'ils auront beaucoup pratiqué la soustraction (CM) ; il sera très intéressant pour eux, à ce moment-là, d'en démontrer le fonctionnement.

III.2.3.

$$\begin{array}{r} 89 \\ + \dots \\ \hline 177 \end{array}$$

Cette technique offre l'avantage de faire appel seulement à des notions très élémentaires sur la soustraction et à une bonne compréhension de la technique d'addition. La disposition telle qu'elle est indiquée ici n'est pas pratique pour les divisions, mais on fait utiliser indifféremment par les enfants :

$$\begin{array}{r} 89 \\ + \dots \\ \hline 177 \end{array} \quad \begin{array}{r} \dots \\ + 89 \\ \hline 177 \end{array} \quad \begin{array}{r} 177 \\ - 89 \\ \hline \dots \end{array}$$

et finalement

En conclusion, toutes ces techniques ont leur intérêt ; elles ne sont pas toutes adaptées aux possibilités des enfants du cycle élémentaire.

LA MULTIPLICATION.

-:-:-

I - PRELIMINAIRES.

L'enseignement de la multiplication ne se réduit pas à l'introduction du symbole "X" dans un cadre sémantique précis et à l'apprentissage d'une technique opératoire. Tout maître de l'enseignement primaire en est convaincu. La démarche suivie dans la plupart des manuels et brochures consacrés à la multiplication se présente de façon linéaire :

- Introduction du signe "X"
- Apprentissage d'une technique opératoire et parallèlement du répertoire standard, à savoir la table de multiplication.
- Application à l'étude de situations multiplicatives, proportionnalité...

De même que l'on sépare au niveau CP - CE 1 l'addition et la soustraction, on ne trouve pas trace dans ces progressions de division. Or, une telle séparation, artificielle puisque toute situation multiplicative est également une situation de division ne nous paraît absolument pas justifiée. Elle ne se comprend que si l'on se place effectivement dans le cadre rigide suivant : "Introduction d'un symbole - apprentissage d'une technique opératoire - applications".

Toute construction est dialectique et une technique opératoire est, à un instant donné, le fruit d'un équilibre entre un répertoire et un certain savoir-faire. Cette technique évoluera avec le répertoire et les compétences

calculatoires de l'enfant dans un souci d'économie pour aboutir à une forme stable. Si comme cela paraît préconisé, on se lance trop tôt dans l'apprentissage d'une technique opératoire, une telle construction dialectique se fera mal. La tentation sera grande pour l'enfant de se réfugier dans un apprentissage par conditionnement sécurisant pour lui car il aura ainsi l'impression de répondre au désir de performance de son maître. Dans ces conditions, les propriétés mêmes qui auront servi à la justification de la technique apparaîtront comme tout à fait accessoires. La technique sera le refuge et le moyen d'appréhender la multiplication. C'est ainsi que l'on voit des enfants au CM poser des opérations comme 240×20 .

Nous travaillons depuis plusieurs années sur l'évolution de la conception du nombre chez l'enfant, sur l'apprentissage des techniques opératoires dans l'enseignement élémentaire. Nos observations nous ont amenés à formuler un certain nombre d'hypothèses. Nous essayons d'organiser notre travail avec les maîtres en fonction de ces hypothèses, pour évaluer dans quelles mesures elles sont fondées et, si elles le sont, élaborer avec eux des progressions qui les prennent en compte.

A propos de la multiplication, nos observations nous ont conduits à formuler les hypothèses suivantes :

- une progression ne peut pas être linéaire,
- avant de se placer dans la problématique de l'apprentissage d'une technique opératoire particulière, il faut que les enfants manipulent le langage qu'ils ont construit et, expérimentalement, se forment un modèle implicite de son fonctionnement.
- au lieu de séparer artificiellement multiplication et division, il

vaut mieux au contraire mettre l'accent sur la symétrie des opérations et introduire tôt un langage qui donne à l'élève les moyens de le faire, ce qui doit faciliter l'utilisation des transformations inverses au niveau des schémas relationnels.

C'est pourquoi nous nous proposons d'introduire cette année dès le CE 1, un symbole ":" pour la division avec le sens suivant :

$$a : b = c \text{ si et seulement si } a = b \times c$$

et si le besoin en est ressenti par les enfants une notation pour la division euclidienne.

Mais l'introduction de ces signes ne signifie pas l'apprentissage de techniques de calcul et en fait, nous n'abordons l'apprentissage des techniques opératoires proprement dites qu'en milieu CE 2 pour la multiplication et, au milieu du CM₁, pour la division. Il nous semble que les élèves progressent plus rapidement qu'auparavant dans ces apprentissages. Nous pensons d'autre part, bien qu'il soit difficile de se prononcer avec certitude, qu'ils conservent dans l'étude des situations que nous leur proposons, une souplesse dans la façon de concevoir les écritures et les calculs liée à celle dont ils ont eu à faire preuve tant qu'ils ne disposaient pas d'une technique opératoire.

Nous proposons d'autre part, au cours des CE 1 et CE 2, aux enfants de des activités variées visant à :

- leur faire manipuler le langage qu'ils ont élaboré.
- ne pas figer l'utilisation de ce langage dans le cadre sémantique où il a été introduit (grilles rectangulaires) mais les amener à prendre en compte également la multiplication comme mathématisation d'additions

répétées.

- faire construire par les enfants un répertoire (il ne s'agit pas là du répertoire standard). Il est constitué par les égalités que les enfants jugent "intéressantes". Il est affiché dans la classe et régulièrement mis à jour au cours de discussions collectives. A cette occasion, les enfants enrichissent le répertoire en rajoutant des égalités ; mais la place étant limitée, ils sont parfois obligés pour le faire d'effacer des égalités qui, à l'usage, se sont révélées d'un moindre intérêt.
- favoriser la prise de conscience des propriétés de la multiplication.

Nous voudrions que la nature même des situations proposées et des questions qu'elles peuvent susciter, conduise les enfants à organiser leurs calculs et à rechercher des procédés "économiques" pour les mener à bien (une telle économie ne pouvant s'évaluer qu'en fonction de leurs compétences calculatoires à un instant donné) donc à utiliser dans un certain domaine de nombres, même s'ils ne les explicitent pas, les propriétés de la structure

$$(\mathbb{N}, +, \times, <, =) .$$

Une approche fonctionnelle de situations pouvant se mathématiser par des applications linéaires, affines par morceaux, nous paraît propice à développer ce type de comportement : dans ce type d'activités, les enfants vont être conduits

- d'une part à effectuer de nombreux calculs (ce qui ne les lasse absolument pas à cet âge si la tâche proposée ne dépasse pas leurs compétences), donc à s'organiser, à s'économiser, et s'il s'agit d'un travail en équipes, se partager le travail et éventuellement discuter des "économies" proposées par certains.

- D'autre part à ne pas se cantonner dans un point de vue ponctuel, mais développer une approche globale et unifiée de ce type de situations.

Nous donnerons plus loin quelques exemples de telles activités. Elles ont été motivées par les intérêts des enfants de nos classes à un moment donné. Elles ne sont donc pas directement reproductibles n'importe quand, n'importe où. Mais ceci importe peu (dans toute classe, les occasions sont fréquentes, il suffit de savoir les saisir !). Ce qui compte, c'est l'angle sous lequel de telles situations sont envisagées.

A ce propos les questions suivantes nous semblent très importantes . La nature et l'intérêt même d'une situation varient en fonction des conditions didactiques de son introduction. Ces conditions didactiques sont liées aux caractéristiques informationnelles de la situation et au degré d'ouverture sous lequel elle est présentée :

- Quelle quantité de données numériques fait-on intervenir ?
- Quelle est la taille des nombres envisagés ?
- S'agit-il d'un problème précis posé par le maître auquel il faut répondre, ou présente-t-on une situation aux enfants, les laissant eux-mêmes l'explorer, se poser des questions, tenter d'y répondre ?

S'il s'agit d'une situation ouverte, comment envisage-t-on de poursuivre l'activité ?

- résolution successive d'un certain nombre de problèmes précis.
- classement des problèmes proposés et recherche d'informations permettant une résolution groupée par types de problèmes .

Elles dépendent aussi de l'organisation de la classe :

- * S'agit-il d'un travail individuel, collectif, en équipes ?
- * Comment se déroulent les phases de synthèse ?
- * Quelle est la part de temps qui leur est consacrée ?
- * Est-ce que tous les enfants, toutes les équipes ont la même tâche à remplir ?

Elles dépendent encore de la façon dont la situation proposée se rattache aux activités antérieures des enfants et de la façon dont ils la perçoivent.

S'agit-il pour eux, d'une activité entièrement nouvelle ou non ? Leur paraît-elle insérée dans un certain contrat éducatif ou non ? (Ont-ils l'impression que cette activité va déboucher sur l'appropriation d'un savoir utile et important, ou au contraire qu'elle est entièrement gratuite).

Peut-on procéder à une analyse plus rigoureuse et formuler des hypothèses sur les rapports qui existent entre :

- d'une part les conditions didactiques dans lesquelles les activités sont proposées
 - d'autre part, l'utilisation qui peut en être faite dans les classes.
 - Jusqu'où le maître doit-il exploiter de telles activités et comment ?
- Il est évident que ce que les enfants retireront d'une activité sera fonction de leur compétence (au sens le plus large), en particulier de

la connaissance des nombres qu'ils ont, et du domaine dans lequel leur langage est opératoire.

Le maître s'efforcera simplement d'orienter les activités dans le sens d'une prise de conscience explicite des comportements mis en jeu ; mais, à quel moment une telle explicitation peut-elle avoir lieu et sous quelle forme ?

Il nous semble quant à nous, qu'elle est tout "naturellement" à sa place, si à un instant donné, elle est nécessaire à la poursuite d'une activité, mais il est souvent très difficile, voire impossible de créer des conditions didactiques adaptées. Elle intervient assez fréquemment lors d'une phase de synthèse après un travail en équipes, chacun racontant sa démarche et cherchant à en expliquer l'intérêt. (Il va sans dire que ces comportements, même explicités, ne seront pas nécessairement repris à leur compte par les autres au cours d'activités ultérieures). Dans le cadre plus précis de la multiplication, elle peut aussi apparaître, lors de la discussion qui régulièrement préside à la mise à jour du répertoire.

Une telle explicitation est une prise de conscience d'un comportement. Elle ne se traduira pas du tout nécessairement par une écriture formelle générale (littérale). L'enfant ne sera pas non plus nécessairement capable de valider son comportement. Elle traduit plutôt la conscience d'un certain savoir faire. Exemple cette petite fille qui avait su calculer 30×40 alors que beaucoup de ses camarades butaient dessus, et qui explique :

"Je me suis dit que 30 fois 40, c'était comme 3 fois 400,
j'ai fait 400 plus 400 plus 400. J'ai trouvé 1200",

ou un autre qui dit :

"Moi, j'ai fait 10 fois 40 en posant l'addition. J'ai trouvé 400

et puis ensuite 400 plus 400 plus 400, parce que 30 c'est 10 plus 10 plus 10".

Si une écriture formelle des propriétés utilisées, est exigée trop tôt sans nécessité réelle, elle pourra au mieux n'avoir aucune influence sur le comportement des enfants. Dans certains cas elle peut créer des blocages par utilisation précoce d'un formalisme mal digéré (exemple : instaurer prématurément comme règle l'adjonction de n zéros quand on multiplie par 10^n).

II INTRODUCTION DU LANGAGE.

La multiplication permet de mathématiser deux types de situations :

- si l'on veut étudier la correspondance entre le nombre de tours de manège à 3 francs le tour et le prix que l'on doit payer pour effectuer ces tours, on a affaire à une loi externe de :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

et la multiplication apparaît en fait comme l'écriture réduite d'additions répétées.

- si l'on se propose d'évaluer le cardinal de l'ensemble $A \times B$ en fonction des cardinaux de A et de B , l'aire d'un rectangle en fonction des mesures de ses côtés, on est dans une situation de mesure-produit, et on a affaire à une loi interne de

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad (\text{ou de } \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \dots)$$

La signification sémantique attachée au symbole " $\times$ " lors de son introduction sera de l'un ou l'autre type suivant la situation qui

aura été proposée aux enfants. Nous allons essayer d'expliquer pourquoi la situation de mesure produit nous paraît préférable.

- il s'agit d'une loi interne, les deux nombres considérés jouiront donc exactement du même statut : $n \times p$ sera le nombre de carreaux d'une grille rectangulaire de n lignes et p colonnes.
- la commutativité est une conséquence immédiate de la définition. Comme disent les enfants "qu'un rectangle soit debout ou couché il a toujours le même nombre de cases".
- la double distributivité correspond au partage du rectangle en 4 morceaux par un trait vertical et un trait horizontal :

	15	10
5		
12		

$$\begin{aligned} 17 \times 25 &= (15 + 12) \times (15 + 10) \\ &= (5 \times 15) + (5 \times 10) + (12 \times 15) + (12 \times 10) \end{aligned}$$

et c'est la base de l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication qui est ainsi visualisée.

- Seule, la multiplication par 0 n'intervient effectivement que lorsque les enfants ont rattaché le produit de deux nombres à une addition itérée. Sur les rectangles il ne pourrait s'agir à leurs yeux que d'une convention.

Si l'on se place dans le cadre de la loi externe :

- les deux nombres ne jouent absolument pas le même rôle. Seules des expériences répétées peuvent convaincre de la commutativité de la

multiplication et l'on peut se demander quel sera le champ de validité d'une telle conviction).

- si la distributivité à gauche est aisément perçue :

$$23 \times 13 = (20 \times 13) + (3 \times 13).$$

Il n'en est pas de même pour la distributivité à droite.

- Par contre le fait que 0 soit élément absorbant et l'élément neutre sont des conséquences immédiates de la définition.
- Enfin quand il sera question d'étendre la multiplication aux nombres décimaux, la loi externe ne permettra jamais que d'aller de :

$\mathbb{N} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ et c'est d'ailleurs ce dont se plaignent de nombreux enseignants.

Remarque 1 : les deux types de situations ne sont pas fondamentalement différents... Si l'on "oublie" certaines caractéristiques des objets considérés, toute situation conduisant à une somme itérée, se mathématise aussi en produit cartésien.

Or, oublier des caractéristiques des objets ne présente aucun inconvénient puisque ce ne sont pas les objets en eux-mêmes qui nous intéressent mais leur dénombrement. Seule importe la possibilité d'établir des bijections entre toutes les classes d'objets. (Dans le cas d'un produit cartésien de telles bijections existent de manière canonique).

Remarque 2 : rattacher la multiplication à la mesure ... produit ne suppose pas que l'on ait fait une étude exhaustive préalable du produit cartésien et de ses propriétés. Le produit cartésien n'est pas commutatif ; le couple (a, b) n'est pas en général égal au couple (b, a) mais le cardinal du pro-

duit $A \times B$ est égal à celui du produit $B \times A$.

Si l'on veut introduire la multiplication à partir de tableaux cartésiens obtenus dans une situation de dénombrement par exemple, ce qui sera important, ce sera de constater que le nombre de cases du tableau ne dépend que du nombre de lignes et de colonnes du tableau : il faudra en quelque sorte oublier son contenu.

Mais on peut aussi se passer de tableaux cartésiens, demander aux enfants de dessiner des rectangles et de poser un jeton dans chaque case, les leur faire découper et ranger suivant le nombre de jetons utilisés.

III - ACTIVITES POSSIBLES : (avant l'apprentissage d'une technique opératoire)

Première phase : les premières activités proposées aux enfants vont viser à assurer la définition de la multiplication dans le cadre où elle a été introduite, à leur faire trouver et reconnaître des écritures équivalentes (ce qui assurera la liaison avec les additions répétées).

- Par exemple, on peut distribuer aux enfants des grilles rectangulaires (pas très grandes) ou les leur faire construire sur du papier quadrillé, et leur demander d'écrire sous différentes formes le nombre de cases de la grille (chaque écriture rappelant un procédé utilisé pour compter le nombre de cases de la grille).

Pour une grille de 5 lignes et 3 colonnes, on obtient, généralement, des écritures variées.

3×5 , 5×3 , $5 + 5 + 5$, $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ mais aussi $10 + 5$,
 $5 + 10$, $9 + 6$.

- On peut aussi donner à chaque enfant un certain nombre de jetons (par exemple 72) et une feuille de papier quadrillé. La consigne est de disposer les jetons de toutes les façons possibles en grilles rectangulaires. Ce genre d'activités plait beaucoup aux enfants. Très souvent, ensuite, chacun veut se choisir un nombre de jetons. Ils sont très étonnés de s'apercevoir que certains obtiennent de nombreux rectangles, d'autres peu. Ils trient les nombres suivant les résultats obtenus, se posent des questions. Bien sûr, il n'est pas question de faire à cette occasion une théorie de la divisibilité et de la décomposition des entiers en facteurs premiers. Cette activité pourra d'ailleurs être reprise et approfondie ultérieurement.

+ Dans cette première phase, nous proposons également aux enfants des situations multiplicatives simples, par exemple :

"dans un zoo, il y a 6 mamans singes, chacune vient d'avoir 4 bébés"

" dans un wagon, il y a 10 compartiments. Dans un wagon de première classe , chaque compartiment peut contenir 6 personnes, dans un wagon de deuxième classe, chaque compartiment peut en contenir 8"

" j'ai 21 fleurs, j'ai 3 vases, je veux mettre le même nombre de fleurs dans chaque vase"

ou pour éviter de présenter uniquement des situations où tous les objets considérés sont de même nature :

" j'ai été chez la fleuriste. J'y ai acheté 5 roses, 5 oeillets, 5 tulipes, 5 glaïeuls, 5 iris, 5 plantes vertes et 3 vases pour mettre mes bouquets".

(Souvent nous reprenons d'ailleurs des problèmes inventés par d'autres élèves l'année précédente).

Pour chacun les enfants décident de ce qu'ils vont chercher et représentent la situation généralement soit en faisant un tableau, soit en dessinant des paquets de croix. Suivant la représentation choisie, ils écrivent des additions ou des multiplications, parfois les deux. Les différentes solutions trouvées sont exposées collectivement.

Nous leur suggérons ensuite d'inventer eux aussi des problèmes. Ces problèmes sont recopiés sur un cahier. Plusieurs séances sont consacrées à leur réalisation.

- L'introduction de la multiplication est aussi l'occasion de revenir sur des activités de numération en base dix et dans des bases autres que dix. En effet, au CP les enfants, pour dénombrer des collections comportant un grand nombre d'objets, ont groupés les objets par tas de même cardinal. Ils ont ensuite privilégié les groupements par dix qui correspondent à la numération usuelle. Au début du CE 1, les paquets figurent toujours dans leur écriture. C'est ainsi que le nombre "cent vingt trois" est écrit suivant les circonstances :

123, 12 p de 10 + 3, 100 + 20 + 3, 1 p de 100 + 2 p de 10 + 3 ...

L'équivalence entre toutes ces écritures nécessitant une gymnastique intellectuelle généralement hors de leurs capacités.

Si on leur donne à compter de grosses quantités d'objets (plusieurs centaines) disposés de manière à faire apparaître des grilles rectangulaires de 100 objets et des rangées de 10 objets, les enfants découvrent que le symbole "p de" qu'ils utilisent depuis le CP est un symbole "X" camouflé et ceci permet d'établir un premier lien entre la multiplication et la numération.

En base autre que dix, des activités ont été menées à partir de jeux de cibles - un compte-rendu figure dans cette brochure.

Deuxième phase : un exemple de situation fonctionnelle (début CE 2).

Les enfants du CE 2 ont mené une enquête sur les tarifs des parkings de la ville. Voici les renseignements qu'ils ont ramenés :

{	Parking de la gare	30mm	1 F
	Parking de la gare	1 mois	60 F (abonnement)
	Parking en ville	1 heure	1 F 50
	Parking du marché	1 heure	1 F 20

Dans un premier temps, ils cherchent des idées de problèmes.

Cela ne manque pas. Par exemple :

- Quel est le prix de l'abonnement au parking de la gare pour un an ?
- Quel est le parking le plus cher? le moins cher ?
- Si une dame se gare tous les jours pendant une heure au parking de la gare, a-t-elle intérêt à prendre un abonnement ?
- Combien vais-je dépenser si je laisse ma voiture 3 heures au Parking du marché ?

Pour résoudre tous les problèmes inventés, les enfants décident de se partager en équipes. Chaque équipe étudiera plus particulièrement le tarif de l'un des parkings.

Toutes les équipes présentent les résultats obtenus sous forme de listes.

Pour résoudre les problèmes il faut disposer des renseignements

obtenus dans les différentes équipes. Une élève propose de consigner tous les résultats sur une même feuille en traçant des représentations graphiques. Les autres acceptent. Le maître distribue à chaque équipe une feuille de papier millimétré de 50 cm de côté. Le choix de l'échelle se fait collectivement. Il soulève d'après discussions :

- "5 centimètres pour 1 franc, c'est trop, on ne pourra pas mettre beaucoup de nombres"
- "1 cm pour 1 franc, ce n'est pas assez, on ne voit pas bien les 20 centimes".

Finalement ils adoptent les échelles suivantes :

2,5 cm pour 1 franc

3 cm pour 1 heure.

Les trois premières situations sont représentées assez rapidement, les enfants repérant comment on passe d'un point au point suivant. Ils remarquent l'alignement des points obtenus et tracent les droites correspondantes.

Mais, quand il s'agit de représenter le tarif du parking de la gare avec abonnement, ce n'est plus aussi simple. Les listes qu'ils ont obtenues sont du type :

Mois	Prix en francs
1	60
2	120
3	180
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

Elles ne peuvent leur servir à rien , puisqu'aucun de ces renseignements ne peut être marqué sur la feuille de papier millimétré avec les unités choisies.

Ils se décident donc à calculer le nombre d'heures dans un mois, puis réduisent les nombres obtenus par divisions successives jusqu'à arriver à des points dans les limites de la feuille de papier :

Heures	Prix en francs
720	60
72	6
36	3
12	1
6	1/2

Ces deux derniers résultats leur permettent de tracer une droite mais mais la précision n'est pas excellente. (A cet âge là, tracer une droite sur du papier millimétré n'est pas chose aisée, surtout si la feuille mesure 50cm de côté).

Avant d'aborder la résolution des problèmes inventés par les enfants le maître propose deux fiches avec les objectifs suivants :

- assurer la lecture des représentations graphiques
- faire chercher par les enfants des méthodes leur permettant de répondre à des questions concernant de grands nombres (hors des limites de la feuille).
- soulever le problème de l'incertitude de la représentation graphique à propos de la droite associée au parking de la gare avec abonnement.

Les fiches sont les suivantes :

- ① Notez les prix correspondants :

Lieu durée	parking	parking : marché.	parking gare	gare abonnement
1h				
2h				
5h				
8h				
10h				
12h				
3h30				

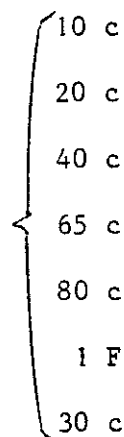
- ② Notez les temps de stationnement autorisés :

Lieu prix	parking	parking marché	parking gare	gare abonnement
6F				
8F				
10F				
13F				
16F				
30F				

La lecture du graphique ne pose pas de problème pour 1H, 2H, 3H30 avec les trois premiers parkings. Par contre pour 8H, 10H, 12H les points

correspondants sur les droites sont très éloignés de l'axe des abscisses. Les enfants se trompent souvent en suivant avec le doigt. Puis l'un d'eux propose d'utiliser la règle placée verticalement comme guide : ("pour être sûr de ne pas changer de droite"). Cette méthode se révèle très satisfaisante et les enfants estiment tous alors que c'est bien plus facile de lire sur le graphique que de faire les calculs.

Pour remplir la dernière colonne, ils se trouvent conduits à faire des approximations. Tous n'obtiennent pas les mêmes nombres. Les réponses les plus couramment fournies sont :



- 10 c
- 20 c
- 40 c
- 65 c
- 80 c
- 1 F
- 30 c

Lors de la synthèse collective, plusieurs élèves font remarquer que ces résultats ne sont sûrement pas tous exacts :

- "si c'était 10 centimes pour 1 heure , ça devrait être 50 centimes pour 5 heures et pas 40 centimes".
- "et puis ça ferait 1 F 20 pour 12 heures".
- "on pourrait essayer 9 centimes de 1'heure".

C'est encore trop. Ils essaient alors 8 centimes de 1'heure, obtiennent 96 centimes pour 12 heures, et décident de faire les calculs avec ce tarif là (faute de mieux). Ils remplissent la colonne en utilisant

la proportionnalité, sauf pour 12 heures bien entendu.

La seconde fiche est remplie beaucoup plus rapidement que la première. Les enfants utilisent les propriétés des fonctions linéaires pour vérifier les résultats obtenus :

- "sur la ligne des 16 F, on a la somme de la ligne des 10 F et de la ligne des 6 F.
- "c'est le double de la ligne des 8 F".

30 F ne correspond pas à une somme portée sur les axes, mais les enfants se débrouillent de différentes façons à partir des résultats connus pour remplir cette dernière ligne :

$$f(30) = 3 f(10)$$

$$f(30) = 2 f(15)$$

$$f(30) = 10 f(3)$$

Pour la dernière colonne, cette fois-ci encore, aucun des nombres ne correspond à un point du graphique. Les enfants reprennent alors la liste commencée lors de la construction des droites, et remarquent qu'un jour de stationnement revient à 2 F.

6 H	50 c
12 H	1 F
24 H	2 F
3 J	6 F
4 J	8 F
5 J	10 F
6 J	12 F
8 J	16 F
15 J	30 F

Quelques enfants se trompent en calculant les moitiés de 13
et de 30.

Après toutes ces activités, résoudre les problèmes posés initia-
lement et tous ceux qu'ils inventent ensuite leur paraît très facile.

don monsieur se gare pour 13 h. au
marché il a 47 F. dans son porte-
monnaie / combien d'argent faut-il
qu'il dépense pour se garer ? $13 \times 4 = 52$ F 60
combien d'argent lui reste-t-il ?
 $47 - 52 = -5$ F 40 et combien d'heures peut-il
encore se garer ? 26 [51] lui reste de
l'argent. combien lui en reste-t-
il ? 20 centimes

Remarque : les enfants remarquent que les représentations graphiques des
3 premières situations (parking de la gare sans abonnement, parking du
marché, parking en ville) sont formées de points alignés. Aussitôt ils
tracent les droites joignant ces points. Par la suite, pour répondre aux
questions qui leur seront posées, soit ils lisent sur les représentations

graphiques, soit ils calculent en utilisant les propriétés des fonctions linéaires. Ils perdent de vue les conditions réelles de la situation. En particulier pour le parking en ville ou le parking du marché qui sont des parkings à tarif horaire, dans la première fiche, pour 3 h 30 ils trouvent 5,25 F et 4,20 F et non 6 F et 4,80 F (sommes qu'aurait effectivement payées quelqu'un qui aurait stationné 3 h 30 dans ces deux parkings). Ceci aurait pu être le point de départ d'une réflexion sur la nécessité de vérifier l'adéquation du modèle construit à la réalité (et en particulier ses limites de validité). D'autres fonctions et représentations graphiques seraient alors intervenues (fonctions en escalier). Mais le maître, tout à sa satisfaction de voir les enfants utiliser avec aisance les propriétés de linéarité pour répondre aux questions posées, d'autre part se montrer capable de réfléchir sur les problèmes posés par l'incertitude des lectures graphiques, a complètement ignoré ce problème.

Pour le parking de la gare avec abonnement, si les enfants avaient voulu fournir une représentation graphique en escalier, ils n'auraient pu placer aucun point dans les limites de la feuille de papier.

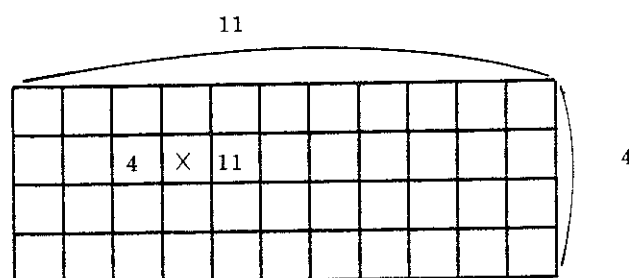
IV. Technique : exemple d'une progression possible

On utilise, pour élaborer une technique, des grilles ou des alignements de points :

IV.1. Première phase :

On fournit aux enfants des grilles de différentes tailles et on leur demande de trouver le nombre de cases de chaque grille.

Si l'introduction du signe "X" a été faite sur des tableaux rectangulaires, il est normal que les enfants donnent $n \times p$ comme nombre de cases de la grille avant de les compter effectivement.



Les deux moyens les plus couramment utilisés par les enfants sont : soit de dénombrer les cases une par une, soit d'utiliser l'addition répétée : $11 + 11 + 11 + 11 = 44$. Les différents moyens sont confrontés à chaque occasion.

Toutes les grilles peuvent être affichées pour que tous les enfants se persuadent que le nombre de cases des grilles ne dépend que de leur nombre de lignes et de leur nombre de colonnes.

Il est important d'indiquer sur le tableau :



L'"accolade" permet aux enfants de ne pas oublier qu'il y a 11 colonnes. Il est préférable qu'ils utilisent des accolades pendant assez longtemps.

Cette phase très libre permet, entre autres activités, de commencer à se constituer un répertoire. Les résultats trouvés par les enfants sont affichés sur un panneau réservé à cet effet.

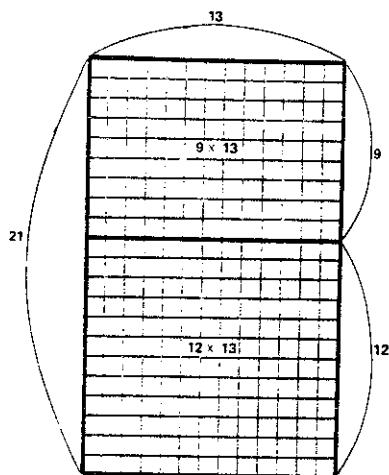
A la fin de cette phase, les enfants ont déjà une bonne connaissance de la commutativité de la multiplication et disposent d'un début de répertoire.

IV.2. Deuxième phase :

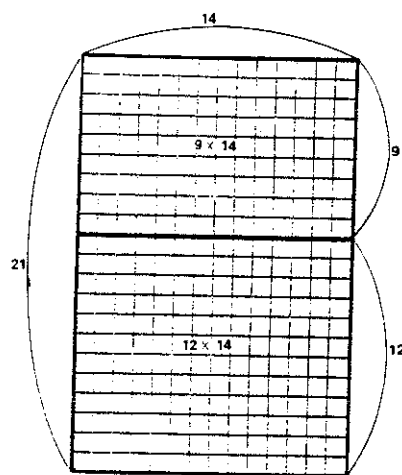
On peut pour cette phase grouper les enfants en équipes de quatre. A chaque enfant, on donne une grille dont il doit dénombrer les cases. Par exemple, les grilles d'une équipe ont pour nombres respectifs de cases : 14×9 , 13×9 , 14×12 et 13×12 .

Quand les enfants ont dénombré leur propre grille, on leur demande de trouver d'autres produits en assemblant leurs grilles.

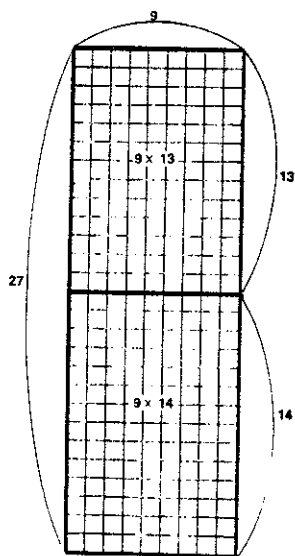
Ils peuvent trouver :



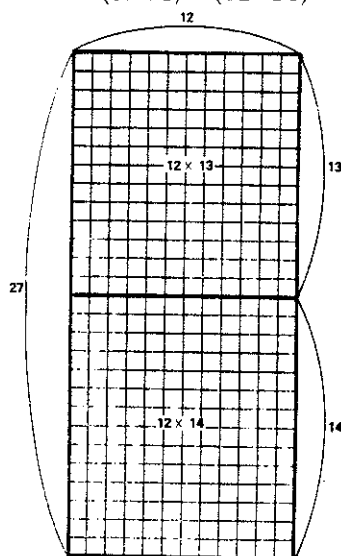
$$21 \times 13 = (9 \times 13) + (12 \times 13)$$



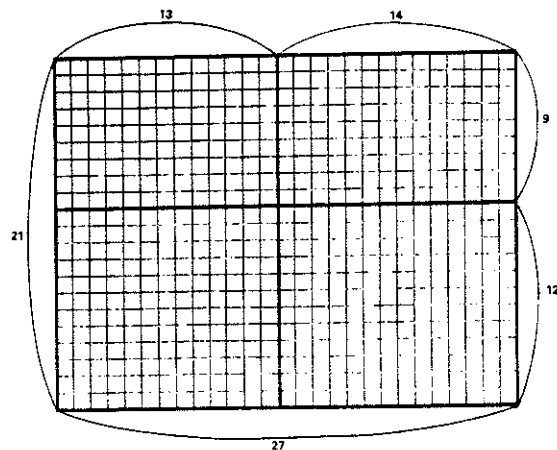
$$21 \times 14 = (9 \times 14) + (12 \times 14)$$



$$9 \times 27 = (9 \times 13) + (9 \times 14)$$



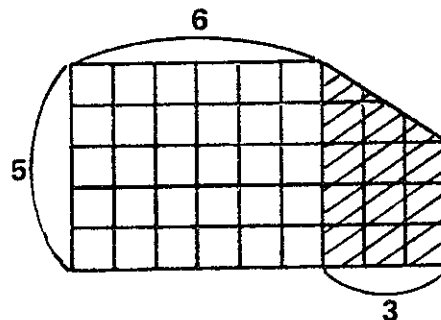
$$12 \times 27 = (12 \times 13) + (12 \times 14)$$



$$27 \times 21 = (14 \times 9) + (13 \times 9) + (14 \times 12) + (13 \times 12)$$

Les enfants vont ensuite exposer leurs résultats au tableau. Ils ont besoin de représenter ce qu'ils ont fait. La nécessité des accolades est ici évidente. Les enfants, grâce à elles, ne perdent pas de vue la signification des nombres écrits sur le côté.

Parallèlement, pour accroître leur connaissance des grilles, on peut aussi leur donner des grilles dont les coins sont repliés. Ils doivent dénombrer les cases sans déplier le coin.



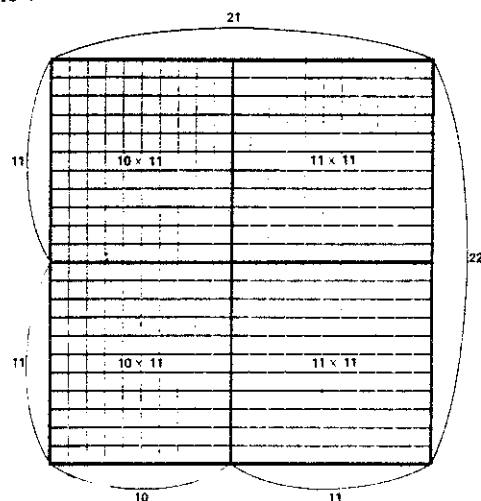
Pour résoudre le problème, ils sont généralement conduits à décomposer la grille en deux sous-grilles, ce qui pourra leur donner l'idée de la faire ultérieurement pour simplifier leurs calculs. D'autre part, ils doivent prendre conscience que les deux côtés opposés d'un rectangle ont même dimension. Pour trouver le nombre de cases cachées, ils doivent dire que le nombre de cases du rectangle hachuré est 5×3 .

Cette deuxième phase permet d'agrandir encore le répertoire des enfants et de leur faire manipuler la distributivité de la multiplication sur l'addition.

IV.3. Troisième phase

On va maintenant donner aux enfants de très grandes grilles : 21×22 , 19×21 , 17×22 , etc. Dénombrer les cases une par une est à coup sûr voué à l'échec ; les additions répétées vont être longues et compliquées ; il faut donc que les enfants trouvent d'autres méthodes. Les activités précédentes vont les amener à découper en sous-grilles pour se ramener à des grilles plus simples, ou utiliser des sous-grilles dont on connaît déjà le nombre de cases (répertoire).

Par exemple :



d'où $22 \times 21 = (10 \times 11) + (10 \times 11) + (11 \times 11) + (11 \times 11)$

Les enfants viennent ensuite au tableau expliquer leurs découpages. Ils doivent être soigneux dans leur représentation, pour que personne n'oublie la signification des nombres écrits autour des grilles et dans celles-ci.

Cette phase doit être assez longue, pour que les enfants fassent chacun un grand nombre de découpages. L'expérience venant, ils choisissent les découpages qui simplifient le calcul.

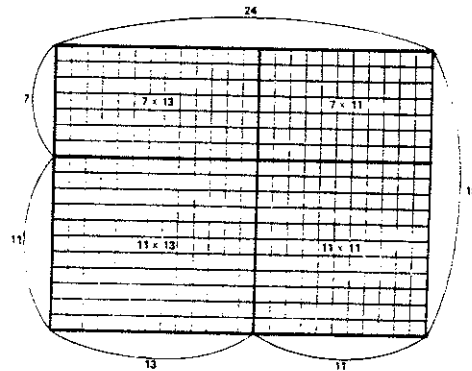
IV.4. Quatrième phase

Dans cette phase, les enfants auront toujours à découper des grilles, mais cette fois-ci le découpage leur sera plus ou moins imposé.

Par exemple, les enfants ont à calculer le nombre 24×18 ; ils doivent le calculer en utilisant les résultats suivants :

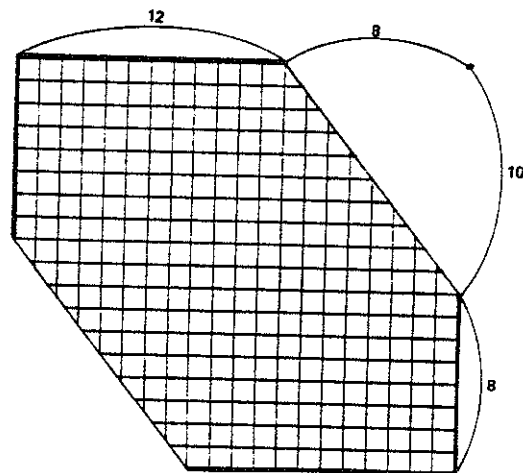
$7 \times 12 = 84$	$13 \times 11 = 141$	$13 \times 13 = 169$	$13 \times 15 = 195$
$11 \times 7 = 77$	$7 \times 15 = 105$	$13 \times 7 = 91$	$12 \times 12 = 144$
$12 \times 11 = 132$			

- 64- Multiplication



$$18 \times 24 = (11 \times 11) + (7 \times 11) + (7 \times 13) + (11 \times 13)$$

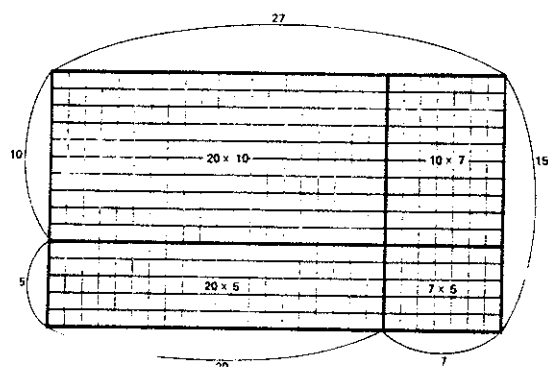
Ou encore on donne des grilles dont les coins sont cachés :



Le nombre de cases de cette grille lorsque l'on déplie les coins est :

$$(12 \times 8) + (8 \times 10) + (8 \times 8) + (12 \times 10) = 20 \times 18$$

Au début, on ne privilégie aucun découpage particulier ; puis, quand les enfants ont découvert qu'il est beaucoup plus facile de découper en faisant apparaître des bandes de 10 carreaux, les répertoires ou les coins cachés sont choisis de façon à favoriser les découpages en sous-grilles dont au moins l'une des dimensions est 10.



$$27 \times 15 = (20 \times 10) + (10 \times 7) + (20 \times 5) + (7 \times 5)$$

Remarque 1

La généralisation du découpage par bandes de 10 ou d'un multiple de 10, de 100 ou d'un multiple de 100, etc. ne va pas de soi ; elle supposerait que les règles de la numération soient suffisamment maîtrisées. Il faudrait en effet pouvoir interpréter, par exemple, 3591 comme l'abréviation de $(3 \times 1000) + (5 \times 100) + (9 \times 10) + 1$.

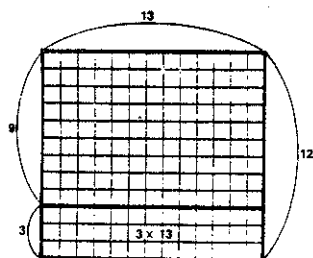
Les activités proposées, au contraire, permettent aux enfants d'étendre simultanément leurs connaissances en numération et en multiplication sans nécessiter la maîtrise préalable du fonctionnement de la numération.

Remarque 2

Il ne faut pas omettre d'entretenir le répertoire. Plus le répertoire est riche et plus l'algorithme de calcul utilisé par les enfants peut être raccourci. Assez rapidement, il devient nécessaire de supprimer les répétitions et de comparer entre eux les résultats enregistrés, bref, d'organiser le répertoire pour pouvoir l'utiliser commodément.

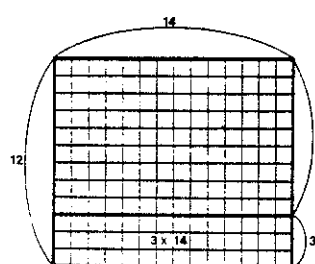
Remarque 3

On peut obtenir des résultats nouveaux, non seulement en assemblant des grilles, mais aussi en les superposant. Voici un exemple qui utilise les grilles 9×13 , 12×13 , 9×14 et 12×14 .



$$3 \times 13 = (12 - 9) \times 13$$

$$3 \times 13 = (12 \times 13) - (9 \times 13)$$



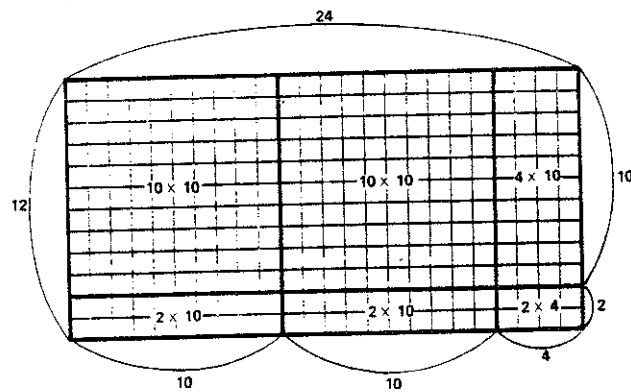
De même :

$$3 \times 14 = (12 \times 14) - (9 \times 14)$$

IV.5. Cinquième phase

A la fin de la quatrième phase, les enfants savent découper la grille de façon à utiliser des résultats connus (par exemple : $7 \times 10 = 70$, $10 \times 10 = 100$, $100 \times 10 = 1000$). Les grilles sont encore exactement quadrillées à l'échelle.

Par exemple :



Ainsi :

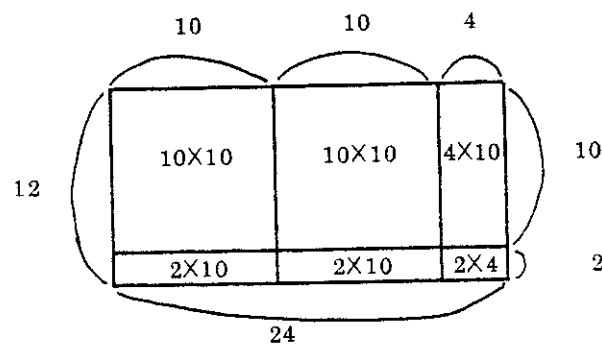
$$24 \times 12 = (10 \times 10) + (10 \times 10) + (4 \times 10) + (2 \times 10) + (2 \times 10) + (2 \times 4)$$

2×4 est dans le répertoire ; 2×10 est vu comme 2 paquets de dix, donc $2 \times 10 = 20$; 10×10 est vu comme 10 paquets de dix.

La cinquième phase va viser deux buts :

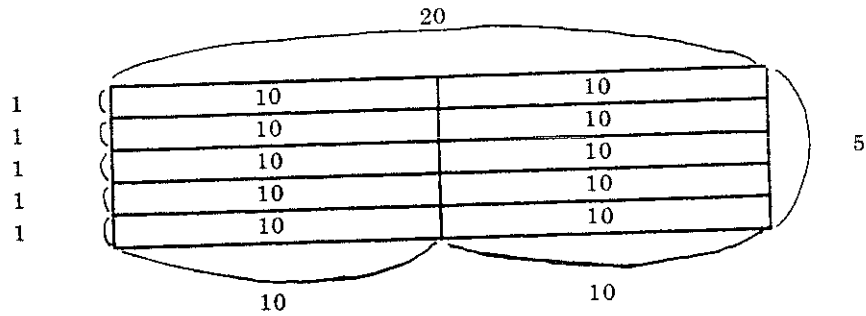
- l'utilisation de rectangles non quadrillés ;
- le calcul du nombre de cases de grilles telles que 9×60 , 80×90 , 8×800 , etc.

Pendant toute la première partie de la cinquième phase, les enfants reprennent les mêmes activités qu'aux phases précédentes mais en utilisant des rectangles non quadrillés, par exemple :



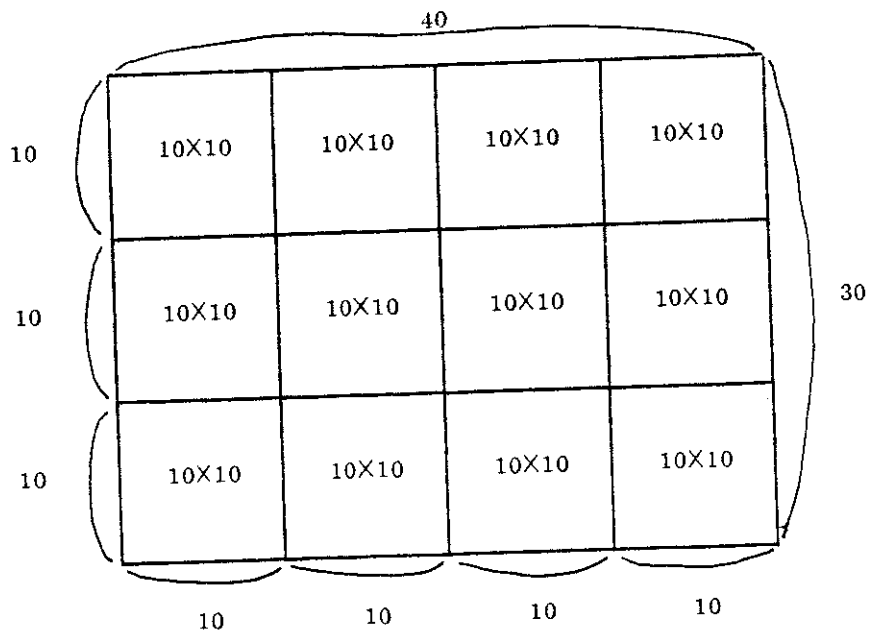
Ensuite, les enfants ont à dénombrer les cases de grilles du type 5×20 , 9×60 , 8×40 , 7×70 , etc. en utilisant seulement le répertoire : $5 \times 2 = 10$ ou $9 \times 6 = 54$ ou $8 \times 4 = 32$ ou $7 \times 7 = 49$, etc.

Ainsi, pour 5×20 , le dessin ci-dessous met en évidence (5×2) bandes de 10 cases, soit 100 cases.



Les enfants ont de la même façon à dénombrer les cases de grilles du type 30×40 , 90×60 , 80×40 , etc. ; à l'aide du répertoire, $3 \times 4 = 12$ ou $9 \times 6 = 54$ ou $8 \times 4 = 32$, etc.

Chaque carré est composé de 10 bandes de 10 cases, donc 10 dizaines, donc 100 cases ; et il y a $3 \times 4 = 12$ carrés ; donc 30×40 c'est 12 centaines ; donc $30 \times 40 = 1200$



On peut ensuite donner ce même genre d'exercices avec des grilles du type 8×800 ou 70×900 , etc.

Cette phase délicate nécessite des manipulations qui deviennent vite fastidieuses. Elle a pour objectif essentiel la mise en oeuvre de l'associativité de la multiplication dans les cas particuliers où un ou plusieurs facteurs sont des puissances de 10.

$$80 \times 60 = (8 \times 10) \times (6 \times 10)$$

$$8 \times 800 = 8 \times (8 \times 100)$$

$$80 \times 60 = (8 \times 6) \times (10 \times 10)$$

$$8 \times 800 = (8 \times 8) \times 100$$

$$80 \times 60 = 48 \times 100$$

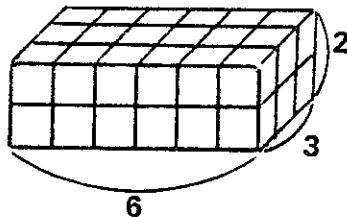
$$8 \times 800 = 64 \times 100$$

$$80 \times 60 = 4800$$

$$8 \times 800 = 6400$$

Pour faciliter cette découverte, on peut proposer aux enfants des exercices des types suivants :

— Faire construire des pavés à l'aide de petits cubes ; faire prévoir le nombre de petits cubes nécessaires à la réalisation d'un pavé donné ; faire calculer le nombre de morceaux contenus dans un paquet de sucre, etc.



Plusieurs calculs sont possibles :

$$(6 \times 3) \times 2 = 36$$

$$6 \times (3 \times 2) = 36 \text{ , etc.}$$

— Pour décorer une salle, j'achète 5 bottes de fleurs. Chaque botte est composée de 7 bouquets de 10 oeillets. Chaque oeillet coûte 2 francs.

Si différents calculs sont proposés par les élèves, leur comparaison conduit à des égalités du type :

$$(5 \times 7) \times 10 = 5 \times (7 \times 10)$$

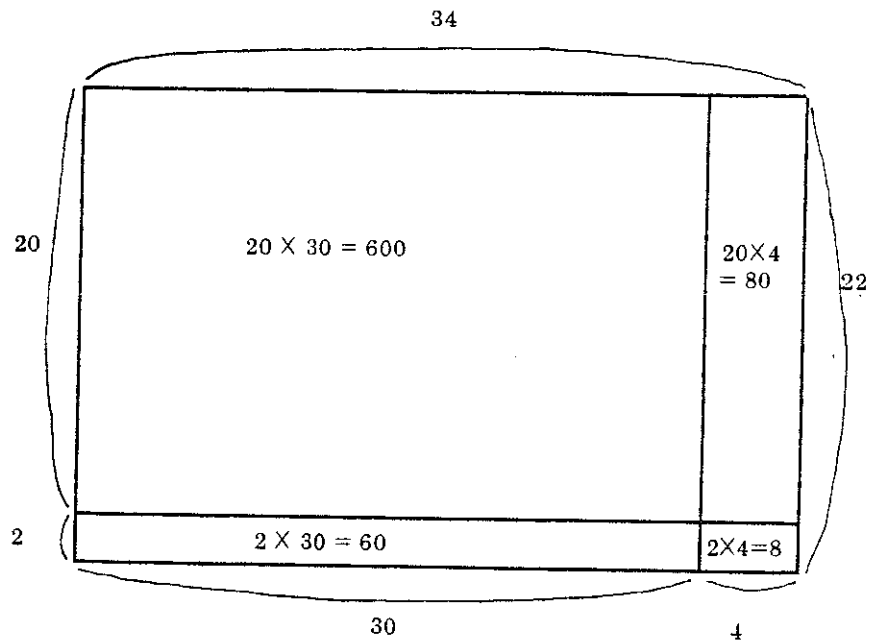
selon que l'on a calculé d'abord le nombre de bouquets, ou d'abord le nombre d'oeillets par botte.

Remarque

Tout au long de l'étude du dénombrement des cases (ou des points) d'une grille, il est indispensable de donner aux élèves l'occasion d'utiliser leur savoir-faire comme technique de calcul pour étudier des situations anecdotiques, vécues ou imaginaires, faisant intervenir la multiplication.

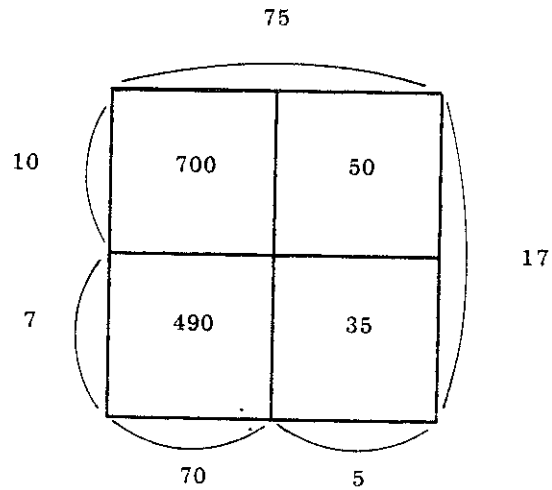
IV.6. Sixième phase

A la fin de la cinquième phase, les enfants en sont au stade suivant : s'ils doivent calculer 34×22 , ils dessinent :



$$600 + 60 + 80 + 8 = 748$$

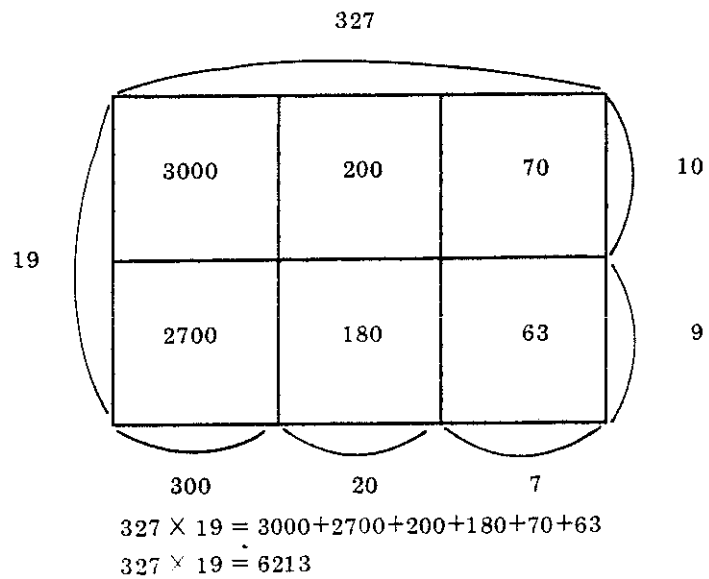
Très vite les enfants trouvent lassant de respecter les proportions et petit à petit ils en arrivent aux schémas suivants :



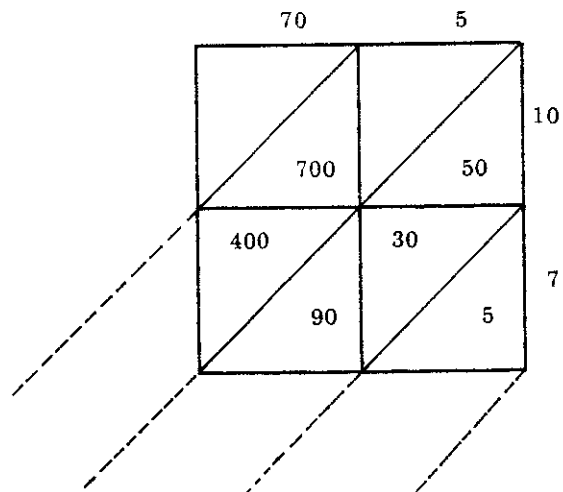
$$75 \times 17 = 700 + 490 + 50 + 35$$

$$75 \times 17 = 1275$$

- 70 - Multiplication



On peut réduire les écritures en organisant le schéma de la façon suivante :



d'où

$$75 \times 17 = 1275$$

en utilisant la technique habituelle d'addition, mais le long des diagonales.

IV.7. Utilisation de cartons de couleurs

Pour visualiser cela, il est nécessaire de suggérer une convention aux enfants. Lorsque l'on écrit un nombre, on utilise par exemple un carton marron pour les dix mille, un carton vert pour les milliers, un carton rouge pour les centaines, un carton bleu pour les dizaines, un carton jaune pour les unités.

3 4 8 7 se code

3

4

8

7

V R B J

On code ainsi tous les nombres intervenant dans un calcul :

4

8

7

R B J

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>M</td><td>V</td></tr></table>	1	2	M	V	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>V</td><td>R</td></tr></table>	2	4	V	R	<table border="1"><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>R</td><td>B</td></tr></table>	2	1	R	B	<table border="1"><tr><td>3</td></tr><tr><td>B</td></tr></table>	3	B
1	2																
M	V																
2	4																
V	R																
2	1																
R	B																
3																	
B																	
<table border="1"><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>V</td><td>R</td></tr></table>	2	8	V	R	<table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>R</td><td>B</td></tr></table>	5	6	R	B	<table border="1"><tr><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>B</td><td>J</td></tr></table>	4	9	B	J	<table border="1"><tr><td>7</td></tr><tr><td>J</td></tr></table>	7	J
2	8																
V	R																
5	6																
R	B																
4	9																
B	J																
7																	
J																	

Les enfants savent que pour faire une addition, on additionne ensemble les unités, puis les dizaines, puis les centaines, puis les milliers, etc. On obtient :

1

6

19

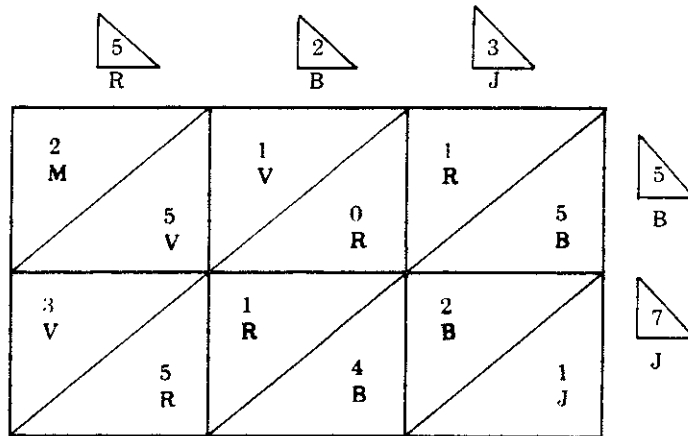
11

9

M V R B J

ensuite on fait les reports habituels pour obtenir 18 019.

Si, au lieu de carrés, le maître fournit alors des triangles de couleur pour écrire les nombres dans la grille, l'addition en diagonale est visualisée par des bandes de couleurs :



On retrouve la technique habituelle de l'addition, les colonnes étant en diagonales. Les couleurs permettent de visualiser les diagonales et de supprimer sans risque les zéros.

Remarque

On pourrait avoir l'espoir qu'en faisant de nombreuses fois les additions avec les zéros les enfants découvraient "l'addition en diagonale" ; en fait il n'en est rien.

Ainsi le calcul de 523×57 s'achevait jusqu'alors par l'addition dans un ordre quelconque des six nombres écrits dans la grille sans les décomposer.

500	20	3	
25000	1000	150	50
3500	140	21	7

Par exemple :

$$\begin{array}{r}
 25000 \\
 + 1000 \\
 + 3500 \\
 + 140 \\
 + 150 \\
 + 21 \\
 \hline
 29811
 \end{array}$$

Tandis que la nouvelle technique de calcul en diagonale utilise la décomposition des six nombres :

	5	2	3	
	2	1	1	
	5	0	5	5
	3	1	2	
	5	4	1	7

La disposition ci-contre, que les enfants n'utilisent pas, illustre les calculs qu'ils font.

	1
+	50
+	20
+	40
+	100
+	100
+	500
+	1000
+	5000
+	3000
+	20000

29811

IV.8. La technique finale

Une fois que les enfants ont reconnu la technique habituelle d'addition, ils abandonnent les couleurs et arrivent ainsi à une technique sûre et efficace dont voici une illustration :

	5	8	7	
	3	4	4	
	0	8	2	6
	2	4	3	
	5	0	5	5
	4	6	5	
	0	4	6	8
	2	4	6	

$$587 \times 658 = 386\ 246$$

Le grand avantage de cette technique est la possibilité de calculer les produits partiels indépendamment les uns des autres, dans un ordre arbitraire et en s'arrêtant au besoin, car il n'y a pas de retenue ; de plus, il est loisible de vérifier chacun des résultats écrits avant de passer à l'addition.

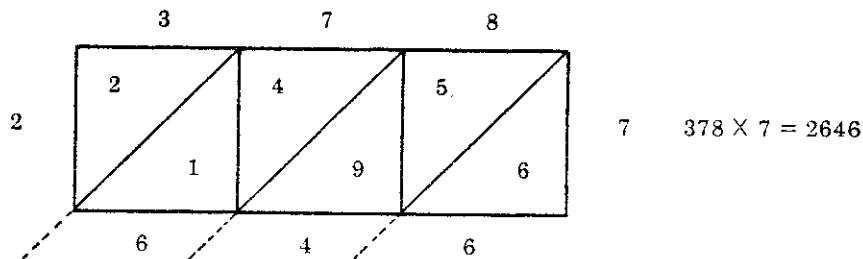
Le seul inconvénient de cette technique est l'obligation de dessiner la grille avec les diagonales.

La technique habituelle est un raccourci de la technique précédente ; elle réduit les écritures mais elle surcharge la mémoire par le jeu entre-croisé des multiplications et des additions partielles ; on est ainsi contraint d'utiliser les retenues ; en outre, on ne peut s'arrêter qu'à certaines étapes bien précises du calcul. La technique habituelle n'est d'un emploi commode que dans le cas de produits de petits nombres (trois ou quatre chiffres pour un adulte moyennement entraîné). Le nombre des erreurs dues à la fatigue augmente rapidement avec la taille des nombres à multiplier.

IV.9. La technique usuelle

Nous allons exposer une méthode qui permet de passer d'une technique à l'autre.

— On reprend d'abord le calcul des produits d'un nombre par un nombre d'un chiffre ;



L'observation de ce genre de grilles permet le passage à l'écriture plus condensée habituelle :

$$\begin{array}{r}
 378 \\
 \times 7 \\
 \hline
 6 \quad \text{le 5 est mis en mémoire} \\
 \text{et est additionné à } 7 \times 7 : \quad 378 \\
 \times 7 \\
 \hline
 46 \quad \text{le 5 est mis en mémoire} \\
 \text{et est additionné à } 7 \times 3 : \quad 378 \\
 \times 7 \\
 \hline
 2646
 \end{array}$$

— Ensuite on observe des grilles ayant plus d'une ligne :

	3	7	8	
4	1 2	2 8	3 2	
7	2 1	4 9	5 6	

Chaque ligne peut se condenser de la manière expliquée pour des grilles à une ligne :

	3	7	8	
4	1 5	1	2	
7	2 6	4	6	

On redresse le calcul :

$$\begin{array}{r} 1512 \\ + 2646 \\ \hline \end{array}$$

Et on arrive enfin à la disposition habituelle en écrivant en premier le produit par le chiffre des unités (2646) puis celui par le chiffre des dizaines (1512) dûment décalé.

Remarque

Il ne faut pas se cacher que chez certains enfants le passage d'une technique voisine d'une technique artisanale, qu'ils ont mise au point eux-mêmes, à une technique "venue de l'extérieur" pose des problèmes qui sont plus d'ordre psychologique que mathématique. De toutes façons, il semble souhaitable de laisser les enfants utiliser la technique qui leur convient le mieux, selon le calcul à effectuer.

DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES DANS UNE CLASSE DE CM₁

Cette activité a de multiples intérêts pour les acquisitions mathématiques des enfants :

- sur le plan géométrique, elle permet d'enrichir la notion de carré
- c'est une situation très ouverte qui permet aux enfants de développer leur imagination géométrique.
- sur le plan numérique, elle fait aborder des relations du genre

$$n \longrightarrow n^2 \quad \text{et} \quad n \longrightarrow (n \times n) + b$$

- sur le plan graphique, elle fait découvrir des courbes qui ne sont pas des droites ce qui peut faire réfléchir sur les relations qui se représentent par des droites.

Première séance

Le maître a donné aux enfants des feuilles quadrillées au demi-centimètre. Ensuite il leur explique qu'ils vont avoir à ~~dessiner~~ dessiner des carrés sur cette feuille, puis à partager ces carrés en carrés. Le maître demande à un enfant de venir dessiner un carré au tableau, l'enfant hésite puis dessine un quadrilatère qui ressemble à un carré sur le tableau. Un autre enfant proteste que ce n'est pas un carré et qu'il serait beaucoup plus facile d'en dessiner un sur le tableau quadrillé. Sur le tableau quadrillé, il en dessine un facilement en suivant les lignes du quadrillage et tous les enfants sont d'accord car "les quatre côtés ont bien la même dimension" disent-ils. Une fois tout le monde bien d'accord sur ce qu'est un carré sur du papier quadrillé, les enfants commencent à dessiner des carrés et à les partager en carrés. Les enfants sont ravis et ils dessinent beaucoup de carrés et de partages différents

A ce moment le maître a cherché à percevoir la notion qu'avaient les enfants du carré. Il s'est aperçu à travers leurs discours, que dans cette classe, les enfants donnaient comme critères du carré :

- le carré à 4 coins
- le carré à 4 côtés de même longueur
- les côtés du carré sont droits.

Cette dernière proposition étonnait un peu le maître qui a dessiné sur le quadrillage un carré posé sur la pointe. "Ce n'est pas un carré" ont dit les enfants parce que les côtés ne sont pas droits (c'est-à-dire horizontaux et verticaux). Qu'ils aient cette notion du carré n'est pas gênant pour le découpage des carrés, mais il va falloir prévoir des activités qui leur fera prendre conscience de l'invariance du carré par déplacement.

Deuxième séance

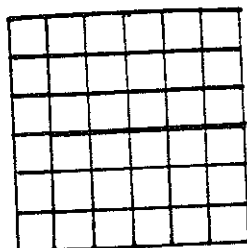
Le maître fait rappeler la consigne, certains enfants viennent dessiner sur un grand panneau quadrillé affiché dans la classe un de leurs découpages : un découpage en 4, un découpage en 9, un découpage en 10, un découpage en 13.

Le maître demande alors aux enfants de chercher tous les découpages entre 1 et 25.

Au début la consigne était volontairement très lâche pour que les enfants puissent dessiner au gré de leur fantaisie. C'est nécessaire pour qu'ils commencent à se familiariser avec la situation. Si on avait donné dès le début la consigne plus restreinte (trouver tous les découpages entre 1 et 25), cela aurait eu un effet bloquant sur les enfants qui n'ayant encore aucune idée n'auraient pas su par où commencer. Au contraire, après la phase de libre recherche, il convient de rétrécir le champ de cette recherche pour obliger les enfants à trouver des procédés systématiques.

Le maître a étudié les productions des enfants lors de cette phase et il s'est aperçu qu'il y avait des formes de découpage qui étaient plus fréquemment employées par les enfants.

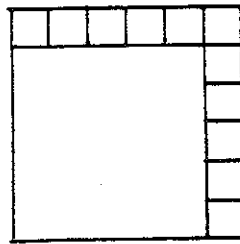
Le premier procédé de découpage systématique est celui en carrés d'un demi-centimètre de côté (la maille du quadrillage) :



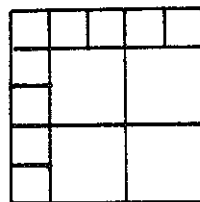
C'est aussi le procédé le plus fréquemment utilisé : on trouve 67 découpages en carrés réguliers dans leurs dessins.

Cette technique ne permet pas de trouver tous les découpages entre 1 et 25, mais elle donne quand même des découpages en 1, 4, 9, 16, 25.

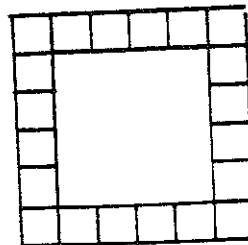
Il y a un autre mode de découpage qui a eu beaucoup de succès (il a été utilisé 40 fois), c'est celui où un grand carré est bordé par 2 rangées de petits carrés de la taille de la maille du quadrillage :



Un autre mode de découpage dérivé du précédent (on partage le grand carré en quatre carrés) a été encore fréquemment utilisé : 34 fois



Un autre procédé a eu la faveur de quelques enfants, c'est un grand carré entouré d'une bande de petits carrés de la taille de la maille.



Il est apparu beaucoup d'autres procédés de découpages mais beaucoup moins fréquemment utilisés que les quatre décrits ici.

Devant la fréquence d'apparition de ces modes de découpages, le maître va choisir de les faire étudier systématiquement par les enfants. S'il n'était pas apparu de mode de découpage privilégié, le maître aurait demandé aux enfants de trouver un moyen simple de raffiner un découpage. C'est ce qui avait été fait dans une autre classe de C.M.₁. Nous donnons un bref compte rendu de ce travail à la fin.

3ème séance

Le maître demande aux enfants de venir dessiner au tableau les découpages en 1, 2, ... 25 qu'ils ont trouvés. Ils demandent aux enfants de dessiner, de préférence, des découpages "faciles à compter".

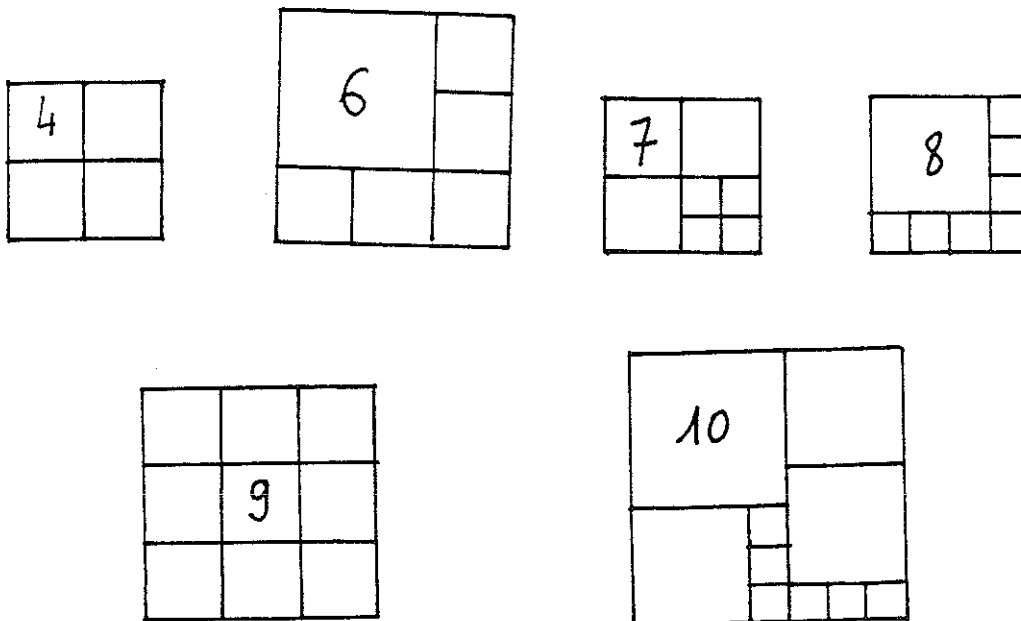
La notion de "facile à compter" tend à éliminer les découpages farfelus et tarabiscotés où l'on doit cocher chaque carré pour réussir à les compter correctement.

Les enfants viennent dessiner le découpage en 1, puis se pose le problème de deux et trois. Les enfants affirment que l'on ne peut pas trouver de découpage en 2 ou 3, mais lorsqu'on leur demande s'ils ont une bonne raison de penser cela, ils savent seulement répondre qu'ils ont essayé de partager en 2 ou 3 carrés et qu'ils n'y sont pas arrivés.

Ils ont sans doute quelques bonnes raisons de penser que l'on ne peut pas partager le carré en 2 carrés, mais ils ne savent pas les expliciter.

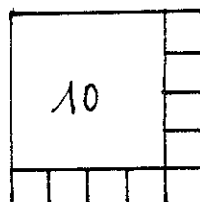
Un enfant fait alors remarquer qu'ils n'a pas réussi à trouver 5, et tout le monde constate qu'ils n'ont pas trouvé de découpage en 5, mais ils n'osent plus affirmer que c'est impossible de découper le carré en 5 carrés. Une fois la discussion terminée sur le sujet des cas "impossibles", ils viennent dessiner leurs découpages :

./...



Les enfants alors protestent que ce découpage en 10 est bien compliqué, bien tarabiscoté qu'il y en a un plus simple et de plus très facile à compter. Le maître demande alors à un enfant de venir dessiner un découpage en 10 plus simple.

On obtient alors ce découpage :

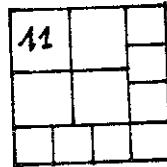


Le maître demande alors aux enfants s'ils n'ont pas de remarques à faire sur la forme des découpages affichés. Les enfants s'exclament alors qu'il y a beaucoup de "L" renversés. Le maître signale aux enfants qu'il acceptera plus volontiers pour afficher au tableau un découpage dont la forme aura déjà été rencontrée.

Là, le maître oriente définitivement l'activité vers l'étude de formes de découpage précises

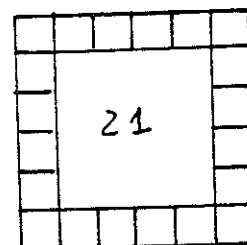
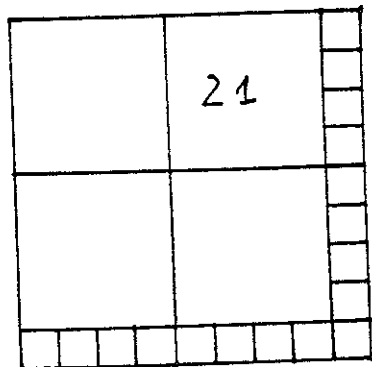
Les enfants affichent alors les découpages jusqu'à 25 et tous ces découpages sauf 11, 19, 20, 21 et 22 sont des découpages dont nous avons signalé la forme dans la deuxième séance.

Le maître demande aux enfants de donner un nom à ces modes de découpages et les enfants appellent : "famille des grilles" les découpages en carrés isométriques (1, 4, 9, 16, 25), "famille des équerres" les découpages faisant apparaître un L renversé, la "famille des fenêtres" les découpages obtenus en coupant en quatre le grand carré d'une équerre, et la "famille des cadres", le découpage comportant un grand carré entouré sur ses quatre côtés par des petits carrés. Les enfants se posent alors le problème de savoir si tous les découpages peuvent être obtenus par ces familles et ils se mettent aussitôt au travail pour ceux qui leur manquent à savoir 11, 19, 20, 21, 22. Les enfants ont un certain mal à trouver 11, en effet ils ont coupé en quatre un carré de côté 3



Les enfants ont du mal à découper un carré 3 X 3 en quatre. Ce léger blocage est dû à l'utilisation du papier quadrillé plutôt que du papier blanc. Nous avons cependant rejeté le papier blanc à cause des difficultés qu'ont les enfants pour différencier un carré d'un rectangle sur du papier blanc. Déjà sur le quadrillage au demi-centimètre, certains enfants, à l'oeil, construisent des carrés $n \times (n+1)$.

Par contre pour 21, ils ont trouvé deux solutions :



La séance se termine sur la question : "Est-ce qu'on aura tous les découpages de 6 à en utilisant les modes de découpages des 4 familles?"

En fait c'est largement suffisant, il suffit même de la famille des équerres et de celle des fenêtres pour avoir tous les découpages de 6 à ...

Quatrième séance

Le maître demande aux enfants ce qu'ils voudraient faire pour essayer de répondre à la question qu'ils s'étaient posés. Les enfants suggèrent d'étudier systématiquement chaque famille. Comme ce serait trop long si toute la classe faisait le travail, le maître suggère de partager la classe en quatre équipes, chaque équipe s'occupant d'une seule famille.

Les enfants de toutes les équipes, sauf l'équipe qui s'occupait de la famille des fenêtres, ont procédé systématiquement. Ils commençaient par essayer de découper un carré de côté 2, puis de côté 3, etc....

Pour la famille des grilles ils ont obtenu :

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. 121. 144. 169.

Pour la famille des cadres ils ont obtenu :

9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41.

Pour la famille des équerres ils ont obtenu :

4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 28.

Pour la famille des grilles ils pouvaient commencer avec un carré de côté 1, avec celle des cadres par un carré de côté 3, avec celle des équerres par un carré de côté 2.

L'équipe qui a la famille des fenêtres a construit 15, puis 11, puis 7, puis 13, puis 17, puis 25, puis 19, puis 21 et encore 25 et ils ont écrit la liste de ce qu'ils avaient obtenu; on pouvait obtenir 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31.

Les enfants qui ont cette famille ont l'idée que l'on va pouvoir construire tous les découpages en nombre impair avec leur méthode.

A la fin de la séance, les enfants racontent rapidement ce qui est surprenant dans ce qu'ils ont trouvé. Une équipe dit : "on a tous les nombres pairs", une autre "on a tous les nombres impairs à partir de 7"

Cela confirme les enfants dans leur conviction : On peut bien découper en n'importe quel nombre un carré avec leurs modes de découpage.

Cinquième séance

Pour bien rappeler le travail de la séance précédente les enfants viennent par équipe montrer leur travail à la classe en utilisant un épiscope.

. Pascale présente la famille des grilles et un enfant lui demande comment elle a fait pour compter les carrés du découpage, dans le découpage en 144 et en 169, elle explique que son équipe a fait les multiplications 12×12 et 13×13 .

. Pour la famille des équerres, les enfants affirment qu'ils peuvent obtenir par cette méthode tous les nombres pairs et ils expliquent que le nombre de carrés du découpage est le double du nombre de carrés-maille contenu dans le côté du carré

Cette équipe avait noté, la dimension du carré et le nombre de carrés du découpage, ils avaient donc sous les yeux les couples (3,6), (4,8), (5,10) etc....

. Pour la famille des fenêtres, les enfants affirment sans justification qu'ils obtiendront par cette méthode tous les nombres impairs.

. Pour la famille des cadres, les enfants sont déçus. Ils n'obtiennent que des nombres impairs, mais pas tous, un enfant fait remarquer qu'ils les obtiennent un sur deux.

Le maître ici va choisir de faire chercher aux enfants la relation entre la dimension du carré et le nombre de carrés du découpage. Il aurait pu choisir une autre orientation qui aurait été :

"Etant donné un nombre N de carrés du découpage, est-ce que je peux le trouver dans la famille des grilles, dans la famille des équerres etc... ?"

Si le nombre est pair il est dans la famille des équerres. Peut-il être dans la famille des grilles? Cela obligerait les enfants à faire beaucoup de multiplications pour essayer d'encadrer le nombre donné.

*Si le nombre est impair il est dans la famille des fenêtres.
Peut-il être dans la famille des cadres?*

Par exemple 147

*Les enfants n'ont pas d'autre ressource que d'essayer de reconstruire
à l'envers la suite : 147, 143, 141 etc... et de voir si on aboutit ou non à
61, 57, etc...*

*Petit à petit ils seront amenés à utiliser des procédures plus
rapides*

$$\begin{array}{ll} 147 - 40 = 107 & 107 - 40 = 67 \\ 67 - 4 = 63 & 63 - 4 = 59 \end{array}$$

147 n'est pas dans la famille des cadres. Pour 611 :

$$\begin{array}{ll} 611 - 400 = 211 & \\ 211 - 40 = 171 & 171 - 40 = 131 \\ 131 - 40 = 91 & 91 - 40 = 51 \end{array}$$

611 n'est pas dans la famille des cadres.

Ce serait un excellent exercice de préparation à la division.

Le maître demande aux enfants de construire un découpage de leur famille. Ainsi pour la famille des équerres, les enfants affirment qu'il y a tous les nombres pairs, qu'ils exhibent, ils choisissent de chercher un découpage en 40 carrés, pour la famille des fenêtres ils choisissent 45 carrés, pour la famille des cadres les enfants ne savent pas. Comment trouver un nombre impair dont on soit sûr qu'il est dans la famille des cadres? Les enfants proposent de continuer la liste 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61 et ils doivent construire un découpage en 61 carrés. Les enfants de la famille des grilles travaillent avec les enfants de la famille des équerres.

Pour la famille des équerres, les enfants trouvent très vite : ils savent qu'on obtient la dimension du carré à découper en divisant par 2 le nombre de carrés du découpage.

Pour les autres familles, les enfants tatonnent, ils ne savent pas trop comment s'y prendre. Finalement ils décident de faire leur liste en écrivant pour chaque découpage la dimension du carré en face du nombre de carrés du découpage. Le maître conseille alors à toutes les équipes de faire de même.

Après une petite discussion, les enfants décident de faire un tableau où n désignera la dimension du carré et N le nombre de carrés du découpage.

| n | N | n | N | n | N | n | N |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 3 | 6 | 2 | 7 | 3 | 9 |
| 2 | 4 | 4 | 8 | 3 | 9 | 4 | 13 |
| 3 | 9 | 5 | 10 | 4 | 11 | 5 | 17 |
| 4 | 16 | 6 | 12 | 5 | 13 | 6 | 21 |
| 5 | 25 | 7 | 14 | 6 | 15 | 7 | 25 |
| 6 | 36 | 8 | 16 | 7 | 17 | 8 | 29 |
| 7 | 49 | 10 | 20 | 8 | 19 | 9 | 33 |
| 8 | 64 | 11 | 22 | 9 | 21 | 10 | 37 |
| 9 | 81 | 12 | 24 | 10 | 23 | 11 | 41 |
| | | 13 | 26 | 11 | 25 | 12 | 45 |
| | | 14 | 28 | 12 | 27 | 13 | 49 |
| | | | | | | 14 | 53 |

Ainsi chaque équipe trouve le découpage demandé. Le maître demande alors aux enfants de prendre un carré de côté 100, et de trouver pour chaque famille le nombre de carrés du découpage.

Pour les grilles et les équerres ils écrivent

$$100 \times 100 = 10\,000 \quad \text{et} \quad 2 \times 100 = 200$$

Mais pour les fenêtres et pour les cadres les enfants sont bien embêtés. Puis un enfant a l'idée de se servir de l'équerre de côté 100, il dit donc c'est $(2 \times 100) + 4$, tout le monde s'écrit que c'est faux, en effet, 204 est un nombre pair. Puis finalement tout s'éclaircit, le carré du milieu a été remplacé par 4 carrés donc au lieu de compter un on doit compter 4 :

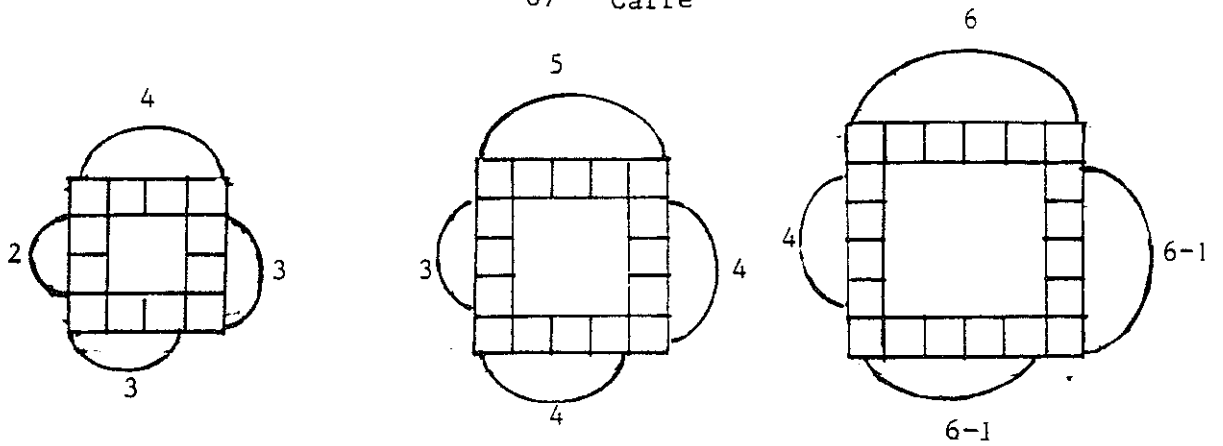
$$(2 \times 100) - 1 + 4 = (2 \times 100) + 3$$

et les enfants vérifient que c'est toujours ainsi :

$$7 = (2 \times 2) + 3 \quad 9 = (2 \times 3) + 3 \quad \text{etc....}$$

Pour les cadres c'est toujours la grande perplexité et un enfant propose de redessiner et de recompter les découpages des cadres:

./....

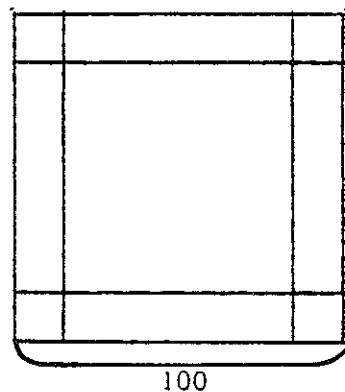


$$4 + (4 - 1) + (4 - 1) + (4 - 2) + 1 = 13$$

$$5 + (5 - 1) + (5 - 1) + (5 - 2) + 1 = 17$$

$$6 + (6 - 1) + (6 - 1) + (6 - 2) + 1 = 21$$

Le maître dessine au tableau (non quadrillé) :



et un enfant vient calculer et mettre les parapluies (grande accolade)

$$100 + (100 - 1) + (100 - 1) + (100 - 2) + 1 =$$

$$100 + 99 + 99 + 99 = (4 \times 100) - 3 = 397$$

Le maître demande alors de trouver le nombre de carrés du découpage pour un carré de côté n dans tous les familles. Il y a un moment de surprise et le maître explique que n est le nombre de carrés maille du côté du carré que l'on va découper.

Les enfants trouvent alors assez facilement pour les grilles $N = n \times n$ et pour les équerres $2 \times n = N$ pour les fenêtres et les cadres, ils vont refaire la même démarche que pour 100.

Pour les fenêtres, c'est 3 de plus que le découpage en équerre donc $(2 \times n) + 3 = N$. Pour les cadres, il faut dénombrer : 1er côté n , 2ème côté $n - 1$, 3ème côté $n - 1$, 4ème côté $n - 2$, et il en reste un au centre donc $n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2) + 1 = n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) = (4 \times n) - 3 = N$

Sixième séance

Au début de la séance, le maître demande aux enfants de trouver les nombres manquants du tableau :

| n | $N = 2xn$ | $N = (2xn)+3$ | $N = (4xn)-3$ | $N = nxn$ |
|----|-----------|---------------|---------------|-----------|
| 30 | | | | |
| 50 | | | | |
| 15 | | | | |
| 70 | | | | |

Cette activité est faite à titre de calcul rapide. Elle permet de vérifier que les enfants utilisent correctement la notion de variable

Ensuite, il leur a demandé de trouver, toujours à titre de calcul rapide, les dimensions d'un carré pour qu'on puisse le découper en 16, 21, 25, 48, dans la famille des équerres, la famille des cadres ou la famille des fenêtres.

Cette activité aurait pu être approfondie avec la famille des cadres. En effet "trouver les dimensions du carré qu'on a découpé en 61 par un cadre?" constitue un problème de division, et les recherches des enfants les auraient conduits vers des algorithmes sommaires de division.

Une fois les calculs terminés, chaque enfant doit construire le graphique d'une des familles (N en fonction de n). Ensuite un enfant par famille exposera son graphique et les enfants pourront discuter sur les différences entre graphiques des diverses familles. Les enfants se mettent d'accord sur une échelle et ils décident d'utiliser tous la même. Durant la fin de la séance, les enfants terminent leurs graphiques.

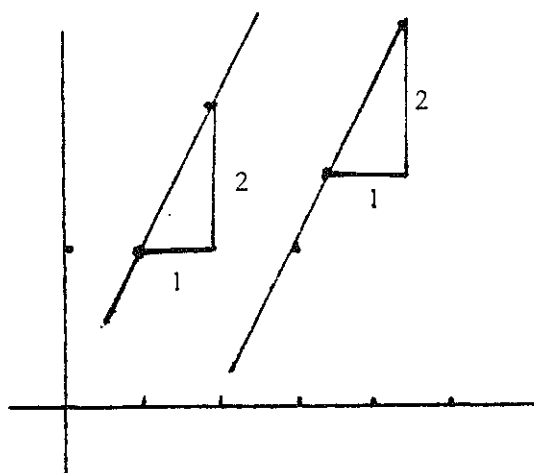
7ème séance

Comme convenu un enfant par famille vient présenter son graphique à la classe grâce à l'épiscope.

Pour la famille des équerres, les enfants remarquent que les points sont "alignés", que "ça monte raide" que "la pente est raide". Ils remarquent qu'il n'y a pas de points en $(0,0)$ et $(1,.)$ et cela les étonne.

Les enfants ont fait des graphiques à propos de problèmes de proportionnalité, et les points alignés commençaient par $(0,0)$. Les enfants s'étonnent donc, puis que c'est la première fois qu'ils sont dans cette situation.

Pour la famille des fenêtres, les enfants remarquent que les points sont encore alignés, que la droite est "penchée pareille" que celle de la famille des équerres. Un enfant fait remarquer que même si on prolonge les droites très très loin, elles ne se croiseront jamais. Des enfants expliquent que c'est parce qu'elles sont toutes les deux faites sur l'escalier $(1,2)$, "c'est normal", dit un autre, pour les deux droites on multiplie n par 2".



Pour la famille des cadres les enfants remarquent une nouvelle fois que les points sont alignés, mais ils sont très étonnés de la pente : "Qu'est-ce qu'elle monte raide!". Plusieurs enfants font remarquer que cela n'a rien d'étonnant puisque cette fois-ci on multiplie n par 4, donc "l'escalier" sur lequel est construite la droite est l'escalier $(1,4)$ beaucoup plus raide que l'escalier $(1,2)$

La notion de pente s'est assez bien dégagée pour cette situation. C'est un critère qui a intéressé les enfants

Il y a une petite discussion pour savoir quel est le premier point obtenu, est-ce le point (3,9) ou non ? : Finalement les enfants décident que le découpage des 9 carrés égaux d'un carré (3,3) est bien un cadre dont le carré du milieu n'est pas très grand.

Le maître pose ensuite la question pour le carré 1, est-ce un découpage en cadre? les enfants répondent que non, puis remarquent que le point (1,1) est aligné avec les autres, mais finalement ils décident que ce n'est pas possible de considérer ce découpage comme un découpage en cadre.

Pour la famille des grilles, les enfants remarquent tout de suite que les points ne sont pas alignés. Un enfant explique qu'ils ne peuvent être alignés parce que les points s'éloignent les uns des autres de plus en plus (toujours une allusion à la pente, "l'escalier" qui est dessiné là est (1,3) (1,5) (1,7) (1,9) etc.....)

Un enfant a joint les points par des segments de droite, mais les autres ne le font pas et laissent des points isolés et protestent lorsqu'ils voient le dessin fait avec les segments de droite; en effet, "c'est sûrement arrondi, affirment-ils".

Ils remarquent que le point (3,9) est dans les trois familles (cadres, fenêtres, grilles) et que le point (2,4) est dans deux familles (équerres et grilles).

La situation ne permet pas d'étudier plus finement la parabole, mais nous pensons le faire ultérieurement en étudiant les aires de carrés dont les côtés n'auront pas forcément des dimensions entières.

Ils avaient déjà remarqué qu'un découpage en 21 par exemple, pouvait être obtenu dans la famille des cadres ou dans la famille des fenêtres, mais c'était pour des carrés de dimensions différentes. Ici le découpage en 9 est obtenu dans trois familles par découpage du carré de côté 3.

8ème séance

Le maître demande aux enfants d'élaborer eux-mêmes un test qui devra permettre de contrôler le travail qui a été fait sur les découpages de carrés. Pour cela, les enfants commencent à rappeler le travail qui a été fait, un enfant écrit au fur et à mesure :

Pascale c

Questions de contrôles

- 1)

| | |
|---------------------|------|
| Que veut dire n ? | (15) |
| Que veut dire N ? | (16) |

2) Pourquoi y a-t-il des familles qui ne commencent pas par 1? (6)

3) Pourquoi y a-t-il des nb pairs et des nb impairs dans les grilles? (9)

4) Pourquoi ne peut-on pas obtenir 5? 2? (4) (pour 2)

5) Construire un carré découpé en 15; en 8

| |
|-----------|
| (8) en 15 |
| (15) en 8 |

6) Comment faire un carré sur une feuille blanche? (16)

7) Pourquoi avons-nous distingué n et N ? (6)

8) Pourquoi avons-nous choisi les 4 familles? (12)

9) Est-ce que la courbe des grilles ne sera jamais (7) droit

10) Est-ce que la droite des cadres peut descendre plus bas que (3;9)? (10)

11) Quelles sont les formules de calcul de chaque famille? (7)

12) Comment construit-on le graphique des égarés? (3)

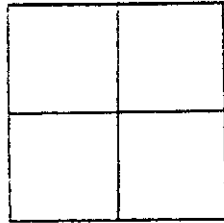
Christelle on a dessiné des carrés, on les a découpés en carrés
Nous avons relevé des nombres et on les a classés
on a essayé de trouver tous les nombres de 1 à 25
Nous avons essayé de grouper les carrés
on a regroupé des carrés et on a fait des familles
Nous avons trouvé des formules de calculs
Après, nous avons fait un graphique.

remarques

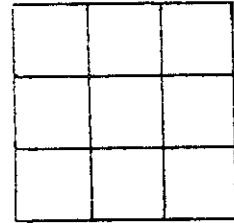
Nous avons remarqué que les courbes F, G, C passe par le même point.

BREF COMPTE RENDU DE CETTE MEME ACTIVITE DANS UN AUTRE CM

Une fois les problèmes de définition du carré et les problèmes techniques réglés, comme dans le 1er compte rendu, nous avons demandé aux enfants s'ils savaient partager un carré en carrés. Un enfant est venu dessiner un partage en 4

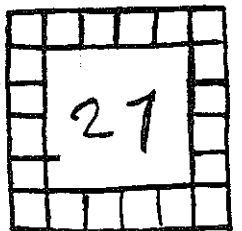
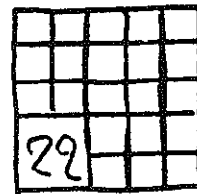
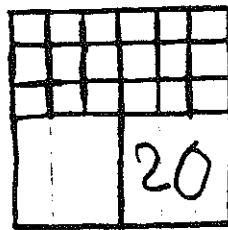
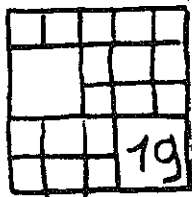
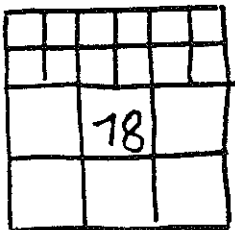
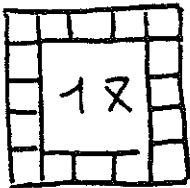
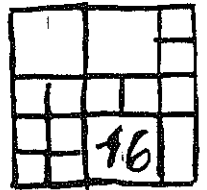
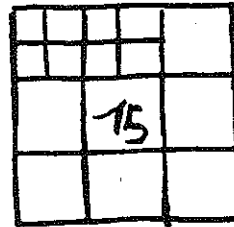
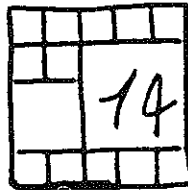
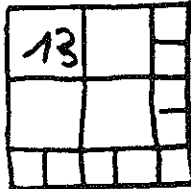
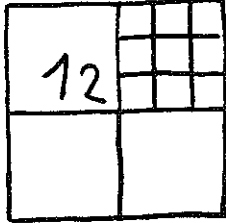
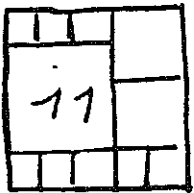


un autre fait un partage
en 9 :



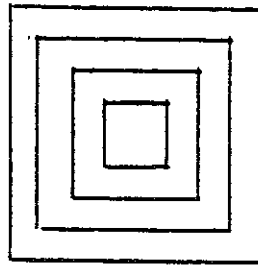
Ensuite ils ont dessiné librement sur leur feuille quadrillée des carrés qu'ils ont partagé comme ils l'entendaient et ce pendant à peu près une demi-heure. Les découpages étaient en général, astucieux, assez fantaisistes les enfants faisant souvent preuve d'imagination.

Céline



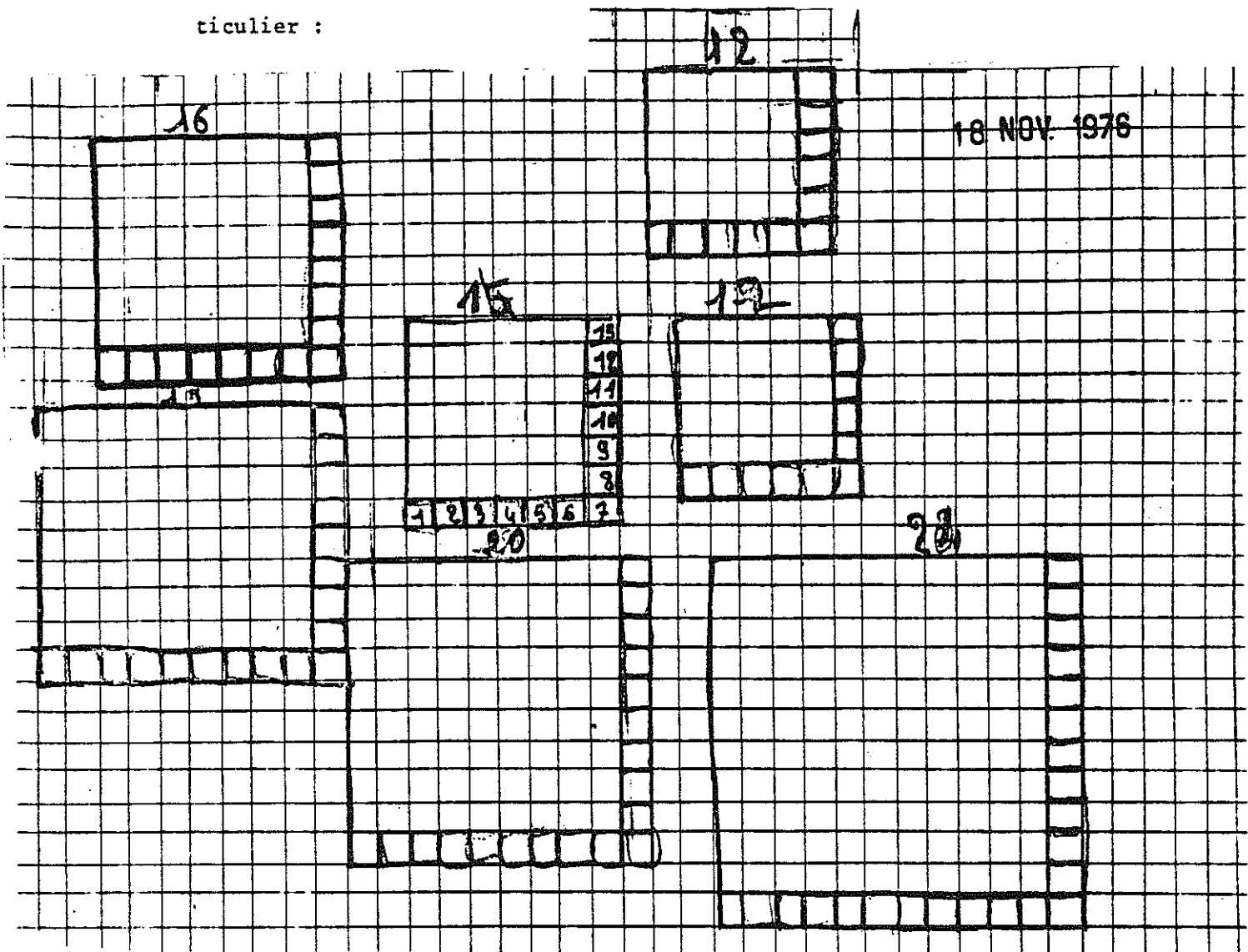
C E L I N E

Deux seuls types d'erreurs ont été enregistrés : confusion entre carrés et rectangles, découpage en carrés emboîtés.

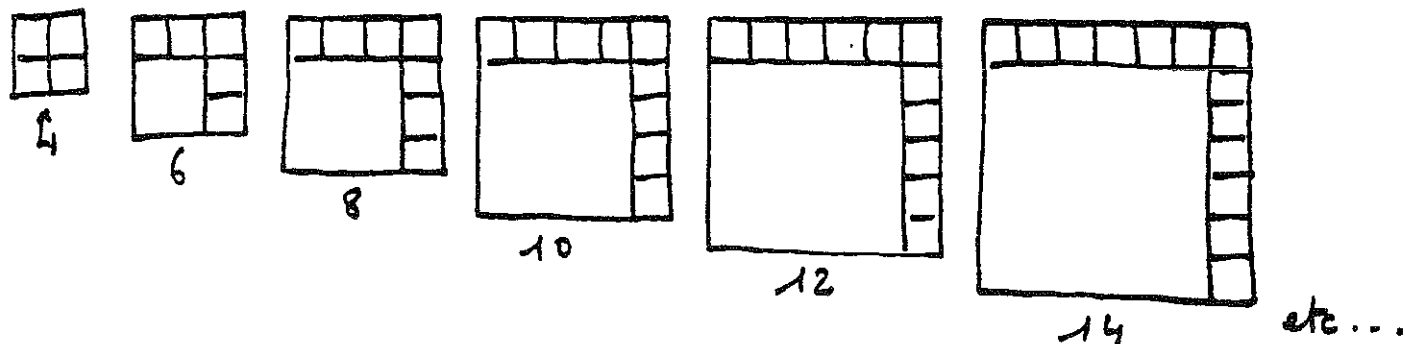


Ensuite nous les arrêtons et les enfants viennent dessiner des découpages au tableau ; Les enfants sont persuadés qu'il n'y a pas de découpage possible en 2 ou en 3, mais à eux tous ils en ont en 4, en 7, en 8 etc... jusqu'à 21. Nous demandons alors aux enfants de chercher systématiquement à découper en 4, 6, 7, etc... et de chercher un procédé pour découper un carré en n'importe quel nombre de carrés.

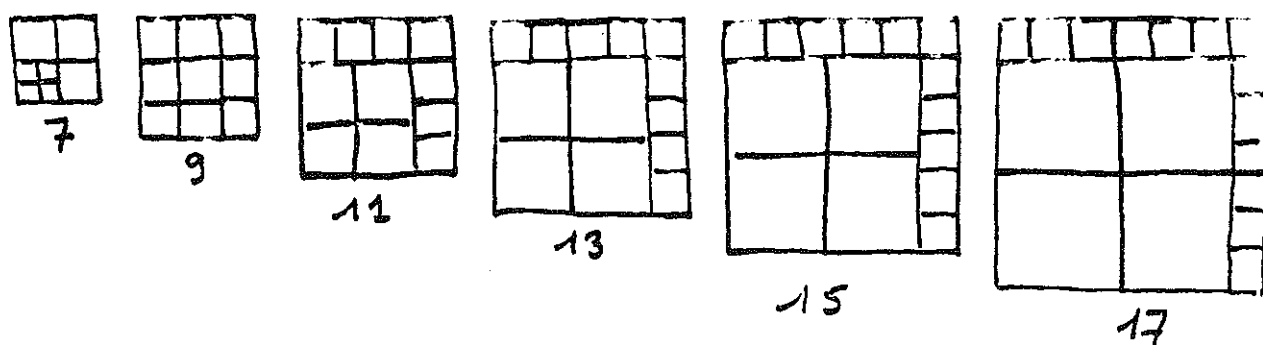
La première découverte des enfants est que l'on a tous les nombres pairs (sauf deux), grâce à un procédé découvert par quelques-uns, Cécile en particulier :



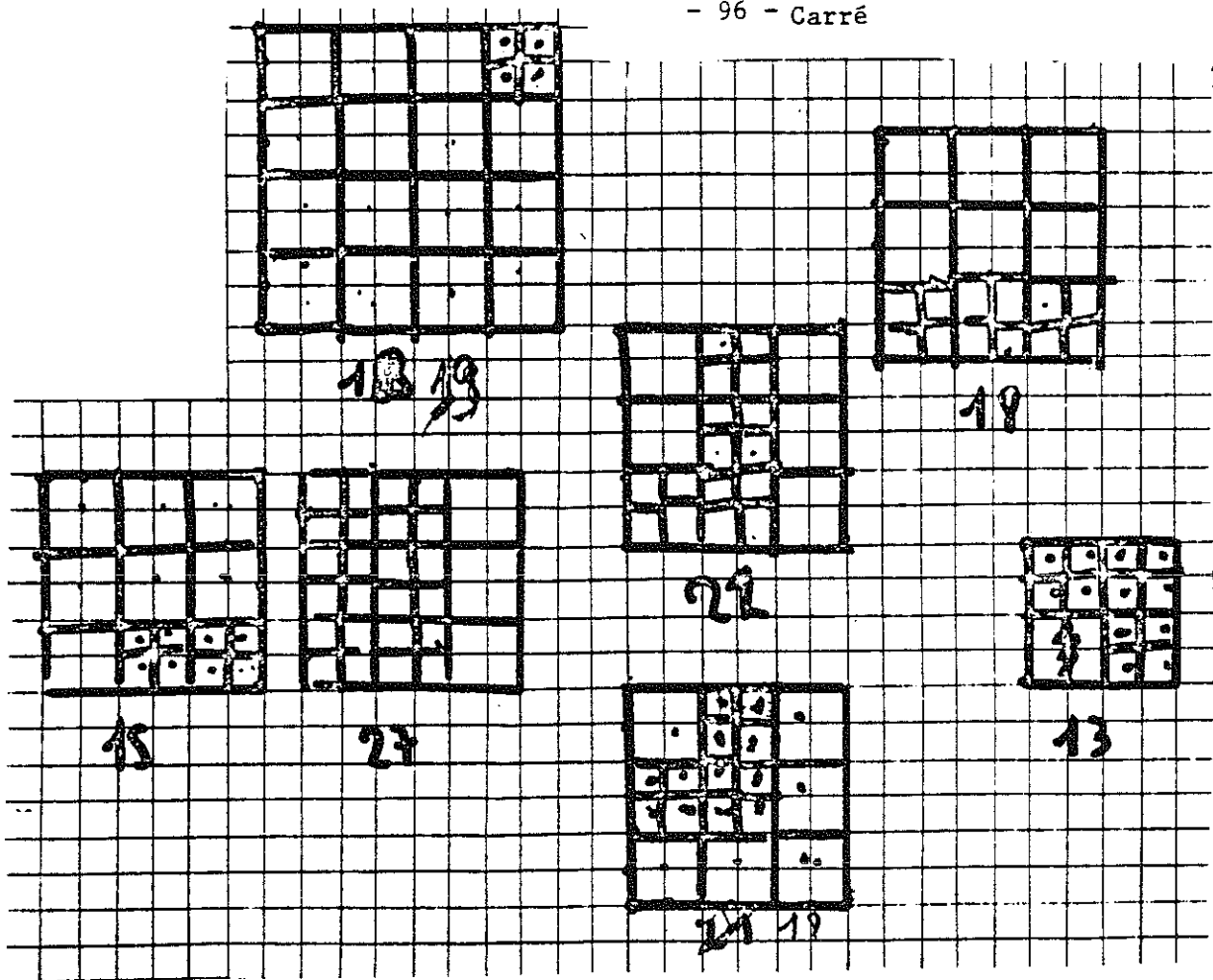
Son travail a donné aux enfants l'idée d'une construction qu'ils viennent faire au tableau.



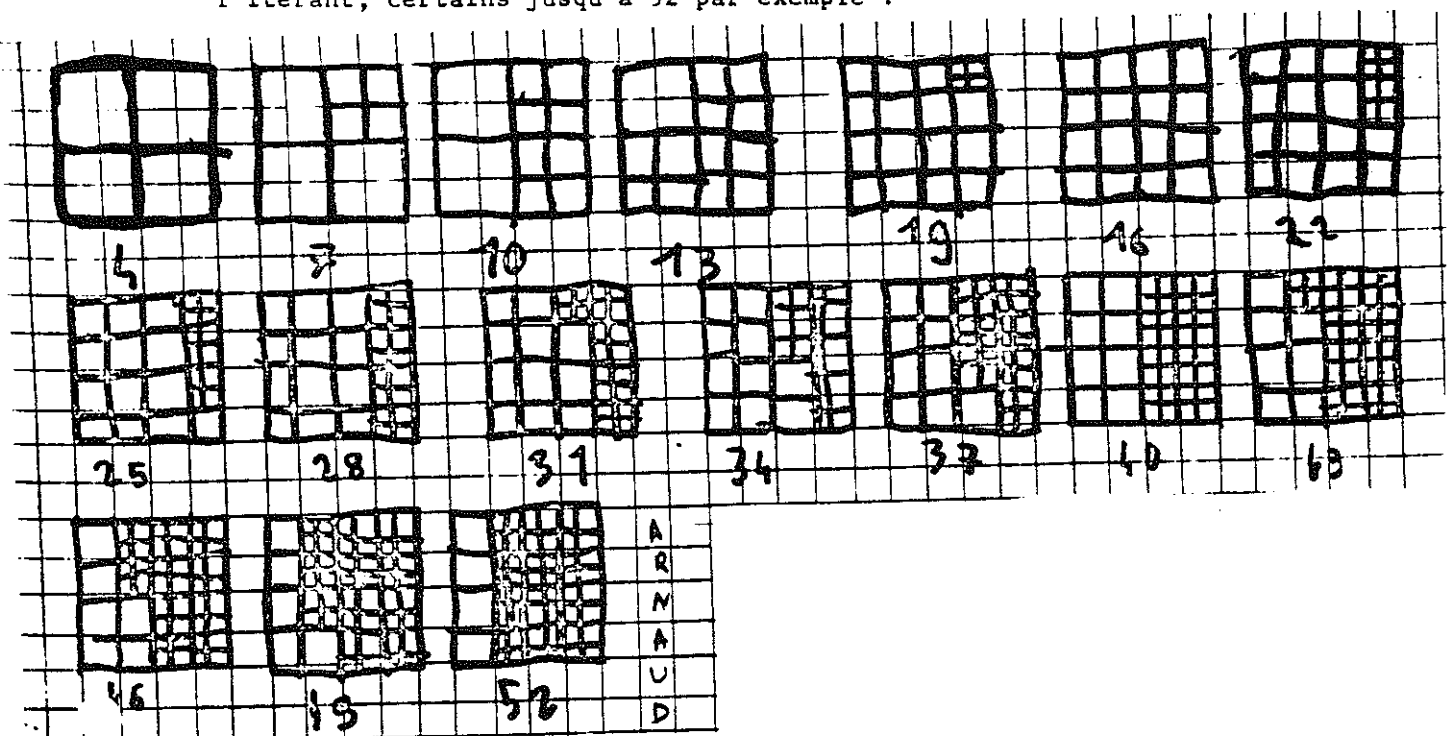
Ils n'ont pas trouvé de procédé semblable pour les nombres impairs. Un maître, qui n'avait jamais réfléchi au problème, assiste à la leçon, il réfléchit de son côté et adopte le procédé des enfants pour les nombres impairs.



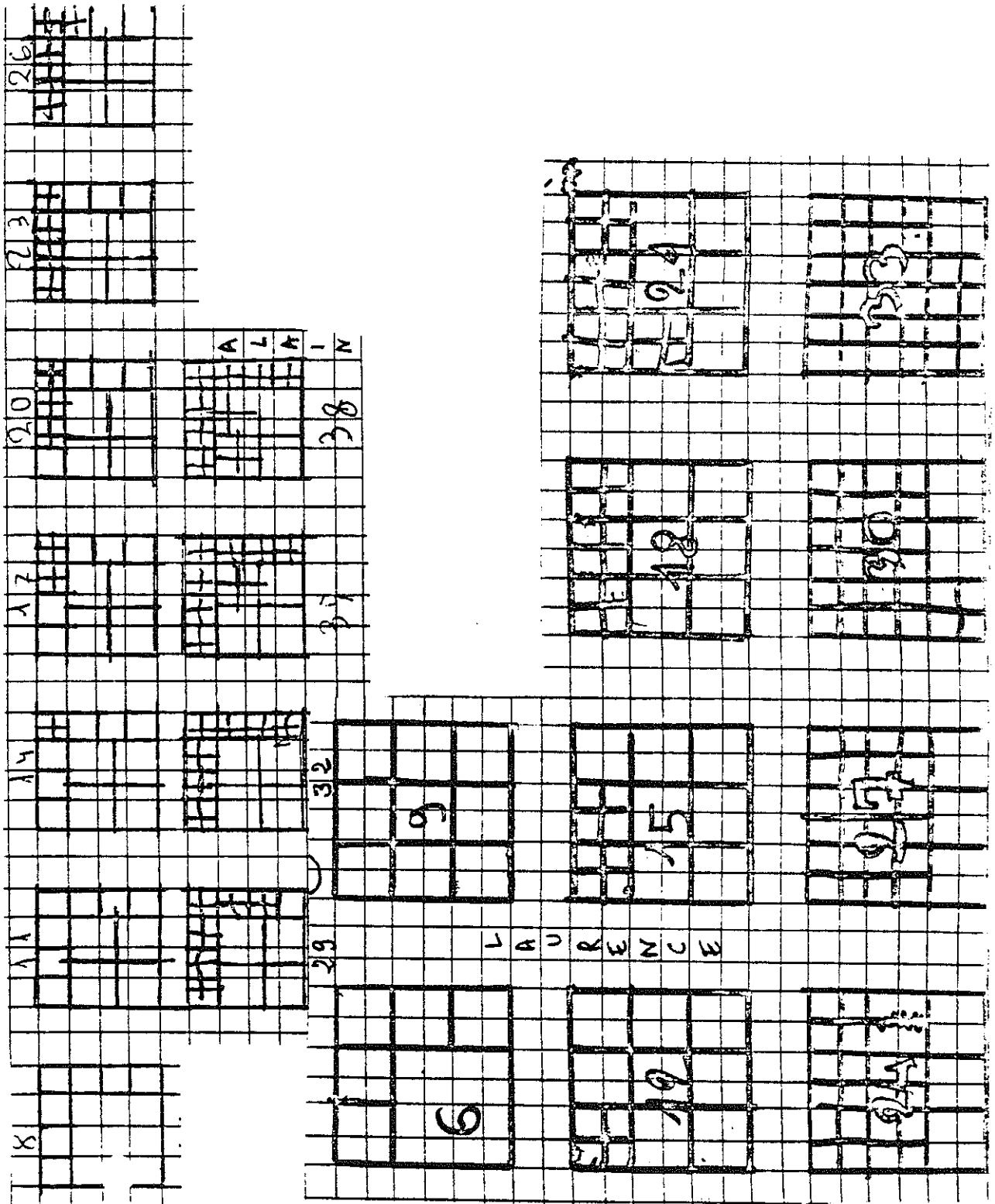
Les enfants, eux, n'ont pas pensé à cette construction; mais Stéphane a fait remarquer qu'il pouvait le trouver pour certains nombres impairs en découpages pairs (13 à partir de 10, 15 à partir de 12 etc....)



Il ne sait pas trop exposer son idée, mais il vient dessiner son découpage en 19 au tableau et les autres enfants trouvent alors un procédé de construction en utilisant le procédé de Stéphane à partir d'un découpage et en l'itérant, certains jusqu'à 52 par exemple :



Les enfants remarquent que l'on n'atteint pas 6 et 8 par ce même procédé (entre autres) et certains commencent à découper en utilisant le procédé de Stéphane à partir de 6 et de 8.



C'est un exercice qui graphiquement est très difficile, il n'est donc pas trop audacieux de penser que les enfants vont se réfugier assez rapidement dans le calcul pour résoudre ces problèmes.

Deuxième exercice

Faire des listes de découpages obtenus à partir de 4, 6 ou 8 en utilisant le procédé de Stéphane. On peut penser que les enfants vont faire des listes jusque vers 30, 35.

Que remarquent-ils sur ces listes?

Troisième exercice

On donne par exemple un découpage en 67, et on demande aux enfants de quel découpage il aurait fallu partir pour l'obtenir en utilisant le procédé de Stéphane?

Les enfants peuvent, soit allonger leur tableau, soit calquer leur calcul sur le procédé graphique :

67, 64, 61,

Ensuite on pose la même question que précédemment pour 135 par exemple. Il faut alors que les enfants aient bien observé le tableau, au besoin, on peut leur poser des questions qui peuvent les aider : de quel découpage on part pour 34? 64? 94? etc....

Il peuvent donc utiliser un procédé du genre :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 135 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 105 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 75 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 45 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 15 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 12 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 9 & \underbrace{\hspace{1cm}} & 6 \\ & 3 \times 10 & & 3 \times 10 & & 3 \times 10 & & 3 \times 10 & & 3 & & 3 & & 3 \end{array}$$

Ceci est un des algorithmes sommaires de la division.

$$135 = (10+10+10+10+1+1+1) \times 3 + 6$$

$$135 = (43 \times 3) + 6$$

Arrivés là, les enfants remarquent qu'ils peuvent découper en n'importe quel nombre différent de 2, 3 ou 5, et cela en partant de 4, 6 ou 8 et en comptant de 3 en 3.

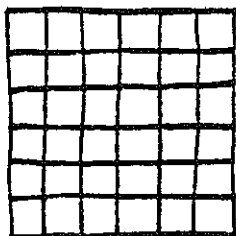
Les enfants se sont arrêtés là ou presque. on peut penser à quelques exercices pour utiliser cette situation.

Divers prolongements possibles.

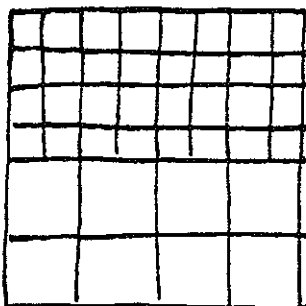
Premier exercice.

On peut extraire, des feuilles des enfants, des découpages obtenus en utilisant le procédé de Stéphane à partir de 4, 6, ou 8.

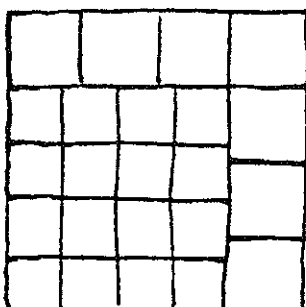
On donne un de ces découpages aux enfants et on leur demande s'il peuvent trouver de quel découpage (4, 6, ou 8) on était parti.



ce découpage vient d'un découpage en 6



ce découpage vient d'un découpage en 4



ce découpage vient d'un découpage en 8

COURSES CHRONOMETREES

Cette expérience n'a pu avoir lieu que grâce à l'efficacité de Madame Clément BOLAYRON, institutrice dans la classe de CM de l'école d'observation de l'Almont II à Melun.

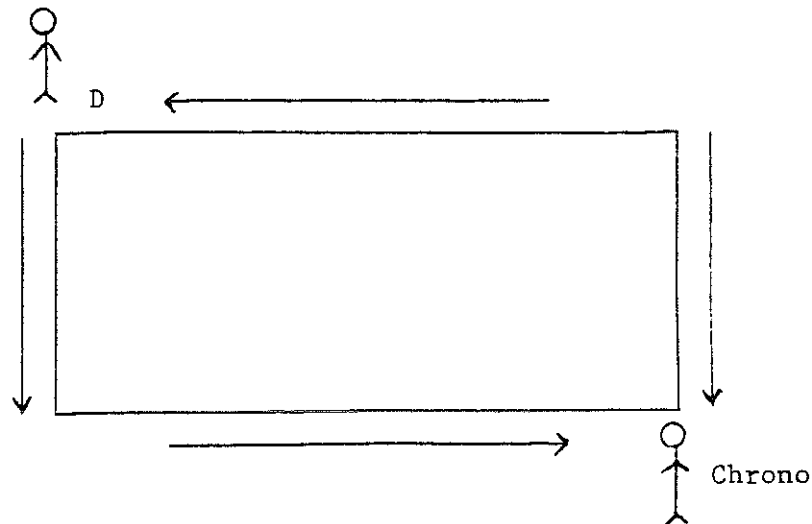
Dans cette classe de CM, les enfants avaient fait en gymnastique une course chronométrée autour de la cour. La maîtresse décida d'exploiter cette situation en mathématique et en expression écrite. Nous allons voir que l'étude de cette situation va permettre aux enfants de mettre en oeuvre des outils divers et importants des mathématiques tels que :

- . symbolisme et organisation de données.
- . écarts de nombres, inégalités, encadrements.
- . proportionnalité, vitesse uniforme.
- . représentations graphiques.

Première phase (2 séances).

Les enfants ont couru autour de la cour qui est rectangulaire, 2 chronomètres adultes étaient placés l'un au départ à un sommet et l'autre au sommet diagonalement opposé. Le premier chronomètreur déclenchait son chronomètre au top de départ et l'arrêtait à la fin du tour. Le deuxième chronomètreur mettait son chronomètre en route quand l'enfant passait devant lui et l'arrêtait à la fin de la course.

Chaque enfant a couru, et ses temps lui ont été communiqués par les chronomètres. Lorsque les enfants remontent en classe, la maîtresse demande de faire un schéma pour représenter la course. Un enfant va dessiner au tableau :



La maitresse demande aux enfants de schématiser la course pour qu'ils se la représentent mieux et par conséquent qu'ils envisagent plus facilement les problèmes à se poser à propos de cette situation.

La maîtresse demande aux enfants de s'organiser pour noter tous leurs temps au tableau de façon que chacun puisse connaître les temps des autres enfants.

Cette phase va contraindre les enfants à organiser leurs données et à les coder. Cela permettra de parler plus facilement des nombres et de déterminer un seul programme de calcul valable pour tous les enfants.

Sabine propose de noter A le temps mis pour parcourir la première moitié du tour de la cour et de noter B le temps mis pour faire le tour complet. Sophie, elle, propose d'appeler plutôt C le temps mis pour parcourir le tour complet. C'est son idée qui est retenue et Didier vient écrire au tableau $A + B = C$

Sabine fabrique le tableau collectif :

| | A | B | $C = A + B$ |
|------------|------|---|-------------|
| Anne Laure | 16 s | | 32 s |
| Francette | 15 s | | 32 s |

*Ici, il aurait mieux valu des nombres sans unité dans le tableau.
C'était possible en écrivant A(en sec.), B (en sec),*

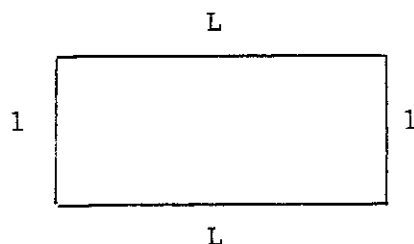
C = A + B (en sec) en tête des colonnes.

*Avec cette notation, on aurait peut-être évité la confusion entre
le trajet et le temps mis pour parcourir ce trajet.*

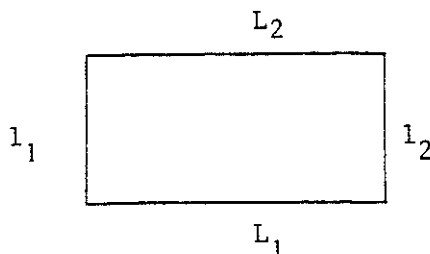
Lorsque commence la deuxième séance, le tableau est affiché au mur,
mais des personnes n'ont pas assisté ni à la course, ni à l'élaboration du
tableau ; les enfants vont expliquer la signification du tableau. Pour cela,
ils racontent d'abord la course puis ils disent : "A c'est le demi-tour de
la cour, B c'est le demi-tour de la cour et C c'est le tour complet". Un
enfant remarque que les nombres du tableau sont en secondes, ce sont des
temps et pas des trajets. Les enfants décident alors de coder différemment
les temps et les trajets pour qu'on puisse en parler aisément sans les
mélanger.

Ils commencent par noter:

mais un enfant fait remarquer
qu'ainsi on code de la même
façon le premier demi-tour de
cour et le second demi-tour de



cour. Un enfant prétend que ce n'est pas faux puisqu'ils ont la même longueur
mais certains autres affirment que c'est plus difficile de courir vite sur le
deuxième demi-tour que sur le premier ; ils veulent donc les distinguer et ils
se mettent alors d'accord sur :



*La confusion temps-trajet a été profitable puisqu'elle conduit les
enfants à coder différemment les trajets et les temps mis pour les parcourir.*

*Tout ceci a été une intéressante activité de symbolisation ; à
chaque instant les enfants ont été contraints de bien préciser le sens
qu'ils donnaient à leurs symboles.*

2ème phase (1 séance).

La tableau affiché a été ainsi complété :

| | $L_1 \ell_1$ | $L_2 \ell_2$ | $L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2$ |
|------------|--------------|--------------|---------------------------|
| | A | B | $C = A + B$ |
| Anne Laure | 16 s | | 32 s |
| Francette | 16 s | | 32 s |

La maîtresse demande aux enfants s'ils ont des problèmes à se poser à propos de ce tableau. Les enfants proposent tout de suite de le compléter en cherchant B.

La situation est assez riche pour que les enfants puissent se poser plusieurs problèmes. Ils vont aborder deux aspects de la soustraction : "trouver B connaissant A et C et la relation $A + B = C$ (addition à trouver)" et "trouver l'écart positif ou négatif entre deux nombres".

Ils proposent ainsi de regarder pour chaque enfant s'il a été plus rapide sur $L_1 \ell_1$ ou sur $\ell_2 L_2$ ("on était essoufflé", "moi j'ai accéléré" sont les remarques des enfants qui motivent la proposition). Ils proposent enfin de chercher celui qui a été le plus rapide, le moins rapide sur chacun des trajets.

Ils calculent chacun leur temps intermédiaire qu'ils vont noter dans le tableau. Ensuite un enfant propose de rajouter deux colonnes au tableau pour que l'on puisse noter de combien on est allé plus vite en $\ell_1 L_1$ ou en $\ell_2 L_2$:

| A | B | C | Plus vite en
$\ell_2 L_2$ | Plus vite en
$\ell_1 L_1$ |
|----|----|----|------------------------------|------------------------------|
| 16 | 17 | 33 | | 1 |
| 18 | 16 | 34 | 2 | |
| 16 | 16 | 32 | 0 | 0 |

Un enfant fait remarquer qu'il suffit de la colonne "plus vite en $\ell_1 L_1$ " et du signe - il écrit :

| A | B | C | + vite en
$\ell_1 L_1$ |
|----|----|----|---------------------------|
| 16 | 17 | 33 | 1 |
| 18 | 16 | 34 | -2 |
| 16 | 16 | 32 | 0 |

Nous ne sommes pas étonnés de l'apparition de ce signe "-", car ces enfants ont déjà manipulé des nombres négatifs dans une autre situation.

Ils ont ensuite souligné de couleurs différentes le temps minimal et le temps maximal mis pour chaque trajet. Ils ont aussi calculé les écarts entre temps minimal et temps maximal (pour le plaisir...).

Troisième phase (8 séances environ).

1ère séance

Comme les enfants avaient un peu de mal à donner un nom aux éléments pertinents de la situation, nous avons décidé de leur proposer une situation du même type mais où il y aurait plus d'éléments à nommer et plus de données à organiser.

Les enfants courent toujours dans la cour, mais seulement autour de la moitié (2 côtés du rectangle et une diagonale), et ils doivent faire 3 tours.

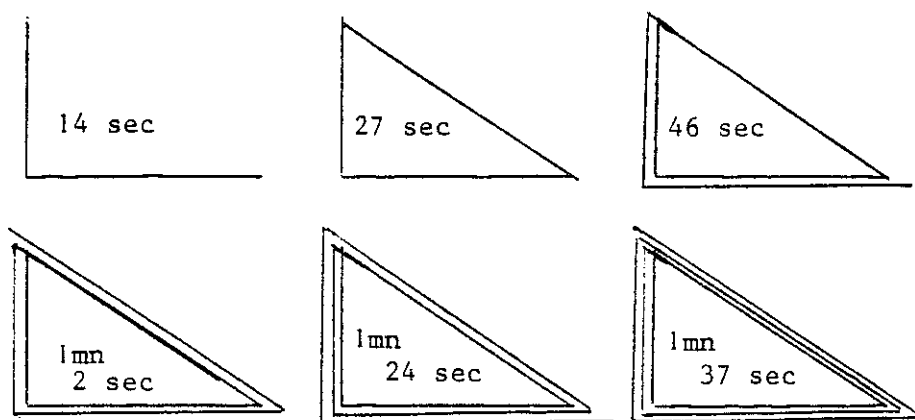
Les enfants ont d'abord mimé la situation en classe, en chronométrant effectivement. Il y a un chronomètre à chaque extrémité de la diagonale du rectangle et le temps est relevé au vol à chaque passage de l'enfant. Les enfants, qui ne savaient pas utiliser un chronomètre, ont été aidés par les enfants qui savaient déjà. Ce sont les enfants qui ont décidé eux-mêmes de ce qu'ils devaient mesurer et comment le faire, ils ne pouvaient utiliser que deux chronomètres pour faire toutes leurs mesures.

Il y aurait pu y avoir une discussion plus approfondie sur la "valeur" des mesures. En effet la lecture au vol des temps entraînait de grandes incertitudes, et il aurait été fructueux d'amener un débat sur le sujet.

A la fin de la séance, les enfants sont allés courir dans la cour et ils se sont chronométrés ; chaque enfant a noté sa liste de temps.

2ème séance.

Les enfants, au début de la séance, doivent expliquer à un de leur camarade qui était absent comment ils ont couru et comment ils se sont chronométrés. Ils n'arrivent pas à s'expliquer clairement et finalement ils choisissent de donner au tableau une représentation de la situation qui l'image et la rend compréhensible.



C'est une première schématisation, elle représente la situation mais ne permet pas encore d'en parler.

Les enfants décident d'afficher tous leurs temps au tableau et pour cela ils font un tableau pour noter tous les nombres.

| | ℓ L | N | N ℓ L | NN | NN ℓ N | N N N |
|------------|--------|--------|--------|-----------|-----------|---------|
| Anne-Laure | 14 sec | 27 sec | 46 sec | 1mn 2 sec | 1mn 24sec | 1mn 37s |
| " | " | " | " | " | " | " |

Les enfants ont conservé la première notation proposée dans la première situation (N représente le tour complet).

D'autre part, les enfants ont à nouveau codé les trajets et indiqué en dessous les temps mis pour les effectuer.

Un enfant remarque qu'il n'est pas commode de comparer les temps écrits en minutes et secondes et il réclame de tout transformer en secondes. Sa proposition est immédiatement adoptée, un enfant explique qu'il faut 60 sec. pour faire une minute, et chaque enfant convertit ses temps en secondes.

Cette situation sera rappelée pour motiver un travail sur les unités de temps, sur la composition des temps, etc....

Dès que le tableau est entièrement rempli par des temps en secondes, les enfants font des remarques :

" C'est Olivier qui a été le plus rapide, il a mis le moins de temps pour les 3 tours". "C'est Anne-Laure qui a mis le plus de temps, c'est la plus lente". "C'est Thierry qui a le démarrage le plus rapide". "Dans la 2ème partie du 1er tour, Olivier distance Thierry qui reprend l'avantage à

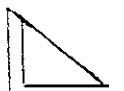
un tour et demi, mais il ralentit beaucoup trop dans le 3ème tour". Sandrine, elle, affirme : "Si on additionne les 5 premiers nombres de chaque ligne, on obtient le sixième nombre de la ligne".

Elle est violemment contestée par les enfants qui lui rappellent la signification des nombres de chaque ligne. Plusieurs enfants proposent de dessiner au-dessus de chaque colonne le trajet correspondant, ce qu'ils font et Sandrine affirme avoir compris son erreur.

On constate encore ici comment les enfants (certains au moins) oublient rapidement la signification de ce qu'ils font ; d'où la nécessité pour eux d'avoir un codage "parlant".

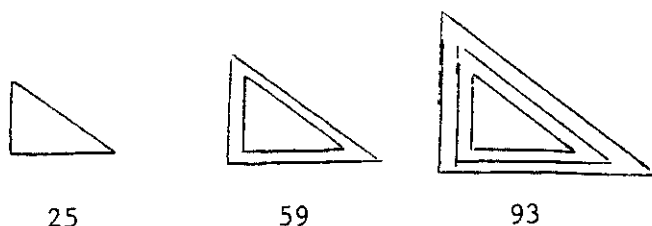
3ème séance.

La maîtresse propose aux enfants de se borner pour l'instant à l'étude de la course d'un seul enfant. Pour cela elle explique qu'elle a fabriqué une course fictive en prenant des temps en diagonale dans le tableau.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |
| 2L | N | N 2 L | NN | NN 2 L | NNN |
| Nicolas 14 | 25 | 46 | 59 | 79 | 93 |

La maîtresse choisit de refermer la situation, elle a peur que la masse de problèmes, qui risquent d'assaillir les enfants s'ils considèrent toutes les courses à la fois, ne les effraient et les découragent.

Les remarques fusent d'ailleurs parfois contradictoires : il est allé plus vite au premier tour qu'au dernier". "Non, c'est au deuxième"! . "Mais non, c'est au premier". Anne Laure intervient alors : "On n'a qu'à calculer le temps qu'il a mis pour faire chacun des tours". Mais comment faire ? Anne-Laure vient écrire au tableau :



et elle dit : ça suffit pour trouver le temps à chaque tour". La maîtresse demande à tous les enfants d'inscrire chacun sur leur ardoise le temps mis par Nicolas pour faire chaque tour complet (aucune erreur sur les ardoises).

Il semble que lorsque les enfants ont très envie d'avoir un résultat juste, ils calculent mieux.

Les enfants réclament ensuite de calculer pour chacune de leurs courses, le temps mis pour parcourir les tours complets ; ensuite ils décident d'agrandir leur tableau affiché au mur pour pouvoir noter tous leurs temps.

Ils ont envie de comparer leurs temps avec ceux des autres enfants c'est pour cette raison qu'ils demandent d'agrandir le tableau.

Il y a alors une grande discussion entre les enfants car l'un d'entre eux propose d'agrandir le tableau en rajoutant 3 colonnes : N NN NNN. La classe proteste tout de suite dans la colonne NN on écrit le temps mis pour faire les deux premiers tours, cela ne convient pas. Un autre enfant vient prolonger le tableau par N N N, les enfants ne sont pas satisfaits parce que l'on ne peut pas reconnaître le premier tour du deuxième tour, etc... Ils finissent par se mettre d'accord sur le tableau :

$L \cdot N \cdot N \& L \cdot NN \cdot NN \& L \cdot NNN \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3.$

Les enfants cherchent un codage minimal non ambigu. Nous verrons plus loin que le codage n'est pas assez explicite et que les enfants vont l'améliorer.

Une fois les noms des colonnes choisis, les enfants viennent noter leurs temps respectifs au tableau. Certains enfants refont les calculs de ceux qui ont des temps meilleurs que les leurs espérant trouver des erreurs de calcul. Puis ils font des remarques générales : "Presque tout le monde est allé de plus en plus lentement", "Thierry et Stephane ont mis les mêmes temps aux deux premiers tours", "il y en a qui ont mis le même temps pour le premier et le deuxième tour, mais personne n'a mis le même temps pour chacun des trois tours". Ils cherchent bien entendu qui a mis le moins de temps ou le plus de temps à chacun des trois tours.

Dans cette phase les enfants ont beaucoup calculé, comparé et cherché des écarts.

Quatrième séance.

Au début de cette séance, la maîtresse fait récapituler aux enfants le travail de la séance précédente. A cette occasion, certains enfants parlent du temps n_1 qu'ils ont mis pour faire le premier tour. D'autres protestent, ce n'est pas un temps c'est le premier tour, c'est le trajet. Mais alors c'est le même trajet, à chaque tour ; les enfants s'empoignent, le débat est très animé. Ils finissent pas s'accorder sur le fait que :

ℓ L N N ℓ L N N N sont des trajets mais que n_1 , n_2 , n_3 sont les temps mis pour parcourir le trajet N au 1er tour, 2ème tour, 3ème tour. Presque tous réclament de transformer le tableau pour qu'on ne note que des trajets ou que des temps mais pas les deux sur le même plan. Ils corrigent donc les titres des colonnes du tableau en :

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|--|----------|-----------|-----------|
| Trajet |  |  |  |  |  |  | 1er tour | 2ème tour | 3ème tour |
| | ℓ L | N | N ℓ L | N N | NN ℓ L | N N N | N | N | N |
| Temps en secondes | | | | | | | n_1 | n_2 | n_3 |

Ils montrent là un grand souci de cohérence.

Ils ne nomment pas encore les temps mis pour les trajets ℓL , ... parce qu'un enfant a proposé d'appeler a_1 le temps mis pour faire ℓL au 1er tour, d_1 le temps mis pour parcourir la diagonale au 1er tour et a_2 , d_2 pour le 2ème tour et a_3 , d_3 pour le 3ème tour. Les enfants sont séduits par un codage tellement parlant, seulement ils ne savent pas comment s'en servir pour remplir leur tableau, ils sont prêts à l'abandonner. La maîtresse leur demande alors s'ils ne pourraient pas se servir de ce codage pour trouver les temps mis pour parcourir ℓL , N , $N \ell L$, etc ...

Ici la maîtresse saisit au vol l'occasion de faire faire aux enfants du calcul formel ; ils ont tous les éléments en main, pour résoudre leur problème, leur réticence va être grande pour utiliser a_1 , d_1 , a_2 , ... comme des nombres, alors que tout au début ils avaient écrits $\ell L + \ell L = N$. Le calcul formel paraît plus simple si les lettres représentent des longueurs que si elles représentent des temps.

Très vite ils trouvent que a_1 est le temps mis pour parcourir ℓL puis ils sont bloqués. Enfin certains enfants viennent écrire au tableau a_1 et $d_1 = n_1$, après une discussion animée, ils transforment cette écriture en $a_1 + d_1 = n_1$. Ils oublient alors le problème posé qui est de trouver des noms à l'aide de a_i et d_i pour les temps du tableau, et ils s'amusent à écrire le plus d'égalités formelles possibles :

$$n_2 = a_2 + d_2 \quad n_1 + n_3 = a_1 + a_3 + d_1 + d_3$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = a_1 + d_1 + a_2 + d_2 + a_3 + d_3 \quad a_1 - a_1 = 0$$

$$d_2 = n_2 - a_2 \quad d_3 = n_3 - a_3, \text{ etc } \dots\dots$$

Certaines sont erronées $d_2 + d_1 = a_1$ (?) mais corrigées par l'ensemble de la classe.

Lorsqu'ils commencent à s'épuiser, la maîtresse les ramène au problème du tableau, et des enfants viennent le compléter :

| Trajet | ℓL | N | $N \ell L$ | NN | NN ℓL | NN L | 1er
tour
N | 2ème
tour
N | 3ème
tour
N |
|----------------------|----------|-------|-------------|-------------|------------------------|------------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| Temps en
secondes | a_1 | n_1 | $n_1 + a_2$ | $n_1 + n_2$ | $n_1 + n_2$
$+ a_3$ | $n_1 + n_2$
$+ n_3$ | n_1 | n_2 | n_3 |

Les enfants remarquent alors qu'ils ne connaissent pas les temps d_1, a_2, d_2, a_3, d_3 ; en effet, ils sont d'ailleurs déçus, ces nombres n'apparaissent pas dans le tableau. La séance est terminée à ce moment.

5ème Séance

Après récapitulation de la séance précédente, la maîtresse propose aux enfants de chercher collectivement, les temps a_2 , d_1 , d_2 , a_3 , d_3 de la course de Nicolas.

La maîtresse choisit de faire à nouveau travailler collectivement les enfants sur la course de Nicolas; car elle ne veut pas que des enfants restent "secs" et ne sachent comment faire pour trouver les temps intermédiaires de leur propre course

Il s'agit donc d'abord de calculer d_1 pour la course de Nicolas, "facile!" disent certains enfants et ils expliquent : "on a trouvé que $d_1 = n_1 - a_1$ et on sait que n_1 c'est 25 et a_1 c'est 14". La maîtresse demande que chaque enfant calcule sur son ardoise d_1 , puis a_2 en écrivant les renseignements dont il se sert. Les enfants se servent à la fois des égalités formelles qu'ils avaient spontanément écrites et des noms donnés aux colonnes de leur tableau.

A la fin de la séance, ils ont calculé tous les temps intermédiaires de la course de Nicolas

| | | |
|------------|------------|------------|
| $a_1 = 14$ | $d_1 = 11$ | $n_1 = 25$ |
| $a_2 = 21$ | $d_2 = 13$ | $n_2 = 34$ |
| $a_3 = 20$ | $d_3 = 14$ | $n_3 = 34$ |

et aussi tous les temps intermédiaires de leur propre course.

Le fait d'avoir codé tous les temps a permis aux enfants un peu en difficulté de faire facilement le calcul des temps intermédiaires. La maîtresse avait d'ailleurs pensé que ce serait un travail trop compliqué: elle a été agréablement surprise.

Seuls les temps de la course de Nicolas sont affichés au tableau et les enfants font des remarques sur les temps: "Nicolas est toujours plus rapide sur la diagonale que sur les deux côtés", un autre corrige : "Nicolas met toujours moins de temps sur la diagonale que sur les deux côtés". Le débat s'arrête là car la séance est terminée.

6ème séance

Au début de la séance, la maîtresse fait rappeler par les enfants le problème posé à la fin de la séance précédente et la discussion s'engage

Les enfants abordent ici la notion de vitesse, et cette notion va s'affiner au cours de la discussion.

Certains affirment que Nicolas est plus rapide sur D que sur Ll parce qu'il met moins de temps pour parcourir D que Ll. Ils sont violemment contestés par d'autres qui affirment que l'on ne pourrait conclure que si Ll et D avaient la même longueur. La discussion rebondit parce que certains prétendent que Ll et D ont la même longueur, d'autres que Ll est plus long que D et d'autres que D est plus long que Ll. Ils ne parviennent pas à se mettre d'accord et ils décident d'aller mesurer la cour.

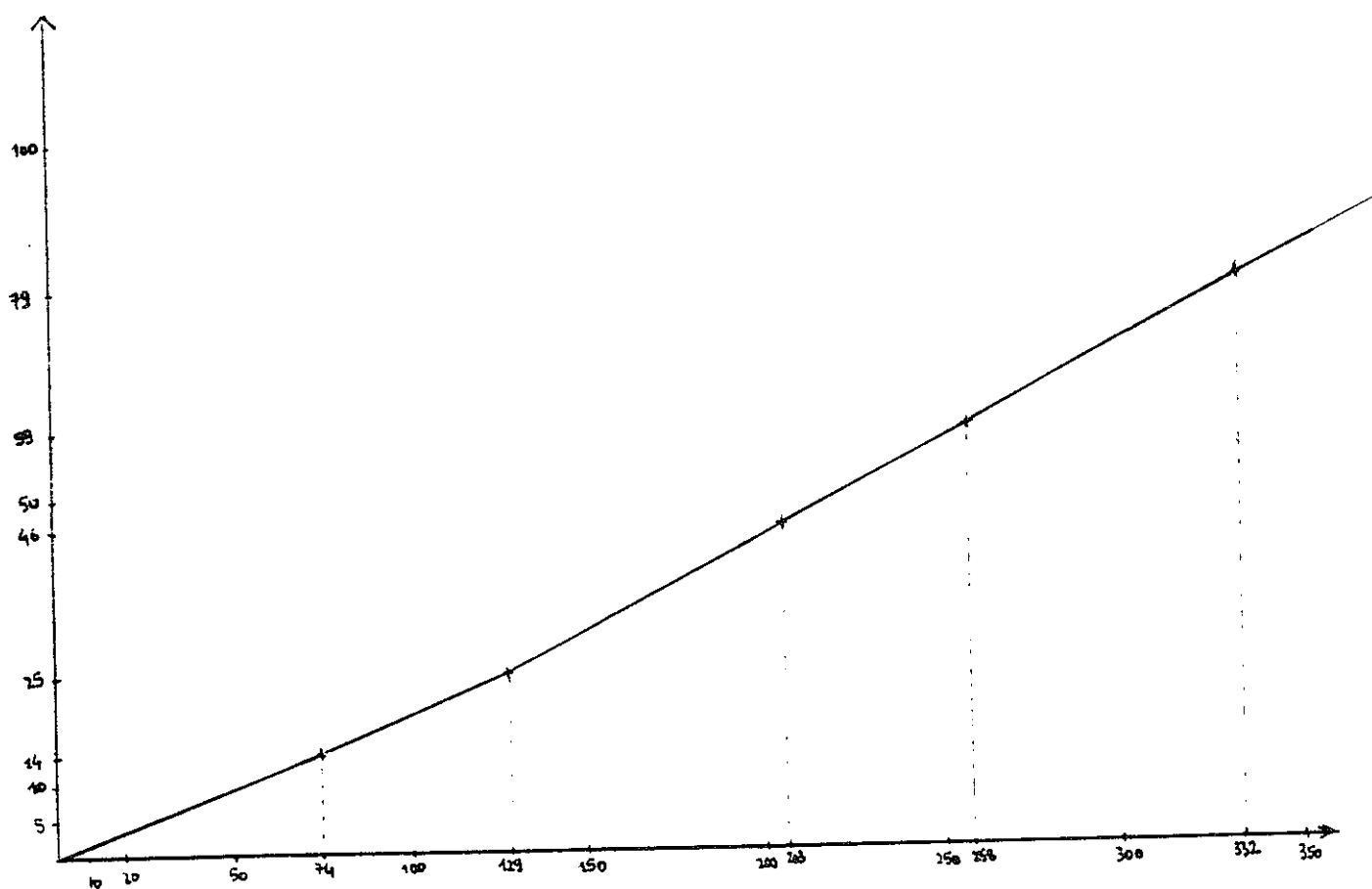
L'étude de la comparaison de la longueur de la diagonale et de la somme des longueurs des 2 côtés sera reprise avec des enfants ultérieurement. Pour cela les enfants mèneront des diagonales de rectangles à demi-périmètre constant.

Ils trouvent : l mesure 24 m , L mesure 50 m et D mesure 55 m, Nicolas a donc parcouru 74 m en 14 s et 55 m en 14 s, sur quel trajet a-t-il été le plus rapide?

Les enfants affirment : "On ne peut pas savoir, il faudrait faire des calculs", mais ils restent très discrets sur ces calculs. D'autres remarquent : "Il y a plus pour aller de 55 à 74 que pour aller de 11 à 14" mais ils n'en concluent rien. Petit à petit les enfants se découragent, et pour ranimer l'intérêt la maîtresse propose de faire le graphique de la course de Nicolas, elle laisse espérer aux enfants que cela leur fournira un moyen de résoudre leur problème.

Les enfants ne proposent pas spontanément de faire un graphique, car c'est la première fois qu'un graphique va leur permettre de répondre à une question posée insoluble pour eux par le calcul. Ensuite devant un tel blocage, ils proposent de faire un graphique "pour voir"

La maîtresse propose aux enfants de faire collectivement le graphique de la course de Nicolas sur le tableau quadrillé, pour cela ils doivent s'organiser. Après discussion, ils décident de mettre horizontalement les distances parcourues (1 carreau pour 10 mètres) et de mettre verticalement les temps mis pour parcourir ces distances (1 carreau pour 5 sec.)



Les enfants ont déjà à d'autres occasions fait des graphiques, ce qui explique qu'ils n'ont pas de mal à organiser leur travail ni à choisir les unités.

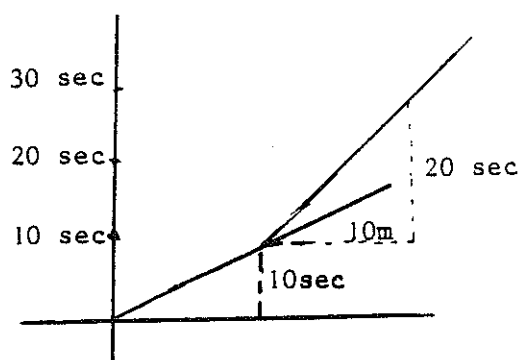
Le tracé de la course de Nicolas est fait sur une grande affiche quadrillée (3cm pour 5 sec, 3 cm pour 10 mètres)

Les enfants représentent la course sur L1 au 1er tour, D au 1er tour, L1 au 2ème tour, D au 2ème tour etc... par des segments de droite.

Cela nous fait penser que les enfants sous-entendent que sur chaque trajet élémentaire, la vitesse est constante. Nous verrons plus tard que c'est bien leur hypothèse de travail.

Sur l'affiche du tableau, la droite représentant la course sur L1 au 1er tour est moins "pentue" que la droite représentant la course sur D au premier tour. Les enfants constatent cela assez vite et la plupart d'entre eux affirment alors : "C'est sur L1 que la droite est le moins pentue, alors c'est là qu'il est allé le plus vite". Ils n'explicitent pas plus leur raisonnement.

La maîtresse et tous les enfants se satisfont de : "il va plus vite parce que la droite est moins pentue" cela aurait demandé une discussion et une justification sur un dessin plus explicite :



La droite est plus pentue lorsque le temps mis pour parcourir la même distance est plus grand, donc on a mis plus de temps, on est allé moins vite.

Chaque enfant va alors représenter sa propre course sur du papier millimétré. C'est la première fois que les enfants utilisent du papier millimétré et cela ne va pas sans quelques difficultés. Après discussion, l'unité choisie est 1 cm pour 10 m, et 1 cm pour 5 sec.

Les enfants graduent les axes, ce qui posent quelques problèmes aux moins soigneux, puis placent les points de leur course. Ensuite ils

discutent sur leurs vitesses respectives en L₁ ou en D au 1er tour, au 2ème tour ou au 3ème tour, à ce moment-là, on se rend compte que certains enfants utilisent mécaniquement le fait que la droite est plus ou moins pentue et qu'ils ont oublié en quoi cela donnait des renseignements sur la vitesse.

7ème séance:

Les enfants ont très envie de retourner courir dans la cour, et ils proposent à leur maîtresse d'aller courir de nouveau, en essayant de courir toujours à la même vitesse. Ils explicitent cela en disant qu'ils essaieront de mettre le même temps pour parcourir chacun des tours.

Nous étions bien entendu ravis de cette suggestion.

Les enfants vont courir dans la cour, et ils ont chacun les temps n_1 , $n_1 + n_2$, $n_1 + n_2 + n_3$.

Ils proposent tout de suite de faire le graphique de leur course. Quelques-uns affirment déjà qu'ils n'ont pas réussi à courir régulièrement parce que $n_1 + n_2 + n_3 \neq 3 n_1$. Tous les enfants font le graphique de leur course et tracent le graphique de la course idéale : celle où ils auraient mis $3 \times n_1$ pour parcourir les trois tours de la cour.

Pour la course idéale, ils tracent une ligne droite joignant l'origine au premier point, ils mettent en oeuvre un modèle linéaire.

Un enfant a lu sur sa courbe $(n_1 + n_2 + n_3) - (3 \times n_1)$ puis il l'a calculé et il n'a pas trouvé le même nombre, toute une discussion s'est alors élevée entre les enfants sur la "justesse" du graphique.

C'est une des premières fois où les enfants prennent conscience de l'incertitude due à la lecture de résultats sur un graphique.

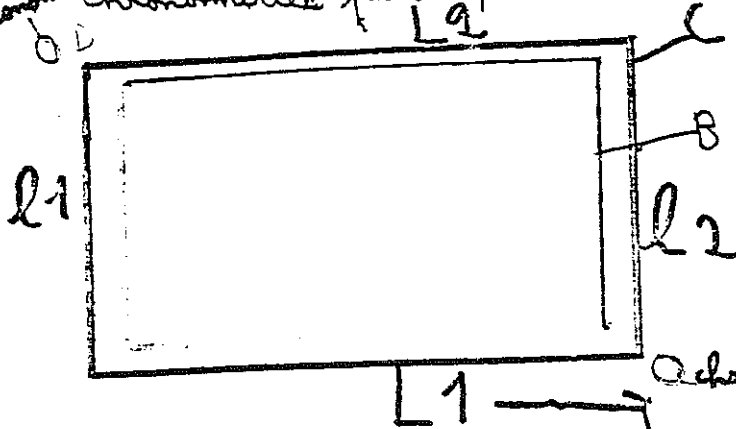
8ème séance (une semaine plus tard)

La maîtresse demande aux enfants de raconter par écrit toutes les péripéties de la course chronométrée. Les enfants sont effrayés par l'immensité de la tâche. Ils en discutent entre eux et décident de couper l'histoire en quatre épisodes et 2 équipes de 3 enfants écrivent un épisode. Une fois l'épisode écrit par chacune des deux équipes, les enfants de ces deux équipes se réunissent avec la maîtresse et critiquent les deux textes. Après cette critique les 2 équipes produisent un nouveau texte et choisissent le meilleur texte qui sera le texte définitif (ci-joint).

Nous avons demandé aux enfants d'écrire la course chronométrée parce que nous voulions vérifier que les éléments importants ne leur avaient pas échappé et qu'ils pouvaient dégager les éléments pertinents de la situation.

La course chronométrée

Tout au début, on a fait le tour de la cour et on été chronométrée par 2 personnes



| trajet | A | B | C |
|--------|------------------|------------------|------------------|
| temps | L1 L2 | L1 L2 | L1 L2 |
| L1 L2 | 16 | 16 | 32 |
| L2 L1 | | | |
| L1 L2 | | | |
| L2 L1 | | | |
| L1 L2 | | | |
| L2 L1 | | | |
| L1 L2 | | | |
| L2 L1 | | | |
| L1 L2 | | | |
| L2 L1 | | | |

- A = temps pour faire le trajet L1 L1
- B = temps pour faire le trajet L2 L2
- C = temps pour faire le trajet L1 L1 + L2 L2

Au début, on ne savait pas le temps mis pour faire le trajet L2 L1. On a calculé à l'aide des temps A et C.

Exemple:

Pour Anne-Laure: 16 pour aller à 32, cela fait 16s

et aussi il fallait calculer combien il y avait de seconde entre le temps A et le temps B

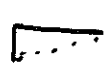
Exemple:

Pour Anne-Laure: entre le temps A et B il y a 0 seconde. $(16 - 16 = 0)$

16 déc

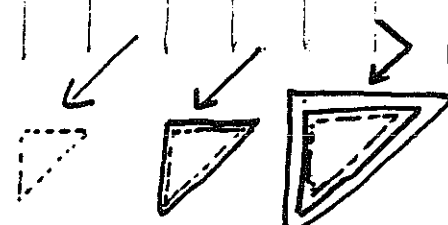
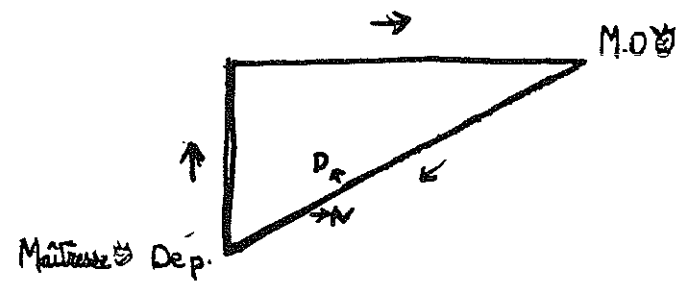
La 2^e course chronométrée 3 fois le triangle

On devait courir la moitié de la cour, en triangle. Exemple:  la cour, notre parcours lL = la moitié du triangle de la cour.

N = tout le triangle de la moitié de la cour. D = la diagonale du triangle. Exemple du " D ":  D . Exemple du " lL ":  lL

 = chronomètre. lL mesure: 74 mètres D mesure: 55 mètres. Exemple de Nicolas.

| Nicolas | lL | N | NlL | NN | $NNlL$ | NNN |
|---------|------|-----|-------|------|--------|-------|
| | 14 | 25 | 46 | 59 | 79 | 93 |

| |
|--------------------------------|
| Nicolas a parcouru lL en 14s |
| " " " " N en 25s |
| " " " " NlL en 46s |
| " " " " NN en 59s |
| " " " " $NNlL$ en 79s |
| " " " " NNN en 93s |

Stonne-Laure, Geraldine et Yambine.

La 2^e course chronométrée

n_1 c'est le temps du premier tour en secondes

n_2 c'est le temps du deuxième tour en secondes.

n_3 c'est le temps du troisième tour en secondes.

Exemple Nicolas

$$n_1 = 25$$

$$n_2 = 59 - 25 = 34$$

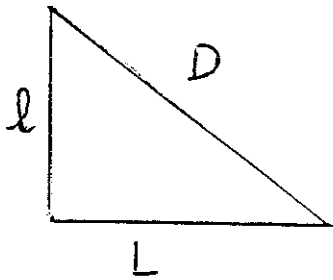
$$n_3 = 93 - 59 = 34$$

Vitesse de la course 120 50 course vitesse

Pour tracer la courbe de Nicolas nous avons pris les temps suivants.

| | | | | | |
|----|----|-----|----|------|-----|
| LL | N | NLL | NN | NNLL | NNN |
| 14 | 25 | 46 | 59 | 79 | 93 |

Nous avons mesuré la cour.



$$LL = 74$$

$$D = 55$$

$$N = 74 + 55 = 129$$

Nous avons calculé

$$N \Rightarrow 74 + 55 = 129$$

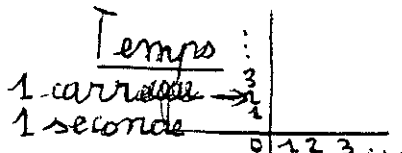
$$NLL \Rightarrow 129 + 74 = 203$$

$$NN \Rightarrow 2 \times 129 = 258$$

$$NNLL \Rightarrow 258 + 74 = 332$$

$$NNN \Rightarrow 3 \times 129 = 387$$

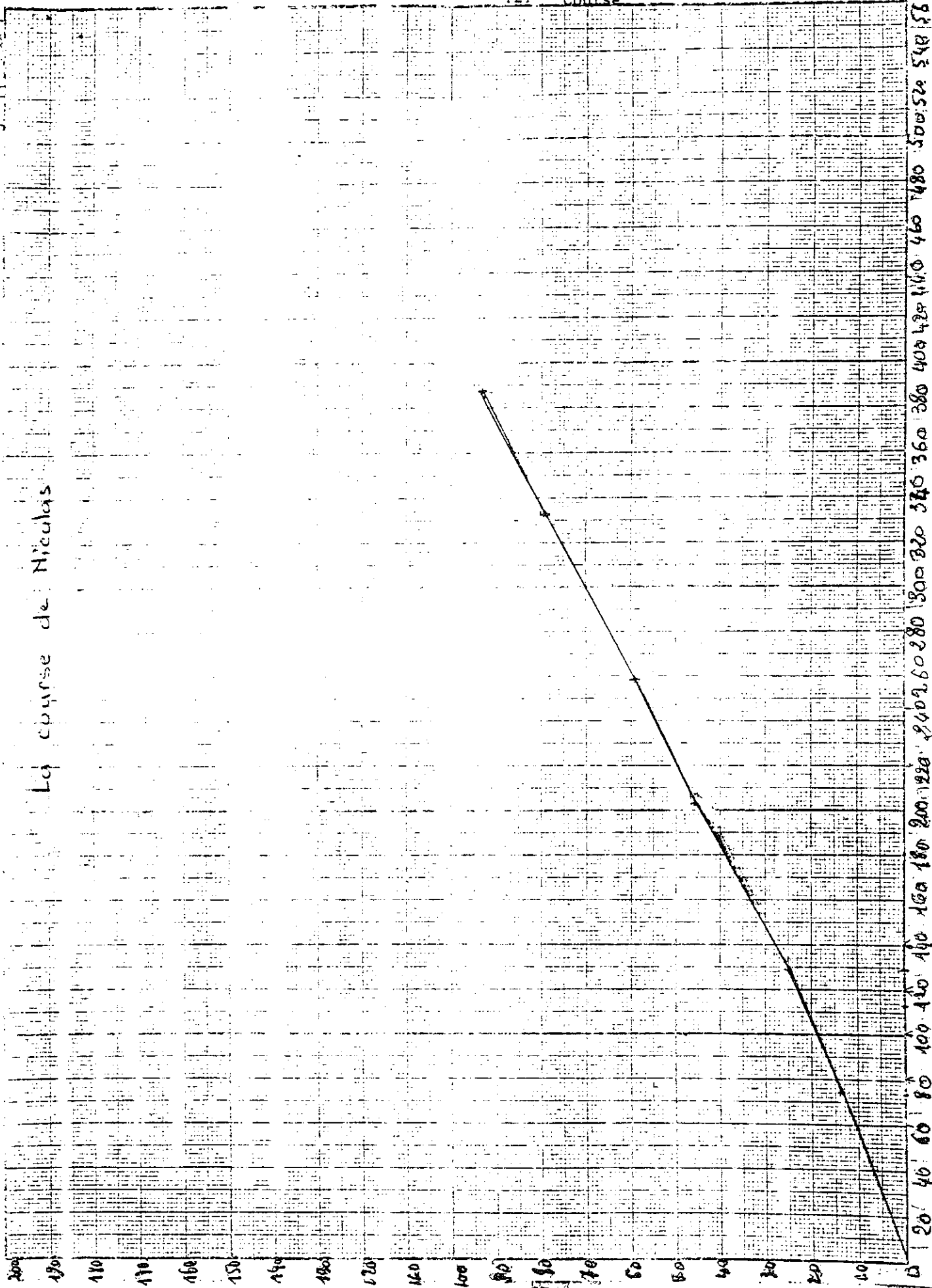
Nous avons pris la feuille millimétrée, nous avons inscrit les nombres et nous avons tracé la courbe



longueur des trajets: 1 carré $\rightarrow$ 2 mètres

La course de Nicolas

- 121 - Course



Regardons la  courbe de Nicolas

Au premier tour, Nicolas a couru vite, ensuite, au 2^o et au 3^o tour il a été un peu moins vite.

Quand la courbe de l'élève monte cela veut dire que l'élève ne court pas vite, et quand la courbe de l'élève descend cela veut dire que l'élève court vite.

Lopina,
Labine et
c. Patocha

Vendredi 16 décembre 1977.

La course chronométrée à vitesse constante

Nous avons couru trois tours de cour en triangle en essayant d'aller à la même vitesse.

Avec le chronomètre, nous avons mesuré trois temps.

Le temps: t_1 pour faire le 1^{er} tour.

Les temps: $t_1 + t_2$ pour faire les 2 premiers tours.

Les temps: $t_1 + t_2 + t_3$ pour faire les 3 premiers tours.

Exemple: de Anne-Laurie:

| Temps | t_1 | $t_1 + t_2$ | $t_1 + t_2 + t_3$ |
|-------|-------|-------------|-------------------|
| AL | 37 | 75 | 136 |

On a ensuite tracé la courbe avec les temps et les longueurs du 1^{er} tour, du 2^{ème} tour et du 3^{ème} tour.

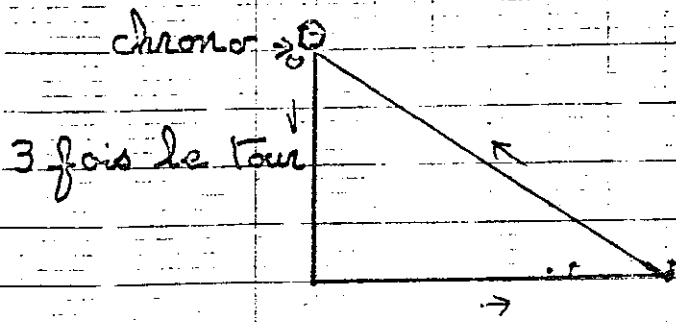
Examen de la courbe de Anne-Laurie.

Anne-Laurie a ralenti au 2^{ème} et 3^{ème} tour de 25s.

Calcul du temps que Anne-Laurie aurait dû mettre

$$3 \times t_1 = 111$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 37 \\ 37 \\ 37 \\ \hline 111 \end{array}$$



Il en lieu de faire 111 s. A. a fait 136

L'écart est de: 25 s. (136 - 111 = 25 s)

2000

- 125 - Course

200

190

180

170

160

150

140

130

120

110

100

90

80

70

60

50

40

30

20

10

0

$E = 25$

$E = 25$

La course d'Henri
Laurie

2000

190

180

170

160

150

140

130

120

110

100

90

80

70

60

50

40

30

20

I.R.E.M
 Université Paris 7
 Denis Diderot
 Tour 56 couloir 56/55 - 3e étage, Case 7018
 2, place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05
 Tel : 01 44 27 81 85
 ou 01 44 27 53 83
 Télécopie : 01 44 27 56 08
 Janvier 1999

| Poids jusqu'à | Ordinaires |
|---------------|------------|
| 20 g | 3,00 F |
| 50 g | 4,50 F |
| 100 g | 6,70 F |
| 250 g | 11,50 F |
| 500 g | 16,00 F |
| 1 000 g | 21,00 F |
| 2 000 g | 28,00 F |
| 3 000 g | 33,00 F |

Nous vous indiquons le prix des brochures

sans le port, le poids et le tarif postal

pour calculer le coût du port

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

BROCHURES

| N° | Titre | Prix | Poids |
|----|---|------|--------|
| 4 | Groupe Français-Mathématiques (Tome 1)..... | 56F | 490 gr |
| 5 | Quelques réflexions sur la démonstration..... | 27F | 220 gr |
| 7 | Pavages et coloriages..... | 27F | 170 gr |
| 14 | De la température résultante à l'angle solide..... | 21F | 170 gr |
| 15 | Groupe Français-Mathématiques (Tome 2)..... | 52F | 440 gr |
| 16 | Les jeux du "Club des Cordelières"..... | 58F | 420 gr |
| 21 | Almanathématique..... | 18F | 160 gr |
| 22 | Frises..... | 10F | 85 gr |
| 23 | Récurrance..... | 53F | 410 gr |
| 24 | Climatisons les Mathématiques..... | 33F | 270 gr |
| 25 | Les Forces en statique..... | 18F | 110 gr |
| 27 | Nombre d'or..... | 74F | 640 gr |
| 29 | La vitesse..... | 35F | 290 gr |
| 30 | Représentations graphiques..... | 35F | 300 gr |
| 34 | Métiologie..... | 31F | 240 gr |
| 36 | Au pays des Cycloïdes..... | 38F | 340 gr |
| 38 | Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire..... | 50F | 430 gr |
| 39 | Pot Pourri..... | 44F | 350 gr |
| 43 | Cinématique relativiste..... | 34F | 260 gr |
| 45 | Petites variations ou l'art de dériver sans le savoir..... | 39F | 330 gr |
| 46 | Nombres à l'école élémentaire..... | 45F | 390 gr |
| 47 | Matériaux pour Logo..... | 36F | 300 gr |
| 48 | Mesure des longueurs et des aires..... | 40F | 340 gr |
| 49 | Devoirs à la maison pour le premier cycle..... | 38F | 310 gr |

| | | | |
|----|--|-----|--------|
| 50 | Deug SSM Section E - Un an de fonctionnement... | 35F | 310 gr |
| 51 | Instruments de Géométrie..... | 20F | 160 gr |
| 53 | Lisp et Prolog..... | 39F | 320 gr |
| 54 | Echelles logarithmiques..... | 22F | 160 gr |
| 55 | Dessin géométrique..... | 25F | 200 gr |
| 56 | Héliomath..... | 31F | 240 gr |
| 57 | Statistiques..... | 50F | 420 gr |
| 58 | Informatique et Mathématiques en Terminale C..... | 70F | 630 gr |
| 59 | "Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes)..... | 35F | 140 gr |
| 61 | Mathématiques : Approche par des textes historiques..... | 50F | 450 gr |
| 62 | Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux..... | 59F | 520 gr |
| 63 | Une section de Deug SSM Première année 84-85..... | 62F | 560 gr |
| 64 | Une année de Géométrie en Terminale C..... | 29F | 230 gr |
| 68 | Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grands - de graduations - farfelus - de certificat d'études..... | 49F | 440 gr |
| 69 | Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème..... | 50F | 440 gr |
| 71 | Activités géométriques en Terminale C..... | 24F | 180 gr |
| 72 | De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire..... | 24F | 190 gr |
| 73 | Angles de couples et rotations..... | 32F | 280 gr |
| 74 | Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire..... | 45F | 380 gr |
| 75 | La géométrie au lycée..... | 49F | 420 gr |
| 76 | Questionnaire de travail sur les différentielles..... | 31F | 240 gr |
| 77 | Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide..... | 49F | 410 gr |
| 78 | Calcul mental..... | 43F | 400 gr |
| 79 | Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - | 60F | 530 gr |
| 80 | Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert) | 55F | 530 gr |
| 81 | La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1..... | 48F | 420 gr |
| 82 | Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques : leur impact sur l'éducation..... | 31F | 270 gr |
| 83 | Recherche de spécificités dans l'enseignement à distance des mathématiques en licence-maîtrise à l'université P. et Marie Curie (Paris)..... | 25F | 210 gr |
| 84 | Modules - TD en Seconde..... | 42F | 360 gr |
| 85 | Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques..... | 38F | 310 gr |
| 86 | La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique..... | 28F | 220 gr |
| 87 | Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ?..... | 24F | 180 gr |

LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

| N° | Titre | Auteur(s) | Prix | Poids |
|----|--|-------------|------|-------|
| 1 | De l'ingénierie didactique..... | J. Robinet | 3F | 60 gr |
| 2 | Quelques éléments de théorie piagétienne et... didactique des Mathématiques..... | J. Rogalski | 6F | 90 gr |
| 3 | Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre..... | R. Douady | 6F | 90 gr |
| 5 | Quelques concepts, quelques généralités et quelques références..... | Collectif | 3F | 60 gr |

| | | | | | | | | | |
|----|---|--|-----|--------|-----------------|---|--|-----------|--------|
| 6 | De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle..... | R. Douady | 6F | 90 gr | 22 | Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année..... | D. Grenier
M. Legrand
F. Richard | 24F | 260 gr |
| 7 | Acquisition des premiers concepts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG..... | F. Boschet
A. Robert | 21F | 230 gr | 23 | Comment faire du neuf avec du vieux ? Tracés de courbes en Logo..... | P. Jarraud | 12F | 150 gr |
| 8 | Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques..... | M. Arigue | 11F | 130 gr | 24 | Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège..... | M.J. Perrin | 15F | 180 gr |
| 9 | Histoire de la convergence uniforme..... | J. Robinet | 6F | 80 gr | 25 ¹ | Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits
Compte-rendu de l'expérimentation..... | D. Butlen
C. Lethielleux | 5F | 80 gr |
| 10 | Des Analystes avant l'analyse..... | M.C. Bour | 9F | 110 gr | 25 ² | Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits
Compte-rendu de l'expérimentation..... | D. Butlen
C. Lethielleux | 16F | 180 gr |
| 12 | A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire | J. Rogalski | 13F | 150 gr | 26 | L'histoire de l'enseignement des Mathématiques comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques..... | G. Schubring | 9F | 130 gr |
| 13 | Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité (Analyse des effets macroscopiques de l'enseignement).... | J. Rogalski | 7F | 90 gr | 27 | Basic, Riemann, Darboux
Illustration de l'intégrale sur un micro-ordinateur | P. Jarraud | 8F | 110 gr |
| 15 | Analyse non standard et enseignement..... | M. Arigue
V. Gautheron
E. Isambert | 21F | 230 gr | 28 | Didactique dans l'enseignement supérieur : une démarche | A. Robert | 11F | 140 gr |
| 16 | Typologie de logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : quelques résultats..... | F. Tréhard | 10F | 120 gr | 29 | Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG..... | J. Robinet | 28F | 300 gr |
| 17 | Une intervention en didactique des Mathématiques à des élèves instituteurs en 3ème année d'école normale (FP3)... | A. Robert | 14F | 160 gr | 30 | Sur l'analyse des traités d'analyse : les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914..... | M. Zerner | 7F | 110 gr |
| 18 | Rapports enseignement/Apprentissage (début de l'analyse sur R)..... | | | | 31 | Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de DEUG scientifique selon les séries de baccalauréat d'origine
Annexe sur la méthode graphique..... | H. Authier
M. Cantacuzene | 22F | 250 gr |
| | Fascicule 0 : connaissance des élèves sur les débuts de l'analyse sur R à la fin des études scientifiques secondaires françaises..... | A. Robert | 4F | 60 gr | 32 | Un essai d'expérience didactique : L'enseignement des Mathématiques à l'école expérimentale de Bonneuil S/Marne..... | I. Bloch | 13F | 170 gr |
| | Fascicule 1 : Analyse d'une section de DEUG A première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage) | A. Robert | 11F | 130 gr | 33 | Travail en classe en petits groupes - Première approche
Introduction de Mme N. LEORAT..... | N. Baron | 37F | 390 gr |
| | Fascicule 2 : Analyse d'une section de DEUG A première année (connaissances antérieures et procédures en cours d'apprentissage)..... | C. Houard
M. Quatreuille | 6F | 80 gr | 34 | Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématique..... | J. Robinet | 3F | 60 gr |
| | Fascicule 3 : Les limites de l'évaluation : - la section témoin - heurs et malheurs de la section expérimentale..... | A. Robert | 6F | 90 gr | 35 | Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM..... | C. Laurent
P. Jarraud | 17F
4F | 200 gr |
| 19 | Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels..... | D. Butlen | 28F | 290 gr | | Cahier + disquette..... | | 22F | 210 gr |
| 20 | A propos de l'enseignement de la proportionnalité..... | M. Pezard | 4F | 70 gr | 36 | Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou échec scolaires..... | M.J. Perrin-
Glorian | 17F | 200 gr |
| 21 | Les réels : Quels modèles en ont les élèves ? | J. Robinet | 13F | 150 gr | | | | | |

| CAHIERS DE DIDIREM | | | | |
|--------------------|---|---|-----|--------|
| 37 | Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane | R. Douady
M.J Perrin-Glorian | 14F | 170 gr |
| 38 | Enseigner des méthodes..... | A. Robert
J. Rogalski
R. Samurçay | 8F | 110 gr |
| 39 | Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture
Le cas de "La somme des angles d'un triangle....." | N. Balacheff | 10F | 130 gr |
| 40 | Travail en petits groupes en Terminale C..... | M.C Marilier
A. Robert
I. Tenaud | 20F | 230 gr |
| 41 | Apprendre des Mathématiques et comment apprendre
des mathématiques : Premiers éléments pour une étude
des représentations des élèves de l'enseignement
post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique..... | E. Bautier
A. Robert | 13F | 170 gr |
| 42 | Représentations de l'enseignement des mathématiques
(un exemple : l'organisation de la classe de seconde)..... | N. Léorat
A. Moussa | 21F | 240 gr |
| 43 | Acquisition de savoirs et de savoir-faire en informatique.... | J. Rogalski | 7F | 100 gr |
| 44 | Recherche d'une démarche d'enseignement
en mathématiques, au C.N.A.M..... | J.P Drouhard
Y. Paquellier | 12F | 150 gr |
| 45 | Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs
en DEUG SSM 2ème partie..... | P. Jarraud | 14F | 170 gr |
| 46 | Connaissances mathématiques des étudiants issus des
bac F..... | H. Authier | 19F | 220 gr |
| 47 | De quelques spécificités de l'enseignement des
mathématiques dans l'enseignement postobligatoire
(EPO)..... | A. Robert | 8F | 120 gr |
| 48 | Représentation plane des figures de l'espace..... | J. Boudarel
F. Colmez
B. Parzysz | 8F | 120 gr |
| 49 | Réussite en IUT selon l'origine scolaire..... | A. Jacquemin | 11F | 140 gr |
| 50 | Une introduction à la didactique des Mathématiques..... | A. Robert | 17F | 210 gr |
| 51 | Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des
manuels..... | A. Robert | 23F | 260 gr |
| 52 | Un aperçu des travaux de VYGOTSKI
. LEONTIEV et BRUNER, Disciples de VYGOTSKY | F. Boschet | 17F | 200 gr |
| 53 | Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre
linéaire en première année de DEUG..... | A. Robert
J. Robinet | 6F | 90 gr |
| 1 | Représentations des enseignants de mathématiques sur
les mathématiques et leur enseignement | A. Robert
J. Robinet | 20F | 160 gr |
| 2 | La genèse du calcul algébrique (Une esquisse) | J. Robinet | 14F | 100 gr |
| 3 | Epistémologie et didactique | M. Artigue | 16F | 120 gr |
| 4 | Enoncés d'exercices de manuels de seconde et
représentations des auteurs de manuels | A. Robert
J. Robinet | 28F | 240 gr |
| 5 | Une expérience d'enseignement des mathématiques
à des élèves de 6ème en difficulté | M.J Perrin-Glorian
D. Butlen
M.Lagrange | 21F | 170 gr |
| 6 | Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de
DEUG A (*) en algèbre linéaire.
(*) Premier cycle scientifique des universités françaises | J.L Dorier
C. Lavergne | 48F | 420 gr |
| 7 | Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires
d'algèbre linéaire | J.L Dorier | 35F | 290 gr |
| 8 | Innovation pédagogique et représentations des étudiants
Présentation et analyse des résultats du dépouillement d'un
questionnaire sur l'enseignement des mathématiques
en DEUG SSM Première année | P. Jarraud | 25F | 200 gr |
| 9 | Un projet long d'enseignement
(algèbre et géométrie - licence en formation continuée) | A. Robert | 36F | 290 gr |
| 10 | Analyse du discours des enseignants :
A) Apports de 2 ouvrages récents de linguistique
par C.M Chiocci
B) Méthode de BRONCKART et références
bibliographiques complémentaires | | 19F | 150 gr |
| 11 | Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première
année | M. Rogalski | 27F | 230 gr |
| 12 | Le pourquoi et le comment d'une ingénierie.
(La convergence uniforme) | J. Robinet | 15F | 120 gr |
| 13 | Une expérience d'enseignement de mathématiques à des
élèves de CE2 en difficulté | D. Butlen
M. Pezard | 29F | 250 gr |
| 14 | Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre
linéaire | J.L Dorier | 21F | 170 gr |

| | | | | | | | | | |
|-----------------|---|---|-----|--------|----|---|---|-----|--------|
| 15 | Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : "quelques commentaires épistémologiques et didactiques" | M. Artigue
A. Defledicq | 30F | 250 gr | 27 | Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. | M. Pezard
D. Butlen | 27F | 200 gr |
| 16 | <p>A) Etude comparée des discours de deux enseignants de mathématiques pendant une même leçon (en 2d).</p> <p>B) Une méthode d'analyse de discours d'enseignant en classe de mathématiques.</p> | E. Josse
C.M. Chiocca
E. Josse
A. Robert | 31F | 270 gr | 28 | Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde | C. Hache
A. Robert | 41F | 340 gr |
| 17 | Télé enseignement universitaire
Les mathématiques dans une section de Deug SSM première année. | C. Cazes | 22F | 180 gr | 29 | Pratiques des élèves et des enseignants des mathématiques
Rapport de recherche
Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques
Institutionnalisation en classe de seconde : valeur absolue, Intervalles, encadrements, approximations première partie : choix globaux des enseignants et résultats des élèves | A. et
R. Noirfalise
M.J Perrin | 56F | 464 gr |
| 18 | Les problèmes didactiques de l'enseignement des mathématiques dans l'association AUXILIA | F. Stamon Millet | 19F | 150 gr | 30 | DEA de didactique des disciplines
Didactique des mathématiques
Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques | E. Roditi | 42F | 350 gr |
| 19 ¹ | L'ingénierie didactique
Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. | R. Douady | 22F | 180 gr | 31 | DEA de didactique des disciplines
Didactique des mathématiques
L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde
Numéro spécial n° 4
Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée | D. Pihoue
M. Arigue
B. Defouad
M. Duperrier
G. Juge
J.B Lagrange | 44F | 390 gr |
| 20 | "Les oeufs"
Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde. | E. Hébert | 44F | 400 gr | | | | | |
| 21 | Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques | A. Robert
J. Robinet | 27F | 230 gr | | | | | |
| 22 | Représentations des professeurs de mathématiques et des élèves de terminales des lycées de Conakry sur les mathématiques et leur enseignement | A. Tidjane Diallo | 49F | 440 gr | | | | | |
| 23 ¹ | Changements de cadres à partir des surfaces minimales. | A. et R. Douady | 20F | 230 gr | | | | | |
| | Numéro Spécial n° 2 :
Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour "réussir sa seconde" ? | E. Josse | 33F | 270 gr | | | | | |
| 25 | A propos de l'utilisation des calculatrices au lycée | M. Latuati
I. S. Rodrigues | 18F | 120 gr | | | | | |
| | Numéro spécial n° 3 :
Une recherche sur le logiciel Dérive
Rapport | Equipe
DIDIREM | 88F | 780 gr | | | | | |
| 26 | Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques.
Un essai de didactique professionnelle | A. Robert | 20F | 140 gr | | | | | |

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

| | | | | | | | | | |
|----|--|---|-----|--------|----|--|---|-----|--------|
| 1 | Formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne | A. Robert | 18F | 140 gr | 11 | IUFM - An 3
Diversités et points communs des formations des PLC2 en mathématiques en IUFM - comparaison sur 18 IUFM
L'avis des stagiaires (une enquête auprès de néo-certifiés et certifiés de l'an 1) | J. Penninckx | 26F | 190 gr |
| 2 | Formation des moniteurs (Mathématiques) | D. Perrin et
A. Robert | 13F | 100 gr | 12 | IUFM - An 3
L'observation de classes
Réflexion sur la formation à l'observation de classes des stagiaires PLC2 de Mathématiques à l'IUFM de Rouen | E. Hébert
P. Tavnignot | 26F | 180 gr |
| 3 | Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques
Actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/1991 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM | | 22F | 190 gr | 13 | IUFM Rouen
Maths 2ème année
Evaluation 1993/94 | J. Borréani
E. Hébert
G. Le Hir
C. Castela
P. Tavnignot | 24F | 190 gr |
| 4 | Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs | D. Butlen et
M. Pezard | 31F | 260 gr | 14 | Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif ? | A. Robert | 22F | 156 gr |
| 5 | Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique
I Exemples de différentes stratégies de formation (R. Douady et A. Robert)
II Questions sur la formation, sur l'observation en formation (A. Robert)
III Questions sur la formation en didactique des mathématiques (M. Artigue, M. Henry, D. Butlen) | | 21F | 160 gr | 15 | La formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques : exemples de séances organisées à l'IUFM pour les stagiaires de deuxième année (PLC2) | D. Dumortier,
M. Latuati
M. Poncicq,
C. Perdon,
J. Poirier,
A. Robert,
C. Robert,
et E. Roditi | 30F | 200 gr |
| 6 | Une séquence d'enseignement au lycée : Les angles en seconde | C. Jeulin
D. Sperandio
R. Proteau | 13F | 90 gr | 16 | Formation professionnelle initiale en mathématiques : Tuteurs et stagiaires en collège et lycée | M.C. Audouin | 21F | 140 gr |
| 7 | L'isogonologie
Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie. | F. Rideau | 14F | 90 gr | 17 | La racine carrée en troisième
Etude d'une activité | E. Roditi | 20F | 140 gr |
| 8 | Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, des professeurs de collèges et de lycées. | D. Butlen
J. Bolon | 27F | 220 gr | | | | | |
| 9 | Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école. | D. Butlen
M.L. Peltier | 20F | 150 gr | | | | | |
| 10 | IUFM - An 3
* une réflexion sur la formation des PLC2
* une analyse des modules communs mathématiques à l'IUFM de Versailles | A. Robert | 21F | 140 gr | | | | | |

BROCHURE THEMATIQUE

Le groupe M : A.T.H (Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

| | | | | |
|---|---|-----|--------|---|
| 1 | Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée (IUFM Grenoble mathématiques) | 14F | 90 gr | 1. La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques. |
| 2 | Publications IREM. APMEP. ESM ... Sur l'enseignement des probabilités et des statistiques au collège et au lycée | 16F | 110 gr | Vous trouverez dans Mnémosyne
- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Les numéros reprennent, entre autres, les exposés du séminaire animé par Jean Luc Verley et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati. |
| 3 | Sommaires des bulletins de liaison des IREM | 36F | 290 gr | - De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites... |
| 4 | Répertoire des thèses autour de la didactique des mathématiques | 10F | 110 gr | - "Les contes du Lundi", qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M : A.T.H., ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion. |
| 5 | Informations générales sur le CAPES et l'AGREGATION de mathématiques | 50F | 480 gr | - Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.
- Des comptes rendus de lectures, de conférences...
- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques. |
| DIVERS | | | | numéro 1 :
La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes 26F 200 gr |
| Questionnaires de travail | E. Saltiel
L. Viennot | 29F | 310 gr | numéro 2 :
La querelle entre Descartes et fermat 30F 210 gr |
| | M. Artigue
V. Gautheron | 50F | 360 gr | numéro 3 :
Fragments d'une étude des systèmes linéaires 30F 220 gr |
| Systèmes différentiels Etude graphique
Ed. Cedic | L. Viennot | 40F | 330 gr | numéro 4-5 :
L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique 40F 300 gr |
| Mécanique et énergie pour débutants | J.M Arnaudès | 34F | 270 gr | numéro 6 :
Leibniz et l'Ecole continentale 30F 220 gr |
| Les cinq polyèdres réguliers de R ³ et leurs groupes | M. Gréhant | 21F | 150 gr | numéro 7 :
Autour du théorème de Fermat. C. Goldstein 33F 230 gr |
| Le calcul des variations | | 6F | | numéro 8 :
Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode de fluxions 33F 250 gr |
| Rapporteurs (plastique) | | | | numéro 9 :
Desargues et Pappus. R. Tossut 33F 240 gr |
| | | | | numéro 10 :
Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries Anne Michel Pajus 33F 260 gr |

| | | | | | |
|--|-----|--------|--|--|-------------------------------------|
| numéro 11 :
Des cartes-portulants à la formule d'Eward Wright :
l'histoire des cartes à "rumb's"
Marie-Thérèse Gambin | 33F | 255 gr | 2. Les brochures (déjà citées en 1ère page) | n° 61 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 1 - 50 F
n° 79 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - 60 F | 450 gr
530 gr |
| numéro 12 :
Histoire de quelques projections cartographiques
Marie Benedittini | 33F | 255 gr | 3. La Reproduction de textes anciens
(Ancienne série) : | I Disme (Simon Stevin)..... 14 F
II Géométrie élémentaire (Félix Klein)..... 25F
III Dictionnaire Mathématiques (1er fascicule) (M. Ozanam)..... 31F
IV Dictionnaire Mathématique (2ème fascicule) (M. Ozanam)..... 32F | 80 gr
180 gr
250 gr
250 gr |
| numéro 13 :
Histoire et origine du calcul différentiel | 33F | 210 gr | (Nouvelle série) : | N° 1 : Histoire des recherches sur la quadrature du cercle
(J.E. Montucla)..... 38F | 340 gr |
| numéro 14 :
La méthode des pesées chez Archimède
Michèle Bathier-Fauvet | 33F | 214 gr | | N° 2 : Eléments du calcul des probabilités
(Marquis de Condorcet)..... 28F | 240 gr |
| Mnémosyne : Numéro spécial
N° 1 : Histoires de Pyramides (M. Grégoire) | 46F | 380 gr | | N° 3 : Traité des Indivisibles
(Gilles-Personne de Roberval)..... 32F | 270 gr |
| | | | | N° 4 : Les Porismes d'Euclide
(Michel Chasles)..... 35F | 300 gr |
| | | | | N° 5 : Sur la théorie des Ensembles
(Georg Cantor)..... 52F | 450 gr |
| | | | | N° 6 : Traité des sections coniques
(M. de La Chapelle)..... 42F | 450 gr |
| | | | | N° 7 : Traité élémentaire de calcul des probabilités
(S-F Lacroix)..... 37F | 300 gr |
| | | | | N° 8 : Eléments d'algèbre
Alexis-Claude Clairaut..... 41F | 350 gr |
| | | | | N° 9 : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal
Jean-Frédéric Frenet..... 44F | 384 gr |
| | | | | N° 10 Problèmes pour les arpenteurs
Lorenzo Mascheroni..... 21F | 156 gr |
| | | | | N° 11 Méthode des moindres carrés
Carl-Friedrich Gauss..... 36F | 295 gr |
| | | | | N° 12 Traité du calcul différentiel et du calcul intégral
Sylvestre-François Lacroix..... 70 F | 600 gr |
| | | | | N° 13 Géométrie ou de la mesure de l'étendue..... 52 F | 395 gr |

COPIRELEM

| | | |
|---|-----------------------------|--------|
| Actes du XVIIème colloque des Professeurs d'Ecole Normale (Paris - Mai 1990)..... | 61F | 650 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome I)..... | 56F | 470 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome II)..... | 55F | 630 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome III)..... | 45F | 360 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome IV)..... | 67F | 612 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome V)..... | 68F | 538 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome VI)..... | 96F | 870 gr |
| Second concours interne de recrutement des professeurs d'école
Choix de sujets 92-93-94-95
Les sujets du concours 1996
19 académies..... | 61F | 500 gr |
| Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques.
Annales 97 (21 sujets et leurs corrigés)..... | 60 F
80 F port compris | 810 gr |
| Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques.
Annales 98 (21 sujets et leurs corrigés)..... | 110 F
131 F port compris | |
| Actes : XXIVème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres..... | 70 F | 610 gr |

BROCHURES INTER-I.R.E.M

| | | |
|--|-------|--------|
| N° 3 : Quelles activités pour quel apprentissage..... | 42F | 450 gr |
| Actes du colloque Inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques..... | 33F | 610 gr |
| Budapest : Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques..... | 65F | 440 gr |
| Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A - Première Année
Principes et réalisations..... | 99F | 850 gr |
| Quelques supports pour des activités dans le cadre des enseignements modulaires en seconde
(Réseau national des I.R.E.M)..... | 24F | 180 gr |
| Catalogue des publications des IREM de 1988 à 1991..... | 50F | 280 gr |
| Catalogue des publications des IREM de 1991 à 1994..... | 40F | 500 gr |
| Histoire d'infini
(Actes du 9ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques) (Landerneau, 22-23 mai 1992)..... | 160F | 790 gr |
| Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie..... | 60F | 365 gr |
| L'Enseignement des Mathématiques : des Repères entre Savoirs, Programmes et Pratiques..... | 60F | 410 gr |
| Enseigner les probabilités au lycée
Commission Inter-IREM Statistiques et probabilités | 100 F | 788 gr |

BULLETS INTER-I.R.E.M

| | | |
|---------------------------------------|-----|--------|
| N° 21 : Rétroprojecteur..... | 10F | 190 gr |
| N° 24 : Astronomie..... | 20F | 340 gr |
| Suivi scientifique 85-8 6 (6ème)..... | 45F | 400 gr |
| Suivi scientifique 86-87 (5ème)..... | 50F | 390 gr |
| Suivi scientifique 87-88 (4ème) | 60F | 530 gr |
| Suivi scientifique 88-89 (3ème) | 60F | 590 gr |
| Activités en Première..... | 35F | 310 gr |

| | | | | | THESES | |
|---|-----|--------|--|--|---|--------------------------------|
| Images et Maths..... | 47F | 410 gr | | | Aline Robert :
L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques
dans l'enseignement supérieur.
Divers articles de Mathématiques..... | 100F
1410 gr |
| Liaison collège-seconde (1989-1990)..... | 50F | 250 gr | | | Jacqueline Robinet :
Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur..... | 70F
770 gr |
| Des chiffres et des lettres au collège 1991/92..... | 50F | 360 gr | | | Michèle Artigue :
Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques
(en réd.) | 68F
37F
780 gr
400 gr |
| Maths en seconde : énoncés et scénarios | 50F | 330 gr | | | Régine Douady :
Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement
des Mathématiques
- Une réalisation dans tout le cursus primaire..... | 120F
690 gr |
| Module en seconde..... | 25F | 150 gr | | | Denis Butlen :
Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives
au cours élémentaire..... | 40F
330 gr |
| Autour de Thalès..... | 60F | 350 gr | | | Monique Pezard :
Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs..... | 50F
460 gr |
| Des Mathématiques en sixième..... | 50F | 262 gr | | | Françoise Tréhard :
Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école
élémentaire : typologie et enjeux didactiques..... | 60F
690 gr |
| | | | | | Bernard Parzysz :
Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace
au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir /savoir..... | 90F
850 gr |
| | | | | | Isabelle Tenaud :
Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C :
enseignement de méthode et travail en petits groupes | 130F
1300 gr |
| | | | | | Marie-Jeanne Perrin-Glorian :
Aires de surfaces planes et nombres décimaux.
Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème | 160F
1390 gr |
| | | | | | Antoine Dagher :
Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre
registres graphique et algébrique de représentation des fonctions..... | 88F
970 gr |
| | | | | | Alain Kuzniak :
Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les
formateurs de maîtres du premier degré..... | 98F
920 gr |
| | | | | | Maha Abboud Blanchard
L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire
des mathématiques : symptômes d'un malaise.
Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège..... | 96F
890 gr |
| | | | | | Catherine Houdement
Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques :
programmation et stratégies..... | 102F
930 gr |

| | | |
|---|------|---------|
| Christiane Larere
Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois
enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole..... | 80F | 720 gr |
| Marie-Lise Peltier Barbier
La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école :
"entre conjoncture et éternité"
Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche
des effets de la formation sur les professeurs stagiaires..... | 100F | 924 gr |
| Brigitte Grugeon
Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves
à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement :
BEP et Première G..... | 189F | 1600 gr |
| Jeanne Bolon
Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique
des mathématiques ?
Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège..... | 94F | 834 gr |
| Marie-françoise Jozeau
Géodésie au XIXème Siècle
De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande
Regards belges
Compensation et méthode des moindres carrés..... | 162F | 1648 gr |
| Marlène Alves Dias
Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique"
dans l'enseignement de l'algèbre linéaire..... | 148F | 1322 gr |

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Mai 1983
ISBN : 2-86612-018-3
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05