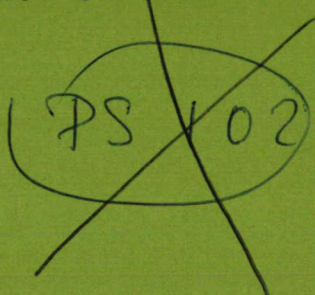


IREM

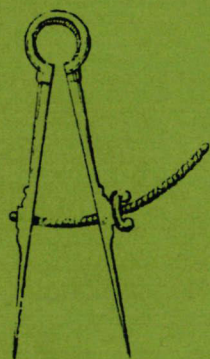
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES



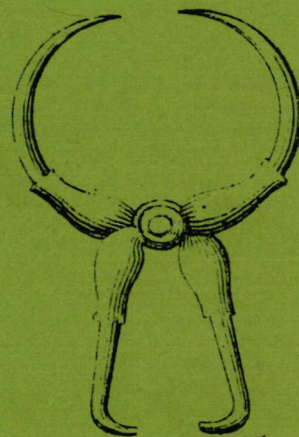
51

octobre 1983

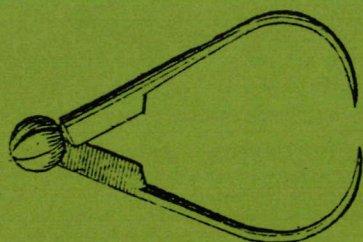
instruments



de



géométrie



par DENIS BUTLEN
FRANÇOISE TREHARD

NIVEAU

Formation des instituteurs

PUBLIC

Elèves en formation dans les E.N. et instituteurs

SUJET

Usage raisonné de certains instruments de géométrie

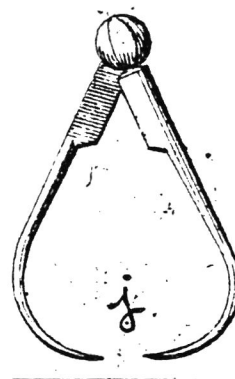
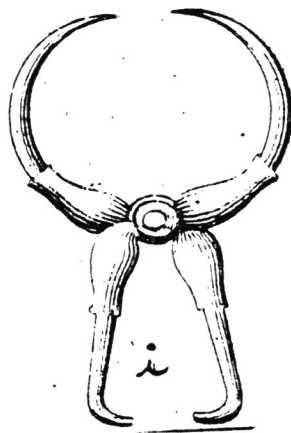
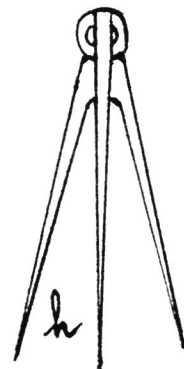
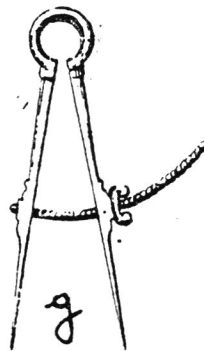
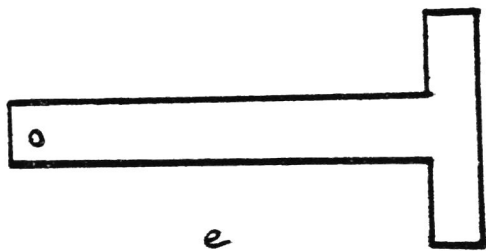
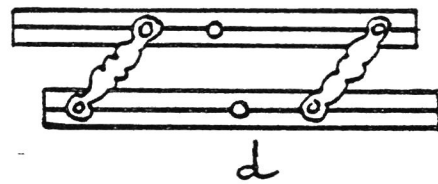
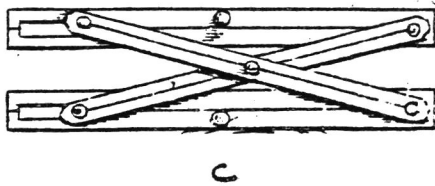
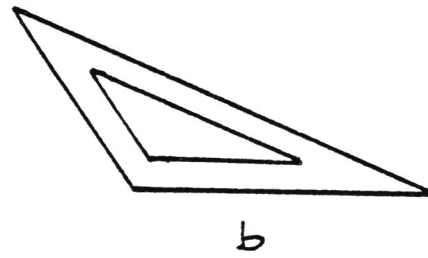
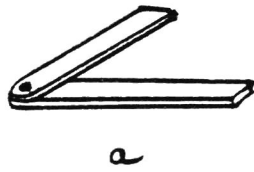
OBJECTIF

Faire découvrir des connaissances théoriques éclairant l'usage des instruments de dessin

instruments de géométrie

***Du
choix d'un
instrument***

I A QUOI SERVENT-ILS ?



II **DANS CETTE LISTE D'INSTRUMENTS D'USAGE COURANT,**

papier blanc	règle graduée
papier calque	rapporteur
réseaux (voir annexe)	compas usuel
règle non graduée	équerre

LEQUEL (LESQUELS) FAUT-IL CHOISIR POUR TRAITER CES SITUATIONS ? :

Parallélisme

- 1-** Tracé de deux parallèles D et D' dans les cas suivants:
 - a** on ne connaît ni D, ni D'.
 - b** on connaît D et un point A de D' .
 - c** on connaît D et la distance de D à D' .
- 2-** Tracé de plusieurs parallèles équidistantes.

Triangle

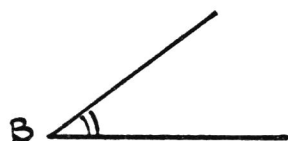
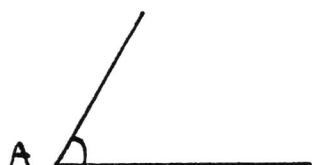
- 1-** Tracé d'un triangle avec ces trois segments:



- 2-** Tracé d'un triangle isocèle.
- 3-** Tracé d'un triangle équilatéral.

Angles**1 - Report d'angles:**

- Ⓐ report de l'angle $\hat{A}$ en S et de l'angle $\hat{B}$ en T.
- Ⓑ report de l'angle $\hat{B}$ cinq fois autour de U.
- Ⓒ report de l'angle $\hat{B}$ en M, N, L.
- Ⓓ report de l'angle $\hat{A}$ six fois autour de K.

2 - Tracé de la bissectrice des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

x
N

x S

x U

x L

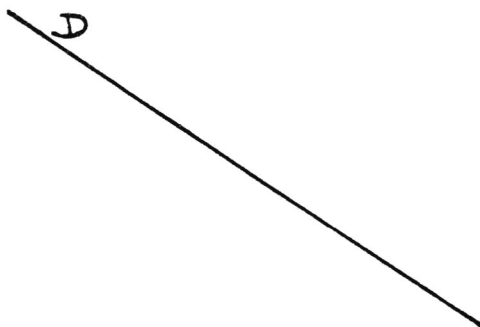
x M

x K

x T

Symétrie orthogonale

- Tracé du symétrique d'un segment par rapport à la droite D.



III D'AUTRES CORDES A VOTRE ARC ?

Remplacer un instrument

. Préciser la ou les fonctions de ces instruments:

- règle non graduée
- règle graduée
- rapporteur
- compas
- équerre
- papier calque

. Vous ne disposez que de papier blanc. Que feriez-vous pour assurer ces différentes fonctions et remplacer par là-même ces instruments ?

Maitriser diverses techniques

A— || Assurez-vous de votre maitrise des techniques instrumentales relatives aux instruments d'usage courant.

B— || Assurez-vous de votre maitrise de techniques non liées aux instruments d'usage courant :

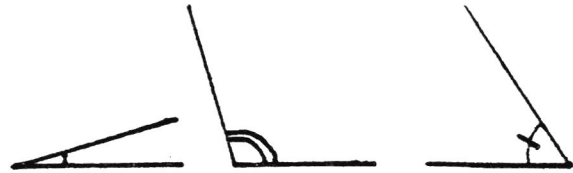
1. Assemblage

- . produire par assemblage :
 - un parallélogramme
 - un hexagone régulier
- . préciser dans chaque cas les "pièces" utilisées; pourriez-vous construire d'autres figures avec celles-ci ?

2 - Intersection de bandes, de secteurs angulaires

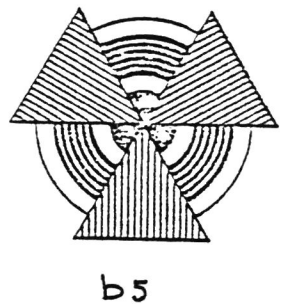
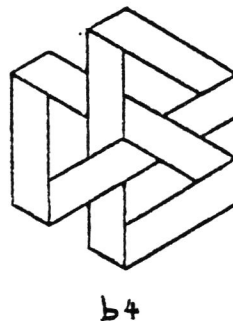
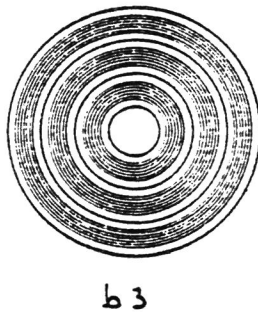
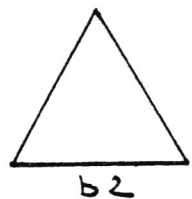
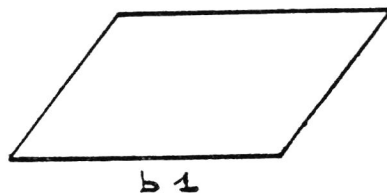
Dans chaque situation, les données permettent-elles de définir une figure unique ?

- ① produire un parallélogramme par intersection
 - . de deux bandes de papier
 - . de deux secteurs angulaires de papier
- ② produire un trapèze par intersection d'une bande et d'un secteur angulaire de papier.
- ③ découper ces trois angles et les utiliser pour construire un triangle..



3 - Pliage

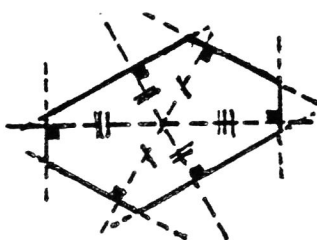
- ① produire des polygones (triangles, parallélogrammes,).
- ② quelles propriétés des figures ci-dessous pouvons-nous déterminer en utilisant cette technique ?



IV EN DEFINITIVE , QUE CHOISIR ?

Résoudre les problèmes suivants, en utilisant les instruments et les techniques qui vous semblent les plus adéquats. Préciser vos choix dans chaque situation.

• Problème 1 :



Cet hexagone a tous ses angles de même mesure et ses côtés opposés de même longueur.

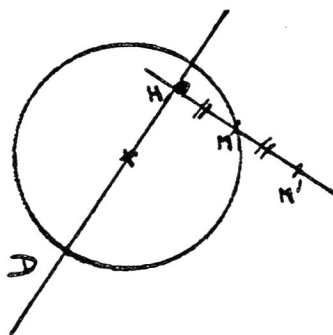
Produire un autre hexagone de ce type.

• Problème 2 :

Choisir deux points A et B et une longueur l supérieure à la distance AB.

Construire l'ensemble des points M tels que $MA+MB=l$.

• Problème 3 :



Le diamètre D du cercle est fixé.

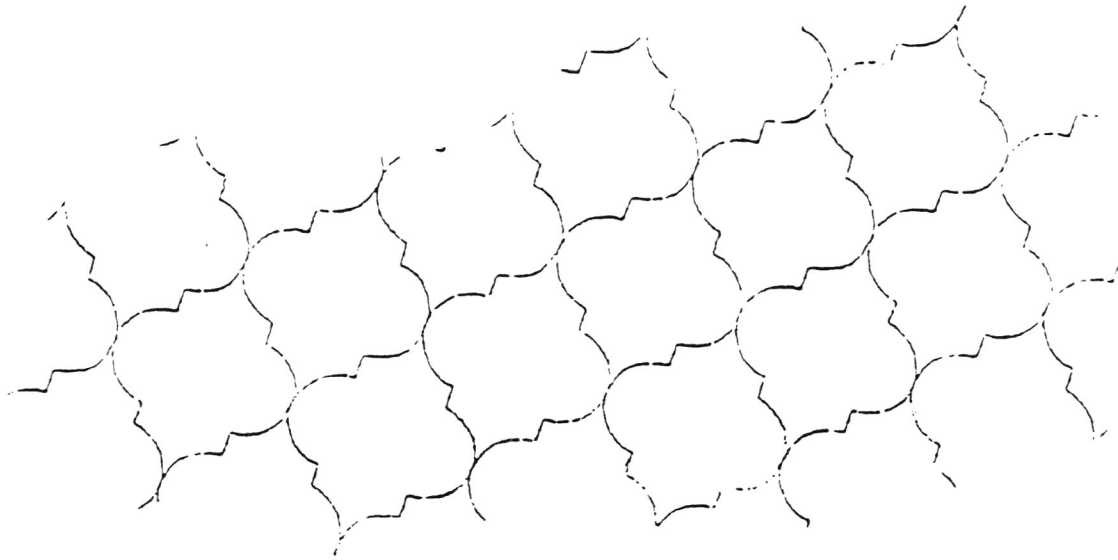
$HM=HM'$.

A chaque point M du cercle correspond un point M'.

Construire l'ensemble des points M'.

● Problème 4 :

- .. vérifier que ce pavage possède des axes de symétrie
- .. continuer ce pavage



● Problème 5 :

Construire des polyèdres:

- cube
- pavé oblique à six faces parallélogrammiques:

nombre de parallélogrammes	mesure d'un côté	mesure d'un autre côté	mesure d'un secteur angulaire
2	7	4	60°
2	7	9	70°
2	4	9	80°

(D'après "activités spatiales",
n° 35 IREM PARIS VII)

- tétraèdre à 4 faces triangulaires équilatérales
- octaèdre à 8 faces triangulaires équilatérales
- ...

V DES CONTRAINTES INSTRUMENTALES

● La règle (non graduée) et le compas

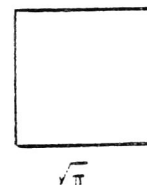
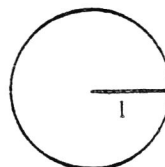
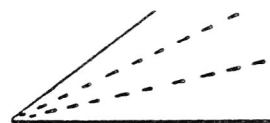
Depuis l'antiquité, les mathématiciens se sont intéressés aux constructions possibles à la règle et au compas.

Savez-vous construire à la règle et au compas
un angle droit, un carré, un hexagone régulier,
un octogone régulier, ?

Ils ont notamment cherché à résoudre les problèmes suivants :

- construction de polygones réguliers
- trisection d'un angle quelconque

- quadrature du cercle: construction
d'un carré ayant même aire qu'un
cercle donné



Depuis P.L Wantzell (1814-1848) et F. Linderman (1852-1939), on sait que seuls certains cas particuliers des deux premiers problèmes admettent une solution (voir page 18).

Ces problèmes de construction se ramènent en fait à déterminer les nombres constructibles à la règle et au compas : tous ne le sont pas.

● L'inutile règle

Le danois G. Mohr (1640-1697) démontra en 1672 dans son ouvrage "Euclides Danicus" le résultat suivant:

Tout point du plan constructible à la règle et au compas est constructible au compas seulement.

Ce résultat est plus communément attribué à l'Italien Lorenzo Mascheroni (1750-1800), grâce à son ouvrage, *La geometria del compasso*, publié en 1797. Les préoccupations de ces mathématiciens se veulent utilitaires puisqu'ils proposent des applications à la construction de cadrans solaires et à la graduation d'instruments d'astronomie. Napoléon Bonaparte (1769-1821) a rencontré Mascheroni pendant la campagne d'Italie, rentré en France, il signala les travaux du mathématicien italien à l'Académie des Sciences. Un des problèmes de Mascheroni est devenu célèbre sous le nom de problème de Napoléon. Il consiste à construire au compas le centre d'un cercle donné sans son centre. (*)

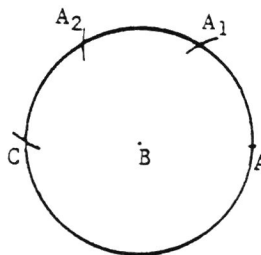
(voir exemple 3)

Voici des exemples de constructions avec le compas seul:

- exemple 1 :

Si A et B sont des points constructibles au compas alors la symétrique de A par rapport à B est constructible au compas.

On construit le cercle de centre B passant par A, puis avec une ouverture de compas égale à AB on construit les sommets A_1 , A_2 , C d'un hexagone régulier.

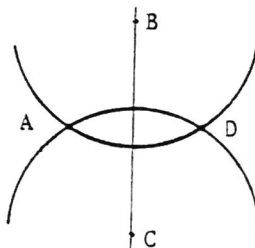


(*)

- exemple 2 :

Si A, B, C sont des points constructibles au compas avec $B \neq C$, la symétrique D de A par rapport à la droite BC est constructible au compas.

Il suffit de construire les cercles de centres B et C passant par A, ils se coupent en D.



(*)

Sauriez-vous justifier les deux constructions qui précèdent ?

- exemple 3:

Problème de Napoléon: construire au compas le centre d'un cercle donné sans son centre.

Désignons par C le cercle donné.

- Soient A et E des points arbitraires du cercle C , non diamétralement opposés. Ces points vont servir de points de base pour la suite de la construction.

- Le cercle Γ de centre A passant par E coupe le cercle C en F .

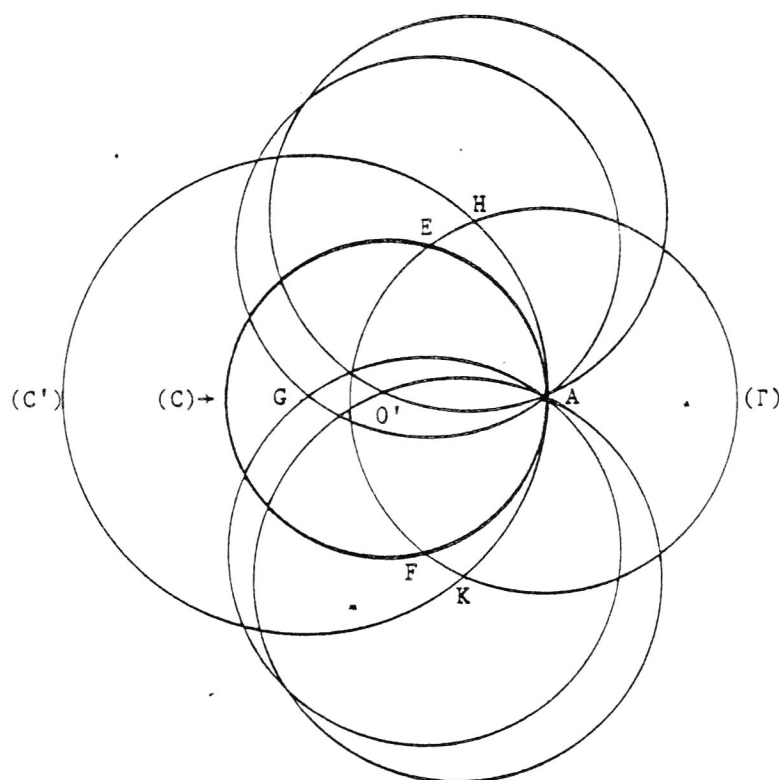
- Les cercles de centres E et F passant par A se coupent en G .

- Le cercle C' de centre G passant par A coupe Γ en H et K .

- Les cercles de centres H et K passant par A se coupent en O' .

O' coïncide avec le centre O du

cercle C .



(*)

L'inutile compas

Les points que l'on peut construire à la règle et au compas peuvent être construits uniquement à la règle à condition de se donner un cercle dans le plan du dessin. Ce résultat énoncé par Jean-Victor Poncelet (1788-1867) sera en fait démontré par Jacob Steiner (1796-1863).

Tous ces mathématiciens sont en fait les successeurs de Girard Desargues (1593-1663), créateur de la géométrie projective. (*)

Exemple: construction de la parallèle à D contenant A

On connaît

- un cercle auxiliaire (I') de centre O;
- un point A;
- une droite D ne contenant pas A.

Traçons une droite contenant O, coupant D en U et (Γ) en X_1 et X_2 .

Marquons deux points M_1 et M_2 diamétralement opposés sur (I').

Sur la droite $X_1 M_1$, marquons P_1 .

La droite OP_1 coupe la droite $M_1 X_2$ en Q_1 .

$X_1 Q_1$ coupe $P_1 X_2$ en R_1 .

$R_1 M_1$ est parallèle à $X_1 X_2$ et coupe D en V_1 .

(1)

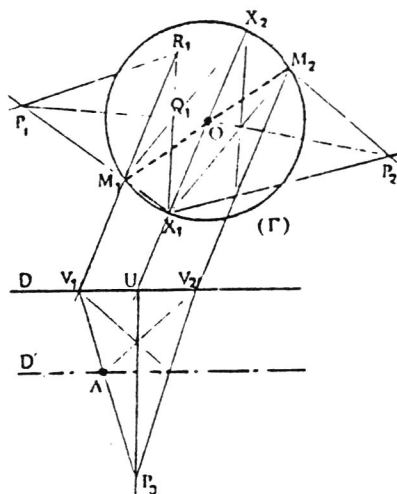
Même programme de construction à partir de X_2 et M_2 pour obtenir le point V_2

(1')

$[V_1 V_2]$ a pour milieu U.

Par un programme analogue à (1) et (1'), on construit la parallèle à D contenant A.

(1'')



(**)

(*) Extrait de "Théorie des corps. La règle et le compas" J.C. Carrega

(**) Extrait de "L'inutile compas" A. Myx

***De la
construction
d'un
rapporteur***

PRELIMINAIRES

Il est conseillé de savoir :

effectuer à la règle (non graduée) et au compas,

1- la construction d'un angle de 90°

2- la construction de la bissectrice d'un angle

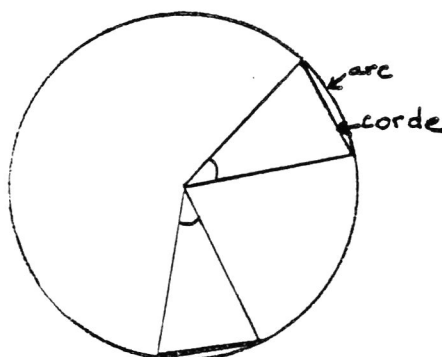
3- le report d'un angle.

Sauriez-vous justifier ?

4- le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle a pour mesure le rayon du cercle.

5- dans un même cercle,

- . des angles de même mesure interceptent des arcs de même mesure, et réciproquement.
- . des cordes de même mesure sous-tendent des arcs de même mesure, et réciproquement.



DOCUMENT I

De la construction & des Usages du Rapporteur.

LE Rapporteur est un demi cercle divisé en 180. degrez, d'autant que le cercle se divise en 360. degrez, comme il a été dit dans les définitions.

Il doit être limé plat d'un côté, pour être mieux appliqué sur le papier, & l'autre côté doit être en talu, c'est-à-dire mince sur le bord où est la division. Le centre doit être marqué par une petite hoche demi circulaire, afin de mieux découvrir le point où doit aboutir la pointe de l'angle.

Methode pour faire cette division.

Sur la ligne AB & du centre O, décrivez un demi cercle; portez le rayon ou demi diamètre AO autour de la circonference, il la divisera en trois arcs égaux de 60. degrez chacun aux points C & D, parce que le rayon d'un cercle est contenu six fois en sa circonference. Divisez l'arc BC en deux également au point E, l'arc BE sera de 30. degrez, & tournant cette ouverture autour du demi cercle, il sera divisé en six arcs égaux. Divisez-les encore en trois parties égales, chacune sera de dix degrez. Divisez chaque dixaine en deux, vous aurez des arcs de cinq degrez chacun; & enfin subdivisant chacun de ces derniers arcs en cinq, tout le demi cercle sera divisé en 180. degrez.

C'est de la même maniere qu'on peut diviser tout le cercle en 360. degrez; nous en parlerons encore dans la suite. On fait aussi quelquefois des rapporteurs de corne; il sont assez commodes, en ce qu'ils sont transparens; mais il faut les tenir dans un livre, quand on ne s'en sert pas, afin que la corne ne se ride point.

(Extrait de "Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de mathématique" N.Bion 1716)

- 1- Construire un rapporteur en suivant les indications fournies par le document I .
- 2- Pour chaque étape,
 - . préciser la méthode que vous employez;
 - . y a-t-il un point des préliminaires qui permettrait de justifier l'exactitude de cette partie de la construction?

DOCUMENT II

Voici des résultats établis à partir du théorème de Wantzell (1814-1848)

(A)

Théorème : Les polygones réguliers constructibles sont ceux pour lesquels le nombre de côtés n est de la forme $2^k p_1 p_2 \dots p_r$ où $k \in \mathbb{N}$ et où les p_i sont des nombres de Fermat premiers distincts.

Les nombres de Fermat compris entre 0 et 100000 sont: 3, 5, 17, 257 et 65537. Ces cinq nombres sont premiers.

En particulier, pour savoir si un polygone régulier est constructible à la règle et au compas, on peut déjà chercher si le nombre de ses côtés est un produit d'une puissance de 2 et d'un ou plusieurs nombres distincts pris parmi 3, 5, 17, 257, 65537.

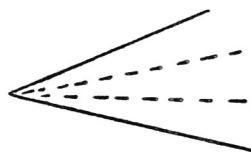
Exemples:

- le dodécagone régulier est constructible: $12 = 2^2 \times 3$

- Pour $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20$ les polygones réguliers à n côtés sont constructibles, pour $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$ ils ne le sont pas. Euclide connaissait les constructions pour $n = 3, 4, 5, 15$ et il savait doubler le nombre de côtés d'un polygone constructible. On ne sut rien faire de mieux jusqu'en 1796 où Gauss à l'âge de 19 ans montra que le polygone régulier à 17 côtés est constructible.

(B) On peut répondre par la négative à la question que se posait les mathématiciens depuis l'antiquité:

"Est-il possible de partager à la règle et au compas un angle quelconque en trois angles de même mesure?"



(problème de la trisection de l'angle)

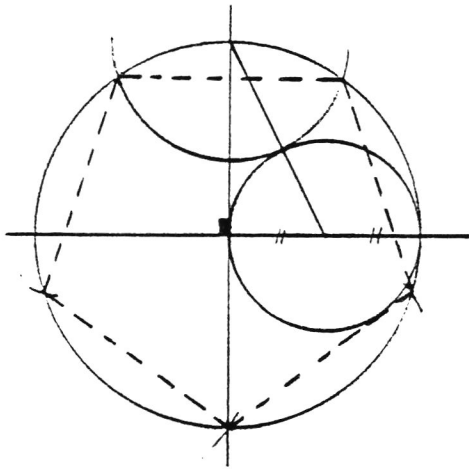
(D'après un article de J.C Carrega Bulletin APMEP)

1- Peut-on partager à la règle et au compas le cercle en 360 parties "égales"?

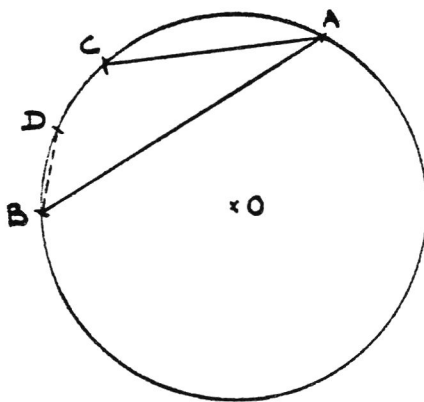
2- Que penser de la méthode de construction proposée par le document I ?

DOCUMENT III

(A) Construction du pentagone régulier



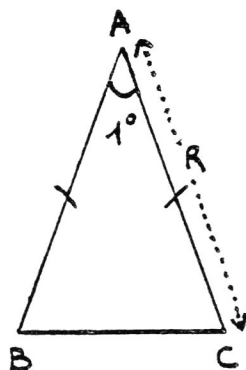
(B) Construction du polygone régulier à 15 côtés



- . AB est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O.
- . AC est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O.
- . on obtient le côté BD du polygone régulier à 15 côtés en partageant l'arc $\widehat{BC}$ en deux parties de même mesure.

- 1- En utilisant ce document et ce qui précède, proposer plusieurs programmes de construction à la règle et au compas d'un rapporteur. Pour chacun d'eux, dire quel serait le plus petit angle "exact" obtenu. Comparer ces différents programmes.
- 2- Leur mise en oeuvre vous permettrait-elle d'obtenir les résultats escomptés ?

DOCUMENT IV



Une calculatrice affiche :

$$\sin 30' = 0,008726535$$

$$\pi = 3,141592654$$

Voici une expression donnant la longueur du côté BC d'un triangle isocèle de côté R, d'angle $\hat{A}$ de mesure 1° :

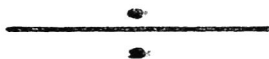
$$BC = 2 \cdot R \cdot \sin 30'$$

1- Calculer :

- . la longueur de l'arc intercepté par un angle de 1° dans un cercle de rayon R
- . la longueur de la corde sous-tendant cet arc.

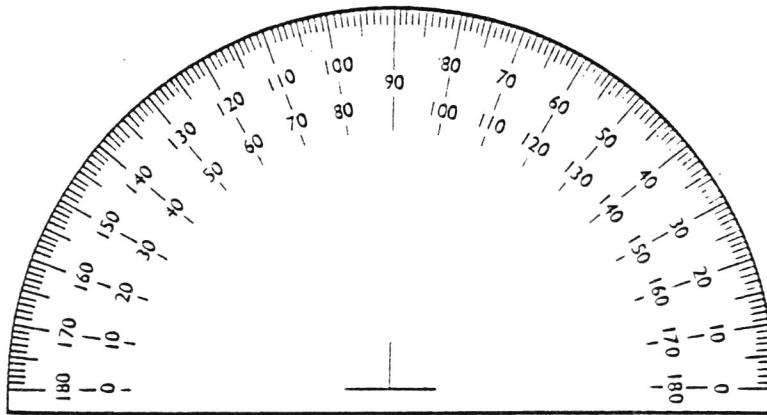
2- En déduire une construction approchée d'un rapporteur.

Que pensez-vous de cette approximation ?

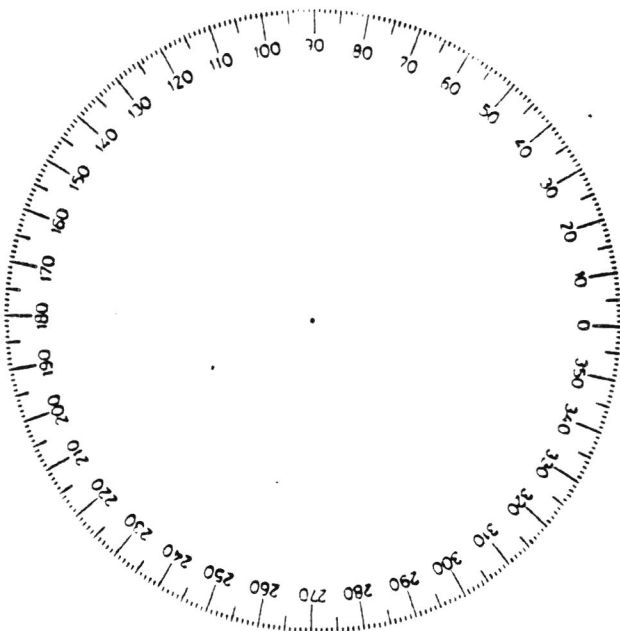


Quel est pour ce problème de construction d'un rapporteur le " bon choix d'instruments " ?

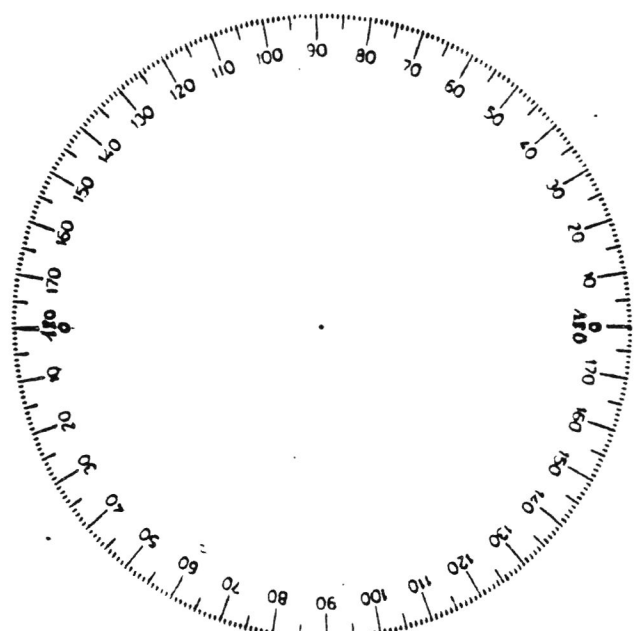
DOCUMENT V



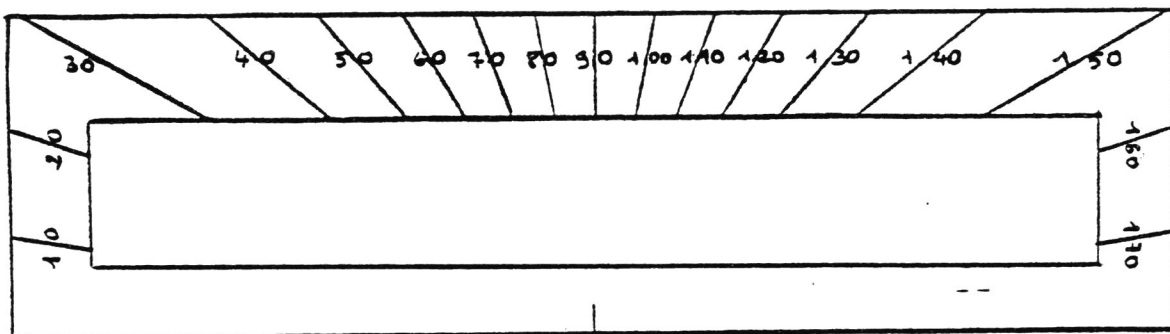
a



b



c

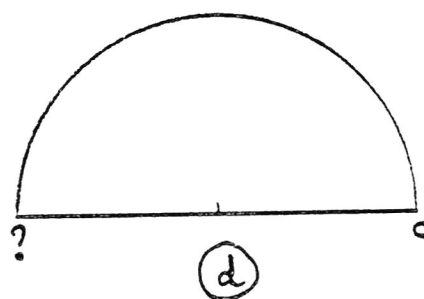
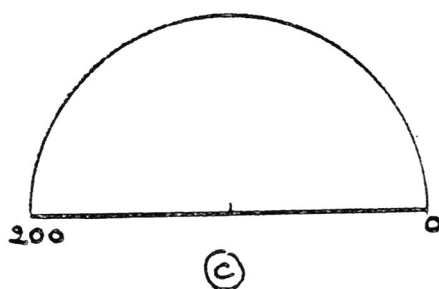
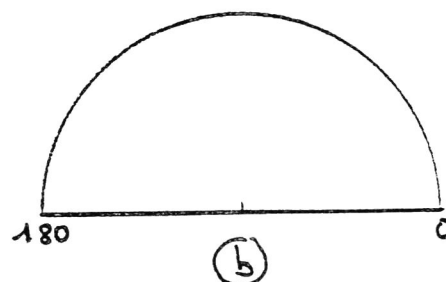
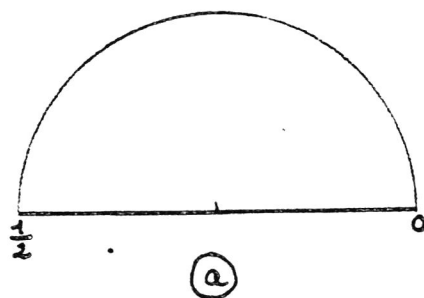


d

Observer ces différents rapporteurs.

Quelles utilisations spécifiques peut-on en attendre ?

DOCUMENT VI



- 1- . Inscrire quelques graduations sur les divers rapporteurs (a), (b), (c) .

. Avec quelle unité chacun d'eux mesurera-t-il les angles?

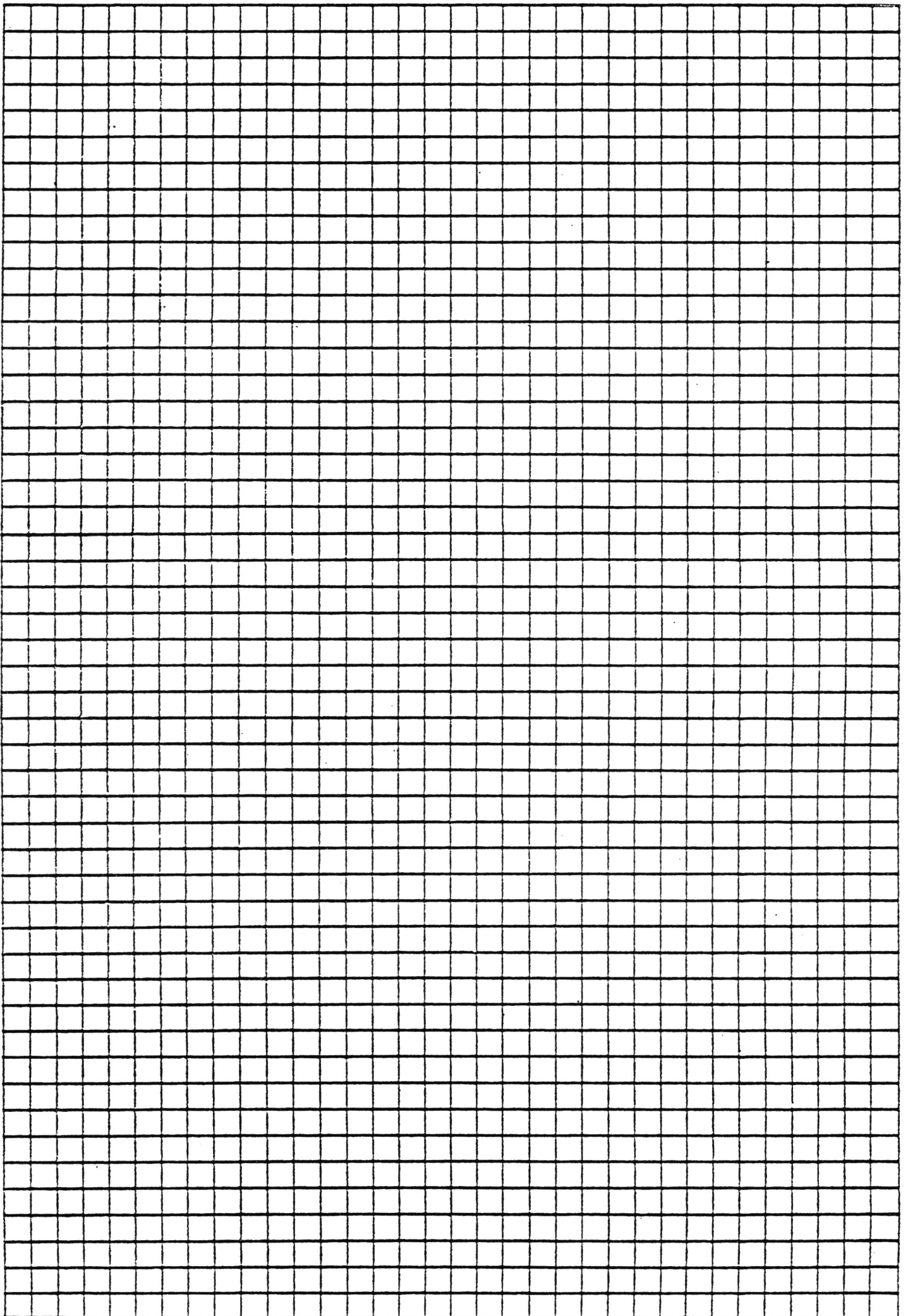
- 2- . Enrouler une ficelle autour du cercle associé au rapporteur (d) .

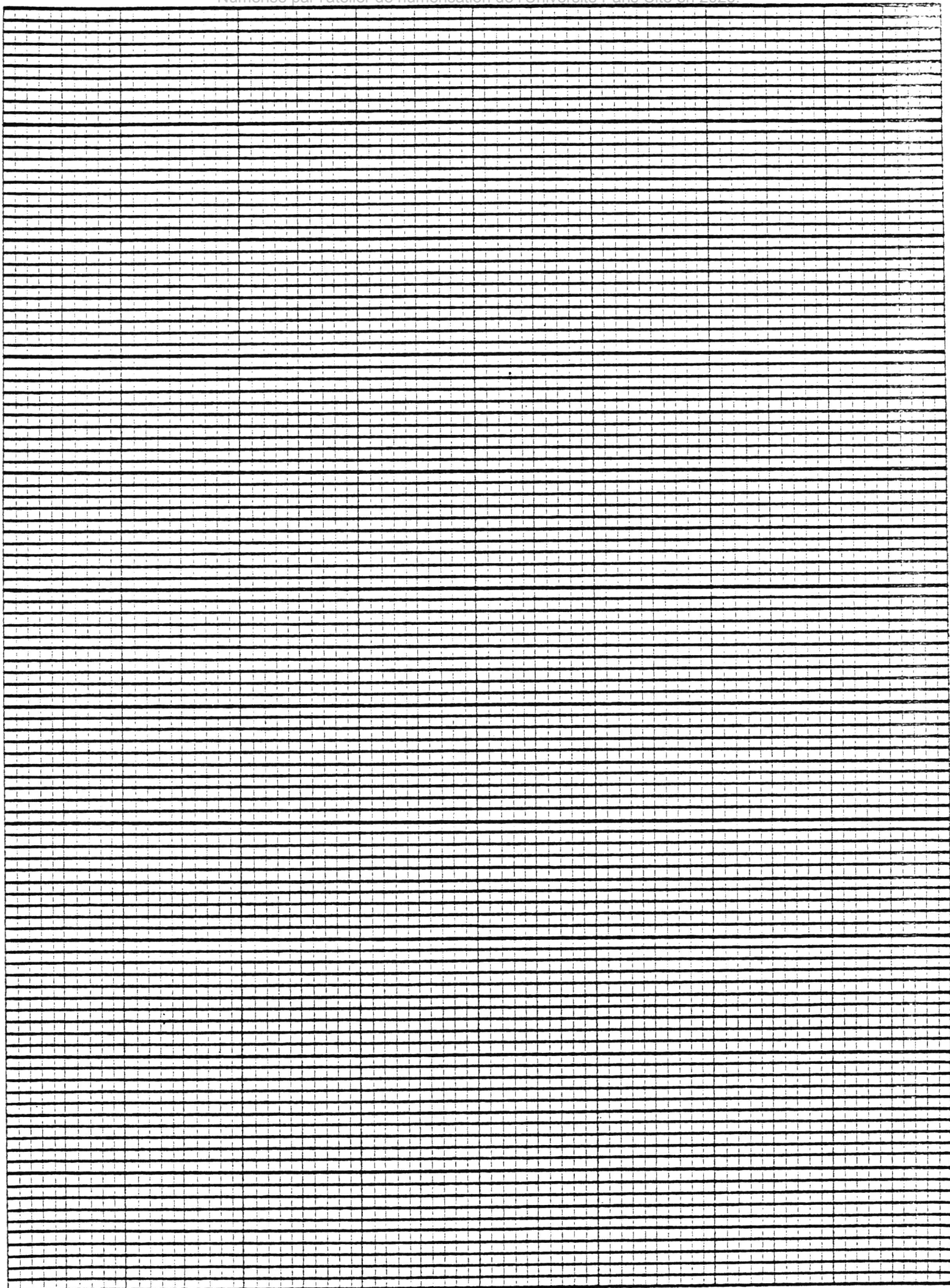
Exprimer la longueur de cette ficelle en prenant comme unité le rayon; en déduire une graduation de la demie circonférence (d) .

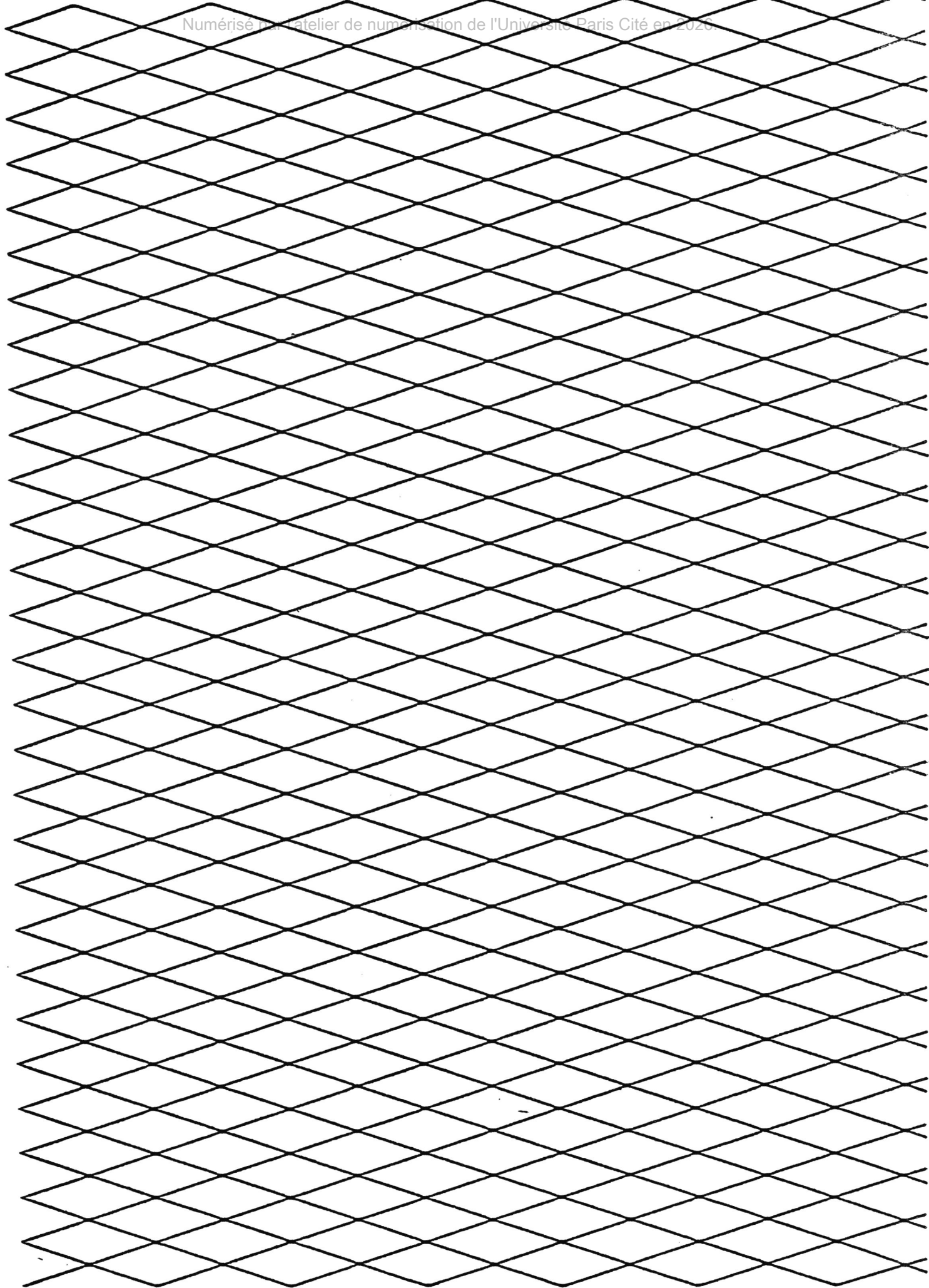
. Vous venez de construire un rapporteur (d) . Il vous permet de mesurer des angles.

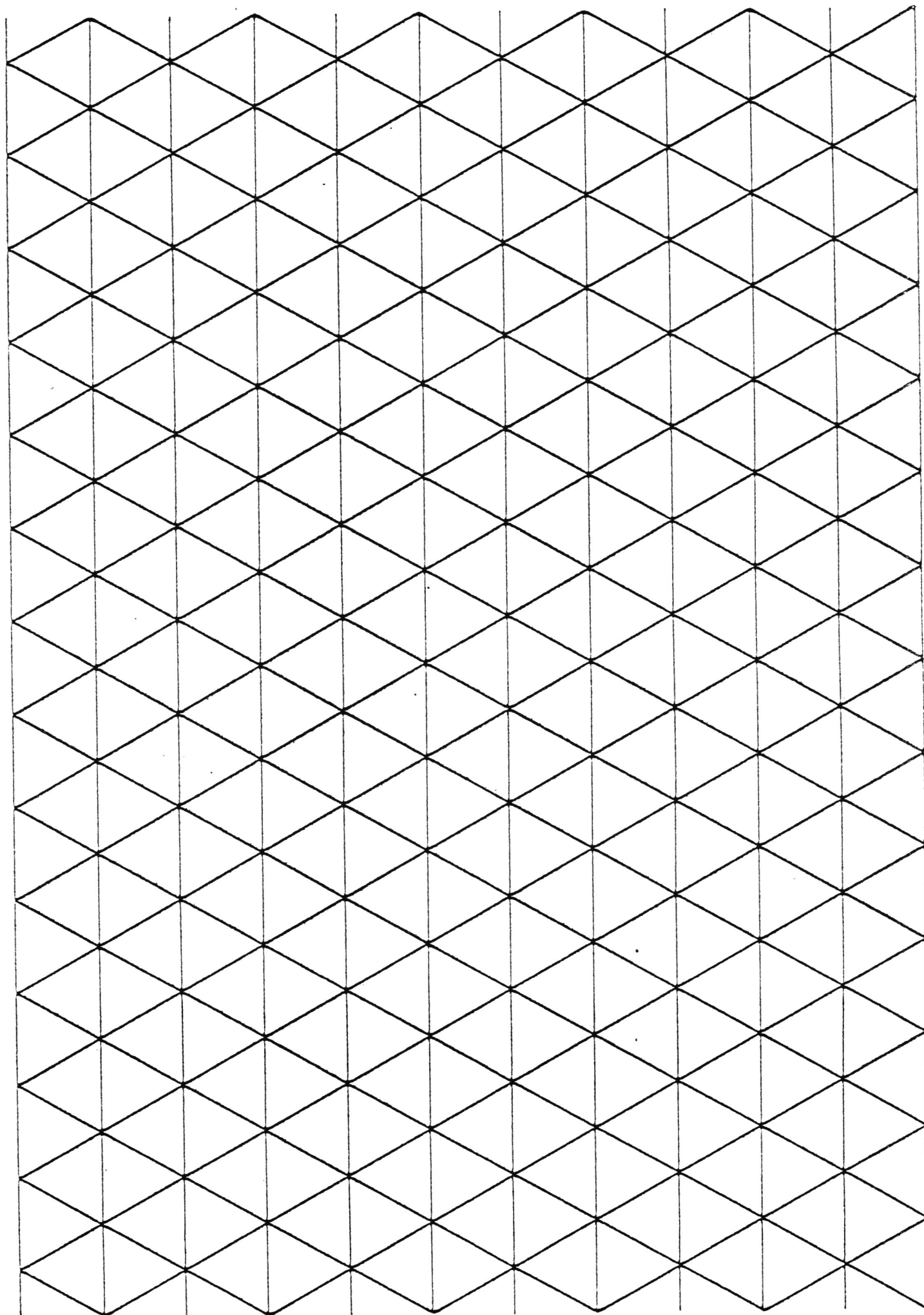
Quelle définition donneriez-vous de l'unité de mesure des angles ainsi déterminée? Connaissez-vous son appellation ?

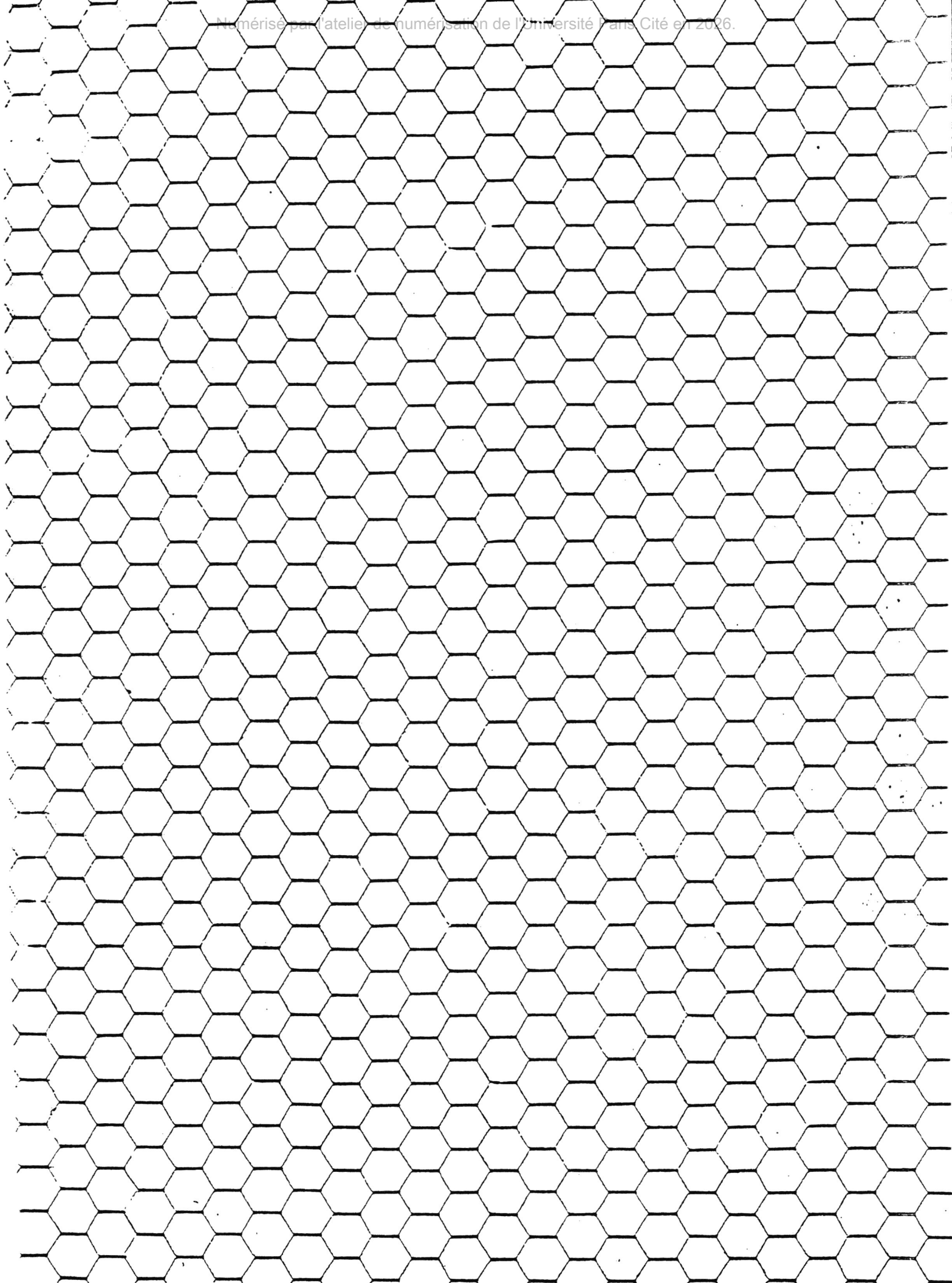
a n n e x e











EDITEUR : IREM DE PARIS 7

^{3.}
DIRECTEUR/RESPONSABLE DE LA PUBLICATION : FRANCOIS COLMEZ

TIRAGE : 300 EXEMPLAIRES

DEPOT LEGAL : 2 86612 023 X