

Université PARIS VII

IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES



Mai 1983

PETITES VARIATIONS

ou l'art de dériver
sans le savoir ...

Groupe MATHÉMATIQUES/PHYSIQUE

<u>NIVEAU</u>	Second cycle
<u>PUBLIC</u>	Enseignants de mathématiques et de physique
<u>SUJET</u>	Utilisation du calcul différentiel dans la physique du second cycle
<u>OBJECTIF</u>	Coordination des enseignements de mathématiques et de physique

PETITES VARIATIONS

ou l'art de dériver
sans le savoir ...

Groupe MATHÉMATIQUES/PHYSIQUE

G. AUSSEL
I. BLOCH
C. BOISSERIE
J. LAFONTAINE
J. PICHAUD
T. SZWED

TABLE DES MATIERES

Chapitre I - Approximations linéaires, différentielles. Exemples physiques.

- §1. Définitions, notations, exemples numériques.
- §2. Exemples d'utilisation en physique.
 - §2.1. Electricité : notion de résistance et interpolation linéaire.
 - §2.2. Résistance dynamique d'une diode.
 - §2.3. Dilatation des solides.

Chapitre II- Etude locale des courbes. Approximations du second ordre et plus.

- §1. Etude locale des courbes.
 - §1.1. Points d'inflexion.
 - §1.2. La fin justifie les moyens...
- §2. Exemples.
 - §2.1. Bobines d'Helmoltz.
 - §2.2. PH-métrie.

Chapitre III- Dérivées et problèmes d'extrema.

Introduction.

- §1. Questions d'extrema locaux.
- §2. Exemples.
 - §2.1. La durée du jour.
 - §2.2. Principe de Fermat et loi de Descartes.
 - §2.3. Déviation du prisme.
 - §2.4. Vibrations sinusoïdales forcées d'un oscillateur mécanique amorti.
 - §2.5. Energie de liaison.

Chapitre IV. Equations différentielles.

- §1. Exemples.
 - §1.1. Décharge d'un condensateur.
 - §1.2. Radioactivité.
- §2. Commentaires.
- §3. Résolution approchée des équations du premier ordre.

§4. Un exemple de résolution approchée d'une équation du second ordre.

Chapitre V- Potentiels et gradients.

§1. Définition du travail et exemples.

§2. Calcul du travail du poids d'un corps (activités en classe de première).

§3. Formes différentielles et intégrales curvilignes.

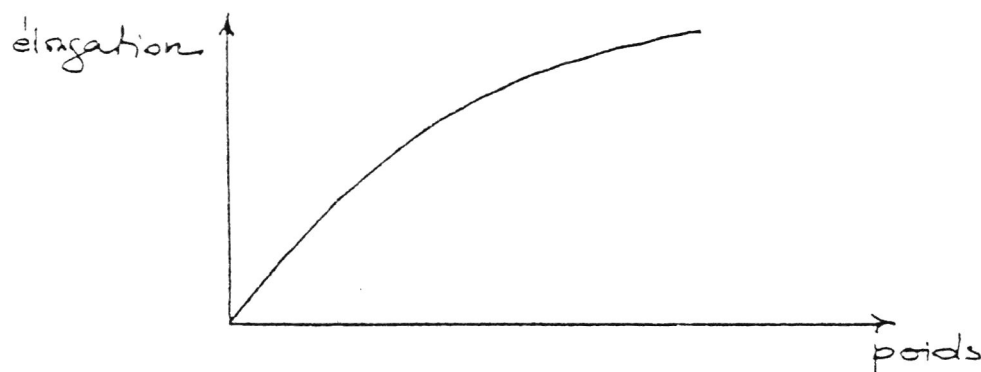
I- APPROXIMATIONS LINEAIRES, DIFFERENTIELLES ET LEURS NOTATIONS

& 1- Définitions, notations, exemples numériques.

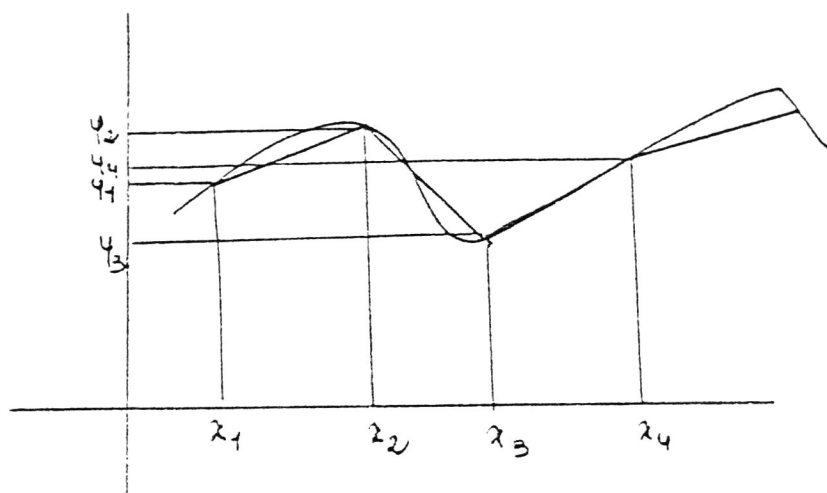
Le calcul infinitésimal (qui ne s'est appelé que plus tard calcul différentiel) a d'abord été appliqué aux fonctions dites usuelles (fonctions algébriques, sinus, cosinus, exponentielles) exclusivement. On peut dire que c'est son formidable succès (calculs explicites d'aires et de longueurs de toutes sortes, passage des lois de Kepler à la loi de la gravitation universelle, développements en série ...) qui a masqué la notion sous-jacente d'approximation linéaire, pourtant entrevue par Leibnitz.

En fait, celle-ci se voit mieux en considérant des fonctions continues "quelconques". La notion de fonction "quelconque" - c'est à dire pas forcément définie par une expression algébrique ou analytique - n'a commencé à être utilisée et comprise qu'au 19e siècle, et cela aussi explique l'émergence tardive du concept de différentielle.

Nous partirons donc d'une fonction "quelconque", c'est à dire d'une application f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que nous supposerons seulement continue. Une telle notion est nécessaire si on veut modéliser d'une façon utilisable n'importe quel phénomène physique : si on cherche comment varie un paramètre quand on change un autre paramètre (par exemple l'élongation d'un ressort en fonction de la masse accrochée à l'extrémité, pour prendre un exemple très élémentaire), l'expérimentation ne donnera jamais qu'un tableau de valeurs. Mais pour chercher une loi qui relie deux paramètres, il faut supposer implicitement ou explicitement que l'un est fonction de l'autre. Par exemple pour des poids suffisamment petits, l'élongation d'un ressort donné est proportionnelle au poids de la masse accrochée. Mais déjà ici l'attirail des fonctions usuelles du mathématicien ne suffit pas à rendre du compte du phénomène : on n'a pas d'expression simple de l'élongation quand on sort du domaine où celle-ci est proportionnelle au poids, on sait seulement que le graphe de f est du type suivant



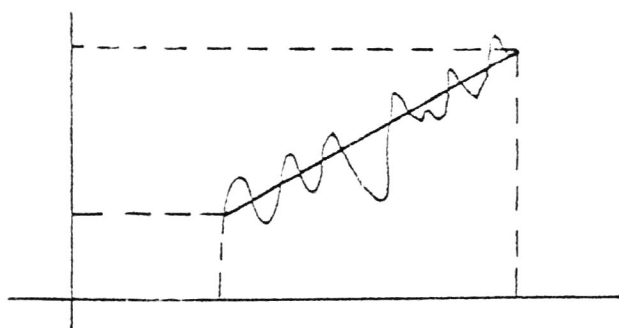
Partant donc d'une fonction continue quelconque dont on ne connaît qu'un nombre fini de valeurs, les résultats d'une série de mesures physiques par exemple, le plus pratique est de la comparer à une "fonction connue" prenant les mêmes valeurs aux points étudiés. Et la façon la plus simple et la plus naturelle de procéder est de faire une interpolation affine (on dit aussi, par un abus de langage tout à fait acceptable, interpolation linéaire) : si $x_1, \dots, x_n$ sont les points de l'intervalle I où on connaît les valeurs de f , notées $y_1, \dots, y_n$ on va chercher à comparer f à la fonction dont le graphe est la ligne brisée joignant les points successifs de coordonnées $(x_i, f(x_i))$ $1 \leq i \leq n$



La restriction de g à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est la fonction affine qui vaut y_i en x_i et y_{i+1} en x_{i+1} ; la fonction g est ce qu'on appelle une fonction affine par morceaux.

A ce stade, on est tenté de dire que plus le nombre de points pris est grand, meilleure est l'approximation de f par l'interpolée g . C'est vrai moyennant quelques précisions, sous-entendues dans la pratique du physicien : si f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $n > 0$, tel que, pour toute suite de points consécutifs $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tels que $|x_{i+1} - x_i| < n$, la fonction f et son interpolée affine g diffèrent de moins de ε en tout point de I ($\forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon$, (le lecteur averti reconnaîtra dans cet énoncé une forme plus opératoire de la continuité uniforme).

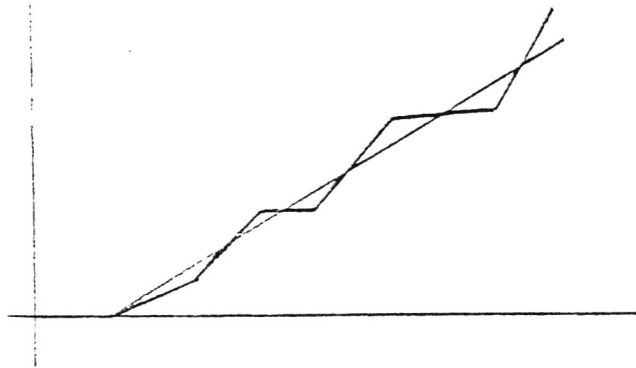
Notons que cela n'empêche pas f d'avoir un comportement "sauvage", comme dans le dessin suivant regardé si on veut à une échelle microscopique



Si par exemple f représente la distance parcourue par un train en fonction du temps écoulé depuis le départ, le voyageur se contente de l'interpolation linéaire grossière de f (entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$). La pente de la droite correspondante, est égale au rapport $(f(b) - f(a))/(b - a)$. On l'appelle coefficient d'interpolation. Dans notre situation elle représente la vitesse commerciale du train.

Les services d'exploitation utiliseront une interpolation beaucoup plus fine ; il n'en reste pas moins qu'avant l'utilisation des ordinateurs ils travaillaient sur des graphiques linéaires par morceaux, et qu'aujourd'hui seuls les graphiques ont disparu ; le mouvement des trains est toujours représenté par une succession de mouvements uniformes. Si cette représentation n'est pas gênante en fait pour le conducteur bien que pour lui elle soit manifestement fausse, c'est parce qu'il y a stabilisation du coefficient d'interpolation quand on prend des intervalles de temps de plus en plus petits (disons ici jusqu'à la demi-seconde).

Pour cette raison, il est commode de supposer que la fonction f qui représente le mouvement est dérivable.



Définition (rappel) :

Une fonction f définie sur I et à valeurs dans R est dérivable en a si la fonction $h \mapsto (f(a + h) - f(a))/h$, définie pour $h \neq 0$, a une limite quand h tend vers zéro.

Si l est cette limite, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall h \neq 0 \quad |h| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - l \right| < \varepsilon$$

Avant d'aller plus loin, insistons sur le fait que la possibilité de représenter tel ou tel phénomène par une fonction dérivable n'est pas susceptible de vérification expérimentale directe ; pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de vérifier avec une calculatrice, fût-elle performante, que la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable pour $x = 1$. Seules les conséquences mathématiques et physiques d'une telle représentation, qui seront développées plus loin dans certains cas typiques, permettront de voir qu'elle est opératoire.

Revenons à la définition ci-dessus. Si f' est la dérivée de f en a , on peut écrire

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$$

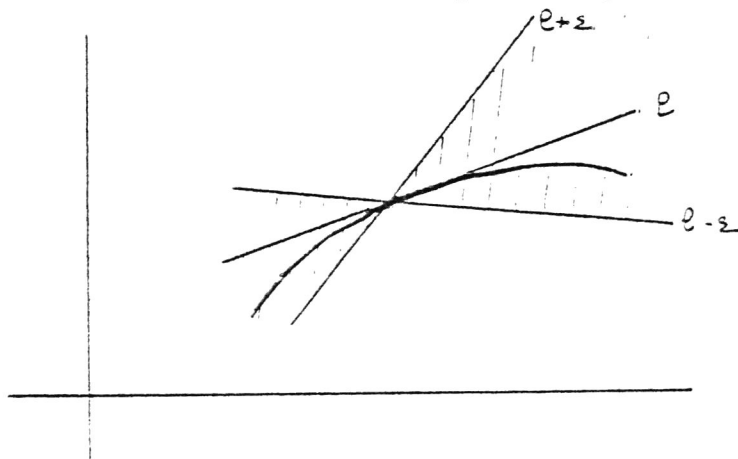
où ε est une fonction qui tend vers zéro quand la variable h tend vers zéro. Cette formule, comme la précédente, n'a pas de sens pour $h = 0$. Par contre, en multipliant les deux membres par h on obtient

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \varepsilon(h)h$$

Cette nouvelle façon d'exprimer que f est dérivable en a présente, outre le fait que l'on peut maintenant prendre aussi h nul, l'avantage de mettre en évidence un fait nouveau et fondamental, l'approximation de l'accroissement :

$h \rightarrow f(a+h) - f(a)$ par la fonction linéaire $h \rightarrow f'(a)h$ approximation particulièrement bonne (on a bien envie de dire "au second ordre") puisque l'erreur est $\varepsilon(h)h$.

Graphiquement, cela peut s'interpréter ainsi : pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, considérons dans le plan des coordonnées le secteur angulaire ayant pour sommet le point $(a, f(a))$, limité



par les droites de pente $1 + \varepsilon$ et $1 - \varepsilon$ passant par ce point, et contenant la droite de pente 1 passant par ce même point. Alors il existe un $\eta > 0$ tel que la portion du graphe de f correspondant aux x tels que $|x - a| \leq \eta$ se trouve dans ce secteur angulaire. On retrouve au passage le fait plus classique que la droite de pente 1 passant par $(a, f(a))$ est la limite des droites passant par $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.

Cette interprétation graphique permet aussi de mieux voir l'exemple suivant de fonction non dérivable en zéro :

soit f la fonction f définie par $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Par rapport au théorème d'approximation d'une fonction continue par ses interpolées linéaires vu page 4, ce qui est en cause au voisinage de 0, c'est la qualité de l'approximation.

Nous pouvons maintenant donner la définition suivante

Définition :

Une fonction f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable en a s'il existe une application linéaire $h \mapsto l_h$. Telle que l'on ait

$$f(a + h) - f(a) = l_h + \varepsilon(h)h,$$

où la fonction ε est telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

D'après ce qui précède, pour les fonctions étudiées jusqu'à présent (fonctions réelles d'une variable réelle) dérivable et différentiable sont synonymes, c'est le point de vue - mais cela est fondamental - qui diffère.

Il résulte de l'interprétation graphique vue plus haut que tout autre fonction linéaire donnera une approximation locale moins bonne de l'accroissement $f(a + h) - f(a)$. Etant donné l'importance de ce fait, nous allons l'énoncer et le démontrer de façon plus formelle.

Pour tout k différent de 1, il existe un intervalle $[-\eta, \eta]$ tel que pour tout $h \in [-\eta, \eta] - \{0\}$ on ait

$$|f(a + h) - f(a) - l_h| \leq |f(a + h) - f(a) - kh|$$

Preuve :

Le membre de gauche est égal à $\varepsilon(h)h$, celui de droite à $(1 - k)h + \varepsilon(h)h$. Il suffit donc de montrer l'existence d'un $\eta > 0$ tel que $|\varepsilon(h)h| < |(1 - k)h + \varepsilon(h)h|$ pour tout h tel que $0 < |h| < \eta$. Mais comme ε tend vers 0 quand h tend vers 0, il existe en particulier un $\eta > 0$ tel que $|\varepsilon(h)| < \frac{|1 - k|}{3}$ pour tout h tel que $|h| < \eta$. Un tel η convient, puisqu'alors $|(1 - k)h + \varepsilon(h)h| < \frac{2}{3}|(1 - k)h|$

Testons maintenant sur quelques exemples numériques l'efficacité de cette approximation

1er exemple :

Essayons de calculer, sans calculatrice, $\sin 46^\circ$ et $\operatorname{tg} 46^\circ$. En négligeant le $\varepsilon(h)h$ de (1), on obtient

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\sin 46^\circ = 0,707 + 0,707 \times \frac{\pi}{180} = 0,719$$

$$\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}) \times \frac{\pi}{180}$$

$$\operatorname{tg} 46^\circ = 1 + \frac{\pi}{90} = 1,035$$

Une calculatrice donne $\sin 46^\circ = 0,71934$, $\operatorname{tg} 46^\circ = 1,03553$.

2ème exemple :

Sachant que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ a pour dérivée α quand $x = 1$, on obtient l'approximation bien connue

$$(1 + h)^\alpha = 1 + \alpha h$$

Par exemple

$$\sqrt[3]{130} = (125 + 5)^{1/3} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{1/3} = 5 + \frac{1}{15}$$

On trouve ainsi $(130)^{1/3} = 5,066$, alors que la calculatrice donne 5,0658.

Notons que pour le moment, ces résultats sont très empiriques, faute de renseignements sur la vitesse avec laquelle $\varepsilon(h)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro.

Mais si on suppose que la fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$, et si M est tel que l'on ait $|f''(x)| \leq M$ quel que soit x dans $[a, b]$, on peut montrer facilement (en utilisant la formule de Taylor), que, quels que soient x et $x + h$ dans $[a, b]$

$$|f(x + h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{M}{2}h^2$$

Cette propriété de f est vérifiée dans la quasi-totalité des cas envisagés par les physiciens, et justifie la terminologie d'approximation "au second ordre près" employée si souvent.

Notations des différentielles

La dérivée de f en a (le nombre 1 de tout à l'heure) est le plus souvent notée $f'(a)$ (c'est une variante de la notation de Newton, qui écrivait $\dot{f}(a)$) ; si f est partout dérivable, on peut parler de la fonction dérivée, ou pour abrégé de la dérivée $x \mapsto f'(x)$.

Les accroissements h et $f(a + h) - f(a)$ se notent souvent Δx et Δf (a disparaît, mais, puisqu'ici on l'a supposé fixé cela ne pose pas de problème) : la dérivabilité et la différentiabilité de f en a s'expriment alors par

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a) \quad \text{et} \quad \Delta f = f'(a) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\left(\text{où } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0\right)$$

Cela signifie bien entendu (voir les exemples numériques ci-dessus), que Δf est approximativement égal à $f'(a)\Delta x$ si Δx est suffisamment petit, ce qu'on écrit

$$\Delta f \simeq f'(a) \Delta x$$

Pour expliquer, et justifier dans un contexte précis, les notations df et dx , nous allons faire un détour par l'emploi de notations provisoires plus lourdes, mais aussi - l'un va avec l'autre ! - plus explicites.

En supposant, ce qui n'est pas essentiel mais aidera à voir l'imbrication entre les différents abus de notations, que f est partout dérivable donc différentiable, posons :

$$D(f, x, h) = f'(x).h$$

Cette écriture a l'avantage de pouvoir s'employer facilement à différents niveaux : $D(f, x, h)$ est la valeur en h de la différentielle de f au point x ; la différentielle de f en x se notera alors $D(f, x, \cdot)$, et l'application qui à x fait correspondre la différentielle de f en x se notera $D(f, \cdot, \cdot)$, et s'appellera la différentielle de f . Notons que $D(f, \cdot, \cdot)$ est une fonction de deux variables.

Ecrivons avec cette notation quelques relations évidentes qui seront utilisées dans la suite.

$D(f + g, x, \cdot) = D(f, x, \cdot) + D(g, x, \cdot)$ (si f et g sont différentiables en x) ;
pour tout réel λ , $D(\lambda f, x, \cdot) = \lambda D(f, x, \cdot)$;

Si I (comme identité) désigne l'application identique $x \mapsto x$, on a

$$D(I, x, \cdot) = I$$

et plus généralement le fait évident que la dérivée d'une fonction affine $x \mapsto \alpha x + \beta$ est constante et égale à α s'exprime en termes de différentielles par

$$D(f, x, \cdot) = \alpha I \quad \text{si } f(x) = \alpha x + \beta,$$

et peut se voir aussi en appliquant les formules précédentes.

Un tel type de notations est indispensable pour comprendre le théorème des fonctions composées, qui est à la base de tout le calcul différentiel.

Théorème :

Soient f et g deux applications de R dans R .

On suppose que f et g sont partout différentiables.

Alors l'application composée $g \circ f$ est différentiable, et pour tout x de R on a

$$D(g \circ f, x, \cdot) = D(g, f(x), \cdot) \circ D(f, x, \cdot)$$

Preuve :

Elle ne comporte aucune difficulté technique ; il s'agit essentiellement d'interpréter ce que l'on écrit quand on met en oeuvre la différentiabilité de f et de g .

Pour tout x , on a

$$f(x + h) - f(x) = f'(x).h + \varphi(h).h = D(f, x, h) + \varphi(h).h \quad \text{et}$$

$$g(f(x) + k) - g(f(x)) = g'(f(x)).k + \psi(k).k = D(g, f(x), k) + \psi(k).k,$$

où $\varphi(h)$ et $\psi(k)$ tendent vers zéro quand h et k tendent vers zéro. Bien entendu, φ et ψ dépendent de x .

En appliquant la deuxième formule à l'accroissement

$k = f(x + h) - f(x)$ (qui tend vers zéro quand h tend zéro, puisque f , fonction différentiable, est continue), on obtient

$$g(f(x + h)) - g(f(x)) = g'(f(x)) (f(x + h) - f(x)) + \psi(f(x + h) - f(x)) (f(x + h) - f(x))$$

L'e second terme s'écrit encore

$$\psi(f(x+h) - f(x)) [f'(x)h + \varphi(h)h] = \eta_1(h).h$$

où η_1 est une fonction de h (fonction qui dépend elle-même bien entendu de f , g , et x) qui tend vers zéro quand h tend vers zéro. Et le premier terme s'écrit

$$g'(f(x)) [f'(x)h + \varphi(h)h] = g'(f(x)).h + \eta_2(h).h$$

d'où finalement

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(f(x)).f'(x).h + \eta(h).h,$$

où $\eta = \eta_1 + \eta_2$ tend vers zéro quand h tend vers zéro.

Cela montre que $g \circ f$ est différentiable en x , et que sa différentielle est l'application linéaire

$$h \mapsto g'(f(x)).f'(x).h \quad \text{ou encore que}$$

$$D(g \circ f, x, h) = g'(f(x))f'(x)h = D(g, f(x), f'(x)h) = D[g, f(x), D(f, x, h)]$$

soit la formule de composition annoncée.

Remarque :

Pour ne pas alourdir l'énoncé, nous n'avons pas donné les hypothèses les plus générales.

Si f est définie sur un intervalle ouvert I contenant a et est différentiable en a , et si g est définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(I)$ (de sorte que $g \circ f$ existe) et est différentiable en $b = f(a)$, on a bien entendu les mêmes propriétés pour $g \circ f$ au point a .

Un sous-produit important du théorème des fonctions composées est le Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, $g \circ f$ est dérivable et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Mise en garde

On pourrait être tenté de démontrer ce corollaire directement, en écrivant le taux d'accroissement de $g \circ f$ sous la forme $\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta f}$; mais il est des cas où tout intervalle contenant x contient des points où Δf s'annule, et une telle démarche est alors incorrecte. En fait, toute démonstration correcte du corollaire passe par l'utilisation des différentielles, que celles-ci soient nommées ou non (cf. Le Bourgeois Gentilhomme, Acte II, Scène IV).

Nous allons maintenant chercher à remplacer la notation $D(f, x, h)$ par une notation plus concise, en posant

$$df_a = D(f, a, \cdot) \quad \text{et} \quad df = D(f, \cdot, \cdot). \quad \text{La relation}$$

$$D(f, a, \cdot) = f'(a)D(I, a, \cdot),$$

qui exprime tout simplement que l'application linéaire $h \mapsto f'(a).h$ est le produit par le scalaire $f'(a)$ de l'application identique, s'écrit alors

$$df_a = f'(a)dI_a$$

Et si on revient à l'abus de notation habituel consistant à noter x et non plus I l'application identique $x \mapsto x$.

l'égalité précédente s'écrit

$$df_a = f'(a)dx_a$$

ou encore

$$df_a = f'(a)dx$$

car nous avons vu que l'application linéaire $dI_a = dx_a$ est égale à l'application identique quel que soit a : dans ces conditions, $D(I, ., .) = DI = Dx$ est une fonction qui ne dépend pas du premier argument, et remplacer dx_a par dx , c'est faire l'abus tout à fait bénin consistant à confondre une fonction constante et sa valeur.

Enfin, si on pose comme il est fréquent de le faire $y = f(x)$ et si f est partout différentiable, la relation $df_x = f'(x)dx$ s'écrit

$$dy = f'(x)dx$$

où l'on a posé $dy = df_x$.

De ce point de vue, les expressions dx , df , dy ne désignent jamais des accroissements, fussent-ils très petits, et la formule ci-dessus exprime l'égalité de deux fonctions, alors que la formule $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ exprime l'égalité approximative de deux nombres.

Nous allons maintenant exprimer le théorème des fonctions composées avec ces nouvelles notations.

Si on écrit la fonction composée $h = g \circ f$ sous la forme

$$x \mapsto f(x) = y \mapsto g(y) = z$$

le théorème des fonctions composées donne

$$dh_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

ce qui s'écrit $dz = g'(f(x))f'(x)dx = g'(y)dy$

Cela donne une règle formelle très simple pour trouver la différentielle d'une fonction composée $g \circ f$: on écrit d'abord la différentielle de la fonction g en y , soit

$dg_y = g'(y)dy (= dz)$, puis on remplace y par $f(x)$ et dy par $df_x = f'(x)dx$. Ainsi, l'expression de la différentielle de g en y , soit $dz = g'(y)dy$, reste valable quand y est fonction de x . C'est la raison pour laquelle le théorème des fonctions composées s'est appelé longtemps "théorème d'invariance de la différentielle par changement de variable", expression malgré tout discutable, puisqu'elle masque le fait que la différentielle est avant tout une application linéaire.

Retour sur les dérivés

De notre point de vue, la notation de Leibnitz $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ exprime simplement le fait que les applications linéaires dy et dx sont proportionnelles, et que $dy = f'(x)dx$. La dérivée de la fonction composée $h = g \circ f$ s'écrit alors $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$. Bien entendu, il ne faut pas voir cette relation comme résultant d'une "simplification par dy ", mais plutôt de la substitution de dy dans les deux relations linéaires

$$dz = g'(y)dy \text{ et } dy = f'(x)dx$$

Il s'agit là d'un phénomène particulier aux fonctions scalaires d'une variable. En fait, le formalisme différentiel se voit mieux avec les fonctions de plusieurs variables, parce que l'algèbre linéaire en dimension supérieure se comprend mieux que l'algèbre en dimension 1, où les applications linéaires sont toutes des homothéties.

Cas des fonctions de plusieurs variables.

Il suffit en fait d'étudier le cas de deux variables pour avoir une idée complète du cas général. Nous considérerons des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ ou sur une partie de $\mathbb{R}^2$ qui sera le plus souvent un rectangle ou un disque ; si nous voulons généraliser à ce cas la notion vue précédemment d'approximation locale par une fonction linéaire, il nous faut tout d'abord préciser deux choses :

a) la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ étant définie par $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ (loi interne) et $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ (loi externe), toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est déterminée de façon unique par les images des vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et on a

$$L(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

où l'on a posé $\alpha = L(1, 0)$ et $\beta = L(0, 1)$

b) la notion de limite pour une fonction de deux variables
Rappelons que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout vecteur $X = (x_1, x_2)$

$$\|X\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

On a alors la

Définition :

Soit f une fonction définie sur un disque de centre $A = (a_1, a_2)$ et à valeurs réelles. On dit que f tend vers l quand X tend vers A , et on écrit $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|X - A\| < \eta \Rightarrow \|f(X) - l\| < \varepsilon$$

Remarque.

La seule différence avec le cas des fonctions d'une variable est que la valeur absolue a été remplacée par une norme.

(Rappelons que dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes).

Exemple (ou plutôt contre-exemple) fondamental.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

et $f(0, 0) = 0$ n'a pas de limite quand X tend vers $(0, 0)$, bien que l'on ait $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ quels que soient x_1 et x_2 .

Définition :

Une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en A s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(A + H) - f(A) = L(H) + \varepsilon(H)$$

où la fonction ε est telle que $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$

Cette définition est calquée sur la définition vue plus haut des fonctions différentiables d'une variable.

Dans le cadre d'une variable, nous avons vu que différentiabilité et dérivabilité sont deux notions équivalentes, et qu'il s'agit essentiellement d'une différence de point de vue.

Qu'en est-il ici ? La condition de différentiabilité s'écrit aussi, en explicitant les coordonnées, sous la forme :

$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) = \alpha h + \beta k + (h^2 + k^2)^{1/2} \varepsilon(h, k)$$

ou $\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0$

$(h, k) \rightarrow 0$

Cette égalité est valable en particulier quand $h = 0$ ou $k = 0$, et montre que les fonctions d'une variable $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ et $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ sont différentiables - et donc dérivables - la première en a_2 , la deuxième en a_1 , les dérivées étant β et α .

Les nombres α et β sont appelés dérivées partielles de f , et notés traditionnellement $\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(A)$ (une notation telle que $\partial_1 f(a_1, a_2)$ et $\partial_2 f(a_1, a_2)$ serait plus cohérente, et nous ne désespérons pas de la voir adoptée un jour).

Nous venons de montrer qu'une fonction différentiable en un point a des dérivées partielles en ce point. Mais contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une variable, la réciproque n'est pas vraie. En effet, d'après la définition même de la différentiabilité, si f est différentiable en A , elle est continue en A , c'est-à-dire

$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$. Mais la fonction du contre-exemple fondamental a des dérivées par-

tielles nulles en $A = (0, 0)$ sans être continue en A . (Notons au passage que cet exemple montre aussi que la continuité d'une fonction de deux variables est une propriété plus forte que la continuité partielle, c'est-à-dire la continuité des fonctions d'une variable $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ et $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$).

Donnons un autre exemple, qui montre mieux comment fonctionnent les différentielles. Pour cela, donnons d'abord la :

Définition

Une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est dite homogène de degré 1 si on a $f(tX) = tf(X)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$

Il est clair qu'en une variable la notion analogue n'a que peu d'intérêt, puisqu'elle implique que f est linéaire.

Les fonctions homogènes de degré 1 sont continues en $0 = (0, 0)$, et y ont des dérivées partielles, puisque par exemple $f(x_1, 0) = x_1 f(1, 0)$: il y en a d'autres que les fonctions linéaires, par exemple $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$.

Mais on a le

Théorème

Si une fonction homogène de degré 1 est différentiable en 0, elle est linéaire.

Preuve

Comme $f(0) = 0$, on a $f(X) = L(X) + \|X\| \varepsilon(X)$, avec $\lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X) = 0$

Si on écrit cette relation pour $X = tX_0$ (c'est-à-dire avec X_0 fixé et t réel variable), on obtient

$$f(tX_0) = tf(X_0) = L(tX_0) + \|tX_0\| \varepsilon(tX_0) \quad \text{d'où}$$

$$f(X_0) = L(X_0) + \|X_0\| \varepsilon(tX_0) \cdot \frac{t}{t}$$

En faisant tendre t vers zéro, on obtient $f(X_0) = L(X_0)$; comme X_0 est arbitraire, on a $f = L$. La fonction f est linéaire, et donc égale à sa différentielle.

Remarque

Le fait que $\|tX\| = |t| \|X\|$ a joué un rôle clé dans la démonstration.

Le critère de différentiabilité le plus utilisé est le résultat suivant, démontré dans tous les ouvrages "classiques".

Notons que sa démonstration est délicate.

Théorème

Si f admet des dérivées partielles dans un disque de centre A et si celles-ci sont continues en A , alors f est différentiable en A .

Bien entendu, quand f est différentiable en $A = (a_1, a_2)$ si on pose

$x_i = a_i + \Delta x_i$, l'accroissement $\Delta f = f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$ est approximativement égal à

$\partial_1 f(A) \Delta x_1 + \partial_2 f(A) \Delta x_2$ pourvu que les Δx_i ne soient pas trop grands. Nous verrons plus loin des exemples numériques de telles approximations. Mais, pour pouvoir les utiliser, il faut d'abord s'assurer de la différentiabilité de f , ce que l'on fait le plus souvent en utilisant le théorème ci-dessus, d'où son importance.

Notations différentielles pour les fonctions de deux variables.

Désignons par p_1 et p_2 (p comme projection) les applications linéaires $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Le fait vu plus haut que toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $L(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ s'interprète alors en disant que p_1, p_2 est une base de l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

En particulier, si L est la différentielle en A d'une application f , notée provisoirement $D(f, A, \cdot)$ comme plus haut, on a

$$D(f, A, \cdot) = \partial_1 f(A) p_1 + \partial_2 f(A) p_2$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$D(f, A, \cdot) = \partial_1 f(A) D(p_1, A, \cdot) + \partial_2 f(A) D(p_2, A, \cdot),$$

une application linéaire étant égale à sa différentielle en tout point.

Si maintenant, comme dans le cas d'une variable, on pose $df_A = D(f, A, \cdot)$, l'égalité précédente s'écrit

$$df_A = \partial_1 f(A) dp_{1A} + \partial_2 f(A) dp_{2A}$$

ou encore, en refaisant l'abus de notation qui consiste à remplacer une fonction par sa valeur, ici à écrire x_i au lieu de p_i

$$df_A = \partial_1 f(A) dx_{1A} + \partial_2 f(A) dx_{2A}$$

Mais les applications linéaires dx_{iA} étant toujours les mêmes quel que soit le point A (puisque égales aux p_i), cela se note finalement

$$df_A = \partial_1 f(A) dx_1 + \partial_2 f(A) dx_2$$

sans ambiguïté.

Tout cela s'étend sans aucune difficulté supplémentaire aux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, autrement dit aux fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles, et le théorème de composition des différentielles énoncé plus haut s'étend tel que. Énonçons

à titre d'exemple un cas particulier de ce théorème.

Théorème

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Si f , g et s sont partout différentiables, il en est de même de la fonction φ

définie par $\varphi(t) = s(f(t), g(t))$, et on a

$$d\varphi_t = dS_{(f(t), g(t))} \circ (df_t, dg_t) \quad , \quad \text{ce qui s'écrit aussi}$$

$$d\varphi_t = \partial_1 S(f(t), g(t)) df_t + \partial_2 S(f(t), g(t)) dg_t.$$

Cela se démontre sans difficulté en écrivant que φ est la composée des applications $t \mapsto (f(t), g(t))$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) et $(y, z) \mapsto s(y, z)$ (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). On en déduit bien entendu l'expression de la dérivée de φ :

$$\varphi'(t) = \partial_1 (f(t), g(t)) f'(t) + \partial_2 (f(t), g(t)) g'(t)$$

et c'est essentiellement le seul moyen de l'obtenir.

Exemple

Supposons que $f(t)$ et $g(t)$ représentent les coordonnées d'un point d'une courbe plane en fonction d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$, et que l'on veuille connaître la dérivée par rapport au paramètre de la distance d'un point de la courbe à l'origine. Cette distance est donnée par $t \mapsto s(f(t), g(t))$, où on a posé $s(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$. D'après ce qui précède on a successivement

$$dS(y, z) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} (y dy + z dz),$$

$$d\varphi_t = \frac{1}{\sqrt{f^2(t) + g^2(t)}} (f(t) df_t + g(t) dg_t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{f f' + g g'}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

Pour l'ellipse dont les équations paramétriques sont $f(t) = a \cos t$ et $g(t) = b \sin t$, cela donne

$$\varphi'(t) = \frac{(b - a) \sin \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$$

Exemples numériques

Comme précédemment, nous allons tester numériquement l'approximation de fonctions au voisinage d'un point par leur différentielle.

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h étant donné par $V(r, h) = \pi r^2 h$, on a

$$dV(r, h) = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

Pour $r = 10$ cm, $h = 30$ cm, le volume est 9, 42 l, et sa variation ΔV sera approximativement $1, 885\Delta r + 0, 314\Delta h$, si ΔV est exprimé en litres et Δr et Δh en centimètres. Pour $\Delta r = \Delta h = 1$ cm, on obtient $\Delta V = 2, 1991$, soit $V = 11, 6201$, alors qu'un calcul direct donne $V = 11, 7841$. La précision est donc supérieure à 1, 5 %.

Avant de donner un autre exemple, faisons une remarque.

Dans bien des situations mathématiques ou, physiques, la dérivée logarithmique est d'un usage plus commode que la dérivée. De même, il sera souvent utile, une fonction f d'une ou plusieurs variables étant donnée, d'introduire sa différentielle logarithmique, c'est à dire la différentielle de la fonction $\text{Log } f$, qui d'après le théorème des fonctions composées est égale à $\frac{df}{f}$.

Variation de la période d'un pendule simple pour de petites oscillations.

La différentielle de $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est donnée par

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right)$$

Pour un pendule long de 10 cm à la surface de la terre.

$T = 0, 63$ s. Quelle est sa période à 100 km d'altitude ? à 500 km ?

En fonction de l'altitude h , on a $g = \frac{k}{(R + h)^2}$, où k est une constante et R le rayon

terrestre, égal à 6 378 km à l'équateur. On a donc $\frac{dg}{g} = -2\frac{dh}{(R + h)}$, et, d'après le théorème des fonctions composées, la différentielle de T vue comme fonction de l et de h est donnée par

$$\frac{dT}{T} = \frac{dl}{2l} + \frac{dh}{h}$$

On trouve ainsi une période de 0, 64 s à 100 km, et de 0, 68 s à 500 km ; on voit aussi que si l'on veut avoir la même période qu'au niveau de la mer, il faut raccourcir le pendule d'environ 0, 3 cm à 100 km, et de 1, 45 cm à 500 km.

I & 2- EXEMPLES D'UTILISATION DES NOTATIONS DIFFERENTIELLES EN PHYSIQUE

& 2. 1 - Electricité : notion de résistance et interpolation linéaire.

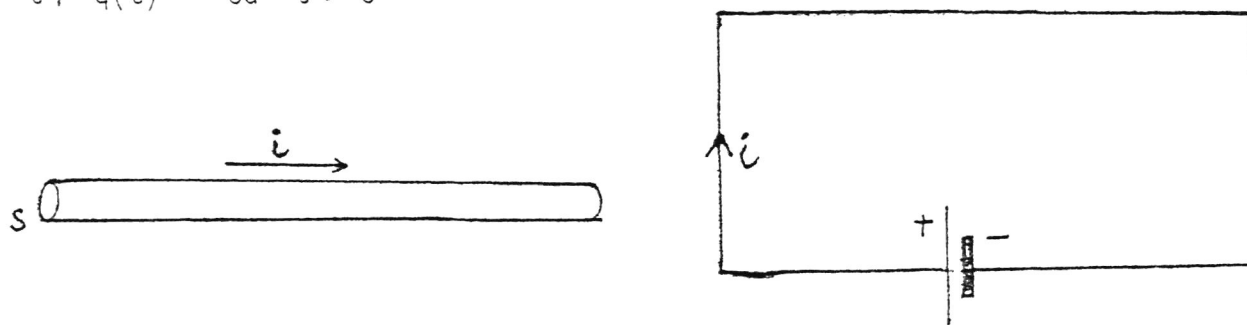
1°) Dérivées

Considérons un fil cylindrique de section s et Δq la charge électrique qui traverse une section pendant la durée Δt .

Le circuit est orienté dans le sens conventionnel du courant.

On peut alors admettre qu'il existe une fonction charge q , dépendant du temps t :

$$t \mapsto q(t) \quad \text{où} \quad t \geq 0$$



On admet que cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition.

Alors $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h}$ est par définition l'intensité moyenne du courant dans

l'intervalle de temps compris entre t_0 et $t_0 + h$, et

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h}$$

est l'intensité du courant à l'instant de date t_0 .

On a alors : $i(t_0) = q'(t_0)$, où q' est la fonction dérivée de la fonction q .

On note alors la fonction dérivée : $q' = \frac{dq}{dt}$

Il s'agit donc d'une fonction, et l'égalité $i = \frac{dq}{dt}$ exprime une égalité entre fonctions.

Cependant dans la littérature on interprète constamment cette égalité comme exprimant l'égalité de deux réels, à savoir :

$$i(t_0) = \frac{dq}{dt}(t_0)$$

Cette interprétation est un abus de langage, couramment admis MAIS : à condition que l'on ait bien conscience de ce que l'on écrit ; autrement dit, suivant la situation,

la même égalité $i = \frac{dq}{dt}$ pourra signifier, soit que la fonction dérivée de q est égale

à la fonction i , (ceci se produit notamment lorsqu'on écrit des équations différentielles), soit qu'à un instant de date t_0 sous-entendu, les deux réels $i(t_0)$ et $q'(t_0)$ sont égaux.

Par exemple, si $q(t) = q_M \sin \omega t$, alors :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = \omega q_M \cos \omega t, \text{ et on écrira } \frac{dq}{dt} = \omega q_M \cos \omega t$$

2°) Différentielles

Que signifie alors l'écriture $dq = i dt$? en mathématiques, $dq(t_0)$ est la différentielle de q en t_0 , c'est-à-dire une application linéaire ; et l'on peut considérer que ce que l'on note usuellement dt est la différentielle de l'application identique, $t \mapsto t$, à l'instant de date t_0 .

Alors $dq(t_0) = i(t_0) dt(t_0)$ est une égalité entre applications linéaires tangentes, et : $dq = i dt$ est une façon abrégée d'écrire l'égalité précédente.

Cette écriture est donc correcte, il importe seulement d'avoir bien conscience de tout ce qu'elle recouvre.

Alors q étant différentiable, on a :

$$q(t_0 + h) - q(t_0) = i(t_0)h + h\varepsilon(h), \text{ ou, si } h \text{ est "suffisamment petit" :}$$

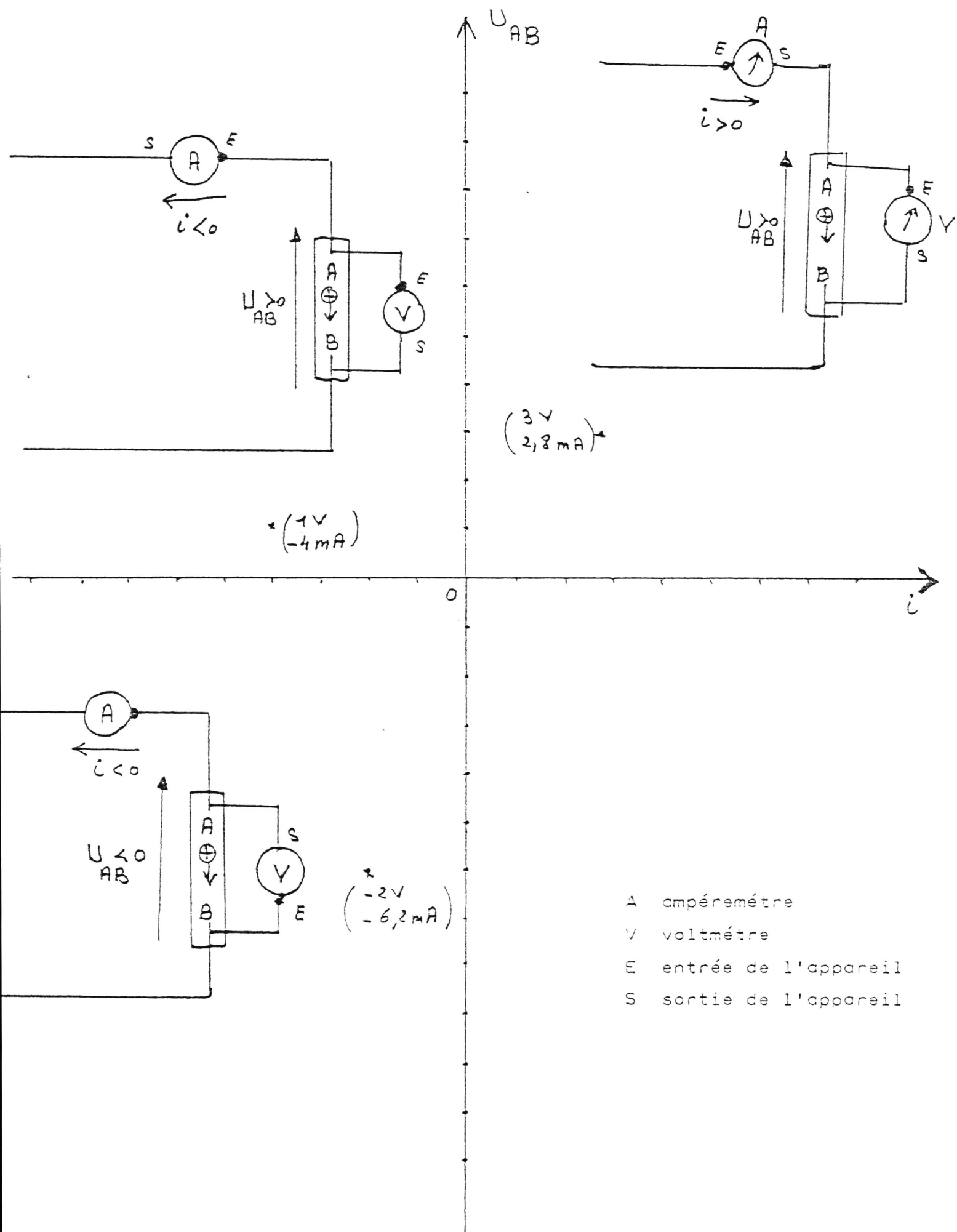
$$q(t_0 + h) - q(t_0) \approx i(t_0)h$$

soit en abrégé :

$$\Delta q \approx i \Delta t \quad (\text{sous-entendu en } t_0)$$

Il s'agit donc bien d'une approximation locale de q par sa différentielle, c'est-à-dire qu'au voisinage de l'instant de date t_0 on remplace la courbe par sa tangente.

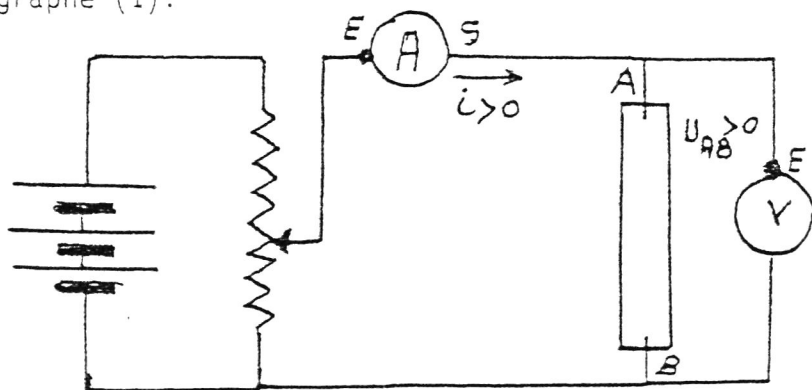
On retrouvera entre autres ces notations dans l'étude de la décharge d'un condensateur, dans la section IV du document.



3°) Notion de résistance

Considérons le circuit suivant :

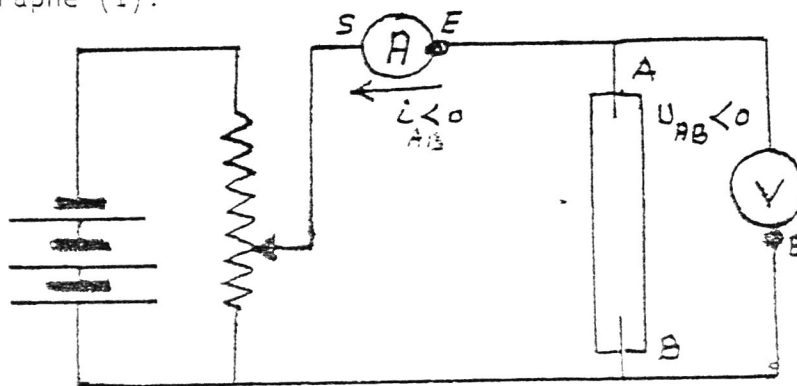
Il permet d'effectuer les mesures correspondant à la partie pointillée du graphe (1).



U_{AB}	1V	2V	4V	6V
i	10 mA	20 mA	40 mA	60 mA

Considérons le circuit suivant :

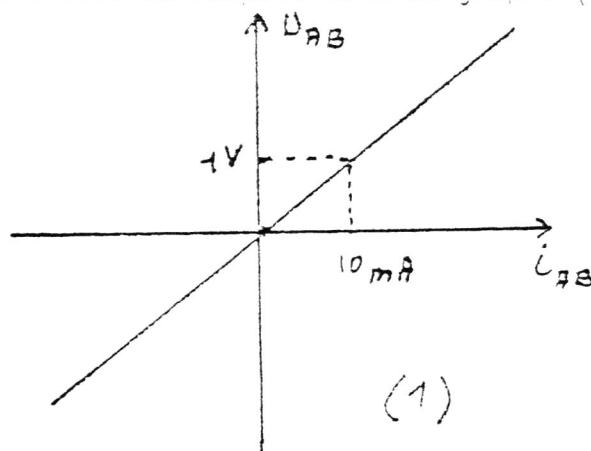
Il permet d'effectuer les mesures correspondant à la partie en trait plein du graphe (1).



U_{AB}	-1V	-2V	-3V	-5V
i	-10 mA	-20 mA	-30 mA	-50 mA

La caractéristique courant-tension du dipôle correspond donc au graphe (1) :

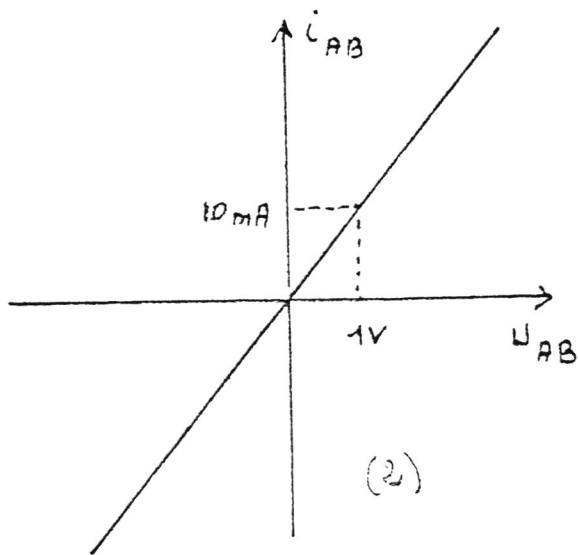
La caractéristique est une droite passant par l'origine, elle est symétrique par rapport à 0, donc le dipôle est symétrique, ce qui correspond physiquement au fait que, branché dans n'importe quel sens il se comporte de la même manière.



La tension étant une fonction linéaire de l'intensité, on peut écrire

$$U_{AB} = R \cdot i_{AB} \quad R = 100 \, \Omega$$

R représente le taux d'accroissement en volt/Ampère il s'exprime dans une unité l'OHM (Ω).

Notion de conductance :

Reprenons le même dipôle, mais traçons le graphe en portant l'intensité en ordonnée et la tension en abscisse.

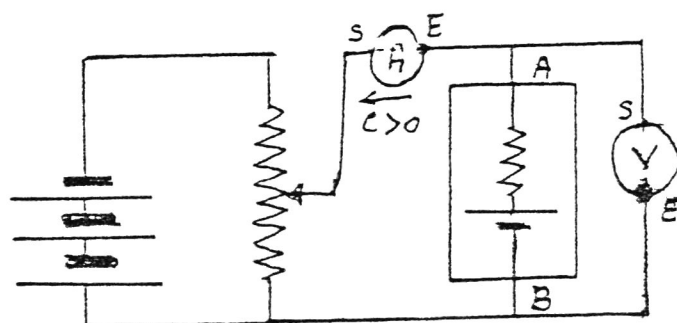
Le graphe est toujours symétrique par rapport à 0, la caractéristique est une droite, la relation entre la tension aux bornes du dipôle et l'intensité qui le traverse est linéaire :

$$i_{AB} = G \cdot U_{AB} \quad \text{avec} \quad G = \frac{1}{R}$$

G est le taux d'accroissement il s'exprime en SIEMENS (S)

Caractéristique d'un générateur : "résistance interne"

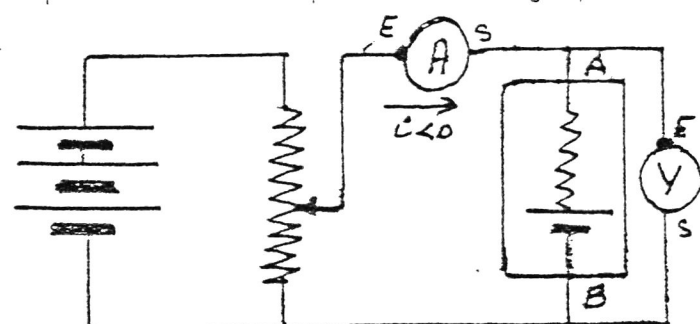
Considérons le circuit suivant :



U_{AB}	-3V	-2,5V	-2V	-1V	-0,5V	0V
i_{BA}	+8mA	+7,1mA	+6,2mA	+4,4mA	+3,5mA	+2mA

Il permet d'effectuer les mesures correspondant à la partie en trait plein du graphe. (figure n° 3)

Le circuit suivant permet de mesurer l'intensité et la tension correspondant à la partie en trait pointillé du graphe.



U_{AB}	0V	+0,5V	+1V	+1,5V	+2V	+3V
i_{BA}	+2,7mA	+1,8mA	+0,95mA	0mA	-1mA	-4,8mA

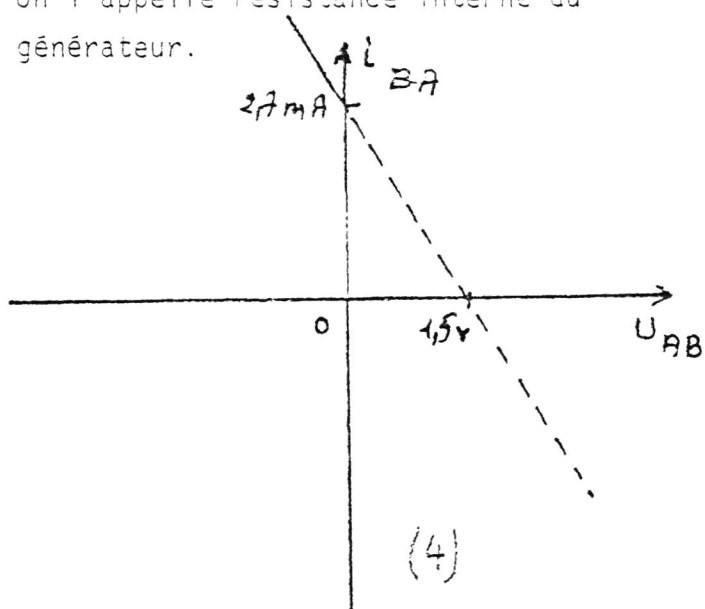
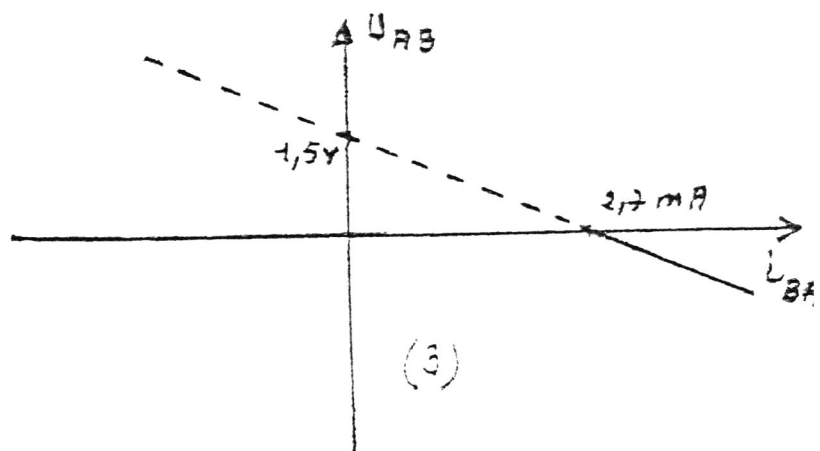
Le graphe de la fonction qui, à une valeur de l'intensité, associe une tension est une droite qui ne passe pas par l'origine, il est possible de représenter la caractéristique par une fonction de la forme

$$U_{AB} = -R \cdot i_{BA} + U_0$$

U_0 , tension à vide, est appelée force électromotrice et notée E . Elle s'exprime en volt $E = 1,5 \text{ V}$.

R représente le taux d'accroissement en volt/Ampère, il exprime donc en OHM (Ω).

On l'appelle résistance interne du générateur.



Si le graphe est tracé en portant i en ordonnée et U en abscisse, on obtient le graphe suivant : (figure n° 4)

C'est une droite qui ne passe pas par l'origine, la fonction correspondante est

$$i_{BA} = I_{cc} - G \cdot U_{AB} \text{ (ici } I_{cc} = 2,7 \text{ mA)}$$

I_{cc} courant de court-circuit, correspond à la valeur de i quand les pôles de la pile sont reliés par une résistance nulle. Quand à G , c'est l'inverse de R .

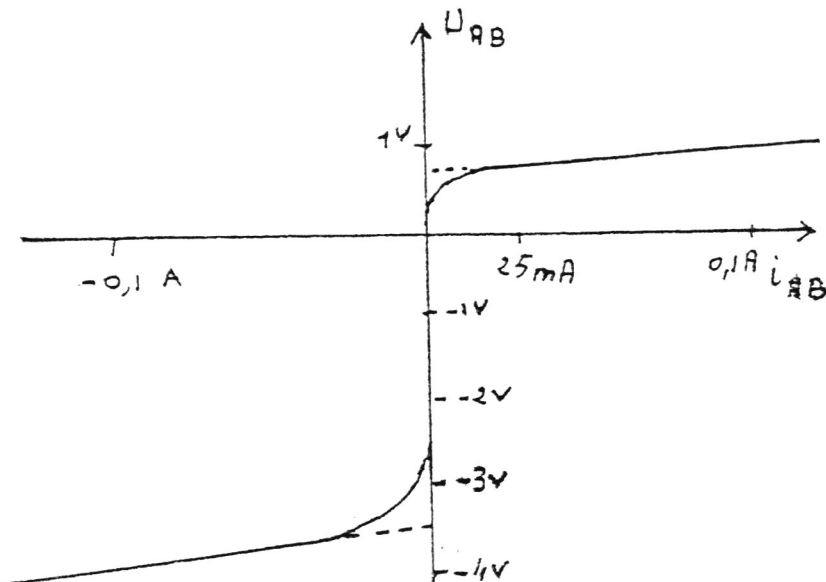
Cas des caractéristiques qui ne sont pas des droites :

pente au voisinage d'un point (u_a , i_a).

Si la caractéristique du dipôle n'est pas une droite, le quotient $\frac{U_{AB}}{i_{AB}}$ ne présente pas d'intérêt.

Ce qui importe pour déterminer la variation de tension qu'entraîne une variation d'intensité est de connaître la pente de la tangente à la caractéristique au point considéré.

Soit les deux situations suivantes :



caractéristique d'une diode Zener

La partie utile de la caractéristique peut-être approximée par des fonctions affines par morceaux, chacune d'elles possédant son taux d'accroissement.

pour $U_{AB} > 0,7$ volts

$$U_{AB} = 0,7 + \frac{0,3}{0,1} \cdot i_{AB}$$

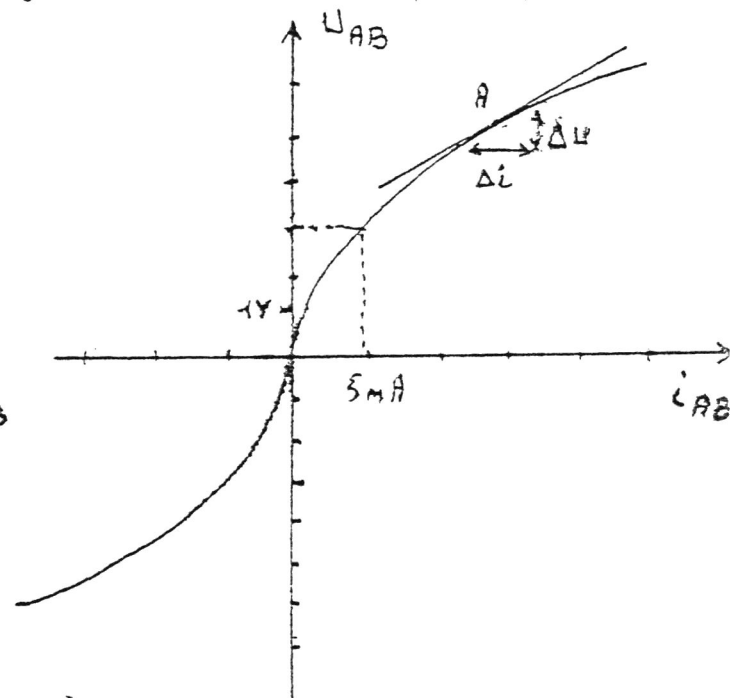
$$r = 3 \text{ ohms}$$

pour $U_{AB} < -3,5$ v

$$U_{AB} = -3,5 + \frac{-0,5}{0,1} \cdot i_{AB}$$

$$r' = 5 \text{ ohms}$$

U_{AB}	-4v	-3,75v	-2v	0	0,2v	0,5v	0,85v	2v
i_{AB}	-0,1A	-0,05A	0	0	0	0	0,05A	0,1A



caractéristique d'une Varistance

La caractéristique n'a pas de portions rectilignes

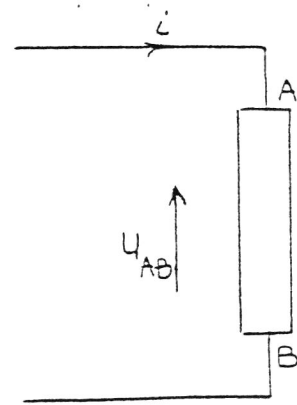
Pour une petite variation de courant Δi on mesure une variation de tension ΔU

on appelle résistance du dipôle au voisinage du point A le quotient $r = \frac{\Delta U}{\Delta i}$

U_{AB}	-4v	-3v	0	2v	3v	4v	6v
i_{AB}	-10mA	-5mA	0	2mA	5mA	10mA	30mA

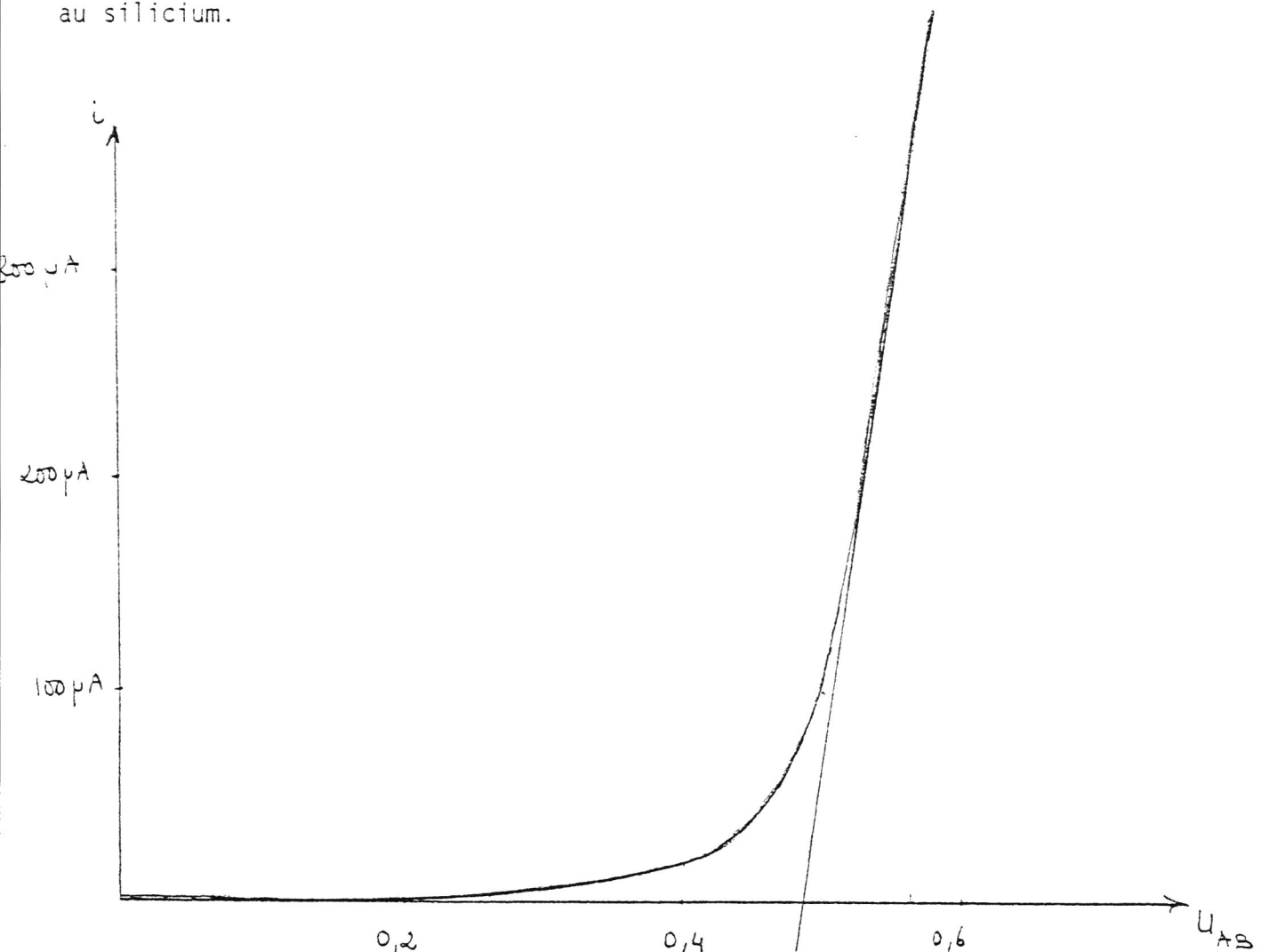
I & 2.2 - RESISTANCE DYNAMIQUE D'UNE DIODE1- Caractéristique statique d'un dipôle

Le conducteur ayant été orienté pour effectuer les mesures d'intensité, on applique au dipôle une tension $v = U_{AB}$ et on mesure l'intensité i qui traverse le dipôle.



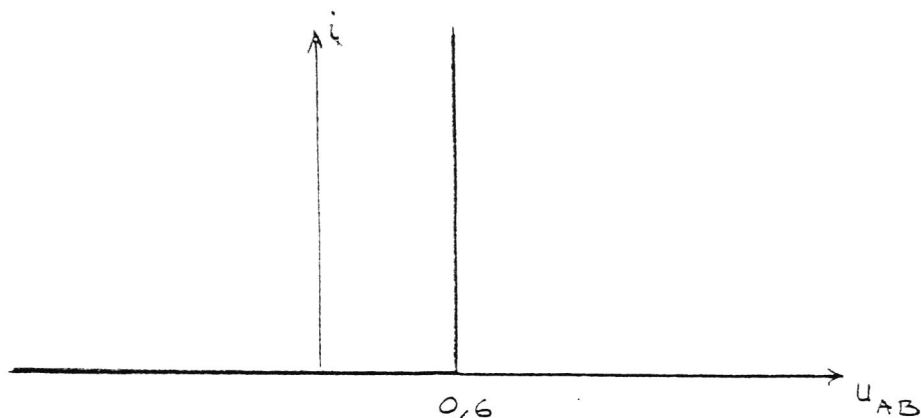
Le couple (i, v) est reporté dans un repère orthonormé. L'ensemble des mesures effectuées permet de tracer une courbe qui est la caractéristique courant-tension du dipôle AB.

Nous allons nous intéresser ici à la caractéristique courant tension d'une diode au silicium.



Le passage de l'état très peu conducteur à l'état conducteur se fait aux environs de $U_{AB} = 0,6$ v.

On représente d'ailleurs la diode idéalisée en remplaçant la partie courbe au voisinage de 0,6 v par deux demi-droites perpendiculaires :

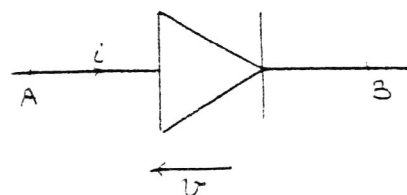


La théorie de la jonction P-N conduit à écrire

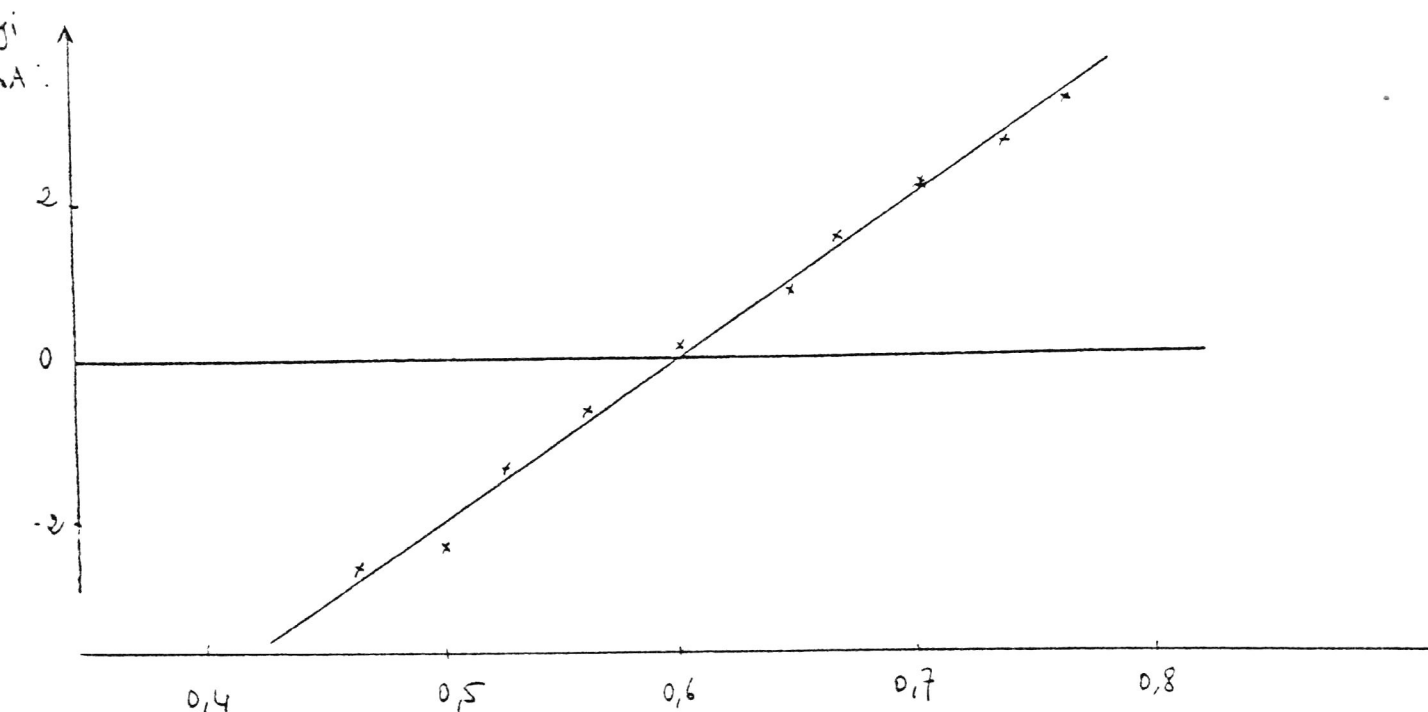
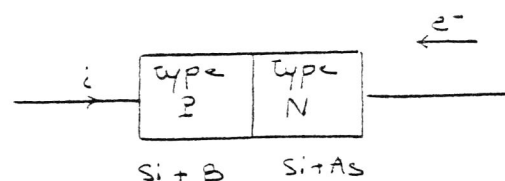
$$i = I_0 \left(\exp \left(\frac{v}{aV_T} \right) - 1 \right)$$

où $1 \leq a \leq 2$ dépend de la diode utilisée

et $V_T = \frac{K \cdot T}{e} = 25 \text{ mV à } 300^\circ \text{ K}$



Compte tenu de cette relation il est plus commode d'utiliser une échelle logarithmique pour l'intensité :



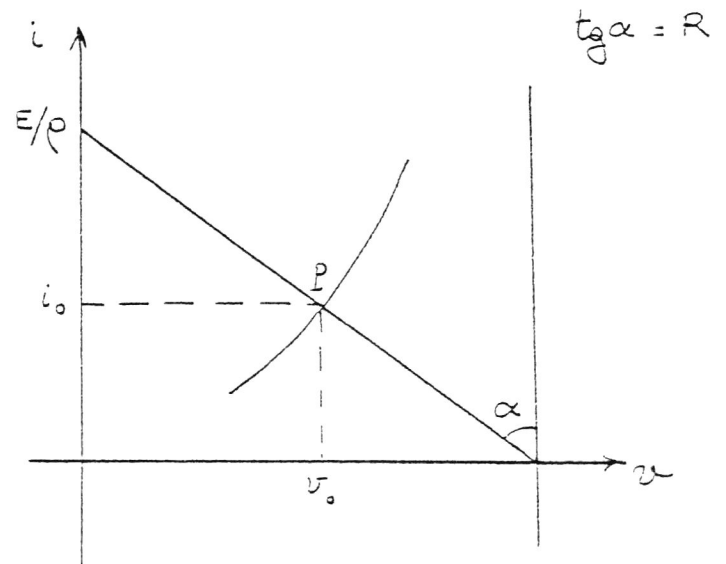
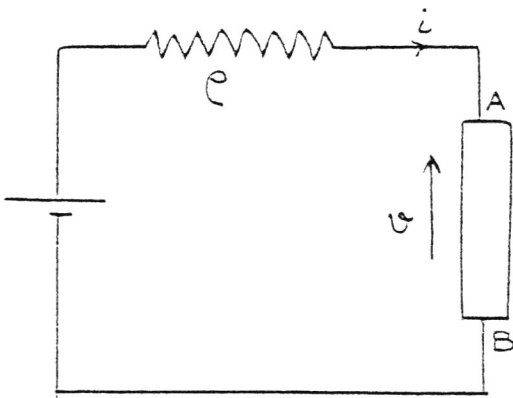
2- Point de fonctionnement d'un dipôle alimenté par un dipôle linéaire

La caractéristique statique est obtenue en effectuant une suite de mesures aussi rapprochées que possible.

Si le dipôle est placé dans un circuit contenant une source de tension continue de f.e.m. E et de résistance ρ , il passe, en régime permanent, dans le circuit un courant i_0 ; la tension aux bornes du dipôle est alors v_0 . Le point P de coordonnées (i_0, v_0) correspond à l'intersection de la caractéristique courant-tension du dipôle et de la droite d'équation $v = E - I\rho$,

Caractéristique du dipôle générateur

Cette droite coupe l'axe des courants au point $I_{cc} = \frac{E}{\rho}$, courant de court-circuit, et l'axe des tensions au point E

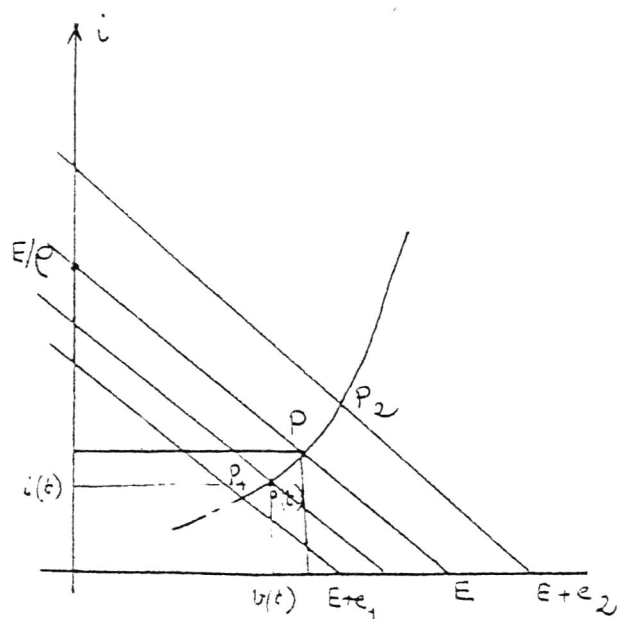


Le point P est appelé point de fonctionnement du circuit.

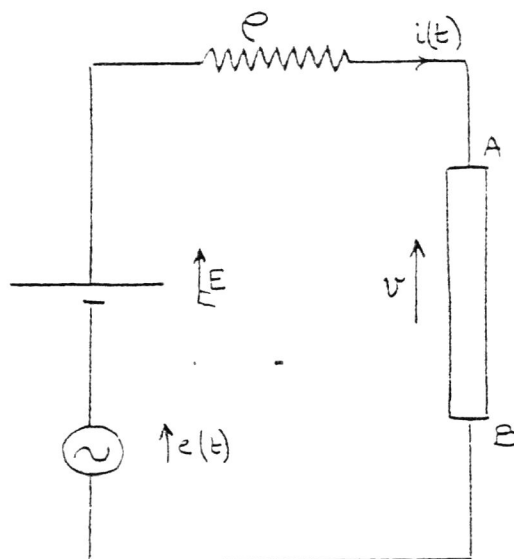
3- Fonctionnement dynamique

On superpose à la tension continue E une tension $e(t)$ qui varie lentement avec le temps t .

Le point de fonctionnement se déplace sur la caractéristique courant - tension du dipôle entre les points P_1 et P_2 , autour du point P qui est appelé point de polarisation.



$$e_1 \leq e(t) \leq e_2$$



4- Linéarisation des dipôles

On va supposer que $e_2 - e_1$ est petit devant V pour pouvoir remplacer l'arc de caractéristique P_1P_2 par la tangente en P .

On note v la tension aux bornes du dipôle et i l'intensité qui le traverse. Ce sont des fonctions de t .

On définit la résistance dynamique $r(P)$ au point P par $r(P) = \frac{dv}{di}(P)$

Comme $i(v) = I_0 \left[\exp\left(\frac{v}{aV_T}\right) - 1 \right]$, on a

$$\frac{di}{dv} = \frac{I_0}{aV_T} \exp\left(\frac{v}{aV_T}\right)$$

Mais $I_0 \exp\left(\frac{v}{aV_T}\right)$ est une très bonne approximation de $i(v)$.

Il en résulte que $\frac{di}{dv} \approx \frac{i}{aV_T}$ et que l'on a $r(P) \approx \frac{aV_T}{I}$

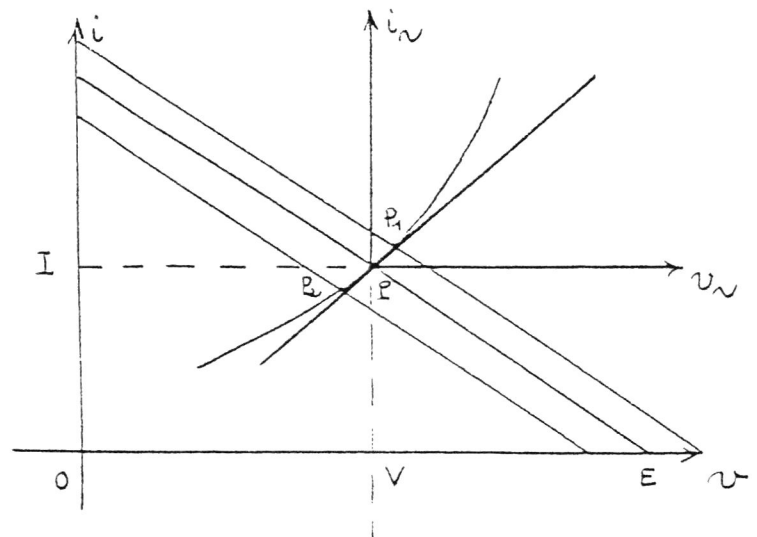
Au voisinage de P, on pose

$$v(t) = V + v_{\sim}(t) \text{ et}$$

$$i(t) = I + i_{\sim}(t)$$

D'après ce qui précède on a

$$v_{\sim}(t) \approx r(P)i_{\sim}(t)$$



Exemples :

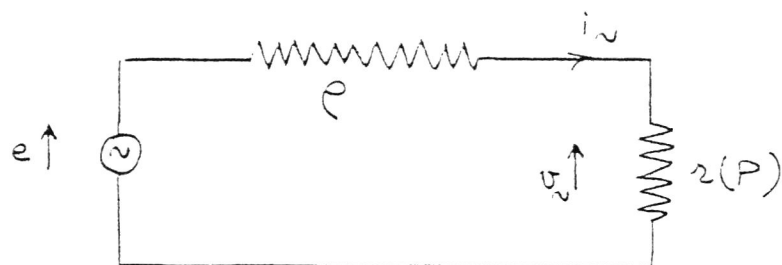
Si $I = 1\text{mA}$, on a, pour un transistor

branché en diode $V_T = 25\text{ mV}$, $a = 1$ et $r = 25\ \Omega$;

pour une diode $V_T = 25\text{ mV}$, $a = 2$ et $r = 50\ \Omega$.

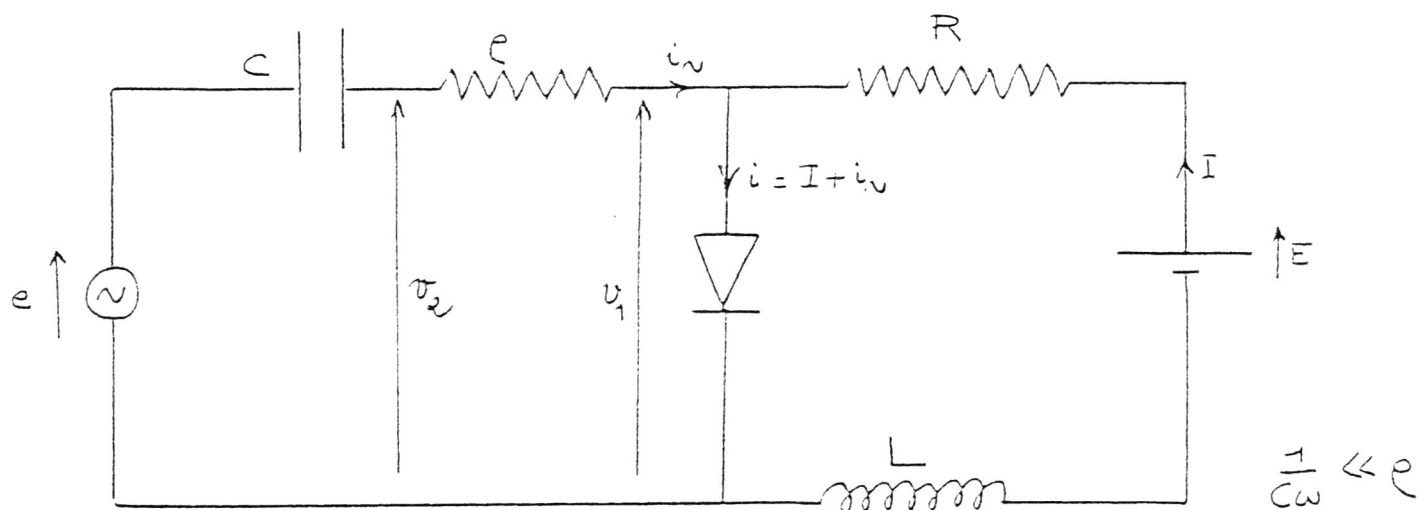
Conclusion :

En ce qui concerne la partie alternative la diode est équivalente au montage suivant :



5- Mesure de la résistance dynamique

Mesure d'une dérivée à l'aide d'un oscilloscope.



On superpose aux bornes de la diode une tension continue $V = E - RI$ et une tension alternative de faible amplitude $e - ri_v$, en réalisant le montage ci-dessus. Pour que le courant alternatif ne passe pas dans le circuit de droite on choisit $R \gg r(P)$, condition que l'on peut améliorer par une self de blocage (porte impédance) : on arrête de même le courant continu dans le circuit de gauche au moyen d'un condensateur.

L'oscilloscope, branché en alternatif, permet de lire directement la partie variable v_v de v_1 (et de v_2)

On a alors

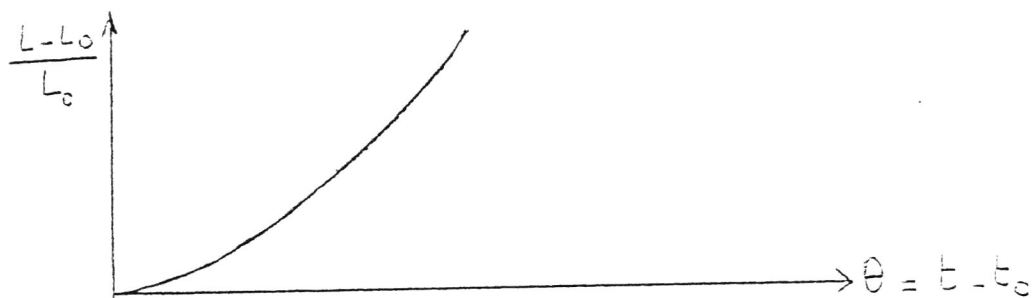
$$\frac{r(P)}{v_v} = \frac{e}{v_2 - v_1}$$

& 2.3 - COEFFICIENTS DE DILATATION DES SOLIDES

I- Coefficient de dilatation linéaire

Une tige ayant une longueur L_0 à la température $t_0^\circ\text{C}$ est portée à la température $t^\circ\text{C}$. L'expérience permet de déterminer sa nouvelle longueur L et on pose : $L = L_0 f(t)$, car la longueur obtenue est proportionnelle à la longueur initiale.

Pour chaque solide, on peut dresser ainsi une table donnant les variations de longueur en fonction de la température, et tracer la courbe obtenue.



On ne dépasse évidemment pas la température où le solide devient mou.

La fonction f étant supposée différentiable, on peut au voisinage de t_0 l'approximer par sa différentielle en t_0 , et on écrira :

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0) \cdot (t - t_0) \quad \text{or} \quad f(t_0) = 1$$

on pose $f'(t_0) = a$, et on retrouve l'approximation classique :

$L = L_0(1 + a\theta)$, avec $\theta = t - t_0$, où a est le coefficient de dilatation linéaire du solide au voisinage de t_0 .

Couramment on établira cette courbe en partant de $t_0 = 0^\circ\text{C}$, et a devient le coefficient de dilatation linéaire du solide au voisinage de 0°C . Pour des températures moyennes, les valeurs de a au voisinage de 0°C et de $t_0^\circ\text{C}$ sont peu différentes, et la littérature ne précise en général pas duquel il s'agit.

Ainsi pour le Platine, jusqu'à la température 50°C , la courbe semble rectiligne, ce qui signifie que de 0°C à 50°C , la fonction peut être approchée de façon satisfaisante par sa différentielle en 0, soit :

$$L = L_0(1 + at) \quad \text{où} \quad a = 8,626 \cdot 10^{-6} \text{d}^\circ\text{C}^{-1}$$

Exemples : au voisinage de 0°C toujours, on détermine :

pour le Fer,	$a = 122 \cdot 10^{-7} \text{ d}^\circ\text{C}^{-1}$	le Cuivre : $a = 171 \cdot 10^{-7} \text{ d}^\circ\text{C}^{-1}$
l'or :	$a = 155 \text{ " "}$	le laiton : $a = 189 \text{ " "}$
le verre blanc :	$a = 80 \text{ " "}$	

Si l'on veut étudier la dilatation à de plus hautes températures, l'approximation du premier ordre n'est plus suffisante, on est amené à considérer une approximation du second ordre, ce qui revient à traiter la courbe comme un arc de parabole.

Pour le Platine, de 50°C à 100°C , $L = L_0(1 + at + bt^2)$ où $b = 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ d}^\circ\text{C}^{-2}$ et l'on obtient la courbe jointe (voir annexe 1)

Les mesures de dilatation linéaire ont été effectuées à l'aide d'un comparateur, et ont permis de mesurer a avec une incertitude relative de l'ordre du millième. On utilise aussi le dilatomètre de Chévenard, qui consiste à mesurer la dilatation par rapport à la dilatation connue d'une barre étalon, et, pour les cristaux en particulier, la méthode interférentielle. (Voir annexe 2).

II- Dilatation cubique

Etant donné alors un cube de côté L_0 à la température $t_0^\circ\text{C}$, et donc de volume $V_0 = L_0^3$, on se propose de déterminer son volume $V = L^3$ à la température $t^\circ\text{C}$.

Les mesures expérimentales de volume sont beaucoup plus imprécises que les mesures de longueur : si l'on mesure, en l'immergeant dans un liquide, le volume V_0 à $t_0^\circ\text{C}$, et que l'on porte ensuite le cube à $t^\circ\text{C}$, il y a aussi échauffement du liquide, du récipient ... et la dilatation ne concernera pas que le cube, d'où un doute sur ce que l'on mesure.

C'est donc la théorie mathématique qui permet de répondre au problème posé.

On a : $V = L^3 = (L_0 f(t))^3 = V_0 (f(t))^3$ le volume obtenu est proportionnel au volume initial.

La meilleure approximation linéaire de V au voisinage de t_0 est donnée par sa différentielle en t_0 : or V est une fonction composée, soit si l'on note :

$$q : x \mapsto x^3 \text{ et si } g(t) = (f(t))^3,$$

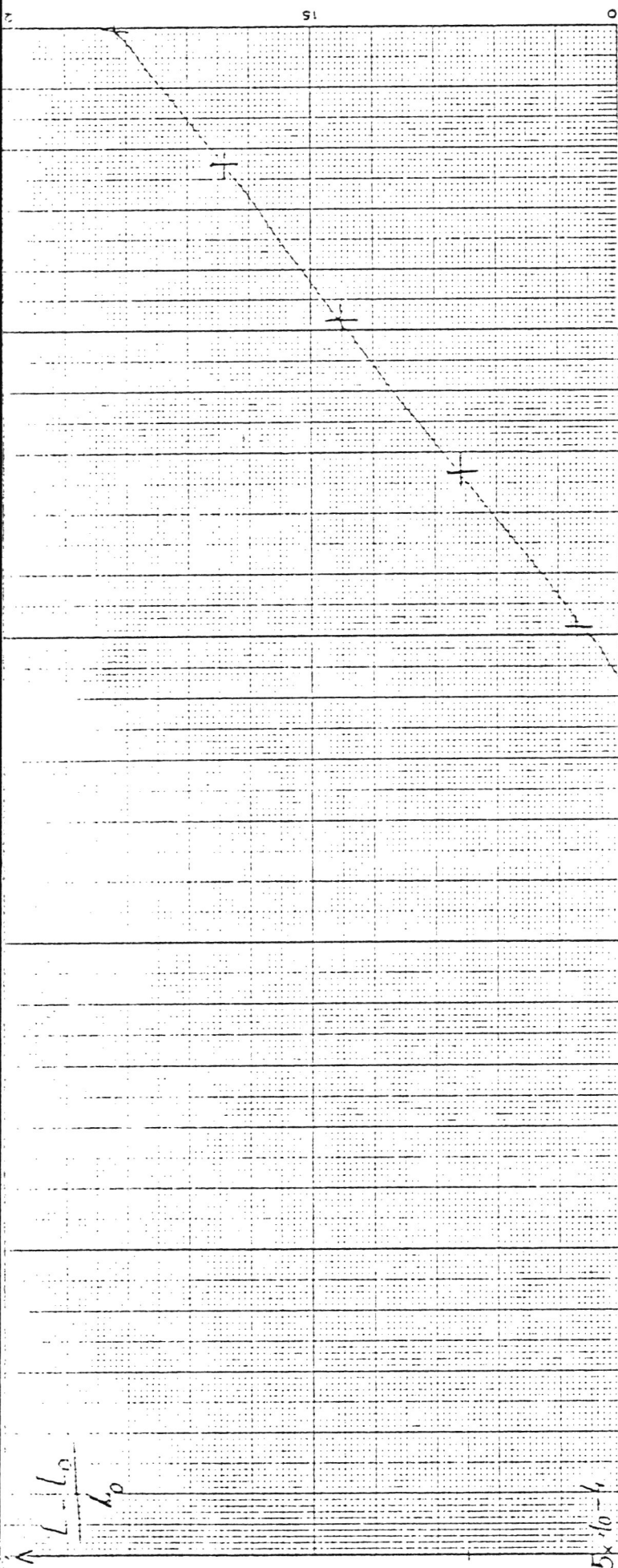
alors $g = q \circ f$ donc :

$$dg_{t_0} = dq_{f(t_0)} \circ df_{t_0}$$

I.32

§ 2.3 Annexe 1

Courbe de dilatation linéaire
du Platine entre 0°C et 100°C



comme $f(t_0) = 1$, on a donc : $dg_{t_0} = dq_1 \circ df_{t_0}$, et si $q(x) = x^3$
 $q'(x) = 3x^2$ d'où $dq_1 : h \mapsto 3h$ et comme on sait que $df_{t_0} : h \mapsto ah$
on aura par conséquent : $dg_{t_0} : h \mapsto 3ah$, et on pourra écrire :

$$g(t) \approx g(t_0) + 3a(t - t_0) \text{ avec } g(t_0) = 1$$

ou encore, en multipliant par V_0 : $V = V_0(1 + 3a(t - t_0))$

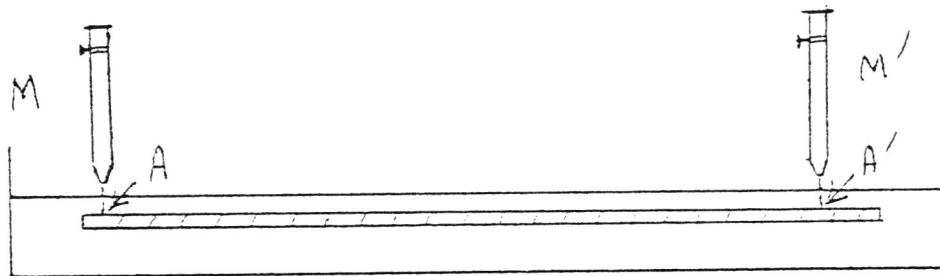
et $3a$ est alors le coefficient de dilatation cubique du solide considéré, au voisinage de t_0 .

Dans la pratique, on calculera aussi ce coefficient au voisinage de 0°C , en précisant la validité de l'approximation. On retrouve ainsi la formule classique :

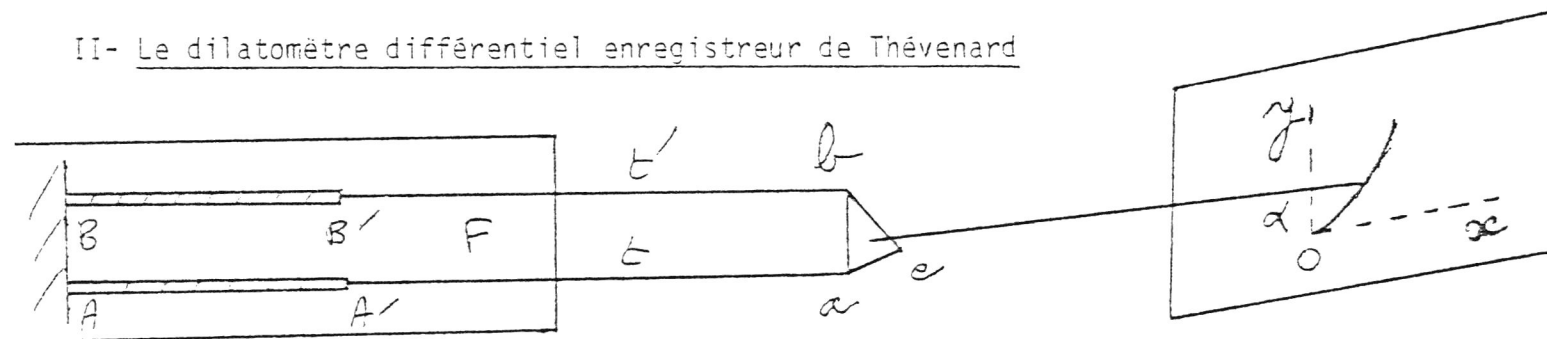
$$V = V_0(1 + 3at)$$

Appareils permettant de mesurer des dilatations des solides

(& 2. 3- Annexe 2)

I- Le comparateur

Une barre du solide étudiée porte 2 traits fins A et A' perpendiculaires à son axe ; elle est placée dans un bain liquide, à température uniforme, que l'on porte successivement à 0 et à $\theta^\circ\text{C}$. On mesure l_0 par comparaison avec un mètre gradué, puis $l - l_0$, à l'aide des microscopes micrométriques M et M', à moins de 0,5 μ près.

II- Le dilatomètre différentiel enregistreur de Thévenard

On compare la dilatation de la barre étudiée AA' à la dilatation connue d'une barre étalon BB'.

Les 2 barres, dont les extrémités A et B sont fixes, sont prolongées à partir de A' et B', jusqu'à l'extérieur du four F, par 2 tiges de silice (très peu dilatables) t et t' dont les extrémités a et b, poussent un levier abc mobile autour du point fixe c (ac est par exemple horizontal et ab vertical quand le four est froid). Si, lorsqu'on chauffe, les 2 barres se dilataient également, l'extrémité de l'aiguille α , qui reste perpendiculaire au plan abc, décrirait une horizontale ox. Si les dilatations sont inégales, au mouvement précédent se superpose un déplacement vertical, et les ordonnées sont proportionnelles aux différences des dilatations.

A l'aide d'un tableau qui donne les dilatations de l'étalon en fonction de la température, on transforme ensuite les courbes obtenues de telle sorte que les abscisses qui sont proportionnelles à ces dilatations, deviennent proportionnelles aux températures.

II - ETUDE LOCALE DES COURBES.

APPROXIMATIONS DU SECOND ORDRE ET PLUS.

§1.1 - Etude locale d'une courbe du type " $y = f(x)$ ". Points d'inflexion.

On note f une application d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on supposera "suffisamment" différentiable (ou dérivable) autrement dit différentiable autant de fois que cela sera utile.

Si x_0 est un élément de $]a, b[$ on se propose d'étudier le comportement de f (et les conséquences qui en résultent pour son graphe) au voisinage de x_0 .

Ecrivons d'abord que f est différentiable en x_0 : pour h tel que $x_0 + h$ appartienne à $]a, b[$ on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h \cdot \varepsilon(h) \quad (**)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$,

Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, $\vec{u}$ le vecteur $(1, f'(x_0))$ et $\vec{v}$ le vecteur $(0, 1)$.

$\vec{u}$ est un vecteur tangent au graphe en M_0 , et nous nous proposons d'étudier la position du graphe par rapport à sa tangente en M_0 .

Pour cela on va effectuer un changement de repère en prenant comme nouveau repère cartésien $(M_0, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans ce repère l'égalité $(**)$ devient

$$F(X) = X \cdot \varepsilon(X) \quad (***)$$

Pour la fonction ε , que l'on supposera différentiable, son comportement au voisinage de 0 dépend de $\varepsilon'(0)$: en effet si $\varepsilon'(0)$ est différent de 0 et si ε' est continue (ce que nous supposerons également), ε' reste de signe constant au voisinage de 0 et ε est monotone au voisinage de 0, ce qui a pour conséquence que ε s'annule en changeant de signe ; si par contre $\varepsilon'(0) = 0$ on ne peut rien dire dans l'immédiat.

Si ε s'annule en changeant de signe, il y a deux possibilités :

- 1) au voisinage de 0, $F(X)$ reste positif (au sens large i.e ≥ 0) et alors au voisinage de M_0 le graphe est au dessus de la tangente,
- 2) au voisinage de 0, $F(X)$ reste négatif et alors au voisinage de M_0 le graphe est en dessous de la tangente.

Définition

Lorsque F s'annule en changeant de signe, le graphe traverse la tangente en M_0 , on dit qu'il y a inflexion en M_0 .

En dérivant 2 fois (***) on obtient : $F''(X) = X \varepsilon''(X) + 2 \varepsilon'(X)$
d'où $\varepsilon'(0) = 1/2 F''(0)$.

On obtient donc :

Si $F''(0) \neq 0$ le graphe est au voisinage de M_0 soit au-dessus soit au dessous de la tangente en M .

On peut préciser cette position selon le signe de $F''(0)$:
en effet on peut écrire

$$\varepsilon(X) = X \varepsilon'(0) + X \varepsilon_2(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon_2(X) = 0$$

ce qui donne

$$F(X) = X^2 \frac{F''(0)}{2} + X^2 \varepsilon_2(X)$$

d'où il résulte que pour X voisin de 0, $F(X)$ est du signe de $F''(0)$, par suite si $F''(0) > 0$ on est dans le cas (1) tandis que si $F''(0) < 0$ on est dans le cas (2).

Supposons maintenant que $F''(0) = 0$

Alors $F(X) = X^2 \varepsilon_2(X)$ et si nous supposons ε_2 différentiable on peut écrire

$$\varepsilon_2(X) = X \varepsilon'_2(0) + X \varepsilon_3(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon_3(X) = 0,$$

d'où

$$F(X) = X^3 \varepsilon'_2(0) + X^3 \varepsilon_3(X)$$

Si $\varepsilon'_2(0) \neq 0$, $F(X)$ s'annule en 0 en changeant de signe et il y a inflexion.

En dérivant trois fois la relation $F(X) = X^2 \varepsilon_2(X)$ on obtient pour $X = 0$ que
 $\varepsilon'_2(0) = (1/6) F^{(3)}(0)$.

Conclusion :

Si $F''(0) = 0$ et $F^{(3)}(0) \neq 0$ il y a inflexion et on peut dire que " $F(X)$ se comporte au voisinage de 0 comme $(1/6) F^{(3)}(0) X^3$ ".

Si maintenant on a $F''(0) = F^{(3)}(0) = 0$ on itère le processus précédent.
On obtient finalement

Si n est le premier entier ≥ 2 tel que $F^{(n)}(0) \neq 0$, on a

$$F(X) = X^n \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + X^n \varepsilon_n(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon_n(X) = 0$$

Il en résulte qu'au voisinage de 0, $F(X)$ "se comporte" comme $X^n \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$,
et que le graphe traverse la tangente en M si et seulement si n est impair.

Remarque : $\forall n \quad F^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)$.

& 1. 2- LA FIN JUSTIFIE LES MOYENS ...

Il est un autre type d'approximation, très utilisée par les physiciens, qui la justifient essentiellement par son succès fracassant. Le point de départ est l'approximation locale d'une fonction d'une variable par sa différentielle, qu'il sera plus commode d'écrire ici sous la forme

$$f(a + h) - f(a) \cong f'(a)h \quad (2)$$

Maintenant, a et h étant fixés, nous pouvons intervertir les rôles de a et $a + h$, c'est-à-dire partir de $a + h$ et donner à la variable l'accroissement $-h$. On voit alors que

$$f(a) - f(a + h) \cong f'(a + h)(-h) \quad \text{ou encore}$$

$$f(a + h) - f(a) \cong f'(a + h)h \quad (2')$$

En termes de taux de variation, a et $a + h$ jouent des rôles symétriques ; la relation (2) exprime que le taux de variation de f entre a et $a + h$ est voisin de $f'(a)$, la relation (2') qu'il est voisin de $f'(a + h)$.

Dans ces conditions, il est tentant de choisir une approximation où a et $a + h$ jouent des rôles symétriques. On pourrait prendre $\frac{1}{2}(f'(a) + f'(a + h))$, qui présente l'inconvénient, pour les calculs des exemples précédents, de nécessiter 2 valeurs de la dérivée ; on peut aussi prendre la valeur de la dérivée au point milieu $a + \frac{h}{2}$, et écrire

$$f(a + h) - f(a) \cong f'\left(a + \frac{h}{2}\right)h \quad (3)$$

Après tout, comme le souligne Feynmann dans le cas où f est la distance parcourue en fonction du temps par un mobile dans un mouvement rectiligne, si on veut approcher la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ par la célérité (vitesse instantanée) en un instant donné, le meilleur choix est celui de l'instant milieu $t + \frac{\Delta t}{2}$. Quelle est la valeur mathématique de ces considérations ?

Si la dérivée f' est une fonction continue, on peut admettre que pour h petit $f'(a)$, $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ et $f'(a + h)$ sont assez voisins pour que les formules (2), (2') et (3) donnent des résultats numériques très voisins ; mais cela ne donne aucun argument même heuristique pour que (3) donne des résultats meilleurs.

Les formules (2), (2') et (3) deviennent des égalités quand f est une fonction affine, autrement dit une fonction polynomiale de degré 1 au plus. Si f est une fonction polynomiale de degré 2, autrement dit si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, on a

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + Ah^2$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \frac{h}{2}) - Ah^2$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \frac{h}{2})h$$

La formule (3) est encore une égalité quand f est une fonction polynomiale de degré 2 au plus ; pour une fonction polynomiale quelconque, des calculs algébriques montrent que pour (2) et (2') l'erreur est d'ordre 2 en h , alors que pour (3) elle est de l'ordre 3.

Comparons maintenant l'efficacité de (2) et (3) sur un exemple numérique.

3ème exemple : Calcul de $\sin 49^\circ$

a) Avec (2)

$$\begin{aligned}\sin 49^\circ &= \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{45}) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{45} \\ &= 0,707 + 0,707 \times \frac{\pi}{45} = 0,757\end{aligned}$$

b) Avec (3)

$$\begin{aligned}\sin 49^\circ &= \sin 45^\circ + \cos 47^\circ \times \frac{\pi}{45} \\ \text{Calculons d'abord } \cos 47^\circ \text{ à l'aide de (2)} \\ \cos 47^\circ &= \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \times \frac{\pi}{90} \\ &= 0,707 - 0,707 \times \frac{\pi}{90} = 0,682\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sin 49^\circ = 0,707 + 0,682 \times \frac{\pi}{45} = 0,755$$

$$\text{donne } \sin 49^\circ = 0,754710$$

4ème exemple : Approximation du cosinus

d'après (3), on peut écrire pour h petit

$$\cos h = 1 - h \sin \frac{h}{2}$$

En appliquant (2) à la fonction sinus au voisinage de zéro, on retrouve l'approximation connue

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2}$$

$$\text{pour } h = \frac{\pi}{6}, \text{ on trouve } \cos \frac{\pi}{6} = 0,866,$$

$$\text{pour } h = \frac{\pi}{4} \qquad \cos \frac{\pi}{4} = 0,692$$

La précision est de 0,4 % dans le premier cas, 2 % dans le second. Pourtant, personne ne qualifie ces angles de petits !.

L'explication mathématique de ces succès vient du théorème suivant, qui mériterait d'être traité, ne fût-ce qu'à titre d'exercice, dans tous les cours de mathématiques de premier cycle d'Universités ou de classes préparatoires.

Théorème

Soit f une fonction 3 fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$, et soit M tel que pour tout x de $[a, b]$ on ait $f'''(x) \leq M$. Alors, quels que soient les points x et $x + h$ de $[a, b]$, on a

$$\left| f(x + h) - f(x) - f'(x)h - \frac{f''(x)}{2}h^2 \right| \leq \frac{M}{24}h^3$$

Ce théorème est une conséquence de la formule de Taylor.

Bien que l'essentiel soit le fait qu'on obtient ainsi une approximation du troisième ordre en h , le coefficient $\frac{7}{24}$ permet par exemple de voir qu'en appliquant cette approximation aux fonctions sinus et cosinus, l'erreur est toujours inférieure à 0,14 si h est inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Remarque

L'approximation obtenue par une application banale de la formule de Taylor à l'ordre 2, en assimilant $f(x + h) - f(x)$ à $f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2$, donne lieu dans les mêmes conditions à une erreur inférieure à $\frac{M}{6}h^3$, ce qui est très légèrement meilleur. Par contre, cette formule est moins belle, moins parlante, et surtout nécessite davantage de calculs.

Par contre, l'utilisation répétée - et la programmation - de l'approximation $f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2$ sont très commodes, par exemples pour des calculs approchés de solutions d'équations différentielles. (Voir chapitre IV).

& 2. Exemples1°) Bobines d'Helmoltz

On considère deux bobines plates identiques de rayon R , coaxiales et parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I .

Leur distance est $2d$.

Les inductions $\vec{B}_1(x)$ et $\vec{B}_2(x)$ au point de l'axe d'abscisse x ont même sens et l'induction résultante $\vec{B}(x)$ a pour intensité

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x)$$

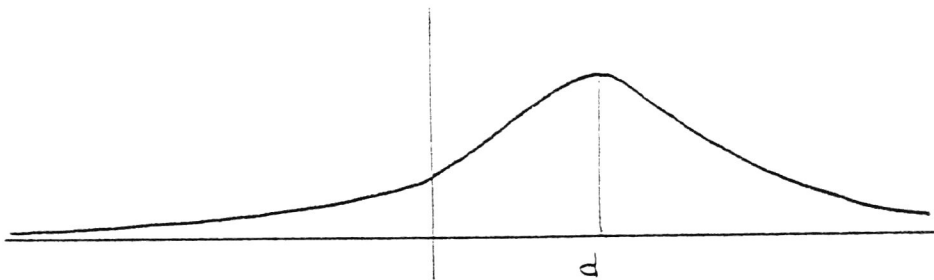
$$= B_0 R^3 [((d-x)^2 + R^2)^{-3/2} + ((d+x)^2 + R^2)^{-3/2}]$$

où B_0 est l'intensité de l'induction créée par chaque bobine en son centre.

Posons $f(x) = [(d-x)^2 + R^2]^{-3/2}$

On a $B(x) = B_0 R^3 (f(x) + f(-x))$, donc B est une fonction paire.

Le graphe de f a l'allure suivante :



On a $f'(x) = 3(d-x) [(d-x)^2 + R^2]^{-3/2}$

et $f''(x) = 3 [4(d-x)^2 - R^2] [(d-x)^2 + R^2]^{-7/2}$

f'' s'annule en changeant de signe pour les deux valeurs suivantes de x :

$x_0 = d - R/2$, $x_1 = d + R/2$. On a ainsi deux points d'inflexion.

remarque :

Si une fonction paire g est dérivable sa dérivée est une fonction impaire. La démonstration la plus élégante de ce résultat est la suivante :

on note s l'application $x \mapsto -x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire que g est paire signifie que $g \circ s = g$; alors d'après le théorème sur la dérivée d'une fonction composée, on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(s(x)) \cdot s'(x) = g'(x)$, et comme $s'(x) = -1$ on en déduit $g' \circ s = -g'$ ce qui signifie que g' est impaire.

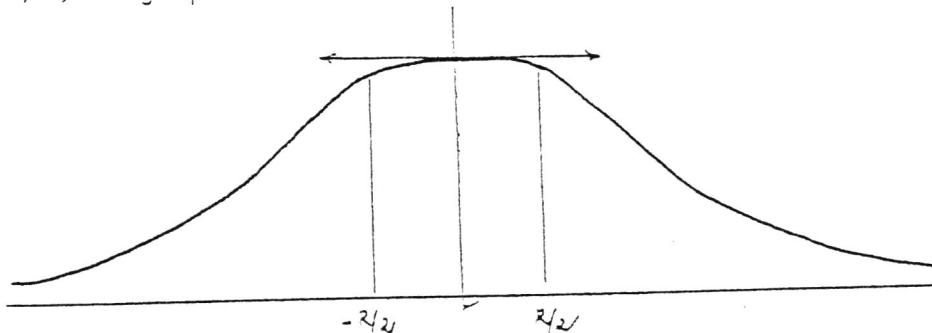
Lorsque $d = R/2$, les graphes de f et de $f \circ s$ ont chacun un point d'inflexion pour $x = 0$. Dans ce cas on a :

$B'(0) = B^{(3)}(0) = 0$ (car les dérivées d'ordre impair de B sont des fonctions impaires), et $B''(0) = 0$.

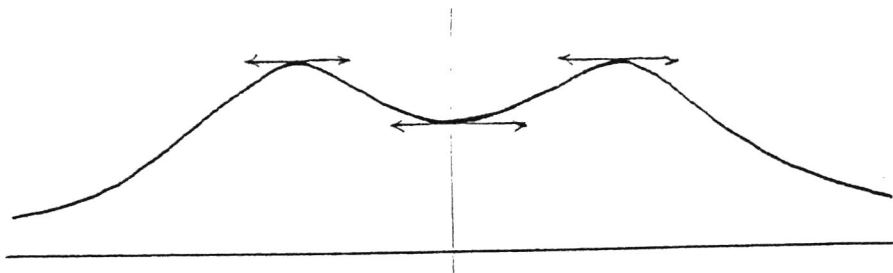
Alors $B(x) = B(0) + \frac{B^{(4)}(0)}{4!} x^4 + x^4 \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Il en résulte que dans ce cas, l'induction est pratiquement uniforme dans une grande partie de l'espace qui sépare les bobines.

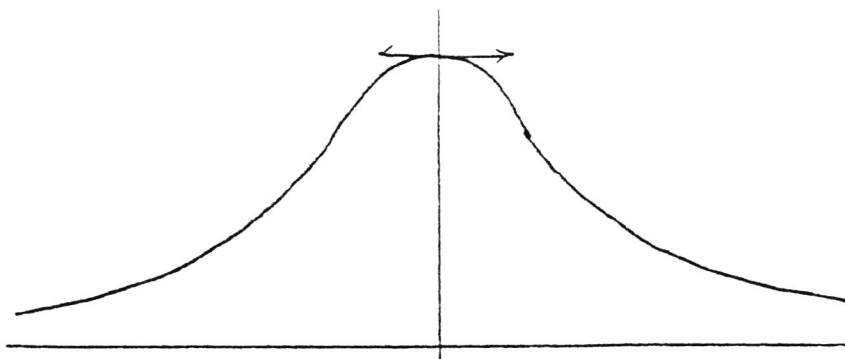
Pour $d = R/2$, le graphe de B est :



Pour $d > R/2$, il a l'allure suivante :



Enfin pour $d < R/2$, on obtient :



II & 2. 2- REACTION ACIDE FORT - BASE FORTE1- Description de l'expérience. Courbe de variation du pH.

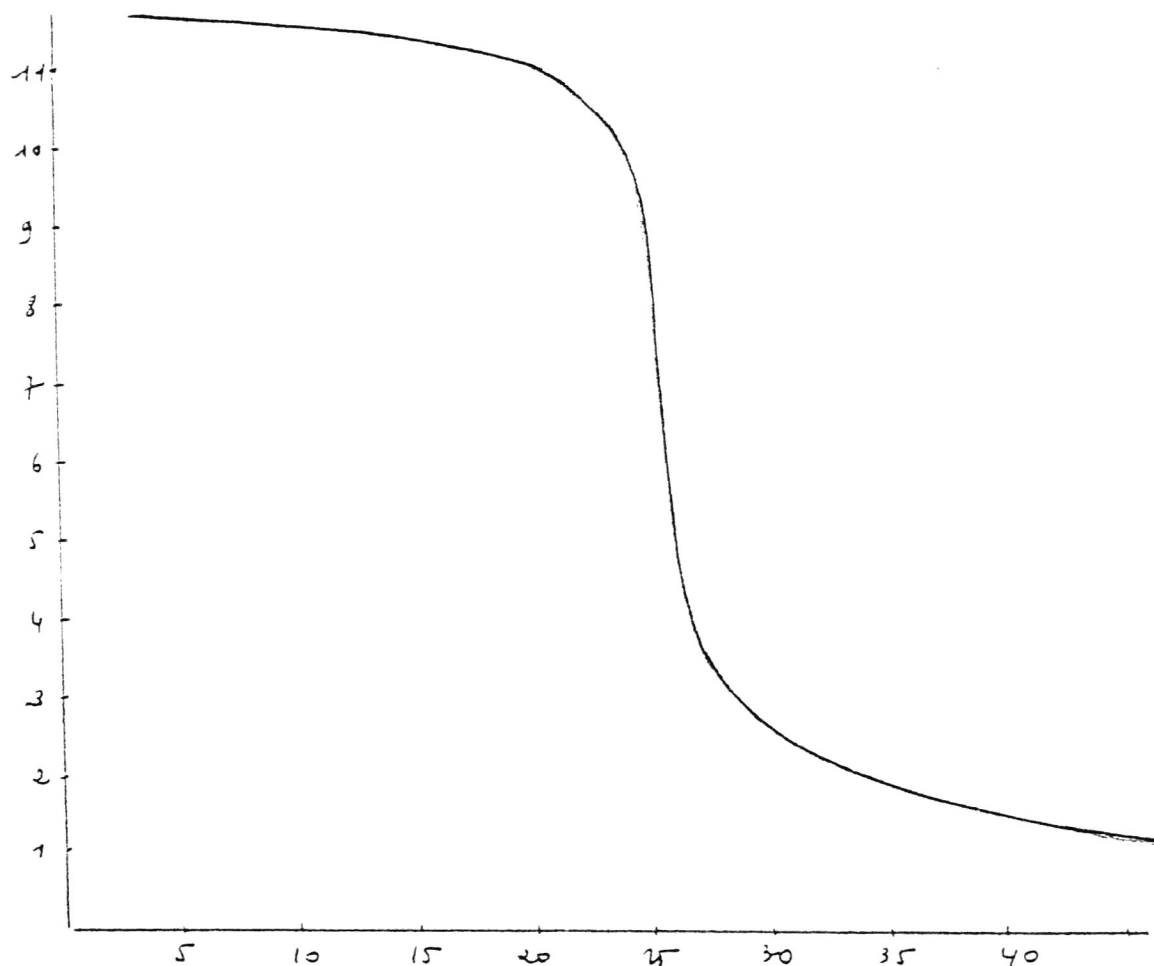
On place dans un Becher 25 cm³ de solution de soude à 0,1 mol.l⁻¹ et dans une burette une solution de chlorure d'hydrogène de même molarité.

On ajoute lentement cet acide et on relève le pH en fonction du volume d'acide versé v_a .

Tableau des mesures (les volumes indiqués sont en cm³) :

V	0	2,5	10	18,5	20	21	22	22,5	23
pH	13	12,9	12,7	12,2	11,9	11,7	11,1	10,5	9,7
V	24,5	25	27	30	35	40	45	50	
pH	6,5	5	2,7	2,2	1,9	1,8	1,7	1,6	

Courbe de variation :



Au départ le pH varie peu ; la variation est brusque entre 23 et 27.

L'allure de la courbe montre que celle-ci a un point d'inflexion. Nous allons essayer de déterminer ce point et de justifier ce phénomène.

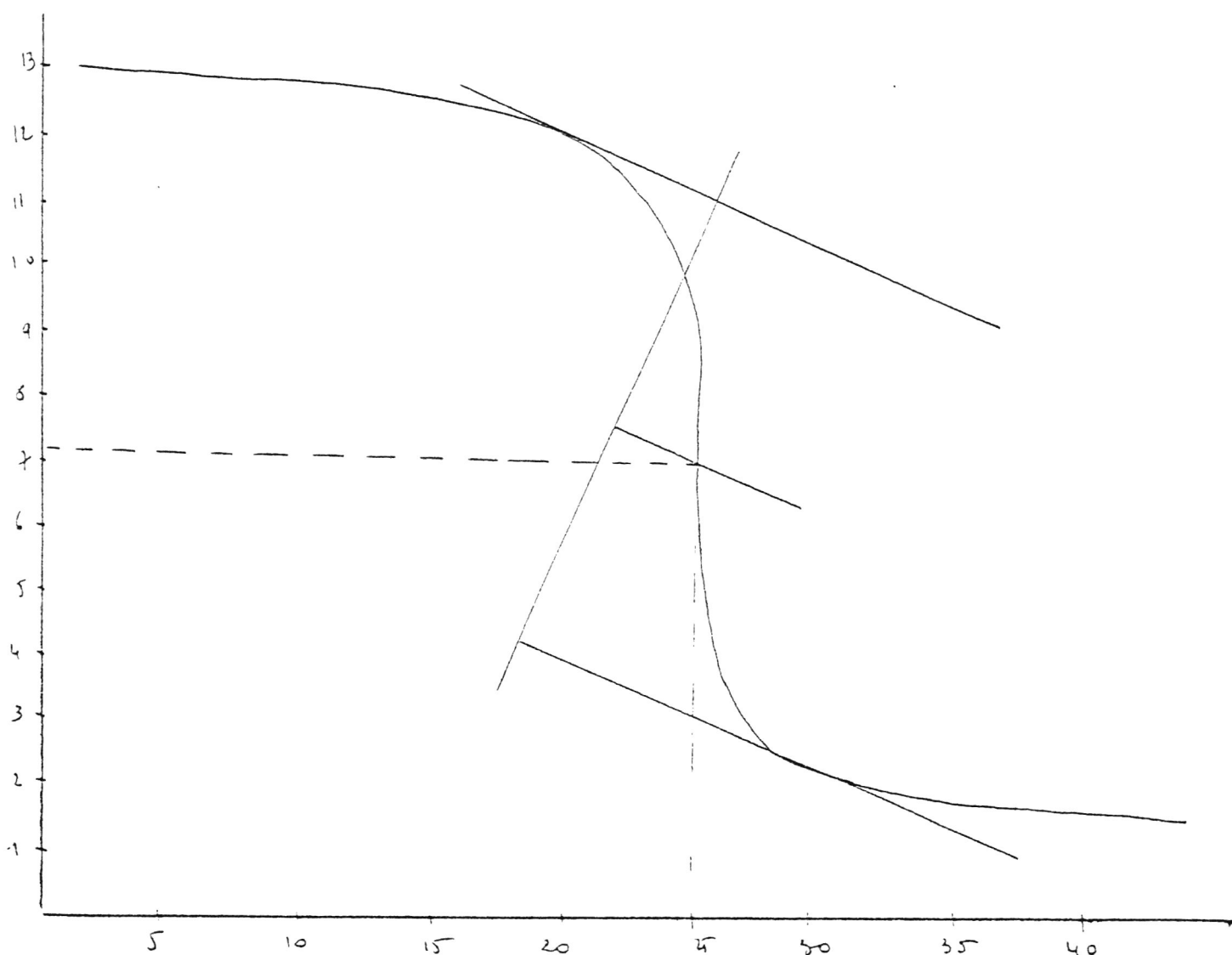
2- Approximation graphique du point d'inflexion

Nous avons vu, lors de l'étude locale d'une courbe C , qu'un point I est un point d'inflexion si et seulement si dans un repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est tangent en I à C , l'équation de la courbe est de la forme :

$$f(x) = a \cdot x^{2n+1} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$$

où $n \geq 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Il en résulte que l'on peut approximer localement (i.e. au voisinage de I) la courbe C par la courbe d'équation $h(x) = a \cdot x^{2n+1}$; soit Γ cette courbe. Mais la fonction h étant impaire, deux points de Γ symétriques par rapport à I ont des tangentes parallèles. Cette propriété donne un procédé pour déterminer I de façon approchée comme le montre le dessin suivant :



On trouve comme approximation de I le point de coordonnées 24,3 et 7,1.

Ce pH est très voisin de 7.

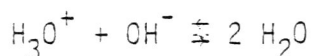
Or un pH de 7 correspond à la neutralité, c'est à dire au moment où la concentration en ions hydronium H_3O^+ est identique à la concentration en ions hydroxyde OH^- . Compte tenu des données de l'expérience les deux solutions ont même molarité, c'est donc lorsque le volume v_a sera égal à 25 que ces deux concentrations seront égales. On dit alors qu'il y a équivalence ; la solution obtenue est une solution de chlorure de sodium dans de l'eau pure.

Nous allons voir que cette équivalence correspond à un point "proche" du point d'inflexion de la courbe C.

3- Calcul du pH.

Par raison de symétrie nous noterons v_b le volume de la solution de la base forte considérée (ici NaOH), c_b sa molarité, et v_a le volume de la solution d'acide fort (ici HCl), c_a sa molarité.

On étudie la réaction entre les ions H_3O^+ apportés par la solution acide et les ions OH^- apportés par la solution basique, réaction symbolisée par



Le fait d'avoir un acide fort et une base forte permet de dire que ceux-ci sont complètement dissociés.

Posons

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = x \quad \text{et} \quad [\text{OH}^-] = y. \quad \text{On a } x \cdot y = 10^{-14}$$

La neutralité électrique de la solution s'exprime par

$$[\text{Cl}^-] + y = [\text{Na}^+] + x$$

On a

$$[\text{Cl}^-] = \frac{v_a \cdot c_a}{v_a + v_b} \quad \text{et} \quad [\text{Na}^+] = \frac{v_b \cdot c_b}{v_a + v_b}$$

donc x vérifie :

$$x^2 - \frac{v_a \cdot c_a - v_b \cdot c_b}{v_a + v_b} \cdot x - 10^{-14} = 0$$

La racine positive est

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{v_a \cdot c_a - v_b \cdot c_b}{v_a + v_b} + \sqrt{\frac{(v_a \cdot c_a - v_b \cdot c_b)^2}{(v_a + v_b)^2} + 4 \cdot 10^{-14}} \right)$$

Comme le pH est le cologarithme décimal de la concentration en ions H_3O^+ , on obtient

$$pH = 7 - \log(X + \sqrt{X^2 + 1})$$

avec

$$X = \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{v_a \cdot c_a - v_b \cdot c_b}{v_a + v_b}$$

Ici log désigne le logarithme décimal. Si l'on note Ln le logarithme népérien on a

$$\text{Log} = \frac{1}{\text{Ln}(10)} \text{Ln}$$

Le tableau suivant permet de comparer les valeurs théoriques du pH et celles obtenues expérimentalement que l'on a indiquées au n° 1.

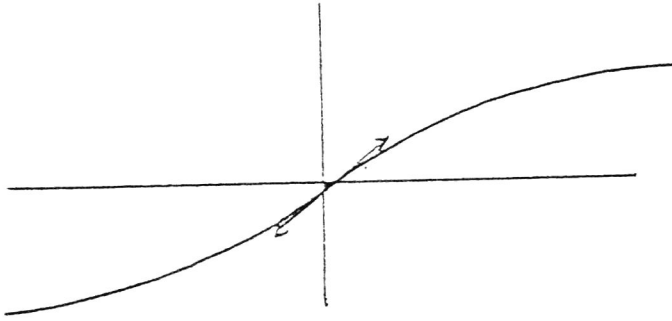
v_a	10	20	24	27	35	50
$\frac{v_a c_a - v_b c_b}{v_a + v_b}$	$-4,2857 \cdot 10^{-2}$	$-1,11... \cdot 10^{-2}$	$-2,0408 \cdot 10^{-3}$	$3,8461 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-2}$	$3,33 \cdot 10^{-2}$
X	$-2,1428 \cdot 10^5$	$-5,55... \cdot 10^4$	$-1,0204 \cdot 10^4$	$1,923 \cdot 10^4$	$8,33 \cdot 10^4$	$1,66 \cdot 10^5$
$X + \sqrt{X^2 + 1}$	$0,233 \cdot 10^{-5}$	$0,09 \cdot 10^{-4}$	$0,49 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$16,6 \cdot 10^{-4}$	$3,33 \cdot 10^{-5}$
$\text{Log}(X + \sqrt{X^2 + 1})$	-5,6	-5,05	-4,3	4,58	5,22	5,52
pH	12,6	12,05	11,3	2,42	1,78	1,48

Remarque :

Sauf si X_a est très proche de 25, la variable X est grande devant 1 en valeur absolue.

Si X est positif $X + \sqrt{X^2 + 1}$ est pratiquement égal à $2X$ tandis que si X est négatif on écrit que $X + \sqrt{X^2 + 1} = X(1 - \sqrt{1 + 1/X^2})$ et comme $\sqrt{1 + 1/X^2}$ est peu différent de $1 + 1/2X^2$ (car X est grand) on obtient une bonne approximation de $X + \sqrt{X^2 + 1}$ par $-\frac{1}{2X}$.

La fonction $x \mapsto \varphi \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une fonction impaire, croissante dont le graphe a l'allure suivante :



Le point $(0,0)$ est un point d'inflexion et en ce point $\varphi'(0) = 1$.

Remarque :

φ est la fonction réciproque de la fonction sh définie pour tout x réel par

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \text{ Il est d'usage de noter cette fonction réciproque Arg sh.}$$

On a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ et } \varphi''(x) = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Etudions maintenant la fonction

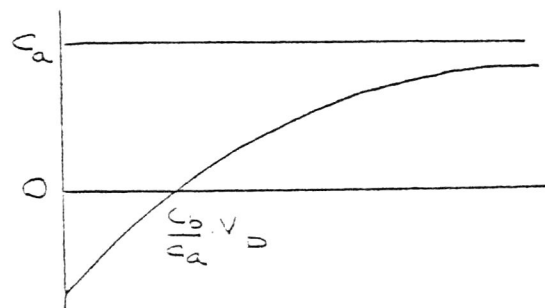
$$v_a \mapsto \frac{v_a \cdot c_a - v_b \cdot c_b}{v_a + v_b} \text{ pour } v_a \geq 0.$$

Elle est croissante, son graphe est le suivant :

Elle s'annule pour $v_a = v_b \cdot c_b / c_a$,

et en ce point la dérivée est

$$\frac{c_a^2}{v_b(c_a + c_b)}$$



Notons g la fonction

$$v_a \mapsto \frac{10^7}{2} \cdot \frac{v_a c_a - v_b c_b}{v_a + v_b}$$

On a

$$g'(v_a) = \frac{10^7}{2} \cdot \frac{v_b(c_a + c_b)}{(v_a + v_b)^2}$$

et

$$g''(v_a) = -10^7 \cdot \frac{v_b(c_a + c_b)}{(v_a + v_b)^3}$$

Posons $f = \varphi \circ g$. On a alors $\text{pH} = 7 - \frac{1}{\ln(10)} f$ et l'étude de la fonction pH se ramène à celle de f .

On peut penser a priori que le graphe de f va, comme φ , présenter un point d'inflexion ; nous allons voir que ceci est exact mais que ce n'est pas au point d'équivalence qu'il y aura inflexion, ce qui mettra en cause la pertinence du graphe de $v_a \mapsto \text{pH}$.

De $f = \varphi \circ g$ on déduit

$$f' = (\varphi' \circ g) \cdot g' \quad \text{et} \quad f'' = (\varphi'' \circ g) \cdot g'^2 + (\varphi' \circ g) \cdot g''$$

Ici φ' est toujours positive, $\varphi''(x)$ est du signe de $-x$ et g'' est toujours négative.

Il en résulte que pour $v_a \geq \frac{c_b}{c_a} v_b$ on a $f''(v_a) < 0$; en particulier f'' ne s'annule pas pour $v_a = \frac{c_b}{c_a} v_b$ (point d'équivalence) et il n'y a donc pas inflexion en ce point.

Si nous reprenons les données numériques de l'expérience on a $c_a = c_b = 10^{-1}$, $v_b = 25$ on obtient

$$f''(25) = -400 \quad \text{et} \quad f''(24) = 0,9996,$$

autrement dit f'' s'annule en changeant de signe dans l'intervalle $]24, 25[$ et on aura dans cet intervalle un point d'inflexion, ce que l'on a constaté expérimentalement.

En fait ce point d'inflexion correspond à une valeur de v_a très proche de 25 :

On a

$$\begin{array}{ll} g(24,999) \approx -10,002 & g(25) = 0 \\ g'(24,999) \approx 10\,000,4 & g'(25) = 10^4 \\ g''(24,999) \approx 400,024 & g''(25) = -400 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \varphi'(24,999) \approx 0,0995 \\ \varphi''(24,999) \approx 9,3532 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

d'où

$$f''(24,999) \approx 985\,360,7$$

et f'' s'annule dans l'intervalle $]24,999 ; 25[$

On peut remarquer que sur cet intervalle $g'(v_a)$ est proche de 10^4 et $g''(v_a)$ est proche de -400 , donc que $f''(v_a)$ est proche de 10^8 . $\varphi'' \circ g(v_a) - 400 \varphi' \circ g(v_a)$

Posons $v_a = 25 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

Pour $\varepsilon < 10^{-3}$ $g(25 - \varepsilon) \approx -\varepsilon \cdot 10^4$

Ce qui permet d'assurer que, si ε est inférieur à 10^{-6} , $|X| = |g(25 - \varepsilon)| < 10^{-2}$, et dans ce cas on a $\varphi'(X) \approx 1$ et $\varphi''(X) \approx -X$.

Il en résulte que $f''(25 - \varepsilon) \approx \varepsilon \cdot 10^{12} - 400$ et donc que f'' s'annule pour ε proche de $4 \cdot 10^{-10}$.

Ceci signifie pratiquement que le point d'inflexion est indiscernable du point d'équivalence.

Conclusion :

Le fait que le point d'équivalence ne soit pas le point d'inflexion du graphe de $v_a \mapsto \text{pH}$ pose un problème de nature physique : le choix de cette fonction n'est pas très pertinent.

En effet, le choix de v_a comme "variable" introduit une dissymétrie entre l'acide et la base qui physiquement (ou chimiquement si l'on préfère) ne se justifie pas. Le calcul fait pour obtenir le pH montre que la "bonne variable" dans cette situation

est soit $\frac{v_a c_a - v_b c_b}{v_a + v_b}$ soit $X = \frac{10^7}{2} \cdot \frac{v_a c_a - v_b c_b}{v_a - v_b}$, le graphe de $X \mapsto \text{pH}$ ayant un point d'inflexion pour $X = 0$, c'est à dire lorsqu'il y a équivalence, et étant symétrique par rapport à ce point.

III - DERIVEES ET PROBLEMES D'EXTREMA.

INTRODUCTION : Principe du minimum.

Un principe de physique affirme que l'équilibre d'un système physique n'est atteint que lorsque la valeur de l'énergie potentielle du système considéré est extrême, minimale s'il s'agit de l'équilibre stable.

Un exemple en est donné par le problème du pendule. L'application de ce principe se réduit, si le système a un nombre fini de degrés de liberté, à chercher un extremum d'une fonction de plusieurs variables.

Les exemples qui suivent constituent une illustration de ce principe, et du fait qu'une fonction varie peu au voisinage d'un extremum.

Quiconque s'intéresse à l'origine dudit principe, est amené à remonter à Maupertuis, lequel en 1744 pose le "principe mécanique de moindre action" et déclare qu'on obtient de la sorte "un accord des différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles."

Mais en fait le mérite revient également à Leibnitz et à son "principe du meilleur" : la compréhension de Dieu étant infinie, il conçoit tous les mondes possibles, mais ne crée que le meilleur, c.a.d celui qui recèle le maximum de variété tout en requérant l'énergie minimale.

Ce point de vue modifie fondamentalement la compréhension du monde : il n'y a plus une réalité univoque, mais un "ensemble de possibles" parmi lesquels un seul est réalisé et en mécanique, cela revient à considérer un mouvement existant comparé à une infinité de mouvements virtuels ... d'où l'idée d'espace des mouvements, capitale chez Lagrange, et le principe de Maupertuis : l'intégrale $\int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{r}$ est minimale par rapport à tous les mouvements voisins possédant la même énergie que le mouvement réel.

Le second progrès décisif de la mécanique, au début du 19ème siècle, sera dû également à des considérations théologiques : Dieu est inconnu mais le réel est connu, on connaît bien le mouvement mais mal sa cause, il faut donc privilégier les équations différentielles du mvt et non son intégrale !

Bonne métaphysique !

III & 1- QUESTIONS D'EXTREMA LOCAUX

Introduction

S'il est un résultat d'analyse bien connu des élèves c'est certainement le suivant :

(*) "Etant donné $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, si f admet un maximum (ou un minimum) local (cf. infra) en $x \in]a, b[$ on a $f'(x) = 0$."

Autrement dit les extrema locaux de f sont à chercher dans l'ensemble des zéros de f' , mais il faut remarquer que l'on peut très bien avoir $f'(x) = 0$ sans que f présente un extremum local en x (contre-exemple très simple : $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et f n'a pas d'extremum en 0).

Nous allons voir comment cette situation s'étend au cas des fonctions de plusieurs variables.

Comme au chapitre I, § 1, nous nous bornerons au cas des fonctions de deux variables.

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f a un maximum local (resp. un minimum local) au point A de $\mathbb{R}^2$ s'il existe un disque D de centre A tel que $\forall M \in D$ on ait $f(M) \leq f(A)$ (resp. $f(M) \geq f(A)$).

Ceci peut s'écrire si $A = (a_1, a_2)$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad |h| < \varepsilon \quad |k| < \varepsilon \Rightarrow f(a_1 + h, a_2 + k) \leq f(a_1, a_2)$$

(resp. " " $\geq$ ")

Nous allons montrer que, dans cette situation, le résultat (*) est remplacé par la proposition suivante :

Proposition :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

(i) f a un maximum local au point A de $\mathbb{R}^2$,

(ii) f est différentiable en A ,

alors la différentielle de f en A est nulle.

On ne peut naturellement pas démontrer ceci comme dans le cas d'une fonction d'une variable en utilisant les dérivées à droite et à gauche car ces notions n'ont plus de sens ici.

Nous allons néanmoins nous ramener au cas d'une variable en considérant les fonctions

$$\varphi_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } H \in \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto f(A + tH)$$

Par hypothèse φ_H a un maximum local en 0 et on a donc $\varphi_H'(0) = 0$.

Or φ_H est la composée de $\tau_H : t \mapsto A + tH$ et de f , d'où

$$(d\varphi_H)_0 = (df)_{\varphi_H(0)} \circ (d\tau_H)_0$$

Comme $(d\tau_H)_0$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à λ associe λH , on obtient :

$$\varphi_H'(0) = (df)_A(H) \quad ,$$

En conclusion df_A est l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

$$1^\circ) f(x, y) = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

Cette fonction n'est certainement pas un bon exemple d'application de la proposition précédente dont on peut fort bien se passer ici. En effet, on peut remarquer que $f(x, y)$ est strictement positif sauf au point $(0, 0)$ et donc que f a un minimum en $(0, 0)$.

De plus f est homogène de degré 2, i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

On en déduit aisément que f ne peut avoir ni minimum ni maximum local en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ car tout disque de centre (x_0, y_0) contient des éléments de la forme $(\lambda x_0, \lambda y_0)$ et $(\mu x_0, \mu y_0)$ avec $\lambda < 1$ et $\mu > 1$

Il en résulte que l'on a

$$f(\lambda x_0, \lambda y_0) < f(x_0, y_0) < f(\mu x_0, \mu y_0)$$

Conclusion :

f a un minimum en $(0, 0)$.

Si l'on calcule la différentielle de f au point (x, y) on obtient :

$$d_{(x, y)}f : (h, k) \rightarrow 2(a^2xh + b^2yk)$$

et on a

$$d_{(x, y)}f = 0 \text{ si et seulement si } x = y = 0$$

2°) $f(x, y) = a^2x^2$.

Cette fonction est également homogène de degré 2 mais n'est pas de signe constant. On a

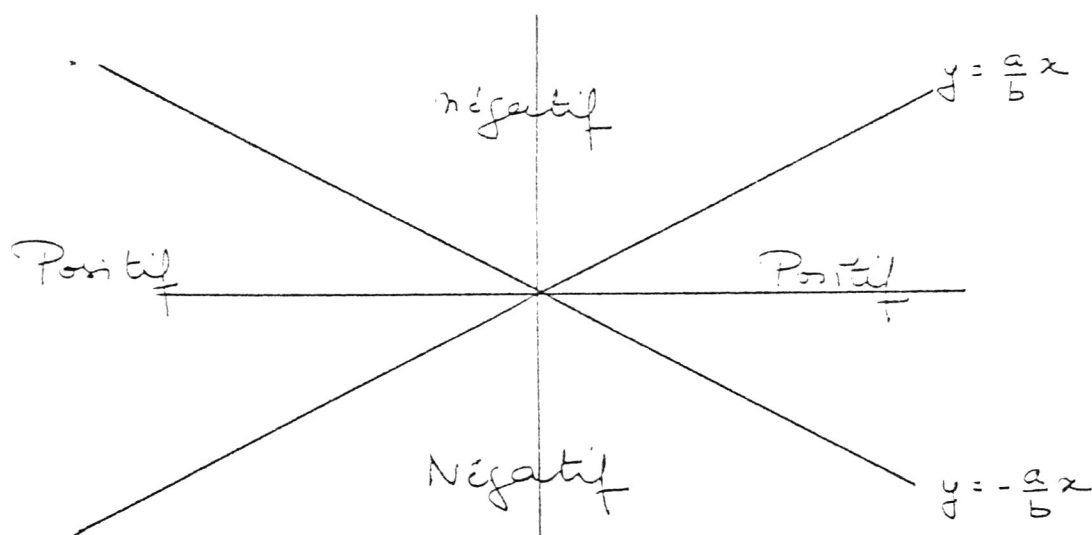
$$d_{(x, y)}f : (h, k) \rightarrow 2(a^2xh - b^2yk)$$

et

$$d_{(x, y)}f = 0 \text{ si et seulement si } x = y = 0$$

Donc $(0, 0)$ est le seul point où f puisse avoir un extremum local.

Mais il n'en est rien car dans toute boule de centre $(0, 0)$, f prend des valeurs positives et des valeurs négatives, comme le montre le dessin suivant donnant le signe de f dans différentes régions du plan.



Remarque :

On ne peut pas donner ici de meilleur critère permettant d'affirmer l'existence d'un extrema et même de déterminer sa nature ; il faudrait pour cela disposer de la formule de Taylor pour des fonctions de plusieurs variables.

Cependant, pour des fonctions d'une variable l'étude faite au chapitre II paragraphe 11. permet de conclure.

En effet si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f'(x_0) = 0$ et est suffisamment différentiable, on a vu que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) h^n + \varepsilon(h) h^n$$

où n est le plus petit entier tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ et où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Alors si n est impair, il y a inflexion et f n'a pas d'extremum en x_0 , tandis que si n est pair on peut conclure que

- f a un maximum si $f^{(n)}(x_0) < 0$
- f a un minimum si $f^{(n)}(x_0) > 0$

III & 2. 1- LA DUREE DU JOUR

Le fait qu'une fonction différentiable a une dérivée nulle en tout point où sa valeur est un maximum ou un minimum local peut s'interpréter en disant qu'au voisinage d'un maximum ou d'un minimum local une fonction varie peu. Du point de vue de l'expérimentateur, cela voudra dire qu'une valeur extrême (par exemple la déviation minimum produite par un prisme, cf. exemple 2. 3-, qui sert à mesurer l'indice) est facile à trouver.

En fait, la portée de ce phénomène est telle qu'il se vérifie y compris dans des situations où il est hors de question de représenter des résultats de mesures au moyen d'une fonction de variable réelle. C'est le cas de la durée du jour solaire ou de la hauteur de la marée en un lieu donné de la terre : on a alors une suite de valeurs fonctions de la date journalière, et rien d'autre. Et pourtant ...

Reportons nous à l'almanach des P.T.T de cette année (1982). On y voit que la durée du jour augmente de 25 mn par semaine en moyenne en Mars et en Avril), et diminue d'autant hélas en Août et Septembre. Pour Mai, Juin et Juillet, on a le tableau suivant, qui indique la variation de la durée du jour exprimée en minutes prise chaque dimanche par rapport au dimanche précédent.

2 mai + 22	9 mai + 21	16 mai + 20	23 mai + 17	30 mai + 15
6 juin + 10	13 juin + 9	20 juin + 1	27 juin - 2	4 juillet - 5
11 juillet - 9	18 juillet - 14	25 juillet - 14		

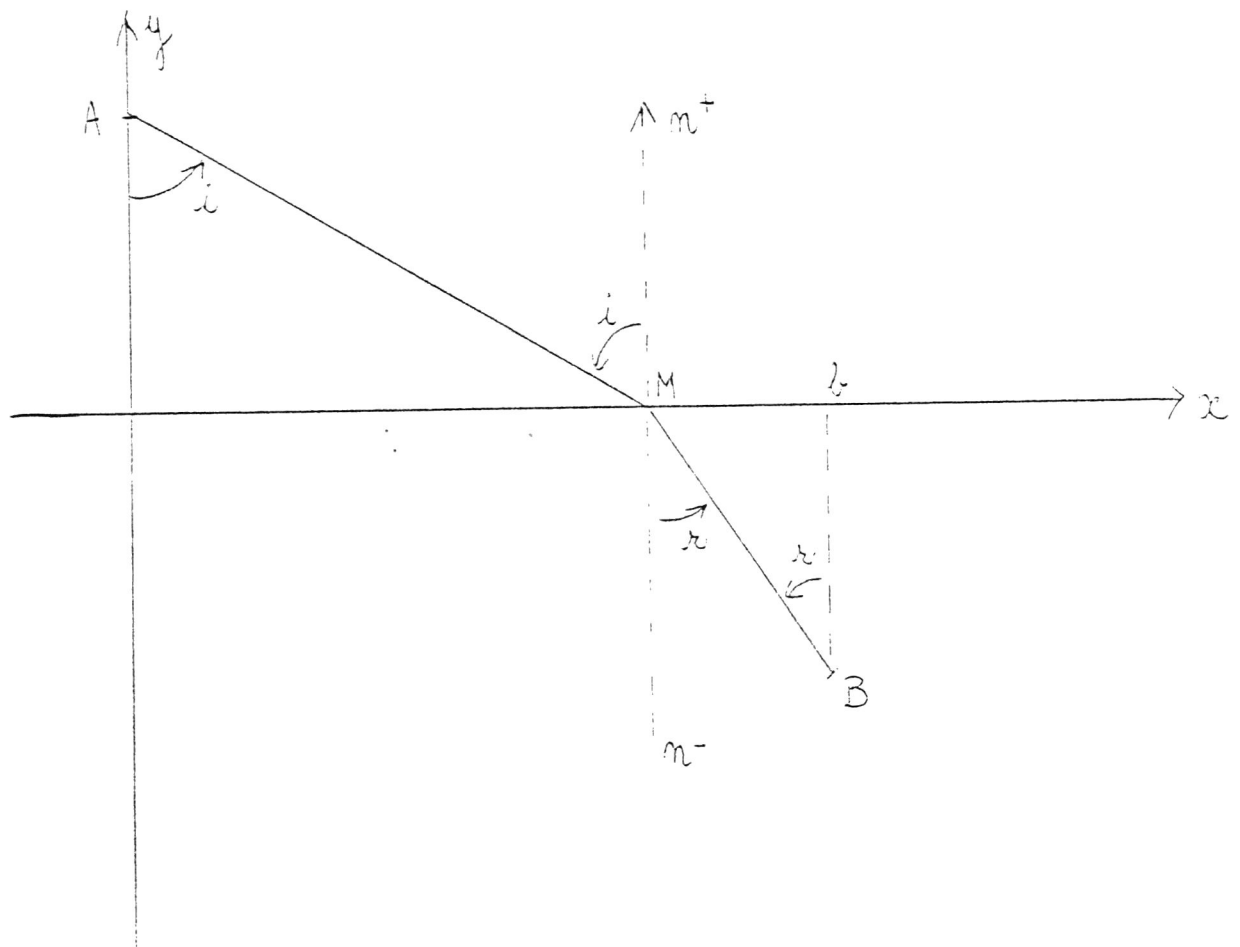
Ce phénomène de faible variation de la durée du jour au voisinage du solstice d'été est confirmé si on regarde maintenant les variations journalières (cf. l'Annuaire du Bureau des Longitudes), qui sont, pratiquement pendant tout le mois de Juin, de 1, 0 ou - 1 minutes . (Au lieu de 3 à 4 minutes en Mars et en Avril). Le lecteur curieux constatera aussi que pour ce que nous voulons illustrer, l'examen des variations journalières est moins convaincant que celui des variations hebdomadaires. Cela n'a rien d'étonnant : implicitement, nous avons modélisé un phénomène discontinu au moyen d'une fonction dérivable. Les résultats sont satisfaisants, mais il ne faut pas aller regarder de trop près !.

III & 2. 2- PRINCIPE DE FERMAT ET LOI DE DESCARTES

L'un des premiers principes posés en application du principe du minimum fut le principe de Fermat, selon lequel un rayon lumineux effectue entre deux points un chemin qui demande le moins de temps possible :

- si deux points A et B sont situés dans un milieu homogène et isotrope, ce chemin est le segment [AB] ;
- si les deux points sont dans des milieux où les vitesses de déplacement de la lumière sont respectivement $v_1 = c / n_1$ et $v_2 = c / n_2$, (n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des deux milieux, qui dépendent en général non seulement du milieu mais aussi de la longueur d'onde de la lumière), le trajet entre A et B est, par hypothèse, celui qui correspond à une durée minimale pour une longueur donnée L entre A et B.

On va donc considérer un trajet de la lumière entre les points A et B fixés, respectivement dans les milieux (1) et (2), et poser que le temps mis par la lumière pour aller de A à B est minimal.



Le rayon lumineux passe du milieu (1) au milieu (2) au point M. Considérons le plan P contenant MA et la normale à la surface de séparation des deux milieux ; l'axe Oy est parallèle à la normale, passant par A ; l'axe Ox est l'intersection du plan P et du plan tangent à la surface de séparation ; l'axe Oz est alors déterminé de façon à ce que le repère soit direct.

Les coordonnées de A sont (0, a, 0) et celles de B sont (b, b', b'').

Le temps mis par le rayon lumineux pour aller de A en B, i.e. pour parcourir AM + MB est alors :

$$t = AM / v_1 + MB / v_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + b'^2 + b''^2}}{v_2}$$

et on voit immédiatement que si ce temps est minimal on a b'' = 0, c'est-à-dire que le rayon lumineux reste dans le plan P.

Soit alors i = (n⁺, MA) et r = (n⁻, MB)

Les coordonnées de A sont donc dans le plan P (0, a) et celles de B : (b, b').

M ayant pour abscisse x, on a :

$$AM^2 = x^2 + a^2 \quad \text{et} \quad BM^2 = (b-x)^2 + b'^2$$

et le temps mis par le rayon lumineux pour parcourir le trajet (A, M, B) est donc :

$$t(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(b-x)^2 + b'^2}$$

de sorte que

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + b'^2}}$$

i, angle d'incidence du rayon lumineux, se retrouve en (OA, AM) et r, angle de refraction, est égal à (Bb, Bm), et donc :

$$x / AM = \sin i \quad \text{et} \quad (b-x) / MB = \sin r$$

Par conséquent, en écrivant que le temps doit être minimal, t'(x) = 0, donc on obtient :

$$\sin i / v_1 - \sin r / v_2 = 0 \quad ,$$

ou encore

$$\sin i / \sin r = v_1 / v_2 = n$$

Ce résultat est bien sûr corroboré par l'expérience.

Remarque :

Le calcul de la dérivée seconde prouve qu'il s'agit bien d'un minimum : on trouve en effet t''(x) > 0

$$t''(x) = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{[(b-x)^2 + b'^2]^{3/2}}$$

III & 2. 3 - DEVIATION DU PRISME

Notations :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, on désigne par $(\vec{u}, \vec{v})$ la détermination principale de la mesure de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est un élément de $(-\pi, \pi)$.

De même si D_1 et D_2 sont deux demi-droites de même origine dans un espace affine euclidien de dimension 2, on désignera par (D_1, D_2) la détermination principale de la mesure de l'angle des demi-droites D_1 et D_2 .

1- Modélisation

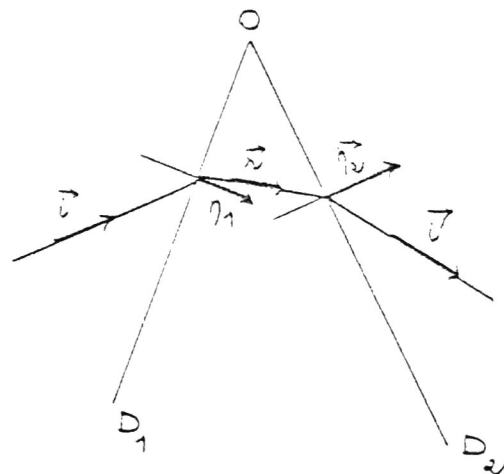
On représente le prisme par un couple de demi-droites D_1, D_2 d'origine O , dans un espace affine euclidien orienté de dimension 2.

Soit $\alpha = (D_1, D_2)$

On supposera que l'angle de D_1 et D_2 est aigu, autrement dit que $0 < \alpha \leq \pi/2$.

Dans un milieu d'indice donné, un rayon lumineux sera repéré par un vecteur que l'on pourra représenter par un bipoint.

Ici le prisme est un milieu d'indice $n > 1$, le rayon incident sur la face repérée par D_1 est représenté par $\vec{i}$, le rayon réfracté par $\vec{r}$. Si celui-ci est un rayon incident sur la face représentée par D_2 , ce rayon peut être représenté par $\vec{r}' = \vec{r}$, et le rayon réfracté est représenté par $\vec{i}'$.



On note $\vec{n}_j$ ($j = 1, 2$) un vecteur tel que $(D_j, \vec{n}_j) = \pi/2$

Posons

$$i = (\vec{n}_1, \vec{i}) \quad r = (\vec{n}_1, \vec{r})$$

$$i' = (\vec{n}_2, \vec{i}') \quad r' = (\vec{n}_2, \vec{r}')$$

Toutes ces déterminations appartiennent en fait à $(-\pi/2, \pi/2)$.

Pour que l'on ait une seconde réfraction, il faut et il suffit que l'on ait $r > r_0$ où $r_0 = \alpha - \pi/2$, ce qui correspond à $i > i_0$ où $\sin i_0 = -n \cos \alpha$.

Dans ce cas la déviation totale, à savoir l'angle de $\vec{i}$ et de $\vec{i}'$, est égale à angle $(\vec{i}, \vec{r}) + \text{angle}(\vec{r}', \vec{i}')$ et la détermination principale de sa mesure $D(i)$ est

égale à $(\vec{i}, \vec{r}) + (\vec{r}', \vec{i}')$, car chacune des déterminations $(\vec{i}, \vec{r})$ et $(\vec{r}', \vec{i}')$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$, leur somme appartient à $[-\pi, \pi]$.

On obtient

$$\begin{aligned} D(i) &= i - r + r' - i' \\ &= i - i' - \alpha \end{aligned}$$

$$\text{car } r - r' = \alpha$$

Remarque :

Le choix que nous avons fait pour les angles qui repèrent le trajet du rayon lumineux n'est nullement impératif mais se justifie par le principe du retour inverse de la lumière.

En effet le trajet inverse correspond aux vecteurs $-\vec{i}'$, $-\vec{r}'$, $-\vec{r}$, $-\vec{i}$ et cela revient à changer α en $-\alpha$, $\vec{n}_j$ en $-\vec{n}_j$ puis i en i' , r en r' , r' en r et i' en i : dans ces conditions $D(i)$ est changée en son opposée ce qui est logique.

2- Détermination du minimum de déviation

On voit expérimentalement que $i \mapsto D(i)$ a un minimum. Nous nous proposons de le déterminer mathématiquement en cherchant pour quelles valeurs de i la dérivée $D'(i)$ est nulle.

On considère r , r' et i' comme fonctions de i .

Des relations

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \sin i' &= n \sin r' \\ r &= \alpha + r' \end{aligned}$$

on déduit

$$\cos i = n \cos r \cdot \frac{dr}{di}(i)$$

$$\cos i' \cdot \frac{di'}{di}(i) = n \cos r' \cdot \frac{dr'}{di}(i)$$

$$\frac{dr}{di}(i) = \frac{dr'}{di}(i)$$

Comme $D'(i) = 1 - \frac{di'}{di}(i)$, on a $D'(i) = 0$ si et seulement si

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'} \quad (\text{en effet dans l'expérience } n \text{ est supérieur à } 1 \text{ et on ne peut}$$

avoir $\cos r = 0$).

Posons

$$g(i) = \frac{(\cos i)^2}{(\cos r)^2} = \frac{n^2 \cos^2 i}{n^2 - \sin^2 i}$$

Comme $g'(i)$ est du signe de $\cos i \cdot \sin i \cdot (1 - n^2)$ on obtient le tableau de variation suivant :

i	i_0	0	$\pi/2$
$g'(i)$		+	0 -
$g(i)$			1

Il en résulte qu'étant donné i , l'équation $g(i) = g(i')$ a au plus une solution i' distincte de i et qui est d'ailleurs de signe opposé à celui de i ; il est clair que $-i$ convient et est donc l'unique solution.

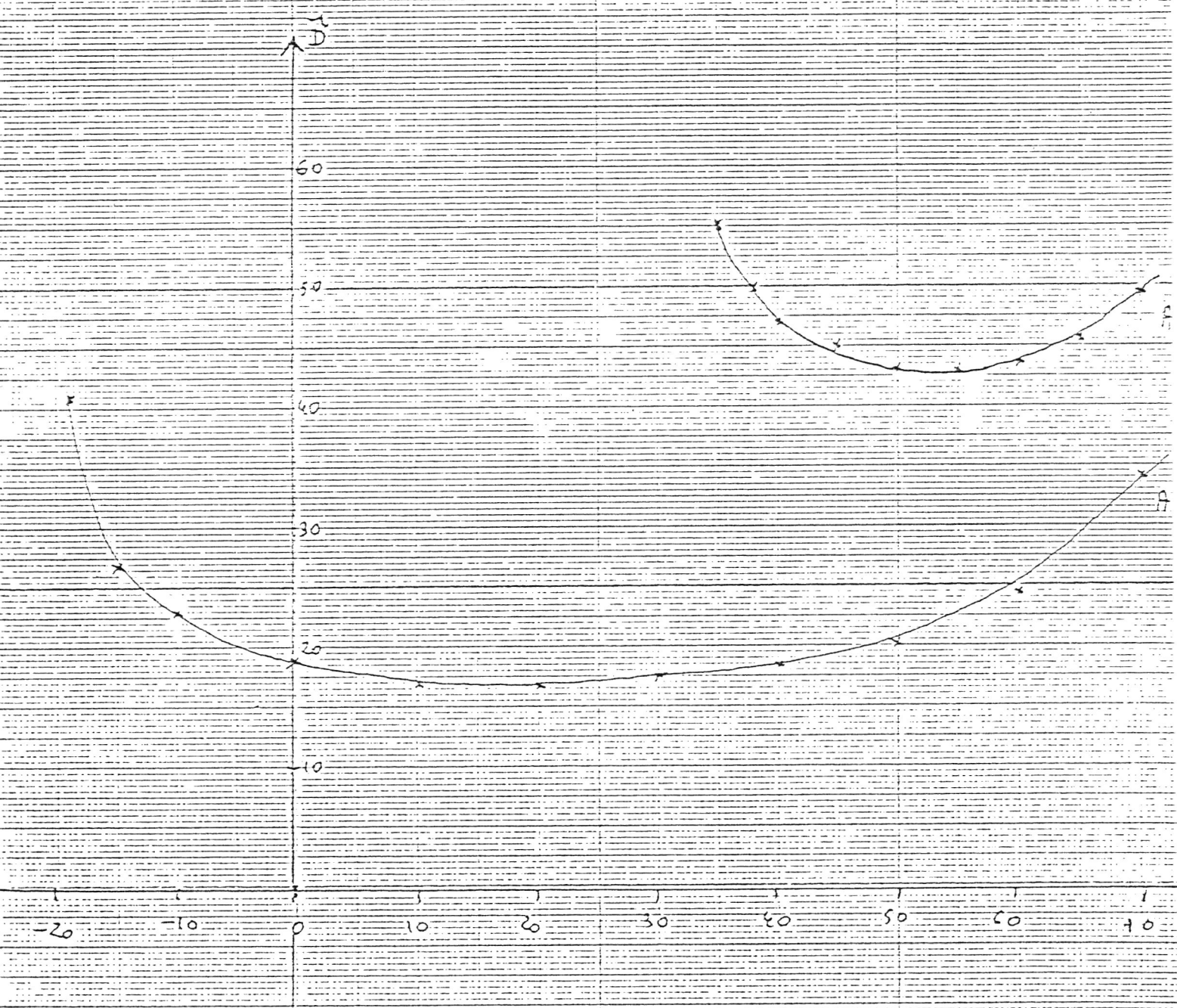
Comme $\frac{\cos i}{\cos r}$ et $\frac{\cos i'}{\cos r'}$ sont positifs, ils sont égaux si et seulement si $g(i) = g(i')$ ce qui conduit soit à $i = i'$ soit à $i = -i'$.

La première solution est impossible car elle conduit à $r = r'$ et donc à $\alpha = 0$. La seconde solution, qui est celle du minimum de déviation conduit à $r = -r' = \alpha/2$ ce qui correspond à un trajet lumineux symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle des demi-droites vectorielles D_1 et D_2 .

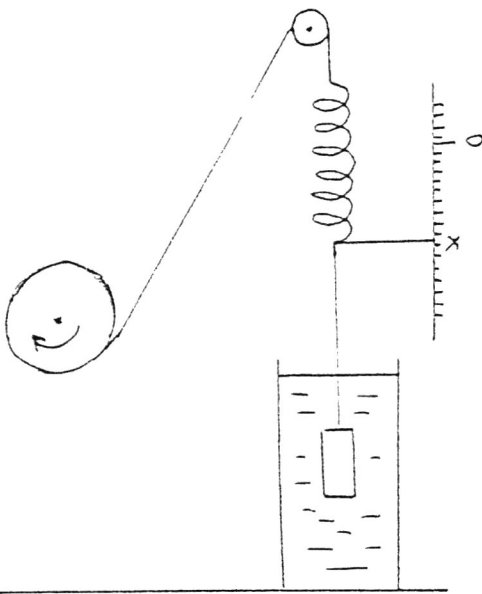
Numérisé par Tablelet de l'Université de l'Université Paris Cité en 2026

$A=30^\circ$		λ	-19	-15	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80
		δ	41	27	23	19	17	17	17,5	18,5	20	24	29	36

$A=60^\circ$		λ	+35	38	40	45	50	55	60	65	70	75	80
		δ	55	50	47	45	43	43	44	46	49	52	54



III & 2. 4- VIBRATIONS SINUSOIDALES FORCEES D'UN OSCILLATEUR MECANIQUE AMORTI.



La masse M est soumise aux forces suivantes :
la force imposée de l'extérieur, soit $f(t) = F \cdot \cos(\omega t)$; la force de rappel du ressort, égale à $-Kx(t)$, et la force de freinage égale à $-\lambda v(t)$.
D'après le théorème de Newton, la fonction x vérifie donc l'équation différentielle

$$(1) Mx''(t) = -\lambda x'(t) - Kx(t) + F \cos(\omega t).$$

L'observation fait soupçonner que le mouvement est périodique et de même période que la force imposée. Il est donc tentant de chercher une solution périodique sous la forme la plus simple, à savoir $X \cos(\omega t - \varphi)$ (où $X > 0$).

Pour les calculs de dérivées, les exponentielles complexes sont d'un emploi bien plus commode que les fonctions trigonométriques.

Aussi, au lieu de (1), on va étudier l'équation différentielle (2)
 $Mz''(t) = -\lambda z'(t) - Kz(t) + Fe^{j\omega t}$, où la fonction inconnue z est à valeurs complexes ; on remarque que la partie réelle de toute solution de (2) est une solution de (1).

Cherchons une solution de la forme $z(t) = Xe^{j(\omega t - \varphi)}$ dont la partie réelle sera de la forme $X \cos(\omega t - \varphi)$ souhaitée.

Il vient, en reportant dans l'équation (2)

$$-M\omega^2 X e^{j(\omega t - \varphi)} = -j\omega X e^{j(\omega t - \varphi)} - KX e^{j(\omega t - \varphi)} + F e^{j\omega t}$$

soit après simplification par $e^{j\omega t}$

$$F = X e^{-j\omega t} (K - M\omega^2 + j\lambda\omega)$$

F et X étant des réels positifs, on a donc

$$\tan \varphi = \frac{\lambda \omega}{K - M\omega^2}$$

et

$$X = \frac{F}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2}}$$

L'amplitude X est maximale quand le dénominateur est minimal, donc quand la fonction $h(\omega) = (K - M\omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2$ est minimale (puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante).

On a

$$\begin{aligned} h'(\omega) &= -2M\omega(K - M\omega^2) + 2\lambda^2\omega \\ &= 2\omega(+2M^2\omega^2 - 2KM + \lambda^2) \end{aligned}$$

La fréquence ω , exprimée en s^{-1} , est un nombre positif. Le cas limite $\omega = 0$ correspond à une force imposée constante, et la solution trouvée dans ce cas (mais alors on peut directement chercher une solution constante de (1)) est une fonction constante, donc une position d'équilibre : on a $x(t) = \frac{F}{K}$.

Deux cas sont à distinguer suivant l'importance du frottement

a) $\lambda < \sqrt{2KM}$

ω	0	$\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{\lambda^2}{2M^2}}$		
$h'(\omega)$	0	-	0	+
X	$\frac{F}{K}$	$X_{\max}$		

L'amplitude est maximale pour la fréquence $\omega_\lambda = \sqrt{\frac{K}{M} - \frac{\lambda^2}{2M^2}}$

On dit alors qu'il y a résonance. Notons que ce maximum tend vers l'infini quand λ tend vers zéro. Les conditions physiques limitent l'amplitude maximale observable : si les frottements sont trop faibles ω_λ est très proche de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et le système casse.

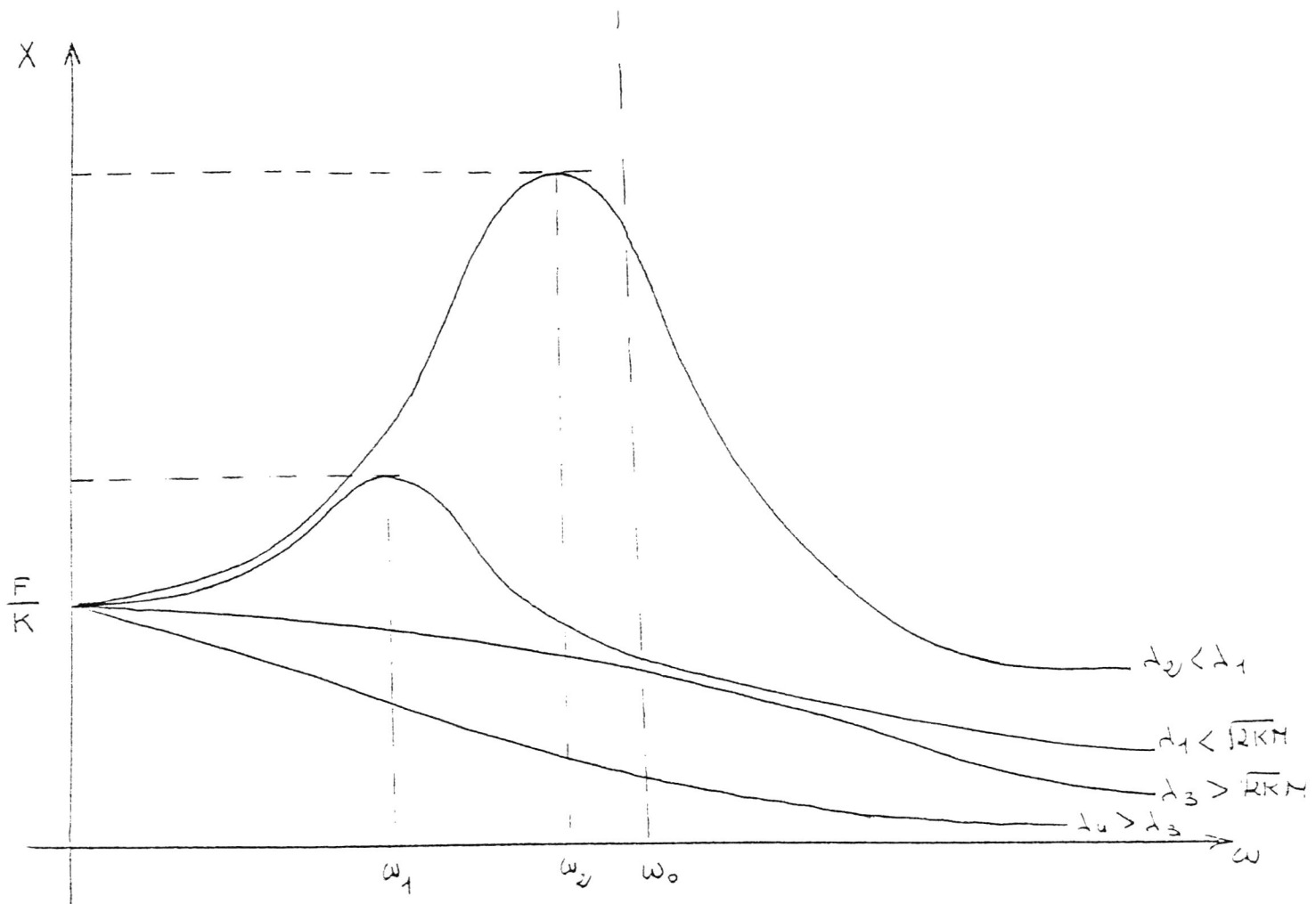
b) $\lambda > \sqrt{2KM}$

ω	0	∞
$h'(\omega)$		+
X	$\frac{F}{K}$	0

Si les frottements sont trop forts, le phénomène de résonance ne se produit plus ; l'amplitude décroît avec la fréquence.

Remarque :

En fait, on peut montrer que l'équation (1) a une infinité de solutions. Ces solutions dépendent de deux paramètres. Mais la différence entre l'une quelconque d'entre elles et la solution périodique de période $2\pi/\omega$ que nous venons de trouver est une fonction qui tend vers zéro très vite (c'est-à-dire exponentiellement) avec le temps. Dans ces conditions, pour l'observateur, tout se passe comme si on avait toujours affaire à cette solution périodique.



III & 2. 5- ENERGIE DE LIAISON DES IONS Cl^- ET DES IONS Na^+ DANS LE CRISTAL CHLORURE DE SODIUM

L'énergie de liaison est égale à la différence entre l'énergie du système dans l'état initial (atomes de sodium gazeux et atomes de chlore gazeux) et l'énergie du système dans l'état final (cristal de chlorure de sodium).

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée est du type

$$E = K \cdot \frac{q}{r^2}$$

où q est la mesure de la charge en Coulombs, r la distance à la charge en mètres et $K = 9 \cdot 10^9$ SI.

Une charge électrostatique q' placée au voisinage de la charge q a une énergie potentielle d'interaction opposée au travail qu'il faut fournir pour éloigner la charge q' à l'infini de la charge q .

Cette énergie est

$$U_1 = - K \cdot \frac{q \cdot q'}{r} \quad (\text{cf. chap V, § 1})$$

r étant la distance séparant les deux charges.

Considérons maintenant une mole d'ions sodium Na^+ et une mole d'ions Cl^- . Entre deux ions il y a une énergie potentielle d'interaction

$$U_2 = - K \cdot \frac{e^2}{r} \quad \text{e désignant la charge de l'électron.}$$

Pour une mole de chlorure de sodium cette énergie serait

$$U_3 = - K \cdot \mathcal{N} \frac{e^2}{r}$$

étant le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

En fait les ions sodium et chlorure ne sont pas face à face : il faut faire intervenir un terme correctif qui tient compte de la géométrie du système.

Ce terme est la constante de Madelung, pour le chlorure de sodium elle vaut 1,748.

On a donc en définitive une énergie potentielle

$$U_4 = - A \frac{e^2}{r}$$

avec $A = K \cdot \mathcal{N} \cdot 1,748$.

Nous devons aussi prendre en compte les forces de répulsion entre ions de même signe. Le cristal de chlorure de sodium est incompressible (en fait très peu compressible) ; l'énergie qui correspond aux forces de répulsion est de la forme

$$U_5 = + \frac{b}{r^n}$$

b et n étant des constantes, à déterminer.

n est déterminé expérimentalement et pour le chlorure de sodium vaut 9,1.

L'énergie de liaison U dans le solide est la somme de ces deux énergies $U_4 + U_5$; à l'équilibre, au fond du puits de potentiel, l'énergie est minimale, donc la fonction U a pour $r = r_0$ sa dérivée nulle.

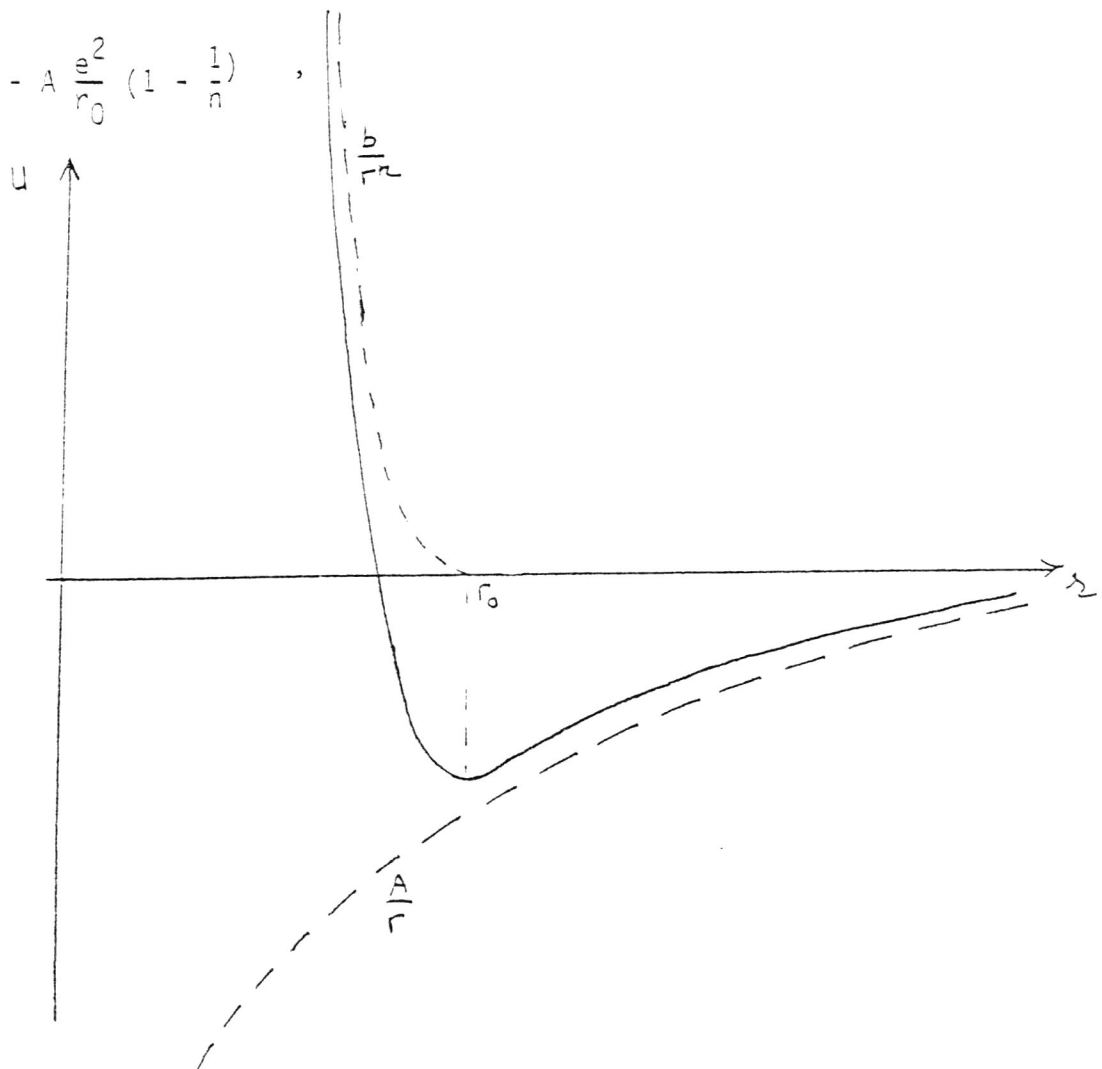
$$\frac{dU}{dr} = A \cdot \frac{e^2}{r^2} - n \frac{b}{r^{n+1}} , \quad \frac{dU}{dr}(r_0) = 0 ,$$

ce qui permet de calculer b ,

$$b = \frac{r_0^n - 1}{n} \cdot e^2 \cdot A ,$$

et la valeur minimum

$$U(r_0) = - A \frac{e^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n} \right) ,$$



CHAPITRE IV : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTRODUCTION

Dans les exemples des chapitres précédents, nous nous sommes appuyés sur un principe auquel nous avons fait allusion, qui est tellement "évident" qu'il est très rarement explicité : les phénomènes physiques peuvent être décrits en utilisant des fonctions continues et dérivables. Cela semble aller de soi quand on manipule courbes et graphiques, mais les choses sont déjà moins simples quand on pense que cela sous-entend la notion de nombre réel, abhorré par les physiciens qui ont affaire aux décimaux exclusivement !

Le passage de la description à la prévision, dont le premier et le plus fameux exemple est celui de la découverte de la loi de l'attraction universelle par Newton, est la mise en pratique d'un autre principe, moins "évident", donc un peu plus souvent (mais pas assez) explicité : les lois physiques s'expriment mathématiquement au moyen d'équations différentielles.

Cet énoncé doit se comprendre dans le sens le plus général : déjà la mécanique des solides fait intervenir des systèmes d'équations différentielles, et pratiquement toutes les théories physiques font intervenir des équations où figurent les dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. La relativité et la mécanique quantique ont bouleversé des notions communément admises, mais, de ce point de vue, elles n'ont fait que remplacer des équations par d'autres équations.

& 1. Exemples

& 1. 1- DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

L'exemple étudié est celui de la décharge d'un condensateur, dans une résistance puis dans une bobine. On établit donc un circuit permettant la charge puis la décharge du condensateur ; le circuit est orienté comme il est indiqué sur le schéma. Ces deux problèmes classiques conduisent à des équations différentielles facilement intégrables.

I- Décharge d'un condensateur dans une résistance

Le circuit est orienté de B vers A ; en position 1, le condensateur se charge ; en position 2, le condensateur se décharge.

Soit q_B la charge de l'armature positive du condensateur :

$$V_B - V_A = \frac{q_B}{C} \quad \text{donc} \quad V_A - V_B = \frac{-q_B}{C}$$

d'autre part, $V_A - V_B = Ri = R \frac{dq_B}{dt}$, d'où l'équation différentielle :

(1) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$ et si q_0 est la charge de l'armature positive du condensateur à l'instant $t = 0$ (instant où l'on branche 2), l'intégration donne

$$q_B(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

II- Décharge d'un condensateur dans une bobine

1) On suppose la résistance de la bobine négligeable, les oscillations ne sont pas amorties. (Voir schéma n° 2)

q_B étant toujours la charge de l'armature positive, alors :

$$V_A - V_B = \frac{-q_B}{C} \quad \text{d'autre part} \quad V_A - V_B = Ri - e$$

or R est négligeable, et : $e = -L \frac{di}{dt}$, . comme $i = \frac{dq_B}{dt}$

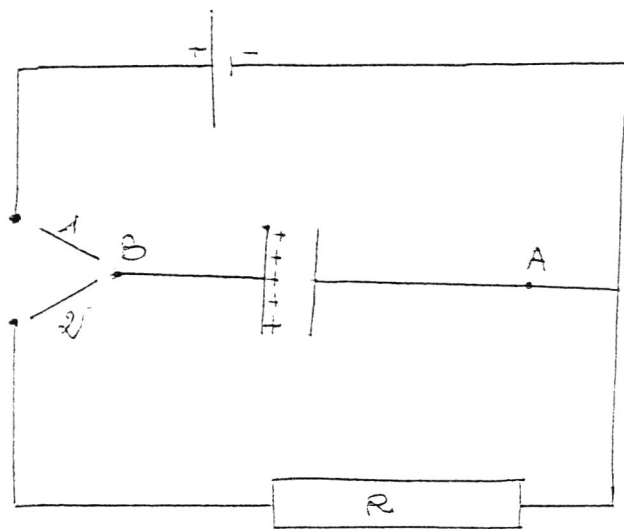
on obtient l'équation différentielle : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

et la solution est de la forme : $q(t) = q_m \cos(\frac{t}{LC} + \varphi_0)$

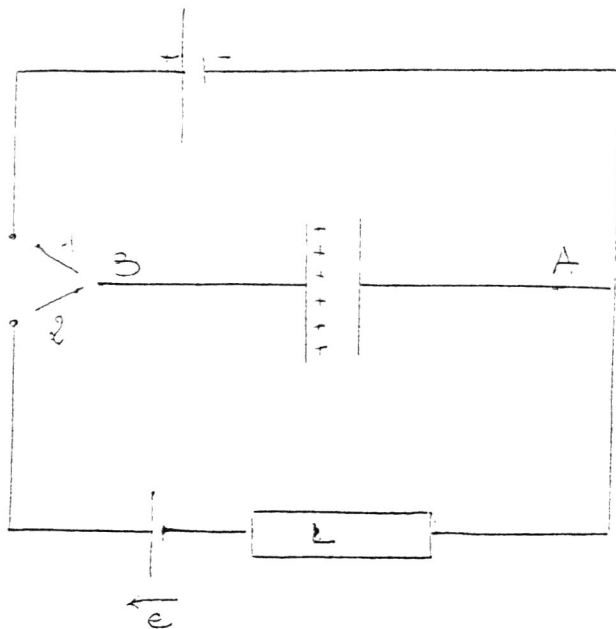
où q_m et φ_0 dépendent des conditions initiales. Si l'origine des dates est un instant où la charge est maximale, l'intensité initiale est nulle donc $\varphi_0 = 0$.

2) Si l'on ne suppose pas la résistance négligeable, les oscillations sont amorties, l'équation s'écrit : $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, équation différentielle que les élèves de Terminales ne savent pas résoudre ; mais on peut observer à l'oscilloscope la forme des solutions, suivant la valeur de R , Cf. figure 3.

CIRCUIT N° 1 : décharge dans une résistance



CIRCUIT N° 2 : décharge dans une bobine



(chap IV & 1. 1- annexe)

Quand l'interrupteur est en position (2), nous pouvons visualiser la décharge du condensateur à l'aide d'un oscillographe électronique branché aux bornes A et B du condensateur.

En effet, l'oscillographe mesure, à chaque instant, la tension existant entre les points A et B. Cette tension est proportionnelle à la charge du condensateur.

Ajoutons au montage précédent un rhéostat (dans le circuit de décharge du condensateur). Soit R la résistance totale de a circuit.

a pour $R = 10 \Omega$, l'oscillogramme est représenté sur la figure (1). Les oscillations sont pseudo-périodiques.

b pour $R = 10^4 \Omega$, l'oscillogramme est représenté sur la figure (2). Les oscillations sont apériodiques.

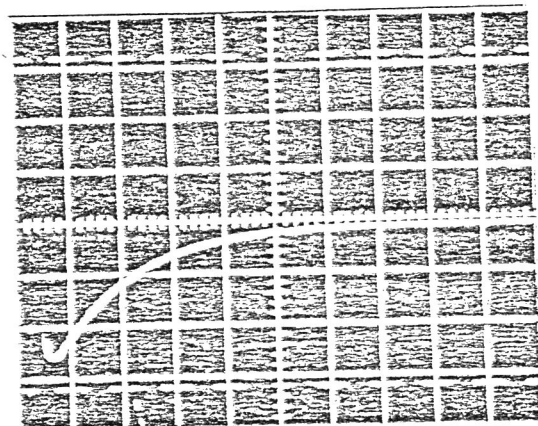
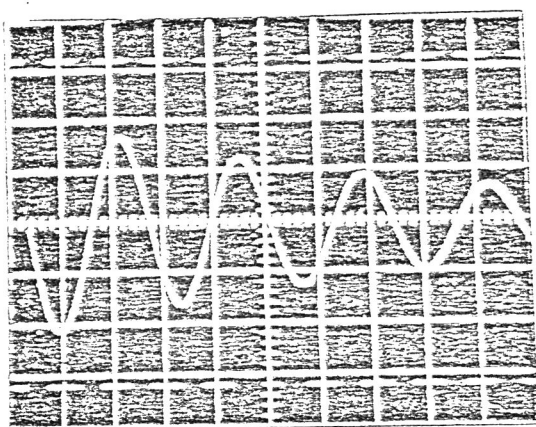


Fig. 2.

Remarque :

Nous constatons qu'un circuit (L, C) idéal n'est pratiquement pas réalisable ou, tout au moins, avec le matériel dont nous disposons. La décharge est toujours amortie. Cela vient du fait que la résistance de la bobine utilisée n'est jamais négligeable (voir figure 3).

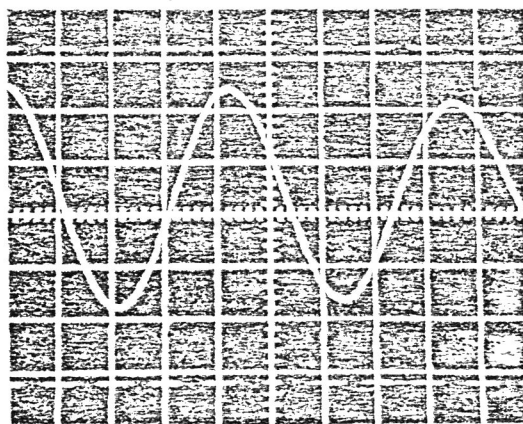


Fig. 3.

& 1. 2- LA RADIOACTIVITE

La radioactivité est l'émission par un noyau qui se désintègre spontanément d'une particule α ou β , émission souvent accompagnée d'un rayonnement correspondant à la désexcitation du noyau atomique produit. Le phénomène de radioactivité est caractéristique du noyau, il est indépendant de la nature des combinaisons chimiques, de la température, de la pression.

Sur le plan individuel, un noyau ne vieillit pas, il se désintègre sans aucun signe précurseur : rien ne permet de prévoir qu'un noyau disparaîtra plus tôt ou plus tard que son voisin. Sur le plan collectif, l'évolution d'une population nombreuse de noyaux radioactifs suit une loi précise, bien que l'on ne puisse connaître le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ à la date t . Cependant on peut expérimentalement obtenir un ordre de grandeur du nombre de désintégrations entre les instants t et $t + \Delta t$, autrement dit de $N(t) - N(t + \Delta t)$.

On appelle activité moyenne entre ces instants le quotient $\frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{\Delta t}$.

La connaissance de cette activité moyenne ne permet pas de déterminer $N(t)$, mais elle est proportionnelle à $N(t)$: à chaque instant t le nombre de désintégrations pendant la durée Δt est proportionnelle à la masse du corps radioactif et donc au nombre $N(t)$ d'atomes susceptibles de se désintégrer.

On a donc pour tout t : $N(t) - N(t + \Delta t) = K \cdot N(t) \cdot \Delta t$.

Nous verrons plus loin que K dépend de Δt , et il est donc préférable d'écrire $K(\Delta t)$ au lieu de K .

Une unité de temps étant choisie, on appelle activité à l'instant t le nombre $A(t) = N(t) - N(t + 1)$. Pour la plupart des éléments radioactifs on peut prendre comme unité de temps la seconde.

Alors le graphe de $t \rightarrow A(t)$ a toujours une allure exponentielle, ce que l'on voit mieux en construisant le graphe de $t \rightarrow \log(t)$, lequel est pratiquement une droite.

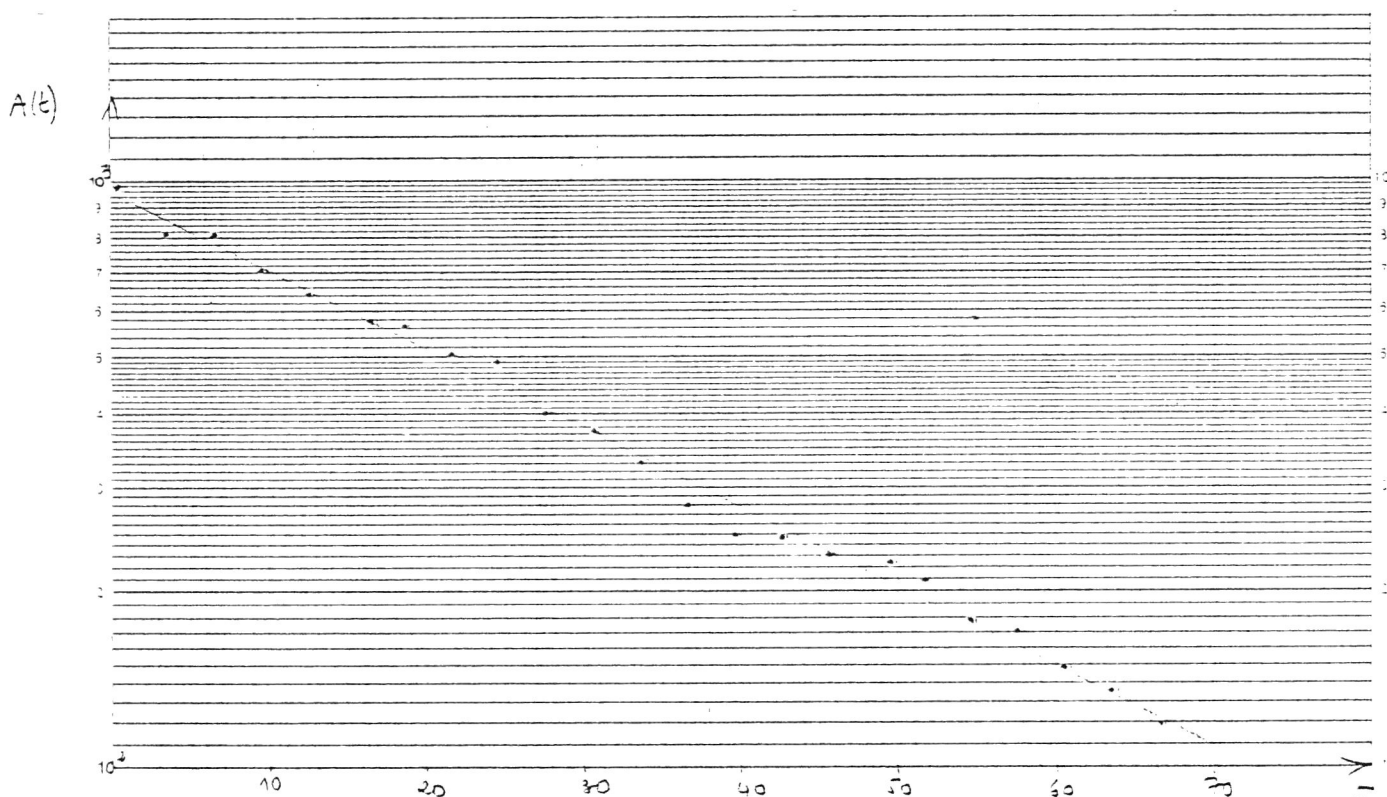
Exemple :

On mesure pendant 10 s toutes les 20 s, sur une durée de 11 min, le nombre de particules émises par la source de Vanadium $^{52}_{23}\text{V}$.

L'unité de temps étant de 10 s, on obtient le tableau

t	0,5	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5	21,5
A(t)	983	808	802	704	644	580	575	505
t	24,5	27,5	30,5	33,5	36,5	39,5	42,5	45,5
A(t)	491	401	375	330	281	259	247	232
t	48,5	51,5	54,5	57,5	60,5	63,5	66,5	
A(t)	225	208	178	171	149	136	120	

On obtient, sur papier millimétré semi-logarithmique :



On a donc $A(t) = A_0 e^{-Kt}$, où K est positif.

Il en résulte immédiatement que $N(t) = N_0 e^{-Kt}$, N_0 étant le nombre de noyaux radioactifs à l'instant $t = 0$.

Si l'on prend pour origine, dans l'espace affine des dates, l'instant où débute le processus de désintégration considéré, A_0 s'appelle l'activité initiale.

Comme A est une fonction exponentielle, il existe un nombre T tel que, pour tout t on ait $A(t + T) = 1/2 \cdot A(t)$. On peut vérifier expérimentalement que T ne dépend pas du nombre initial de noyaux radioactifs ; T est la période de l'élément radioactif considéré.

Exemples :

En utilisant le graphique précédent on voit que la période du Vanadium $^{52}_{23}V$ est d'environ 230 s.

Pour le Polonium $^{210}_{84}Po$, l'activité initiale d'un mg est $16 \cdot 10^7$ et la période est de 138 jours. La période du Bismuth $^{210}_{83}Bi$ est de 5 jours, celle du Radium de 1600 ans et celle du Thorium de $14 \cdot 10^6$ ans.

Remarque :

De $A(T) = A_0/2 = A_0 e^{-KT}$, on déduit que $K = \frac{\text{Log } 2}{T} = \frac{0,693}{T}$

Nous allons voir maintenant ce que permet de dire l'étude purement mathématique des fonctions N telles que, quels que soient t et Δt on ait :

$$N(t) - N(t + \Delta t) = K(\Delta t) \cdot N(t) \cdot \Delta t \quad (*).$$

Ceci n'est bien sûr pas indispensable puisque le fait (expérimental) que l'activité soit une fonction exponentielle implique la même propriété pour N , mais il est intéressant de remarquer que, mathématiquement N n'avait pas le choix !

Nous supposons que K est une fonction continue à l'origine, ce qui est raisonnable (cela revient à supposer que N est différentiable).

De (*) on déduit alors l'équation différentielle suivante :

$$-N'(t) = K_0 N(t) \quad \text{où} \quad K_0 = K(0)$$

laquelle a pour solutions $N(t) = N_0 e^{-K_0 t}$.

On trouve donc bien que N est une fonction exponentielle. De plus $K_0 = K = \text{Log } 2/T$. Le nombre K_0 est la Constante radioactive du corps considéré, elle se note habituellement λ .

Remarque 1 :

Montrons que K dépend bien de Δt . Si ce n'était pas le cas on aurait

$$N(t) - N(t + 2 \Delta t) = 2K \cdot N(t) \cdot \Delta t, \text{ mais on peut écrire}$$

$$N(t) - N(t + 2 \Delta t) = N(t) - N(t + \Delta t) + N(t + \Delta t) - N(t + 2 \Delta t)$$

or d'après (*) on a

$$N(t) - N(t + \Delta t) = K \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

$$\text{et} \quad N(t + \Delta t) - N(t + 2 \Delta t) = K \cdot N(t + \Delta t) \cdot \Delta t,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} N(t) - N(t + 2 \Delta t) &= K \cdot \Delta t \cdot (N(t) + N(t + \Delta t)) \\ &= K \cdot \Delta t \cdot (2N(t) - K \cdot N(t) \cdot \Delta t); \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$2K \cdot N(t) \cdot \Delta t = 2K \cdot N(t) \cdot \Delta t - K^2 \cdot N(t) \cdot (\Delta t)^2$$

ce qui est impossible.

Remarque 2 :

Quelle que soit la démarche utilisée, nous trouvons que l'on a une représentation satisfaisante du phénomène qu'est la désintégration nucléaire en considérant que A et N sont des fonctions exponentielles, bien que celles-ci ne prennent pas souvent de valeurs entières. Mais ceci n'est pas inquiétant car il s'agit ici d'étudier l'évolution globale d'un très grand nombre de noyaux radioactifs et on n'est pas à un noyau près.

& 2- COMMENTAIRES

On voit déjà avec ces exemples qu'une équation du même type, ici de la forme $y' + ky = 0$, peut régir des phénomènes qui ne présentent à part cela rien de commun. L'exemple le plus connu de cette situation est celui de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$, qui rend compte aussi bien de la décharge d'un condensateur dans un circuit comportant self et résistance que de certains mouvements oscillatoires amortis en mécanique. Plus précisément, la fonction du temps y peut être soit la charge du condensateur, soit la position d'un point matériel ; a représentera dans le premier cas un coefficient d'induction, dans le second une masse, b une résistance ou un coefficient de frottement, c l'inverse de la capacité ou un coefficient d'élasticité (petites oscillations amorties d'un ressort) ou d'attraction (petites oscillations d'un pendule simple amorti).

Bien entendu, les équations différentielles auxquelles on aboutit ne sont pas toujours aussi simples. Citons par exemple l'équation $v' = g - kv^2$ qui modélise dans certains cas la chute verticale d'un corps pesant quand on prend en compte la résistance de l'air (v désignant la vitesse) ou $ly'' + g \sin y = 0$, qui rend compte des oscillations d'un pendule simple pesant de longueur l dans le cas général où on ne suppose pas l'amplitude des oscillations petite.

Ces équations présentent un trait commun fondamental. Une grandeur physique (la masse d'un corps radioactif, la vitesse d'un corps en chute libre dans l'air, l'élongation d'un ressort, l'amplitude d'un pendule) est exprimée par une fonction du temps qui joue le rôle de la fonction inconnue. Des considérations physiques diverses permettent d'obtenir une relation entre cette fonction et ses dérivées (ici première et seconde). Le fait que la variable, ici la date, ne figure pas dans ces équations, exprime le fait que les lois physiques considérées ne dépendent pas de la date.

Les mathématiciens appellent ces équations "équations autonomes", et démontrent qu'on peut les caractériser par la propriété suivante : si $t \rightarrow f(t)$ est une solution, il en est de même de $t \rightarrow f(t + t_0)$, quel que soit t_0 fixé. Autrement dit, si on étudie un phénomène physique peu importe l'origine choisie pour repérer les dates.

Comme on "sait résoudre" les équations différentielles que nous venons de voir (le cas de $v' = g - Kv^2$ est un peu plus compliqué, mais on peut exprimer les solutions à l'aide des fonctions hyperboliques), elles permettent de donner une bonne description du phénomène étudié. Mais ce n'est pas toujours le cas. Une équation telle que $y'' = -k \sin y$ qui rend compte des oscillations d'un pendule simple, est nettement plus compliquée : ses solutions ne peuvent s'exprimer algébriquement au moyen des fonctions "élémentaires" (fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques). Mais nous

allons voir que cela n'est pas fondamental du point de vue qui nous intéresse.

Si, pour calculer les valeurs d'une solution pour une suite d'instantanés donnée, même avec une précision modeste, nous ne disposons que d'une calculatrice n'effectuant que les quatre opérations, nous serions tout aussi désarmés devant les trois premières équations différentielles que devant $y'' = -k \sin y$. Si les mathématiciens ont introduit les symboles e^x , $\sin x$, etc, c'est précisément parce qu'ils se sont rendu compte de l'impossibilité de les exprimer algébriquement. Il existe des procédés de calcul approché de ces fonctions, qui sont utilisés par exemple dans les calculettes ; nous avons vu au début de ce document quelques exemples dans des cas particuliers.

Plutôt que cette double démarche : calculer les solutions d'une équation différentielle au moyen de fonctions données, puis calculer des valeurs approchées de ces fonctions, nous allons voir comment des considérations analogues à celles du chapitre I permettent de calculer directement des valeurs approchées des solutions de n'importe quelle équation différentielle. Du point de vue du calcul numérique qui va nous intéresser maintenant, le statut de l'équation $y'' = -k \sin y$ n'est pas fondamentalement différent de celui des équations "élémentaires" $y = y'$ ou $y + y'' = 0$.

En fait, on voit mieux ce qui se passe dans le cas général (des équations du premier ordre pour le moment) où l'équation est du type $y' = f(x, y)$.

Une solution de cette équation est une fonction (qu'il sera très commode de noter encore y) telle que $y'(x) = f(x, y(x))$. Si on veut que la courbe représentative de cette fonction passe par un point donné (a, b) , la condition $y(a) = b$ ainsi imposée est une condition initiale. Cette terminologie a le mérite de ne pas faire mystère de l'aspect physique que peut présenter un tel problème. Notons aussi que dans le cas très particulier où la fonction f ne dépend que de x , on est ramené à une équation du type $y' = g(x)$, c'est à dire à trouver les primitives d'une fonction donnée g ; il existe alors une solution et une seule telle que $y(a) = b$, donnée par

$$y(x) = b + \int_a^x g(t)dt$$

Nous serons volontairement très évasifs sur les problèmes qui se posent dans le cas général. Disons simplement qu'il existe des conditions suffisantes simples portant sur f qui assurent de l'existence et de l'unicité d'une solution satisfaisant à des conditions initiales données, et que toutes les équations considérées ici satisfont à ces conditions.

Ce garde-fou étant posé, nous allons voir comment l'application répétée de l'approximation d'une fonction par sa différentielle permet d'obtenir des valeurs approchées de la solution qui satisfait à la condition initiale $y(a) = b$.

& 3- RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

On considère une équation du 1er ordre de la forme $y' = f(x, y)$. Cherchons une bonne approximation de la solution qui satisfait à $y(a) = b$.

Prenons un intervalle $[a, a + c]$, et divisons le en N intervalles égaux $[a_{k-1}, a_k]$, avec $a_k = a + (kc)/N$ ($1 \leq k \leq N$). On posera $c/N = h$.

La dérivée de y en a étant égale à $f(a, y(a)) = f(a, b)$, en approximant y par sa différentielle en a on obtient pour $y(a_1) = y(a + c/N)$ la valeur approchée

$$b_1 = b + f(a, b) \cdot h$$

La dérivée de y en a_1 , soit $f(a_1, y(a_1))$, sera alors voisine de $f(a_1, b_1)$ et en appliquant le même procédé en a_1 on obtient pour $y(a_2)$ la valeur approchée

$$b_2 = b_1 + f(a_1, b_1)h$$

et ainsi de suite. Une valeur approchée b_{k-1} de $y(a_{k-1})$ étant ainsi obtenue, on prendra pour valeur approchée de $y(a_k)$

$$b_k = b_{k-1} + f(a_{k-1}, b_{k-1})h$$

On utilise donc l'approximation

$$y(a_k) \cong y(a_{k-1}) + y'(a_{k-1})h$$

en faisant deux approximations supplémentaires :

i) on utilise l'approximation de $y(a_{k-1})$ par b_{k-1} faite au stade précédent.

ii) on prend $f(a_{k-1}, b_{k-1})$ pour valeur approchée de

$$y'(a_{k-1}) = f(a_{k-1}, y(a_{k-1})).$$

Sous certaines hypothèses, on peut obtenir en procédant par récurrence une majoration de l'erreur faite à chaque stade, et démontrer que

$$\max_{1 \leq k \leq N} |b_k - y(a_k)|$$

tend vers zéro quand N tend vers l'infini.

Remarque :

Ce procédé donne en fait une méthode de démonstration de l'existence de la solution y , pressentie par Euler et mise au point par Cauchy. Dans le cas particulier des équations du type $y' = g(x)$, on retombe sur une approximation classique de l'intégrale de g (méthode des rectangles).

Exemple :

La même équation $y' = -ky$ rend compte de la désintégration radioactive et de la décharge d'un condensateur.

La fonction z définie par $z(x) = y(x/k)$ est alors telle que

$$z'(x) = (1/k)y'(x/k) = -y(x/k) = -z(x)$$

Elle satisfait donc à l'équation $z' = -z$. Dans les situations physiques, passer de y à z revient à faire un changement d'unité de durée.

L'approximation ci-dessus, appliquée sur l'intervalle $[0, x]$ à la solution déterminée par la condition initiale $z(0) = 1$, donne

$$z(kx/N) = (1 - x/N)^k$$

et en particulier

$$z(x) = (1 - x/N)^N$$

Sachant que cette solution n'est autre que la fonction $x \mapsto e^{-x}$, on retrouve ainsi une propriété bien connue de la fonction exponentielle.

Nous allons voir maintenant comment cette méthode d'approximation s'applique aux équations différentielles du second ordre, et développer un exemple numérique.

& 4- UN EXEMPLE DE RESOLUTION APPROCHEE DE L'EQUATION $y'' + \omega^2 y = 0$

Remarquons d'abord que si z est la fonction $t \rightarrow z(t) = y(\omega^{-1}t)$ on a $z''(t) = \omega^{-2}y''(\omega^{-1}t)$. Si y est solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, alors z est solution de $z'' + z = 0$. Passer de y à z revient à faire un changement d'unité de temps. Dorénavant, nous supposons donc que $\omega = 1$.

Apparemment, il n'est plus possible d'appliquer la méthode précédente. Mais si on considère simultanément la position y et la vitesse $v = y'$, on voit que l'équation $y'' + y = 0$ est équivalente au système de deux équations du premier ordre

$$y' = v \quad \text{et} \quad v' = -y$$

c'est-à-dire à l'équation vectorielle du premier ordre $\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$. Tout ce qui précède s'applique alors sans aucune modification à l'approximation de la fonction vectorielle inconnue $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$, une fois donnée sa valeur initiale, qui correspond ici à la donnée de la position et la vitesse initiales du mobile.

Cela correspond parfaitement au principe suivant lequel le mouvement d'un point matériel est parfaitement déterminé par sa position et sa vitesse initiales.

Mais ici, compte tenu de ce que l'équation différentielle dont nous sommes partis est de la forme $y'' = f(y)$, nous pouvons utiliser l'approximation du second ordre vue au chapitre II & 1. 2. au lieu de l'approximation d'une fonction par sa différentielle, soit $f(a + h) \cong f(a) + f'(a + \frac{h}{2}) \cdot h$.

Prenons 0 comme origine des dates, et notons y_0 et v_0 la position et la vitesse initiales ; soit $h = \Delta t$ une durée donnée, candidate à l'utilisation de nos approximations. L'approximation locale de la fonction $t \rightarrow v(t)$ par sa différentielle en 0 nous donne d'abord, comme précédemment, $v_0 - y_0 h$ comme valeur approchée de $v(h)$.

L'approximation du II & 1. 2. appliquée à la fonction $t \rightarrow y(t)$ sur l'intervalle $[0, 2h]$ donne alors

$$y(2h) \approx y_0 + 2v(h)h \approx y_0 + 2(v_0 - y_0 h)h$$

et la même approximation appliquée à la fonction $t \rightarrow v(t)$ sur l'intervalle $[h, 3h]$ donne de même

$$v(3h) \approx v(h) - 2y(2h)h$$

formule dans laquelle on remplacera ensuite $v(h)$ et $y(2h)$ par leurs valeurs approchées obtenues précédemment.

On réitère ce procédé. Autrement dit, en désignant par v_n et y_n les valeurs approchées de $v((2n - 1)h)$ et $y(2nh)$ obtenues par ce procédé, on a les relations de récurrence

$$v_{n+1} = v_n - 2y_n h$$

$$y_{n+1} = y_n + 2v_{n+1} h$$

obtenues en appliquant l'approximation du II & 1. 2. d'abord à $t \rightarrow v(t)$ sur l'intervalle $[(2n - 1)h, (2n + 1)h]$, puis à $t \rightarrow y(t)$ sur l'intervalle $[2nh, (2n + 2)h]$.

Si par exemple $y_0 = 1$ et $v_0 = 0$, on sait que $y(t) = \cos t$ et $v(t) = -\sin t$. Dans le tableau en annexe figurent les valeurs approchées de y et v calculées avec ce procédé, en prenant $2h = 0,1$ (ce qui permet même un calcul facile à la main) ; la confrontation avec les valeurs du sinus et du cosinus données par une calculatrice montre bien l'efficacité surprenante de ce procédé. En fait, les considérations théoriques de II donnent ici une approximation à 0,001 près, et c'est bien ce qui se passe.

On peut utiliser ces calculs approchés pour obtenir une valeur approchée de $\pi/2$. Si on veut procéder par interpolation linéaire, deux méthodes s'offrent a priori : calculer le t tel que $v(t) = -1$, ou bien le t tel que $y(t) = 0$. La première est très mauvaise : nous savons en effet que -1 est un minimum pour $v(t) = -\sin t$, et nous avons vu qu'au voisinage d'un extremum une fonction varie peu. De ce fait, la localisation précise d'un minimum est difficile. Pour la seconde au contraire, les circonstances sont très favorables : comme $y''(\pi/2) = y(\pi/2) = 0$, le point $(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un point d'inflexion, et nous avons vu qu'en un tel point l'approximation d'une courbe par sa tangente est particulièrement bonne. Cela rend plausible, et on peut démontrer, qu'il en est de même pour les interpolations linéaires au voisinage d'un point d'inflexion.

L'interpolation donne ici

$$\frac{y(\frac{\pi}{2}) - y(1,5)}{\frac{\pi}{2} - 1,5} = \frac{v(1,6) - v(1,5)}{0,1}$$

$$\text{d'où } \frac{\pi}{2} = 1,5 + y(1,5) \frac{(v(1,6) - v(1,5))}{0,1} = 1,5 + \frac{0,071}{0,1} \times 0,1 \approx 1,57$$

ce qui n'est pas si mal non plus.

Tableau des valeurs numériques :

t	$v(t)$	$g(t)$	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1	0	1
0,05	- 0,05		0,05	
0,10		0,995		0,995
0,15	- 0,15		0,149	
0,20		0,980		0,980
0,25	- 0,248		0,247	
0,3		0,955		0,955
0,35	- 0,343		0,343	
0,4		0,921		0,921
0,45	- 0,435		0,435	
0,5		0,878		0,878
0,55	- 0,523		0,523	
0,6		0,826		0,825
0,65	- 0,606		0,605	
0,7		0,765		0,765
0,75	- 0,682		0,682	
0,8		0,697		0,697
0,85	- 0,752		0,751	
0,9		0,622		0,622
0,95	- 0,814		0,813	

t	v(t)	g(t)	sin t	cos t
1	0,541			0,540
1,05	- 0,868		0,867	
1,1		0,454		0,454
1,15	- 0,913		0,913	
1,2		0,363		0,362
1,25	- 0,949		0,949	
1,30		0,268		0,267
1,35	- 0,976		0,976	
1,4		0,170		0,170
1,45	- 0,993		0,993	
1,5		0,07		0,071
1,55	- 1,001		0,999	
1,6		- 0,03		- 0,029

Par contre la périodicité des solutions est très difficile à vérifier numériquement : il faudrait calculer des valeurs approchées sur un intervalle très grand, ce qui entraînerait un cumul considérable des erreurs successives.

Quelques indications sur d'autres exemples

L'équation du pendule simple, soit $y'' = -k \sin y$ peut se traiter exactement de la même façon (ainsi que toute équation de la forme $y'' = f(y)$) ; une calculatrice comportant les fonctions trigonométriques est évidemment utile. Nous invitons vivement le lecteur à traiter cet exemple, et comme on n'est plus ici en terrain balisé, nous nous permettons de donner quelques indications.

La solution définie par les conditions initiales $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 0$ est périodique, s'annule une infinité de fois, et sa période T est égale à $4t_\alpha$, où on a désigné par t_α le premier zéro de y après 0 ; elle est complètement déterminée par sa restriction à l'intervalle $[0, t_\alpha]$, grâce à des relations de symétrie dont nous laissons l'énoncé au lecteur. Tout cela résulte pour le physicien de l'expérience, et peut par ailleurs se démontrer mathématiquement.

Si on veut calculer t_α et T_α par la méthode exposée ci-dessus, on peut avoir intérêt à faire une première estimation grossière de t_α , et à faire ensuite une approximation plus fine sur un intervalle un peu plus grand que l'intervalle ainsi obtenu.

V - POTENTIELS - GRADIENTS

§1. Définition du travail et exemples.

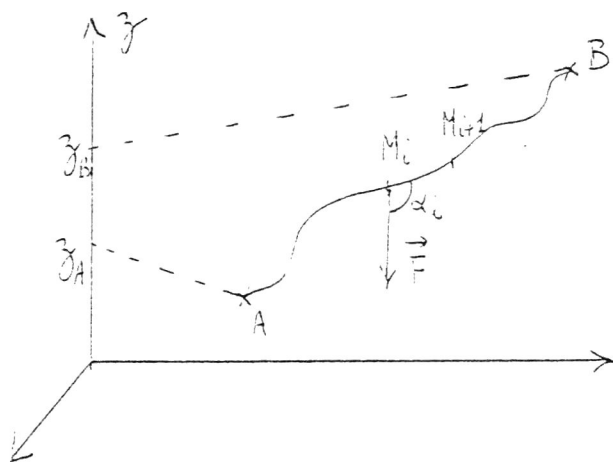
Supposons qu'un point matériel se déplaçant dans l'espace subisse une force $\vec{F}$ qui ne dépend que de la position du point, c'est-à-dire qu'en tout point M de l'espace est défini le vecteur $\vec{F}(M)$, qui forme un champ de forces. Quand le point matériel se déplace, cette force produit un travail.

Si le déplacement est rectiligne, on définit le travail de la force constante $\vec{F}$ au cours d'un déplacement rectiligne de son point d'application de A à B par :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Partant de cette définition, nous allons exprimer le travail d'une force dans des cas plus complexes, afin d'en donner une définition générale pour une force quelconque et un déplacement quelconque. On posera $\|\vec{F}\| = F$

A- Travail d'une force constante (champ uniforme) le long d'un chemin AB



Le chemin AB est supposé continuellement différentiable, on peut donc prendre une subdivision (M_i) de AB et en chaque point M_i approcher la courbe par le segment $M_i M_{i+1}$. Alors la somme :

$$\sum_i \vec{F}(M_i) \cdot \vec{M_i M_{i+1}}$$

est une approximation du travail que l'on souhaite calculer.

On a :

$$\vec{F}(M_i) \cdot \vec{M_i M_{i+1}} = F \cdot M_i M_{i+1} \cdot \cos \alpha_i$$

et

$$\begin{aligned} \sum F \cdot M_i M_{i+1} &= F \cdot M_i M_{i+1} \cdot \cos \alpha_i = F \cdot (z_i - z_{i+1}) \\ &= F(z_A - z_B) \end{aligned}$$

Cette expression, étant constante, admet donc une limite quand le pas de la subdivision tend vers zéro, et c'est donc le travail de $\vec{F}$ le long du chemin AB :

$$W_{AB} = F(z_A - z_B)$$

Exemple 1 : travail du poids ($\vec{g}$ est supposé constant)

On obtient :

$$W_{AB} = P(z_A - z_B) = mg(z_A - z_B)$$

Ce travail apparaît comme la variation d'une grandeur qu'il est d'usage d'appeler énergie potentielle. Cette énergie potentielle de pesanteur est alors :

$$E_A = mgz_A + \text{cte}$$

et le travail du poids est positif si l'énergie potentielle diminue, négatif lorsque l'énergie potentielle augmente.

Dans la suite, on étudiera le travail du poids dans le cas où P est toujours de même direction, mais varie avec l'altitude. (Voir & 2).

Exemple 2 : potentiel électrique dans un champ électrique uniforme

Une charge électrique ponctuelle q est soumise à un champ électrique uniforme $\vec{E}$ et donc la force électrostatique qui s'exerce sur la particule est $\vec{F} = q \vec{E}$.

Le travail de la force $\vec{F}$ quand la charge se déplace de A à B est :

$$W_{AB} = \sum \vec{F} \cdot \vec{M_i M_{i+1}} \quad \text{et } \vec{E} \text{ étant uniforme,}$$

$$W_{AB} = q \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{soit } W_{AB} = q E(x_A - x_B)$$

On a comme précédemment :

$$E(x_A - x_B) = V_A - V_B$$

où V est par définition le potentiel électrique associé au champ électrique uniforme, soit :

$$V_x = - Ex + \text{cte}$$

On a alors :

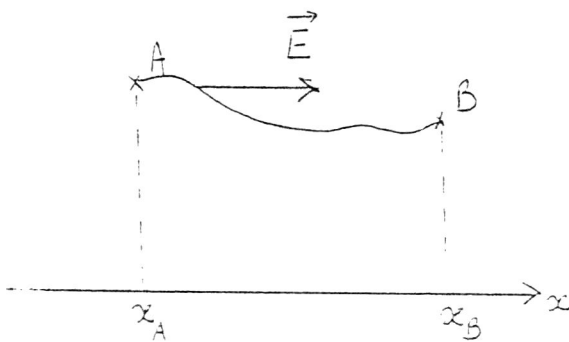
$$W_{AB} = q V_A - q V_B \text{ et } qV \text{ est l'énergie potentielle électrique.}$$

On peut remarquer que dans ces cas (champ uniforme) :

+ le travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, et non du chemin suivi ;

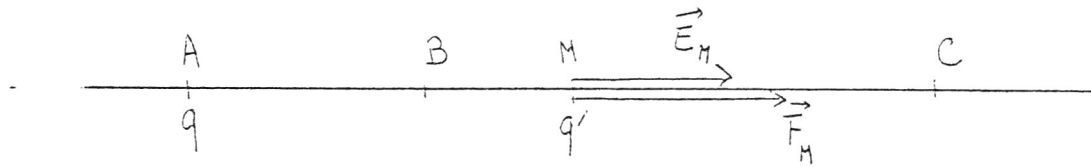
+ le travail le long d'un contour fermé est nul : la force est dite CONSERVATIVE

+ un potentiel (de pesanteur ou électrique) est attaché à ces forces : on dit que ces forces dérivent d'un potentiel, expression qui s'expliquera plus précisément par la suite.



B- Potentiel associé au champ électrique produit par une charge ponctuelle

On considère une charge q placée en A, et une charge q' ; on se limitera à considérer des déplacements de q' sur une droite passant par A.



On se propose de calculer le travail effectué par la force de Coulomb entre les points B et C.

Posons $\vec{r} = \vec{AM}$; le champ électrique en M est :

$$\vec{E}_M = k \frac{q}{\|\vec{AM}\|^2} \times \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$$

et la charge q' placée en M est soumise à la force de Coulomb $\vec{F} = q' \vec{E}_M$.

La force n'est donc plus constante, mais sa direction est constante.

Le travail au cours du déplacement $M_i M_{i+1}$ est

$$W_i = F_{M_i} \cdot M_i M_{i+1}$$

et une approximation du travail au cours du déplacement BC est :

$$W_{BC} \approx \sum_i W_i$$

soit W_{BC}

$$W_{BC} \approx \sum_i \frac{k q q'}{r_i^2} (r_{i+1} - r_i)$$

$$\text{Posons } \Delta r_i = r_{i+1} - r_i$$

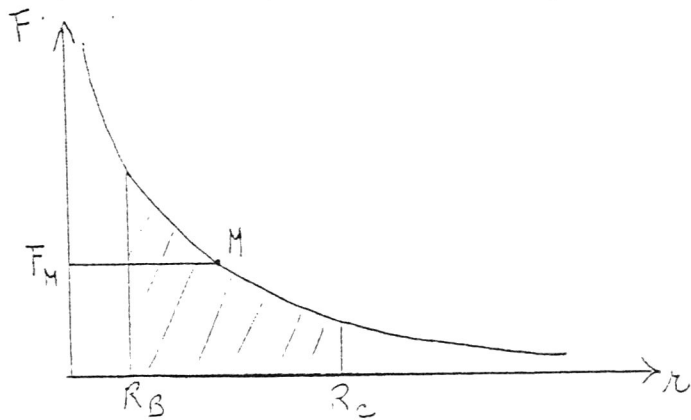
la limite de cette somme quand Δr_i tend vers zéro est une intégrale :

$$W_{BC} = \int_{BC} q' \frac{k q}{r^2} dr = \left[-\frac{k q q'}{r} \right]_B^C = \frac{k q q'}{r_B} - \frac{k q q'}{r_C}$$

et la différence de potentiel étant le travail associé à une charge unité $q' = 1 \text{ C}$, on a :

$$V_B - V_C = \frac{W_{BC}}{q'} = \frac{k q}{r_B} - \frac{k q}{r_C}$$

Si F est la norme du vecteur $\vec{F}$, c'est une fonction de M , mais elle ne dépend que de r , on peut tracer sa représentation graphique :



le travail W_{BC} est alors représenté par l'aire comprise entre la courbe et l'axe des r , entre les points B et C. La courbe étant en $\frac{1}{r^2}$, le travail est en $\frac{1}{r}$.

Le travail ne dépend toujours que du point de départ et du point d'arrivée.

C- Cas d'un champ quelconque et d'un déplacement quelconque

Soit F un champ de vecteurs et une courbe (AB) supposée continuellement différentiable dans un espace affine $\mathcal{E}$.

Soit donc

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{E} ;$$

E étant l'espace vectoriel de dimension 3 associé à $\mathcal{E}$, l'application

$$t \mapsto \vec{\varphi}'(t) = d_t \varphi(1), \text{ de } [a, b] \text{ dans } E, \text{ est continue}$$

Si $t_0 = a < t_1 < \dots < t_p = b$ est une subdivision de $[a, b]$ et si

$M_i = \varphi(t_i)$, la somme :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \text{ est alors une approximation du travail que l'on cher-}$$

che à exprimer.

Si le pas de la subdivision est assez petit, le vecteur $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ est peu différent de $\vec{\varphi}'(t_i) (t_{i+1} - t_i)$ et

$$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^{p-1} \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\varphi}'(t_i) (t_{i+1} - t_i)$$

et lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, cette expression a une limite qui est l'intégrale :

$$\int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt$$

Par définition, on posera :

$$\int_a^b$$

$$W_{AB} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt$$

Lorsque $\vec{F}$ est un champ constant et AB rectiligne, on retrouve le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{AB}$.

On remarque que si $\vec{r} = \vec{OM}$, on peut aussi écrire cette intégrale :

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

et on peut considérer $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ comme une forme différentielle (voir § 3).

L'intégrale de $\vec{F}$ le long de la courbe (AB) = (L) s'appelle encore la circulation de $\vec{F}$. Lorsque (L) est fermée, on note souvent cette intégrale :

$$\int_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Théorème (voir Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques)

Une forme différentielle ω admet une primitive sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si sa circulation est nulle sur tout chemin fermé continuellement différentiable de U.

C'est donc le cas du champ de gravitation et du champ électrostatique, qui comme on l'a vu, dérivent d'un potentiel : autrement dit, l'intégrale W_{AB} se calcule au moyen d'une primitive.

On admet donc que, pour toute courbe (L) fermée :

$$\int_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

c'est-à-dire que la circulation de la force $\vec{F}$ le long de tout contour fermé est égale à zéro. On dit alors qu'on a une force CONSERVATIVE.

Autrement dit, il est équivalent de dire qu'un champ de forces est conservatif, ou qu'il dérive d'un potentiel. Dans ce cas, il existe une fonction W telle que :

$$\int_{(AB)} W = W_B - W_A$$

C'est le cas du champ de gravitation et du champ électrostatique.

Par contre, les forces de frottement ne correspondent pas à un champ de forces : le travail d'une force de frottement dépend d'un certain nombre de paramètres, par exemple la vitesse,

D'après le Théorème du I), il en résulte que la forme différentielle $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ admet une primitive, et l'intégrale de $\vec{F}$ le long d'un chemin quelconque d'extrémités A et B, orienté de A vers B, se calcule en écrivant :

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_A - E_B$$

où - E est une primitive de la forme $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, E étant définie à une constante près.

Remarque :

Il en résulte des propriétés des intégrales curvilignes qu'il est équivalent de dire que la circulation d'une force est nulle sur tout contour fermé, ou bien que l'intégrale le long du chemin AB ne dépend que de A et B, et non pas du chemin suivi.

On calculera donc le travail de $\vec{F}$ de A à B en écrivant

$$W_{AB} = E_A - E_B$$

On dit alors que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, E est par définition l'énergie potentielle associée au champ de forces $\vec{F}$; définie à une constante près, et le travail de $\vec{F}$ de A à B est égal à la perte d'énergie potentielle $E_A - E_B$.

Précisons la notion d'énergie potentielle : donnons nous un état de référence, qui sera un certain point de l'espace, soit M_0 ; alors l'énergie potentielle en un point M sera égale au travail effectué dans le déplacement du point matériel de M à M_0 , soit :

$$E(M) = \int_{MM_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

et pour un déplacement du point matériel de A à B, on peut considérer que le chemin suivi passe par M_0 , donc :

$$E(A) - E(B) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donc un champ de forces conservatives dérive d'un potentiel, potentiel que l'on sait calculer dans des cas simples.

V & 2- CALCUL DU TRAVAIL DU POIDS D'UN CORPS

ACTIVITES EN CLASSE DE PREMIERE

1) On considère un corps de masse m ; la terre et le corps exercent l'un sur l'autre deux forces opposées attractives de norme $f = \epsilon \frac{m.M}{d^2}$ où M est la masse de la terre, d la distance des centres d'inertie, et ϵ la constante de la gravitation universelle $\epsilon = 6,664.10^{-11} \text{ N.Kg}^{-2}.\text{m}^2$.

R est le rayon de la terre $R = 6400 \text{ Km}$

Si le corps est à l'altitude $h = 0$ on aura

$$m.g_0 = \epsilon \cdot \frac{m.M}{R^2} = p_0$$

p_0 norme de $\vec{p}_0$

et à l'altitude h

$$m.g_h = \epsilon \cdot \frac{m.M}{(R+h)^2} = p_h$$

p_h norme de $\vec{p}_h$

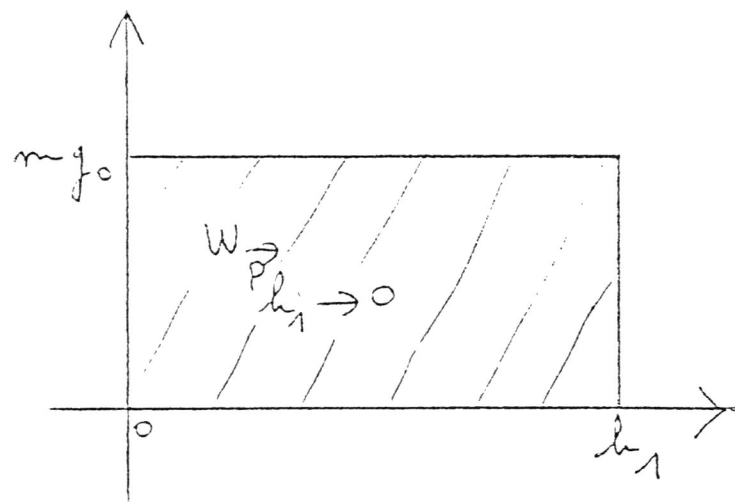
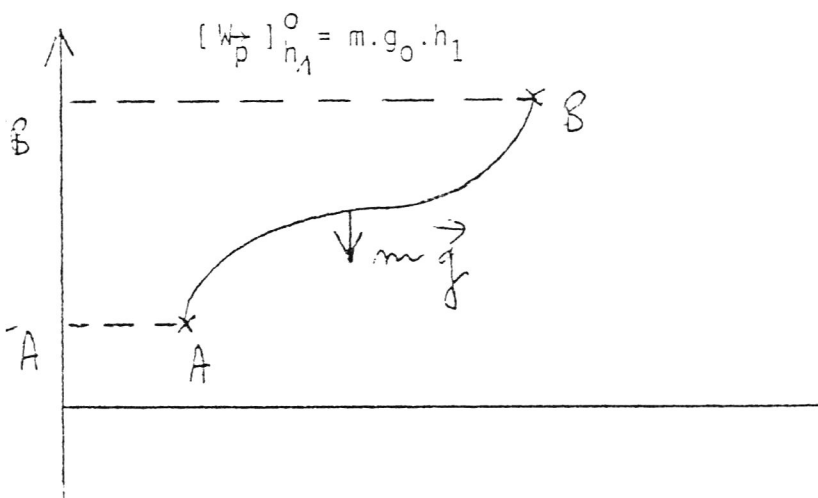
Nous dirons que la force exercée par la terre sur le corps est son poids p_h à l'altitude h .

2) Travail du poids.

On peut l'envisager de plusieurs manières.

(1) On suppose $g_h = g_0$: le poids est considéré comme une force constante entre l'altitude h et l'altitude 0, ce qui revient à dire que le rayon terrestre est suffisamment grand pour que le passage de R à $R+h$ ne modifie pas de façon sensible le poids d'un corps.

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de l'altitude du point de départ et du point d'arrivée, et on a :



(2) Si le poids ne peut plus être considéré comme constant, ce qui est le cas dans l'étude du problème du satellite, alors :

$$g_0 = \varepsilon \frac{M}{R^2} \quad \text{et} \quad g_h = \varepsilon \frac{M}{(R+h)^2}.$$

On a donc
$$g_h = g_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}.$$

On peut tracer la courbe donnant g_h en fonction de h , et la fonction $h \mapsto g_h$ étant différentiable en 0, on peut remplacer, avec une erreur minime, la courbe par sa tangente au point $h = 0$ (voir figure).

Si on pose $\varphi : x \mapsto (1+x)^{-2}$,
alors
$$\varphi'(x) = -2(1+x)^{-3}.$$

En particulier $\varphi'(0) = -2.$

La fonction φ étant différentiable en 0, on a

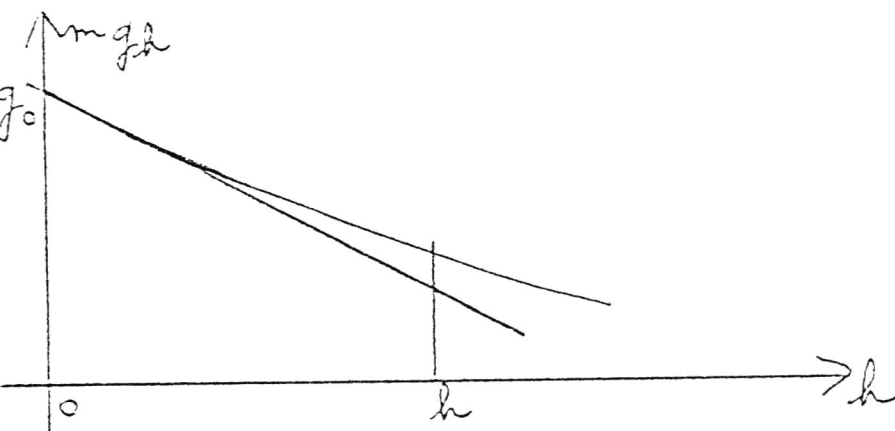
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0).x + \alpha(x).x$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0.$

On peut donc prendre, pour x assez petit, $1 - 2x$ comme valeur approchée de $\varphi(x)$.

L'expression approchée correspondante pour g_h sera $g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$

Le calcul du travail du poids se fait alors en utilisant cette approximation. Il est alors peu différent de l'aire du trapèze rectangle dont les bases ont pour abscisses 0 et h .



$$[W_p]_h^0 = m.g_h'.h + \frac{1}{2} h(m.g_0 - m.g_h')$$

$$[W_p]_h^0 = h. \frac{m.g_0 + m.g_h'}{2}$$

Validité de l'approximation précédente.

A l'aide d'une calculatrice, on détermine les valeurs de g_h pour différentes valeurs de h , si $g_0 = 9,81 \text{ N.Kg}^{-1}$.

h en km	0	200	300	400	800	1600	3200	6400
g_h en N.kg^{-1}	9,81	9,22	8,95	8,69	7,75	6,28	4,36	2,45
$g'_h = g_0(1 - \frac{2h}{R})$	9,81	9,19	8,89	8,58	7,35	4,90	0	

L'approximation est donc bonne jusqu'à 200 km d'altitude, et acceptable jusqu'à 400 km ; de toute elle est beaucoup plus satisfaisante que ce supposer g constant. On rappelle que l'approximation d'une courbe par sa tangente est la meilleure approximation linéaire de cette courbe.

Si h est supérieur à 400 km ;

$$g_h = g_0 \cdot \frac{1}{(1 + \frac{h}{R})^2}$$

On calcule alors le travail du poids en se référant à la méthode des aires, en classe de première (raisonnement déjà effectué pour le calcul du travail de la tension d'un ressort et d'un couple de torsion.). (On pourra vérifier, en comptant les carreaux, que les aires comprises entre la courbe et l'axe des h d'une part, la droite et l'axe des h d'autre part, de $h = 0$ à $h = 200 \text{ km}$ par exemple, sont peu différentes.) Si h est supérieur à 400 km c'est la première de ces aires qui est numériquement égale à $[W_p]_h^0$.

En classe de Terminale on dispose d'un autre outil et on peut montrer que

$$[W_p]_h^0 = \int_h^0 \frac{m \cdot g_0}{(1 + \frac{h}{R})^2} \cdot dh$$

que l'on sait calculer.

V & 3- FORMES DIFFÉRENTIELLES ET INTEGRALES CURVILIGNES

A- Applications différentiables

On considère un espace affine $\mathcal{G}$ de dimension 3 et E l'espace vectoriel associé - Soit $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de $\mathcal{G}$, on a alors :

$$(\forall M \in \mathcal{G}) \quad (\exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \quad (\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}).$$

On peut alors définir 3 applications (qu'on peut appeler applications coordonnées) par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_3} & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & z \end{array}$$

Ces 3 applications sont affines et on a l'habitude d'utiliser les notations suivantes (par "abus de langage") :

f_1 est notée x , f_2 est notée y , f_3 est notée z .

L'application linéaire associée à l'application affine x est appelée 1ère projection et est notée p_x , on a donc :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_x} & \mathbb{R} \\ x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} & \mapsto & x \end{array}$$

en particulier on a :

$$p_x(\vec{i}) = 1 \quad p_x(\vec{j}) = p_x(\vec{k}) = 0$$

Si on note $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$p_x \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

(Une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est communément appelée forme linéaire sur E).

On a de même, en considérant les applications affines y et z :

$$p_y \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad p_z \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Proposition :

(p_x, p_y, p_z) est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est appelé dual de E , souvent noté E^* et (p_x, p_y, p_z) est appelée base duale de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E .

On a vu, au chapitre I, que les applications x, y, z sont différentiables en tout point de $\mathcal{U}$ et que :

$$\forall A \in \mathcal{U} \quad d(f_1)_A = dx_A = p_x$$

On obtient alors une application constante, notée dx , définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\xrightarrow{dx} E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto dx_A \end{aligned}$$

On notera, souvent en mathématiques, toujours en physique :

dx pour dx_A et dx pour p_x

Remarque :

dx_A est parfois noté $d_A x$

Considérons une application f de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $\mathcal{U}$; on a vu, au chapitre I, que :

$$(\forall A \in \mathcal{U}) \quad (\exists ! L_A \in E^*) \quad (\forall \vec{v} \in E)$$

$$f(A + \vec{v}) = f(A) + L_A(\vec{v}) + \|\vec{v}\| \varepsilon(\vec{v})$$

ε étant une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = 0$$

L_A est notée df_A , le réel $L_A(\vec{v})$ est noté $D(f, A, \vec{v})$ et on note df l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à A associe df_A .

df_A peut également être notée : $D(f, A, \cdot)$ et df peut être notée $D(f, \cdot, \cdot)$.

df_A étant un élément de E^* dont une base est (dx_A, dy_A, dz_A) , il existe un unique triplet de réels (r_1, r_2, r_3) tel que :

$$df_A = r_1 dx_A + r_2 dy_A + r_3 dz_A = r_1 p_x + r_2 p_y + r_3 p_z$$

$$(df_A)(\vec{i}) = r_1 p_x(\vec{i}) + r_2 p_y(\vec{i}) + r_3 p_z(\vec{i}) = r_1 \text{ car } p_x(\vec{i}) = 1$$

$$\text{et } p_y(\vec{i}) = p_z(\vec{i}) = 0$$

donc $r_1 = (df_A)(\vec{i})$; ce réel est noté $\partial_x f(A)$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ et est appelé dérivée partielle suivant x de f au point A .

On obtient de même :

$$r_2 = (df_A)(\vec{j}) = \partial_y f(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$$

$$r_3 = (df_A)(\vec{k}) = \partial_z f(A) = \frac{\partial f}{\partial z}(A)$$

On obtient alors l'égalité notée ①, vraie pour tout élément A de $\mathcal{G}$:

$$df_A = \frac{\partial f}{\partial x}(A) dx_A + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy_A + \frac{\partial f}{\partial z}(A) dz_A \quad \text{①}$$

Remarquons qu'il s'agit ici d'une égalité entre éléments de

$$E^*(\text{c'est-à-dire } \mathcal{L}(E, \mathbb{R})) : df_A \in E^*, dx_A \in E^*, dy_A \in E^*, dz_A \in E^*,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(A) \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial z}(A) \in \mathbb{R}.$$

On note $\frac{\partial f}{\partial x}$ l'application définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \partial_x f(A)$$

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

L'égalité ① ci-dessus, vraie pour tout élément A de $\mathcal{G}$, permet alors d'obtenir l'égalité suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Cette égalité est une égalité entre applications de $\mathcal{G}$ dans E^* : df, dx, dy, dz sont des applications de $\mathcal{G}$ dans E^* ; $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont des applications de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette égalité a été obtenue en "faisant varier" le point A dans l'égalité ① : c'est la différence de "démarche" avec le chapitre I où l'on travaillait pour un point A fixé et où l'on obtenait des égalités entre formes linéaires.

B- Intégrale d'une forme différentielle

Définition :

Une forme différentielle sur $\mathcal{C}$ est une application de $\mathcal{C}$ dans E^* [c'est-à-dire $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$].

Nous supposons toujours une telle application continue.

Exemple :

L'application df définie dans le paragraphe A est une forme différentielle sur $\mathcal{C}$. Donc :

à toute application f différentiable de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, on peut faire correspondre une forme différentielle sur $\mathcal{C}$ (notée df).

On a alors la définition suivante :

Définition :

Une forme différentielle ω sur $\mathcal{C}$ est dite exacte s'il existe une application f , de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $\mathcal{C}$, telle que :

$$\omega = df$$

Exemple :

Montrez que la forme différentielle : $M(x, y, z) = y \, dx$ n'est pas exacte.

Soit ω une forme différentielle sur $\mathcal{C}$. On a donc : $(\forall A \in \mathcal{C}) (\omega(A) \in E^*)$

Rappelons que (dx_A, dy_A, dz_A) ont une base de E^* ($dx_A = p_x, dy_A = p_y, dz_A = p_z$).

Il existe donc 3 réels, notés $\omega_x(A), \omega_y(A), \omega_z(A)$ tels que :

$$\omega(A) = \omega_x(A) \, dx_A + \omega_y(A) \, dy_A + \omega_z(A) \, dz_A \quad (2)$$

On définit ainsi 3 applications de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

De l'égalité précédente on déduit l'égalité :

$$\omega = \omega_x \, dx + \omega_y \, dy + \omega_z \, dz$$

C'est une égalité entre applications de $\mathcal{C}$ dans E^* (c'est-à-dire entre formes différentielles sur $\mathcal{C}$) : ω, dx, dy, dz sont des applications de $\mathcal{C}$ dans E^* ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sont des applications de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit ω une forme différentielle sur $\mathcal{C}$ et φ un chemin de $[a, b]$ (segment de $\mathbb{R}$) dans $\mathcal{C}$. On appelle intégrale curviligne de la forme ω sur le chemin φ et on note $\int_{\varphi} \omega$ l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction ψ :

$$t \mapsto [\omega(\varphi(t))](\varphi'(t))$$

Observons d'un peu plus près ψ

φ est une application différentiable de $[a, b]$ dans $\mathcal{C}$ et sa dérivée φ' est une application continue de $[a, b]$ dans E (espace vectoriel associé à $\mathcal{C}$) ; donc : $\forall t \in [a, b], \varphi(t) \in \mathcal{C}$ et $\overrightarrow{\varphi'(t)} \in E$; $\omega[\varphi(t)]$ est une application de $\mathcal{C}$ dans E^* ; donc $\omega[\varphi(t)]$ est un élément de E^* , c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$; si on pose provisoirement $f = \omega[\varphi(t)]$ alors $f[\varphi'(t)]$ est un élément de $\mathbb{R}$; donc tout simplement :

ψ est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

ψ est continue sur $[a, b]$ comme composée d'applications continues.

(ω est continue sur $\mathcal{C}$, φ et φ' le sont sur $[a, b]$).

L'intégrale de ψ sur $[a, b]$ est donc bien définie : c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue

L'égalité (2), établie plus haut, nous donne :

$$\forall t \in [a, b] \quad \omega[\varphi(t)] = \omega_x[\varphi(t)] p_x + \omega_y[\varphi(t)] p_y + \omega_z[\varphi(t)] p_z$$

(On rappelle que $\forall A \in \mathcal{C} \quad dx_A = p_x, dy_A = p_y, dz_A = p_z$)

D'autre part, comme $\overrightarrow{\varphi'(t)} \in E$ et comme une base de E est $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\forall t \in [a, b] \quad \overrightarrow{\varphi'(t)} = \varphi'_x(t) \vec{i} + \varphi'_y(t) \vec{j} + \varphi'_z(t) \vec{k}$$

où $\varphi'_x(t), \varphi'_y(t), \varphi'_z(t)$ sont 3 réels (ce sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\varphi'(t)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

On obtient alors :

$$p_x[\varphi'(t)] = \varphi'_x(t) ; p_y[\varphi'(t)] = \varphi'_y(t) ; p_z[\varphi'(t)] = \varphi'_z(t)$$

donc

$$(\omega[\varphi(t)])(\overrightarrow{\varphi'(t)}) = \psi(t) =$$

$$\underbrace{\omega_x[\varphi(t)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{p_x[\overrightarrow{\varphi'(t)}]}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\omega_y[\varphi(t)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{p_y[\overrightarrow{\varphi'(t)}]}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\omega_z[\varphi(t)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{p_z[\overrightarrow{\varphi'(t)}]}_{\in \mathbb{R}} =$$

$$\omega_x[\varphi(t)] \cdot \varphi'_x(t) + \omega_y[\varphi(t)] \cdot \varphi'_y(t) + \omega_z[\varphi(t)] \cdot \varphi'_z(t)$$

$$\int_a^b \omega = \int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b (\omega_x [\psi(t)] \psi'_x(t) + \omega_y [\psi(t)] \psi'_y(t) + \omega_z [\psi(t)] \psi'_z(t)) dt$$

INTERPRETATION de l'égalité précédente

Définition :

Un champ de vecteurs sur $\tilde{C}$ à valeurs dans E est une application de $\tilde{C}$ dans E .

Soit $\vec{\omega}$ un champ de vecteurs sur $\tilde{C}$. Pour tout point A de $\tilde{C}$ il existe 3 réels notés $\omega_x(A)$, $\omega_y(A)$, $\omega_z(A)$ tels que : $\vec{\omega}(A) = \omega_x(A)\vec{i} + \omega_y(A)\vec{j} + \omega_z(A)\vec{k}$

Définition :

On appelle forme différentielle associée au champ $\vec{\omega}$ l'application ω de $\tilde{C}$ dans E^* définie par : $\forall A \in \tilde{C}, \omega(A) = \omega_x(A)p_x + \omega_y(A)p_y + \omega_z(A)p_z$

Définition :

Soit $\vec{\omega}$ un champ continu de vecteurs sur $\tilde{C}$ à valeurs dans E . La circulation de $\vec{\omega}$ sur le chemin φ est l'intégrale :

$$\int_a^b (\vec{\omega}[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)) dt$$

Remarque :

On suppose pour cela E espace vectoriel euclidien car la définition précédente utilise un produit scalaire.

On suppose alors la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et on définit le champ $\vec{\omega}$ par (ω est une forme différentielle sur $\tilde{C}$) :

$$\vec{\omega} : \tilde{C} \rightarrow E$$

$$A \mapsto \omega_x(A)\vec{i} + \omega_y(A)\vec{j} + \omega_z(A)\vec{k}$$

Remarque :

Quand l'espace vectoriel est euclidien il est donc équivalent, d'après ce qui précède, de se donner un champ de vecteurs sur $\tilde{C}$ ou une forme différentielle sur $\tilde{C}$.

Calculons la circulation de $\vec{\omega}$ sur le chemin φ

$$\int_a^b (\vec{\omega}[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)) dt =$$

$$\int_a^b (\omega_x[\varphi(t)]\vec{i} + \omega_y[\varphi(t)]\vec{j} + \omega_z[\varphi(t)]\vec{k}) \cdot (\varphi'_x(t)\vec{i} + \varphi'_y(t)\vec{j} + \varphi'_z(t)\vec{k}) dt =$$

$$\int_a^b (\omega_x[\varphi(t)]\varphi'_x(t) + \omega_y[\varphi(t)]\varphi'_y(t) + \omega_z[\varphi(t)]\varphi'_z(t)) dt = \int_a^b \omega$$

L'intégrale de la forme différentielle ω sur le chemin φ est donc la circulation sur le chemin φ du champ de vecteurs : $A \mapsto \omega_x(A)\vec{i} + \omega_y(A)\vec{j} + \omega_z(A)\vec{k}$

Remarque :

On a besoin, pour établir cette interprétation, de supposer que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

CAS D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE EXACTE

On a alors $\omega = df$, f étant une application différentiable de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$.
 Pour des commodités d'écriture df_A sera noté $d_A f$ ($A \in \mathcal{C}$).

On a :

$$\forall t \in [a, b] \quad \omega[\varphi(t)] = d_{\varphi(t)} f$$

Soit $t_0 \in [a, b]$ - $\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 + t \in [a, b]$ on a, puisque φ est différentiable sur $[a, b]$:

$$\varphi(t_0 + t) = \varphi(t_0) + \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(t)} + |t| \overrightarrow{\varepsilon}(t)$$

$d_{t_0} \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ et ε est une application de $[a, b]$ dans E telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \overrightarrow{\varepsilon}(t) = \vec{0}$$

L'application $d_{t_0} \varphi$ étant linéaire sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(t)} = \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(t \times 1)} = t \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(1)}$$

On a alors :

$$\varphi(t_0 + t) = \varphi(t_0) + t \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(1)} + |t| \overrightarrow{\varepsilon}(t)$$

donc

$$\overrightarrow{\varphi'(t_0)} = \overrightarrow{(d_{t_0} \varphi)(1)}$$

donc

$$\forall t \in [a, b] \quad \overrightarrow{\varphi'(t)} = \overrightarrow{(d_t \varphi)(1)}$$

On obtient alors : $\forall t \in [a, b]$

$$[\omega(\varphi(t))] \mid \overrightarrow{\varphi'(t)} = [d_{\varphi(t)} f] \mid \overrightarrow{(d_t \varphi)(1)} = [d_t (f \circ \varphi)](1) = (f \circ \varphi)'(t)$$

(On a utilisé le théorème sur la différentielle d'une fonction composée établi antérieurement).

On a alors :

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\varphi} df = \int_a^b (\omega[\varphi(t)] \mid \overrightarrow{\varphi'(t)}) dt = \int_a^b (f \circ \varphi)'(t) dt = f \circ \varphi(b) - f \circ \varphi(a),$$

donc :

Proposition :

Si f est une fonction différentiable sur $\mathcal{C}$ on a, pour tout chemin φ défini sur $[a, b]$

$$\int_{\varphi} df = f[\varphi(b)] - f[\varphi(a)]$$

Définition :

Lorsque la forme différentielle ω associée à un champ de vecteurs $\vec{\Omega}$ est exacte, il existe une application différentiable f de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\omega = df$. On dit que $\vec{\Omega}$ est le gradient de f ; on écrit $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{grad } f}$; on dit que le champ $\vec{\Omega}$ dérive du potentiel f .

Exemple :

Champs centraux en $\frac{1}{r^2}$. Soit le champ $\vec{\Omega}$ défini sur $\mathcal{C}$ par :

$$\forall M \in \mathcal{C}, \vec{\Omega}(M) = k \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

(On a l'habitude de poser $\|\vec{OM}\| = r$, d'où la justification du vocabulaire) où k est une constante. La forme ω associée à $\vec{\Omega}$ est telle que

$$\omega(M) = k \frac{x_M dx_M + y_M dy_M + z_M dz_M}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{3/2}}$$

et elle est exacte car $\omega = df$ avec

$$f(M) = - \frac{k}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{1/2}} + \text{constante}$$

PUBLICATIONS DISPONIBLES DE L'I.R.E.M.
PARIS-SUD

- 4 - GROUPE FRANCAIS-MATHEMATIQUES (Tome 1)
- 10 - CALCUL MENTAL
- 11 - CALCUL 1er CYCLE
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS-MATHEMATIQUE (Tome 2)
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERS
- 21 - ALMANATHEMATIQUES
- 22 - FRISES
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - LES FORCES EN STATIQUE
- 26 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 28 - ROTATIONS / ANGLES
- 29 - LA VITESSE
- 31 - FONCTIONS ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 32 - LES ANGLES
- 34 - METROLOGIE
- 35 - ACTIVITES SPACIALES
- 36 - TRAINS EPICYCLOIDaux
- 38 - CONCEPTION DU CERCLE CHEZ LES ELEVES DE L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 39 - POT-POURRI
- 40 - GROUPE DE RECHERCHE AVIATION ET ENSEIGNEMENT
- 41 - RESEAUX
- 42 - SUITES
- 43 - CINEMATIQUE RELATIVISTE
- 45 - PETITES VARIATIONS OU L'ART DE DERIVER SANS LE SAVOIR
- 46 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE (Seconde édition modifiée)

Reproduction de textes anciens

- I- DISME de Simon STEVIN (1585)
- II- GEOMETRIE ELEMENTAIRE de F. KLEIN (1846)
- III- DICTIONNAIRE MATHEMATIQUE de J. OZANAM (1691) - Tome 1
- IV- DICTIONNAIRE MATHEMATIQUE de J. OZANAM (1691) - Tome 2

Editeur : I.R.E.M. de Paris-Sud
Directeur/Responsable de la publication : François COLMEZ
Tirage : 200 exemplaires
Dépot légal : 2-86612-017 mai 1983
