

i.re.m.

UNIVERSITE PARIS VII

DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

par Jacqueline ROBINET

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
1

CHAPITRE I

L'objet de ce chapitre est l'exposé du cadre théorique général qui va présider à la construction des situations didactiques*. Il n'est pas question de relater dans le détail les théories et résultats dont nous nous servons, ce serait trop long ; nous nous contenterons d'en d'écrire schématiquement les grandes lignes.

Les apports de la psychologie cognitive en liaison avec nos travaux.

- L'oeuvre de Piaget.

C'est en effet, tout d'abord, sur la psychologie cognitive que nous allons nous appuyer et plus précisément sur les travaux de Piaget. Résumons, en quelques mots, la théorie de la construction progressive des connaissances qu'il a élaborée. Pour lui, la connaissance passe d'un état d'équilibre à un autre par des phases transitoires au cours desquelles les connaissances antérieures sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c'est qu'il y a eu une réorganisation des connaissances, au cours de laquelle les nouveaux acquis sont intégrés au savoir ancien. De là, vient le rôle que nous essaierons à certains moments de faire jouer aux situations didactiques : celui de mettre en défaut les connaissances anciennes puis de faire mettre à jour de nouvelles notions et enfin d'amener à une réorganisation du savoir.

Dans la conception même des situations didactiques, nous utiliserons d'autres résultats de Piaget ; et en particulier, cette idée force : c'est en agissant que l'on apprend. Il a brillamment montré qu'un apprentissage n'est pas un conditionnement, ni une simple mémorisation de formules, ni une juxtaposition de savoir-faire, mais bien une élaboration conceptuelle permanente qui ne prend effet que dans et par des actions sur le réel.** Pour lui, peu importe quel est le mode d'interaction avec les objets matériels (jeux, enseignement,

* Précisons ce que nous entendons par situation didactique et pour cela référons-nous à la définition qu'en a donné G. Brousseau : "Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (contenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution". [X₁]

** Nous expliquerons plus loin que si l'action reste centrale dans nos préoccupations, le réel sera pour nous beaucoup moins "physique" que pour Piaget.

vie sociale, etc...), de toutes façons, ce sont par des abstractions simples puis réfléchissantes, faisant suite à ces actions, que sont élaborées les schémas témoignant d'une construction des connaissances.

Le fait que Piaget ne se soit jamais posé de problèmes d'enseignement limite beaucoup, pour nous, la portée de ses travaux. Il n'a jamais cherché à provoquer la construction du savoir ; il se contente d'observer l'acquisition des opérations logiques en des concepts désincarnés. Or dans l'enseignement, au contraire, il s'agit de faire apprendre un contenu et les savoirs et savoir-faire inhérents à ce contenu. Piaget a très nettement séparé les opérations logiques des situations dans lesquelles elles apparaissaient, minimisant du même coup l'importance du contenu des connaissances.

D'autre part, s'il a écrit bien souvent qu'il fallait traiter l'intelligence comme un phénomène social et qu'il y avait corrélation entre développement cognitif et développement "social", il n'a pas exploité ses affirmations et en particulier elles ne sont pas intervenues dans ses expériences. Or, dans l'enseignement nous ne pouvons pas ignorer la composante sociale de l'acquisition des connaissances, puisque celle-ci ne se fait pas individuellement, mais au sein du groupe classe.

- Un premier lien entre enseignement et apprentissage.

Les travaux de Gérard Vergnaud montrent qu'il est nécessaire d'étudier l'acquisition des concepts au niveau même du contenu dans lequel ils interviennent. Pour faciliter cette étude, il a fait fonctionner de nouvelles notions : l'analyse des tâches, et le champ conceptuel.

L'analyse des tâches permet de déterminer quels sont, dans une situation donnée, les concepts qui sont effectivement mis en jeu ; c'est en effet essentiel de vérifier que le concept que l'on cherche à enseigner est bien à l'oeuvre dans la situation choisie à cet effet. De plus, cette analyse permet de cerner quel est le degré de complexité de la situation dans laquelle le concept visé est en jeu^{*}.

La notion de champ conceptuel est née du fait qu'il est presque impossible d'étudier séparément l'acquisition de concepts qui dans les situations proposées aux élèves sont forcément indissociables. Cette notion, G.Vergnaud la définit lui-même ainsi : "C'est un espace de situations-problèmes, dont le traitement

* On verra parfois que l'imbrication des opérations logiques à effectuer peut rendre la tâche trop complexe, et empêcher la mise en oeuvre du concept visé.

implique des concepts et des procédures en étroite connexion". Il s'intéresse alors aux processus d'acquisition propres à ~~partir~~ un champ conceptuel.

Il a montré aussi que l'apprentissage des concepts mathématiques était jalonné par l'apparition "d'invariants opératoires".* Pour lui, il y a construction d'un "invariant opératoire", lorsque l'élève montre par des comportements et par des procédures que quelque soit le signifiant** utilisé dans les situations, il fait fonctionner le signifié** correspondant. Pour Vergnaud, comme pour Piaget, c'est toujours l'action qui est source de connaissances, mais pas n'importe quelle action ; pour qu'elle soit efficace, elle doit se placer au plan des signifiés.

- Les apports de la psychologie sociale.

L'école Genevoise qui se nomme, elle-même, constructiviste et interactionniste a travaillé sur le rapport entre développement cognitif et vie sociale. Ses travaux tendent à prouver que de façon générale, à certains niveaux de développement, l'interaction collective produit des structures cognitives que l'individu ne maîtrise pas avant l'interaction et qu'il maîtrise après. Plus particulièrement les chercheurs ont montré que la résolution de conflits opposés entre pairs*** peut amener à une construction collective plus rapide et qu'ensuite chacun s'approprie le savoir élaboré par tous. (Piaget faisait reposer une partie de la construction des schémas cognitifs sur la résolution de conflits de centrations opposées, créées chez un même individu lors des phases de déséquilibre).

Ce que nous retiendrons de ces idées générales dans notre problématique.

- L'action.

Tout d'abord, et c'est primordial, la psychologie cognitive tend à nous prouver que c'est dans et par les actions sur les objets réels que se construisent les connaissances, au moins chez les enfants d'âge inférieur à quatorze ans.

Nous allons conserver cette idée, nous la pousserons même plus loin, puisque nous faisons l'hypothèse qu'elle reste valide pour des élèves plus âgés (jusqu'au premier cycle d'Université).

* L'apparition d'invariants opératoires servira à reconnaître que les élèves ont progressé dans l'acquisition du concept que l'on veut enseigner.

** Par signifié, on entend le concept du point de vue du contenu (fonction par exemple), et par signifiant une représentation de ce concept : dessin, nom, exemple etc... (prendre le double c'est à dire $n \rightarrow 2n$).

*** Nous verrons plus loin que pour avoir un maximum de chances de faire apparaître des centrations opposées, nous aurons parfois recours à des conflits entre pairs.

(4)

Nos situations didactiques devront donc permettre aux élèves d'agir (et même les y obliger). Cependant, agir sur les "objets réels" quand il s'agit de mathématiques aussi sophistiquées et éloignées du réel que la convergence uniforme, cela paraît bien difficile. Ce n'est donc pas avec le "réel physique" que nous allons faire interagir les élèves, mais avec ce qui, nous en faisons l'hypothèse, peut le remplacer : c'est à dire les objets mathématiques devenus tellement familiers aux élèves qu'ils peuvent agir sur eux aussi aisément que les petits enfants sur les objets réels. Il n'est pas aberrant, en effet, de penser qu'il n'est pas plus difficile pour un étudiant de DEUG de tracer le graphe d'une fonction que pour un enfant du CP de démonter un tas de petits cubes.

- Le champ conceptuel et l'analyse des tâches.

Une étude préliminaire du champ conceptuel, englobant la notion que l'on veut étudier (on dont l'on veut étudier les processus d'acquisition) est nécessaire, cela pour, d'une part, ne rien perdre de la richesse du concept visé et des procédures et savoir-faire qui lui sont attachés, et pour, d'autre part, bien cerner la notion dans le champ où elle est vraiment impliquée.

Une analyse des tâches de la situation proposée permettra d'abord de s'assurer que ce sont bien les concepts visés qui sont à l'oeuvre, ensuite de juger du degré de complexité dans l'intervention de ces concepts. En effet, un enchaînement très compliqué de concepts, pourtant bien maîtrisés, peut très bien donner des problèmes insurmontables. Par exemple, un grand nombre de données ne peut être traité que si l'on est en mesure de les mémoriser, ou de les organiser.

L'intervention des travaux de Bachelard

Ces travaux concernent uniquement l'acquisition des connaissances en physique, nous verrons dans quelle mesure nous pouvons les adapter aux mathématiques. Bachelard a montré (et cela a été confirmé par les travaux de L.Viennot, que tout se passait comme si les individus s'étaient forgés, par leur expérience sensible du réel, des modèles spontanés concernant les concepts physiques ; ces modèles spontanés peuvent être décelés par le fonctionnement des savoir faire des individus en réponse à certaines questions (la force est proportionnelle à la vitesse par exemple). Ces savoir faire correspondent parfois à une conception erronée, et si l'on met en échec ces réponses spontanées, l'élève peut alors construire un savoir "scientifique" en corrigeant les erreurs.

Pour certains, qui appliquent sans nuance les résultats de Bachelard, l'erreur est considérée comme révélatrice de conceptions spontanées erronées et une construction correcte des concepts passe alors par l'élimination de l'erreur.

Pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, nous prendrons une certaine distance. En effet, si on transposait brutalement les résultats de

Bachelard aux mathématiques, on serait conduit, pour construire les concepts mathématiques, à mettre en défaut les conduites spontanées des élèves acquises lors de leurs expériences sensibles. C'est peut-être raisonnable de penser qu'au niveau de l'école élémentaire, les élèves puissent avoir acquis, en dehors de l'apprentissage scolaire des mathématiques, des savoir-faire concernant les nombres, la mesure, la géométrie, etc... Par contre, il semble difficile de penser que les élèves plus âgés aient pu rencontrer des suites convergentes, ou des suites de fonctions, en dehors des leçons de mathématiques. Pour ceux là, la familiarité sensible avec le réel est remplacée par l'expérience scolaire : les élèves ont étudié des fonctions, dessiné leurs représentations graphiques, etc... Ceci a pu les amener à avoir des idées grossières sur la notion de convergence. Ces quelques idées vont faire une conception peut-être insuffisante (si tous les exemples rencontrés sont d'un même type, par exemple), mais rarement erronée. C'est donc ^{contre} une conception un peu étriquée, mais non contre une conception fausse, que va pouvoir se faire une construction visant à enrichir une vision trop réductrice qui ne prend pas en compte tous les aspects d'un concept ou d'un champ conceptuel. Ce n'est donc pas forcément l'erreur qui sera le moteur d'une construction nouvelle, mais cela pourra être aussi l'insuffisance de la conception à un moment donné.

On peut faire cette même distinction à propos de la construction historique de la physique et celle des mathématiques. Les savants physiciens construisaient un modèle qui décrivait une certaine réalité, ce modèle rencontrait ensuite un obstacle et un nouveau savoir était construit pour franchir cet obstacle (la mécanique de Newton a très bien fonctionné pendant un siècle, puis on s'est aperçu qu'elle ne donnait pas de bons résultats pour les vitesses proches de celle de la lumière, et Einstein a inventé la théorie de la relativité). Pour les mathématiques c'est un peu différent, même si les mathématiciens ont parfois énoncé des résultats faux, il ne s'agissait pas de remettre en cause toute une théorie : par exemple Cauchy affirmait que la somme d'une série de fonctions continues était continue, le résultat était faux, mais il n'y avait pas de théorie importante à remettre en cause ; la preuve en est qu'il a lui-même corrigé son erreur et fort peu de temps après l'avoir énoncée. Il a complété* la notion de convergence en ajoutant celle de convergence uniforme, on peut difficilement interpréter cela comme de franchissement d'un obstacle, c'est plutôt l'enrichissement d'une conception un peu trop pauvre.

Les apports des travaux récents en didactique des mathématiques

Abordons maintenant des travaux, qui traitent plus précisément du lien entre apprentissage et enseignement, mais dont les fondements s'appuient sur les

* Cauchy a utilisé la notion de convergence uniforme, mais elle a été introduite avant par Gudermann et Weierstrass.

résultats précédents. Nous allons nous inspirer largement de ces travaux, nous en tracerons donc les grandes lignes. Il s'agit essentiellement des travaux de G. Brousseau, de R. Douady, de Y. Chevallard et de leurs équipes. Toutes ces équipes ont travaillé de manière concomittante, leurs résultats sont donc très souvent imbriqués les uns dans les autres, nous essaierons de dégager l'originalité de chaque équipe.

Les travaux de G.Brousseau et de son équipe.

Brousseau a pour but d'étudier par quels moyens on peut faire approprier un savoir mathématique par un groupe d'élèves. Pour étudier une situation d'enseignement, les paramètres à prendre en compte sont tellement nombreux qu'il est impossible de déterminer comment ils interviennent dans la construction d'une connaissance. Brousseau a alors songé à prendre comme objet d'étude les situations didactiques ; citons le :

"Il s'agit d'appréhender la connaissance par le biais des conditions dans lesquelles elle apparaît, de façon à pouvoir les reproduire au moins approximativement et par là, de provoquer chez l'élève l'acquisition d'un savoir dont le sens et le fonctionnement soient satisfaisant".

Beaucoup d'enseignements différents amènent à la construction d'un savoir mathématique donné, mais Brousseau a stipulé que pour qu'une suite de situations didactiques ait la plus grande probabilité de s'organiser, pour les élèves, en une genèse artificielle d'un concept (ou d'un champ conceptuel), il était suffisant* qu'elle comporte des phases d'action, des phases de formulation, des phases de preuve ; ce savoir construit par les élèves n'atteignant le statut de savoir socialement reconnu qu'après une phase d'institutionnalisation**.

Brousseau reconnaît le caractère fondamental de l'action, mais il a montré qu'à elle seule, elle n'était pas suffisante pour qu'il y ait acquisition d'un savoir, et a ainsi dénoncé les carences de certaines "pédagogies actives".

Il a insisté sur ce qu'il a nommé "le phénomène d'économie". Ses travaux tendent à montrer que si une connaissance s'exerce et prend sens pour les élèves dans un type de problèmes déterminés, ceux-ci auront tendance à ne retenir que ce qui sert spécifiquement à la résolution de ces problèmes. S'ils ont ensuite à résoudre des problèmes voisins des précédents, ils ne vont pas remettre en cause les procédures anciennes, mais ils vont les adapter tant bien que mal aux nouveaux problèmes. Cela amène Brousseau à penser que certaines notions ne peuvent pas être construites en élaborant une suite de problèmes qui petit à petit prendrait en

* Au sens mathématique du mot.

** C'est à dire une phase où l'enseignant pointe conventionnellement et explicitement les nouvelles connaissances, comme étant le savoir à mémoriser.

compte les différents aspects du concept* ; il introduit alors la notion de "saut informationnel" : pour qu'il y ait remise en cause du savoir ancien, les situations doivent présenter de nouveaux problèmes suffisamment différents de ceux grâce auxquels le savoir ancien a été construit, pour que les anciennes stratégies de résolution soient complètement inefficaces et inadaptées. Il devra y avoir alors inventions de nouvelles procédures, ce qui amènera soit à une adaptation du savoir ancien, soit à une réorganisation des connaissances.

Les travaux de R.Douady et de son équipe.

Ces travaux prennent aussi pour objet d'étude les situations didactiques, mais ils concernent plus précisément les situations problèmes ; c'est à dire des situations didactiques particulières, celles qui correspondent au minimum à la phase d'action des élèves. Citons G.Brousseau qui en donne une définition : (ce sont des situations) *"dans lesquelles les élèves doivent obtenir un certain résultat et pour cela, ils peuvent mettre en oeuvre des choix ou des actions dont ils ont la responsabilité"*.

R.Douady a montré que pour que des situations-problèmes fassent apparaître des comportements spécifiques témoignant de l'acquisition de savoirs déterminés, il suffisait (au sens mathématique de ce mot) qu'elles remplissent certaines conditions.

Pour pouvoir énoncer ces conditions, elle a besoin de reprendre la distinction introduite par J.L.Ovaert entre le caractère "objet" et le caractère "outil" des concepts mathématiques. C'est un outil lorsqu'il fonctionne pour résoudre des problèmes, c'est un objet lorsqu'il est le "savoir identifié" celui que l'on a appris ou celui que l'on cherche à apprendre. Un concept, déjà repéré comme savoir, va pouvoir fournir aux élèves un outil explicité pour la résolution de certains problèmes, un concept non encore reconnu comme objet, pourra éventuellement servir d'outil implicite, dans la phase de construction. Voici les conditions** que doivent remplir les situations-problèmes :

- La résolution du problème posé doit passer obligatoirement par l'utilisation comme outil du ou des concepts visés (les concepts sont donc introduits par leur fonctionnement).
- La situation doit faire intervenir le savoir enseigné (ou celui dont on veut observer les processus d'acquisition) dans des cadres différents : par exemple, le réel physique, les représentations graphiques, le domaine des nombres, la géométrie etc...

* Certains enseignements, fondés sur une telle progression, sont parfois couronnés de succès, mais G.Brousseau cherche des conditions pour qu'il y ait construction et appropriation des connaissances sans qu'il y ait intervention (ou peu) du "tour de main" du professeur.

** Ce ne sont bien entendu que des conditions suffisantes au sens mathématique.

Ce qui va être le moteur de l'action des élèves c'est le fait que les connaissances ayant trait au concept à acquérir ne sont pas maîtrisées de la même manière dans chacun des cadres. Les connaissances plus grandes dans un des cadres les amèneront à faire des conjectures dans les autres cadres et pourront même leur donner des idées de procédure à tester (outil implicite).

- Dans une suite de situations, il doit y avoir ce qu'elle appelle une "dialectique outil-objet" : le concept intervient d'abord comme outil implicite dans la phase de construction de la notion, puis il est reconnu comme objet à la suite d'une institutionnalisation. Il pourra, dès lors, intervenir comme outil explicite dans la phase de construction d'une autre notion.

Pour R.Douady, le savoir visé est considéré comme acquis, lorsque le concept est utilisé comme outil explicite dans des problèmes où il n'est pas évident* implicitement et/ou explicitement qu'il doit intervenir.

- La situation doit s'ancrer dans des savoirs acquis antérieurement, afin de permettre aux élèves d'avoir des stratégies de base pour pouvoir attaquer les problèmes. Elle est suffisamment ouverte pour que les élèves puissent envisager diverses procédures, et soient libres de choisir celles qui leur semblent le mieux adaptées. Elle n'est pas trop ouverte, pour que les élèves ne puissent pas s'égarer dans des champs conceptuels annexes, ou s'égarer dans des procédures trop nombreuses.

En plus des conditions à remplir par les situations-problèmes, R.Douady est en train de chercher des conditions** sur la quantité de notions à introduire en opérant une reconstruction comme celle que nous venons de décrire, pour que les autres notions puissent être introduites magistralement, avec cependant une acquisition correcte des connaissances correspondantes par les élèves.

Les travaux de Y.Chevallard et de son équipe.

Dans l'enseignement usuel, les concepts sont rarement introduits dans des problèmes où ils fonctionnent comme outils. Lorsque c'est le cas, ils ne sont pas forcément introduits dans les problèmes pour lesquels les savants les avaient inventés, pour enseigner il est souvent plus profitable d'utiliser des problèmes moins complexes, ou des problèmes où a posteriori ils apparaissent comme plus nécessaires. Ce décalage entre les concepts objets d'enseignement, et les concepts objets de savoir a été étudié en détail par Y.Chevallard ; et il a repris pour le nommer la terminologie introduite par M.Verret, à savoir "la transposition didactique". Ce décalage est presque toujours inévitable, en effet l'enseignement d'une

* Il est en effet courant que l'on indique aux élèves les concepts à faire fonctionner dans les problèmes, soit par des mots inducteurs, soit par le chapitre dans lequel est placé l'énoncé, etc...

** de conditions suffisantes au sens mathématique du terme.

3

notion tient forcément compte des savoirs mathématiques créés ultérieurement, alors que les savants lorsqu'ils inventent les concepts, ignorent les découvertes postérieures et les réorganisations du savoir qui en résultent.

De plus, Chevallard a montré que la transposition didactique était très souvent imposée par le fonctionnement même du système éducatif ; et cela, sans rapport avec l'effet qu'elle peut avoir sur l'apprentissage des notions. Y. Chevallard est d'autre part l'auteur de nombreux travaux destinés à établir la didactique des mathématiques en champ scientifique et nous nous y référerons.

Le rôle du maître pour les didacticiens précédents.

Les équipes précédentes ont toutes étudiées des situations en classe, il leur a donc fallu prendre en compte les rapports maîtres-élèves. Ils ont montré que dans les situations didactiques usuelles, le professeur tente de faire deviner à l'élève ce qu'il veut qu'il trouve (mots inducteurs, début de phrase, etc...) L'élève tente alors de comprendre ce que veut le professeur. Il y a négociation implicite de ce que Brousseau a appelé un "contact didactique", et c'est ce contrat presque complètement implicite qui va gérer les rapports entre élèves et professeur. Ce contrat s'appuie sur une certaine conception de la construction des connaissances ; citons G. Brousseau : *"Il s'appuie fondamentalement sur l'idée qu'il existerait un mécanisme producteur de la connaissance nouvelle par le simple exercice de connaissances anciennes et de règles de détachement à peu près fixées. Alors que la connaissance est essentiellement l'inverse : l'intervention du sujet établissant un ordre là où il n'en voyait pas, ou relevant l'inattendu dans un ordre déjà établi".* [X₅]

G. Brousseau a essayé de construire des situations, où l'intervention du maître est inutile, les situations contenant en elle-même tous les éléments permettant aux élèves de créer et d'exercer leurs connaissances. Cela n'a été possible que grâce à une logistique très lourde, et n'est donc pas réalisable dans une classe ordinaire.

R. Douady a montré le rôle tout à fait essentiel du professeur dans les phases d'institutionnalisation ; et ses travaux tendent à prouver que le professeur peut introduire magistralement certaines notions avec néanmoins une bonne appropriation des connaissances par les élèves.

Chevallard a mis en évidence le contrat didactique en étudiant les moments où il y a rupture de ce contrat.

Les travaux cités dans ce chapitre ne sont pas les seuls qui interviendront dans notre travail, mais ce sont les seuls que nous avons retenu pour la construction effectives des situations ; nous verrons ultérieurement comment la

psychologie individuelle ou la théorie de la dynamique des groupes interviendront pour limiter ce que nous pourrons prouver.