

IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITÉ PARIS VII

35

février 1982

activités spatiales



DE LA SIXIÈME

A

LA SECONDE

PAR M-L. HOCQUENGHEM - C. ET D. MISSENARD - A-M. SERFATI - F. MONNET

NIVEAU

Classes des Collèges et Seconde

PUBLIC

Professeurs

SUJET

Activités et thèmes de géométrie dans l'espace

OBJECTIF

Promouvoir l'utilisation de thèmes de géométrie dans l'espace au cours de mathématiques

INTRODUCTION

La géométrie dans l'espace figure timidement dans les programmes de mathématiques du 1er cycle.

En cinquième :

- Observation d'objets physiques de l'espace. Plans horizontaux, droites verticales, droites horizontales, plans verticaux. Droites parallèles de l'espace, plans parallèles, droite et plan perpendiculaires.
- Observation d'objets tels que cubes, prismes droits, cylindres droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution.
- Calcul de volumes.
- Observation d'une sphère, plan tangent en un point, aire de la sphère, volume de la boule.
- Observation de surfaces coniques et cylindriques, plan tangent en un point.

Et en troisième :

- Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan), cube (calcul de la diagonale), pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

On notera que les deux aspects essentiellement retenus dans les programmes officiels sont :

- d'une part le calcul, mais l'espace ne joue alors dans l'affaire qu'un rôle un peu accessoire.
- d'autre part l'observation, mais nos élèves d'aujourd'hui sont-ils vraiment de grands contemplatifs ... ?

A ceci s'ajoute le fait que la réalisation du Programme tient souvent, pour l'enseignant, plus de la course-poursuite que de la promenade tranquille au pays des mathématiques.

Le bloc "espace" a alors le grand mérite d'une relative indépendance par rapport au reste des connaissances.

C'est donc lui qui sera souvent la première victime des élagages que l'on est contraint de s'autoriser, faute de temps et face à des tâches plus urgentes.

Il nous semble dommage pourtant que soit ainsi négligée cette partie du programme :

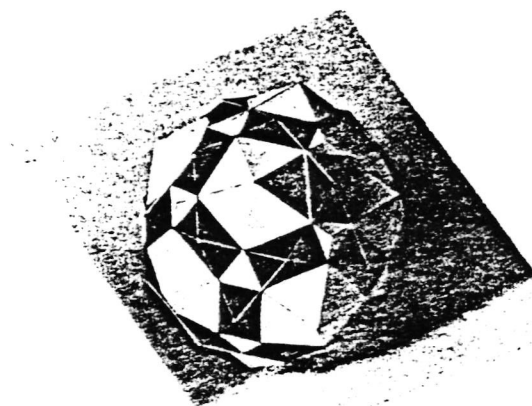
- d'une part parce que le monde dans lequel nous évoluons n'est pas plan et que les objets que nous manipulons ont généralement trois dimensions.
- d'autre part parce que, par sa place un peu à part, la géométrie dans l'espace donne lieu à des activités différentes de celles généralement pratiquées en cours de mathématiques; en effet, la fabrication d'objets peut y tenir une place prépondérante.

Ces activités manuelles (en liaison éventuellement avec le professeur d'EMT), puis classificatoires, d'observation et de présentation du travail peuvent intéresser des élèves différents de ceux qui réussissent ordinairement en mathématiques. En particulier dans des classes "difficiles", l'aspect moins théorique de cette partie peut permettre de "raccrocher" certains élèves.

C'est pourquoi nous avons tenté de rassembler dans cette brochure différentes idées d'activités. Les thèmes proposés sont pour certains très classiques, pour d'autres moins. Certains sont inspirés de différents ouvrages que nous avons cités en référence.

Aux activités élèves nous avons adjoint quelques thèmes plus particulièrement destinés au professeur .

Nous espérons que cette brochure pourra aider quelques-uns d'entre vous qui se disaient jusqu'ici "on n'a pas le temps" ou "mais que faire en géométrie dans l'espace ?" à se lancer avec leurs élèves dans de passionnantes séances de bricolage et découverte qui leur laisseront un inoubliable souvenir.





POLYEDRES

ACTIVITES

ELEVES

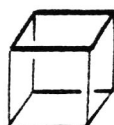
RECHERCHE DE TOUS LES PATRONS D'UN CUBE

POLYEDRES

ACTIVITE ELEVE : N° 1

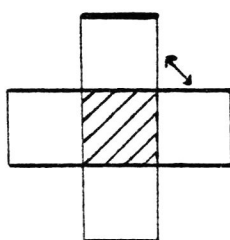
NIVEAU : 6ème

I Recherche de tous les patrons d'un cube sans couvercle.



Voici un cube sans couvercle. les bords "libres" sont marqués en traits forts.

1) Voici un patron, le carré hachuré est celui du fond du cube.

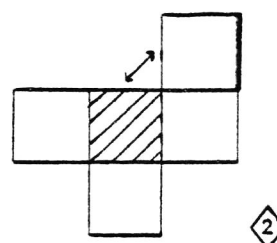
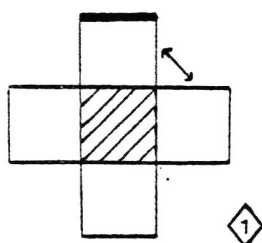


on a marqué d'un trait fort un bord libre et d'une double flèche deux côtés de carrés qui se colleront ensemble.

recopie ce patron, marque d'une couleur différente tous les bords libres, et toutes les flèches de recollement d'arêtes.

2) A partir de ce premier patron j'obtiens le patron ②

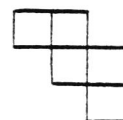
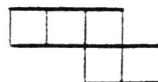
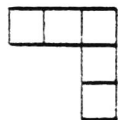
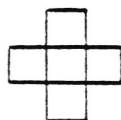
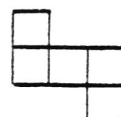
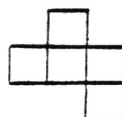
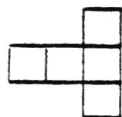
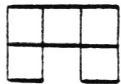
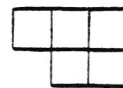
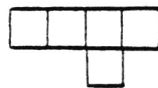
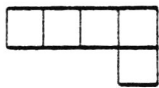
. explique comment j'ai fait



- sur ce deuxième patron indique les bords libres et les flèches de recollement.

3) Trouve d'autres patrons, indique à chaque fois les bords libres et les flèches de recollement.

II) Voici dessinés tous les pentaminos (un pentamino est une figure obtenue avec 5 carrés, chacun d'eux ayant au moins un côté en commun avec un autre carré).



Tous les patrons du cube sans couvercle que tu as trouvé sont des pentaminos mais certains pentaminos ne sont pas des patrons d'un cube sans couvercle. Pour chacun d'eux, explique pourquoi.

III) Recherche de tous les patrons du cube

Tu connais sûrement au moins un patron du cube. Choisis une méthode de recherche qui te permette de les obtenir tous.

Explique ta méthode et dessine les patrons. (il y en a 11).

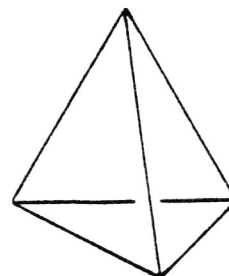
DEVELOPPEMENTS D'UN TETRAEDRE REGULIER

POLYEDRES

ACTIVITE ELEVE : N° 2

NIVEAU : 5ème

Voici un tétraèdre régulier :
c'est une figure de l'espace à 4 sommets
et 4 faces; chaque face est un triangle équilatéral.

Problème 1

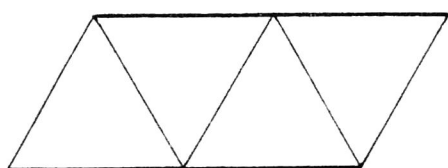
Combien de figures différentes peut-on obtenir en le découpant selon des arêtes pour le développer et le mettre à plat (en un seul morceau où les faces sont rattachées par des côtés) ?

Commentaire

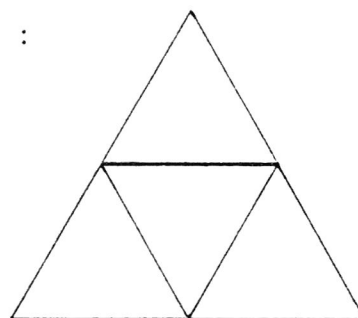
Les élèves devront d'abord chercher la réponse en raisonnant. Puis éventuellement ils construiront des tétraèdres réguliers avec les développements qu'ils auront trouvés.

Réponse

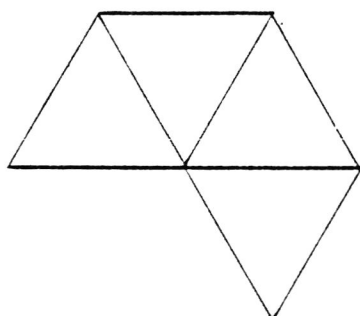
Il n'y a que deux développements possibles :



ou



Deux triangles doivent avoir un côté commun.



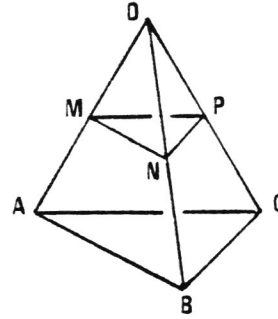
Ce développement est à exclure car les quatre faces n'ont pas un sommet commun.

Problème 2

Le tétraèdre étant baptisé ABCD
Placer les sommets ABCD sur les deux développements possibles.

Problème 3

On veut dessiner sur le tétraèdre un "triangle à mi-hauteur" MNP.



Prévoir le dessin sur chacun des développements.

27 PETITS CUBES	ACTIVITE ELEVE : N° 3
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

D'après "Mathématiques et jeux" de F. Boule.

En empilant 27 petits cubes de côtés égaux on peut constituer un "gros" cube dont on colorie les six faces de six couleurs différentes.

Le problème consiste à reconstituer le gros cube à partir des petits.

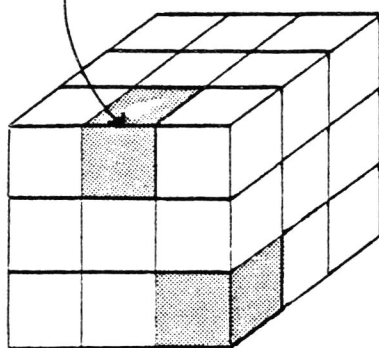
Quelques explications

Les familiers du "cube hongrois" trouveront sûrement ce problème très facile et verront immédiatement le genre d'activités mises en jeu.

Des essais répétés convaincront vite les non-initiés qu'une méthode aléatoire ne donne pas de résultats.

En fait, pour arriver à reconstruire le cube, il faut avoir conscience que

Cube arête



cube sommet

- d'une part il y a quatre sortes de petits cubes
 - . 1 ne porte aucune couleur : c'est évidemment le cube central
 - . 6 portent une seule couleur : ce sont les centres des six faces.
 - . 12 portent deux couleurs : ce sont les "cubes arêtes"
 - . 8 portent trois couleurs : ce sont les "cubes sommets"
- d'autre part chaque petit cube a une place et une seule dans le gros cube.

Matériel possible

La forme cubique n'ayant clairement pas d'importance, on peut réaliser ce puzzle avec, par exemple, 27 pièces de "gros lego" (parallélépipèdes rectangles) les faces étant "coloriées" avec de la toile adhésive ou des gommettes. Il y a, bien entendu, de nombreuses autres possibilités.

CONSTRUIRE DES BOITES	ACTIVITE ELEVE : N° 4
POLYEDRES.	NIVEAU : 5ème

On nous a fourni trois patrons pour obtenir une boîte en forme de parallélépipède rectangle sans couvercle.

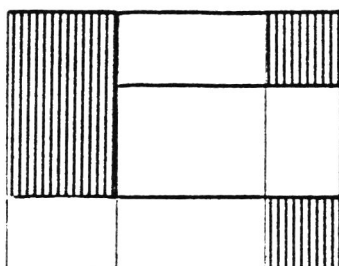
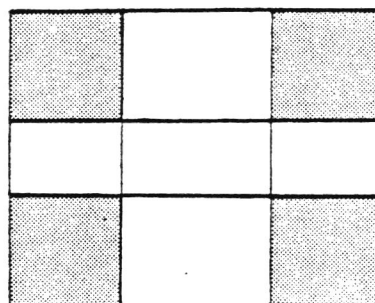
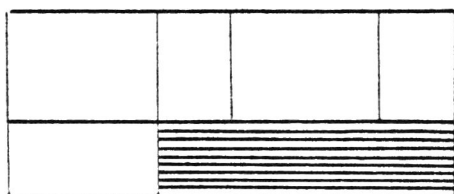
1) Ces trois patrons donnent-ils exactement la même boîte ?

Réponds à cette question en raisonnant sur les patrons puis vérifie en construisant les trois boîtes en carton.

2) Si les patrons donnent la même boîte, y-a-t-il même perte de carton ?

(les pertes sont les parties hachurées)

Si on colle les faces entre elles avec du ruban adhésif le long des arêtes communes, utilise-t-on la même longueur de ruban ?

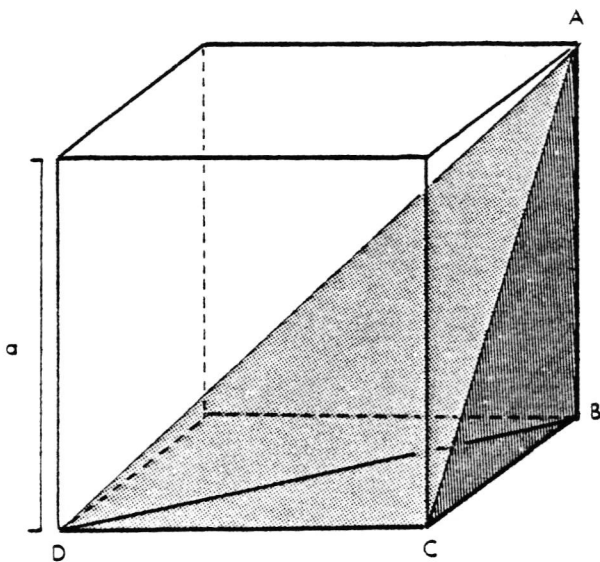


DECOUPER UN CUBE EN SIX TETRAEDRES DE MEMES DIMENSIONS

ACTIVITE ELEVE : N°

POLYEDRES

NIVEAU : 3ème



sur le cube d'arête a dessiné ci-contre
les points ABCD déterminent un tétraèdre.

- 1) Calcule les longueurs des arêtes du tétraèdre.
- 2) Etudie les 4 faces de ce tétraèdre.
Quelles sont leurs particularités ?
Quelles sont les longueurs de leurs côtés ?
- 3) Le volume V du tétraèdre est égal à

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

où b est l'aire d'une face
et h la mesure de la hauteur
correspondante.

Calcule le volume du tétraèdre ABCD

- 4) Construis 6 tétraèdres de mêmes dimensions que ABCD. Assemble-les pour reconstituer le cube.

DES TETRAEDRES DANS UN CUBE

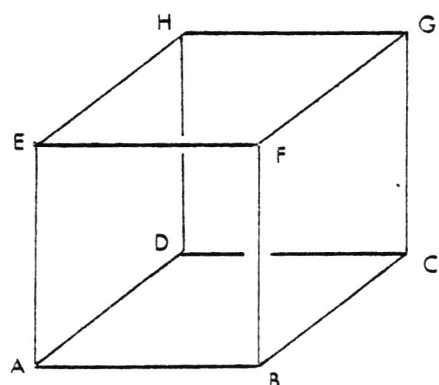
ACTIVITE ELEVE : N° 6

POLYEDRES

NIVEAU : 6EME ET AU DELA

I

①

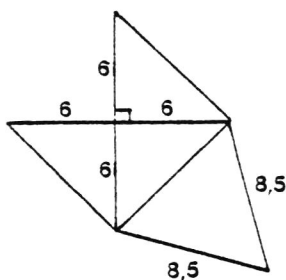


Voici un cube. Un tétraèdre est une figure de l'espace à quatre sommets.

Dessine et nomme un tétraèdre dont les sommets sont des sommets du cube de telle sorte que trois sommets du tétraèdre n'appartiennent pas à la même face du cube.

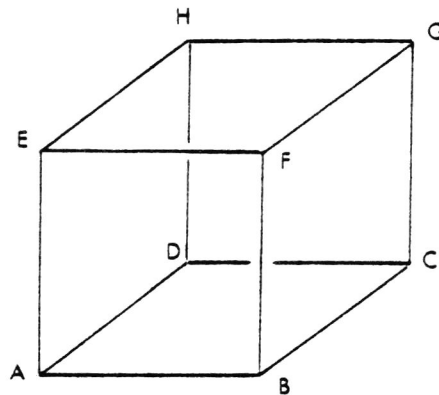
(Pour le professeur : une réponse : ACFH)

- ② Il paraît qu'il y a un ou plusieurs tétraèdres réguliers (tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur) dont les sommets sont quatre sommets du cube - Est-ce vrai ?
- ③ Construis un tétraèdre régulier dont la longueur des arêtes est 8,5 cm et quatre pyramides selon le patron suivant



Assemble ces cinq solides pour obtenir un cube.

II Tétraèdres associés de Moebius (d'après le livre de 5ème de l'I.R.E.M de Strasbourg).



a) Voici un cube ABCDEFGH

Dessine les tétraèdres ABDH et EFGC l'un en bleu, l'autre en rouge.

Montre que la propriété suivante est vérifiée : "chaque sommet de l'un de tétraèdres est situé dans le plan d'une face de l'autre tétraèdre"

Pour chaque sommet précise bien la face correspondante.

Deux tétraèdres vérifiant cette propriété sont appelés des "tétraèdres associés de Moebius" (tu connais le ruban de Moebius ?).

b) Peut-on faire la même chose sur un pavé oblique ?

CONSTRUCTION DE DIVERS SOLIDES	MATERIAUX POUR DES ACTIVITES ELEVES : N° 7
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

[Cette idée est tirée d'un rapport intitulé "expériences d'enseignement de la géométrie dans le secondaire" rédigé par le "groupe de travail de Louvain-la-Neuve sur l'enseignement mathématique". (4ème cahier du colloque Inter-I.R.E.M de Nantes sur la géométrie 1979).]

Cette activité demande un matériel que le professeur peut distribuer aux élèves, ou leur faire construire au préalable. Elle peut se faire en groupes.

Chaque groupe d'élèves doit recevoir un nombre assez important de polygones réguliers (triangles, carrés, pentagones, hexagones, octogones) de côtés égaux et l'objectif est d'obtenir des solides fermés en assemblant bord à bord et sans déformation les polygones fournis (avec du papier adhésif, par exemple).

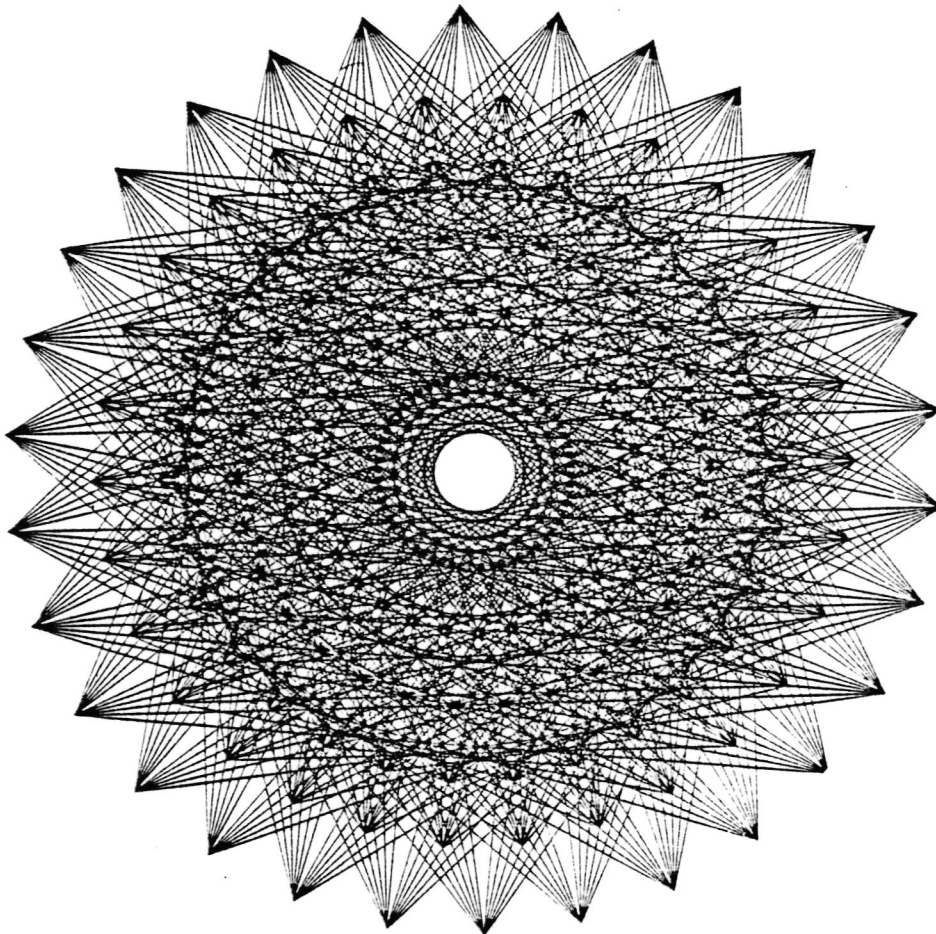
En un premier temps, le professeur pourra laisser les élèves parfaitement libres de leurs constructions. Puis, suivant, les résultats obtenus :

- s'il y a une grande variété d'objets construits on pourra s'intéresser au classement de ces divers objets, en vue, par exemple d'un étiquetage pour réaliser une exposition. Les élèves pourront proposer et discuter divers modes de classement : nombre de faces, nombre d'arêtes, nombre de sommets, nature des faces etc ... Ils pourront éventuellement être amené à construire à la demande certains objets qu'ils aimeraient voir figurer dans la collection.

Ils pourront également analyser plus précisément une catégorie particulière qu'eux-mêmes ou le professeur auront mise en évidence : les polyèdres réguliers ou bien les polyèdres semi-réguliers. Il n'est pas du tout évident à priori qu'il n'y ait qu'un nombre fini de tels polyèdres ; ils pourront donc chercher à en construire le plus possible et embrayer sur les activités correspondantes (Cf page 22 et page 28).

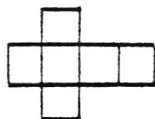
Le professeur pourra encore demander aux enfants de réaliser un tableau comportant pour chaque objet construit le nombre de faces F , le nombre de sommets S et le nombre d'arêtes A afin de dégager, pour les polyèdres convexes la formule d'Euler $S + F = A + 2$.

- si le nombre d'échantillons est trop restreint le professeur pourra
 - compléter la collection avec ses propres modèles
- ou encore • préciser la consigne : recherche des polyèdres réguliers par exemple.
- ou encore • s'intéresser aux problèmes de dessin : représentation des objets construits s'ils ne sont pas trop compliqués - problèmes des vues sous divers angles - problèmes de perspectives, etc ...



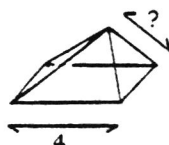
LE DODECAEDRE RHOMBIQUE EN KIT	ACTIVITE ELEVE : N° 8
POLYEDRES	3EME POUR LES CALCULS TOUS NIVEAUX POUR LA CONSTRUCTION

A Voici un patron de cube "classique":



Pour fabriquer un cube bien rigide, on a l'idée de coller sur chaque carré ci-dessus une pyramide ayant des dimensions telles que, quand on refermera (vers l'intérieur) le patron du cube, ces pyramides viennent s'imbriquer exactement les unes dans les autres.

Quelle doit être la longueur des arêtes de ces pyramides si le cube a 4 cm de côté ?



B Réalise maintenant effectivement les 6 pyramides et colle les sur un patron de cube.

Colorie d'une couleur les faces des pyramides, d'une autre couleur le verso de ton patron de cube.

Maintenant : si tu replies le patron d'un côté, tu obtiens un cube d'une couleur ...

mais si tu le replies de l'autre tu obtiens

un dodécaèdre rhombique d'une autre couleur ! (voir page 54)

Si tu fabriques 2 modèles identiques, de cocasses emboîtements sont possibles.

C a) Quel est le volume du cube ainsi construit ?

b) et celui du dodécaèdre rhombique ?

c) et si un dodécaèdre rhombique a pour volume 1 dm^3 , quelle sera la longueur de ses arêtes ?

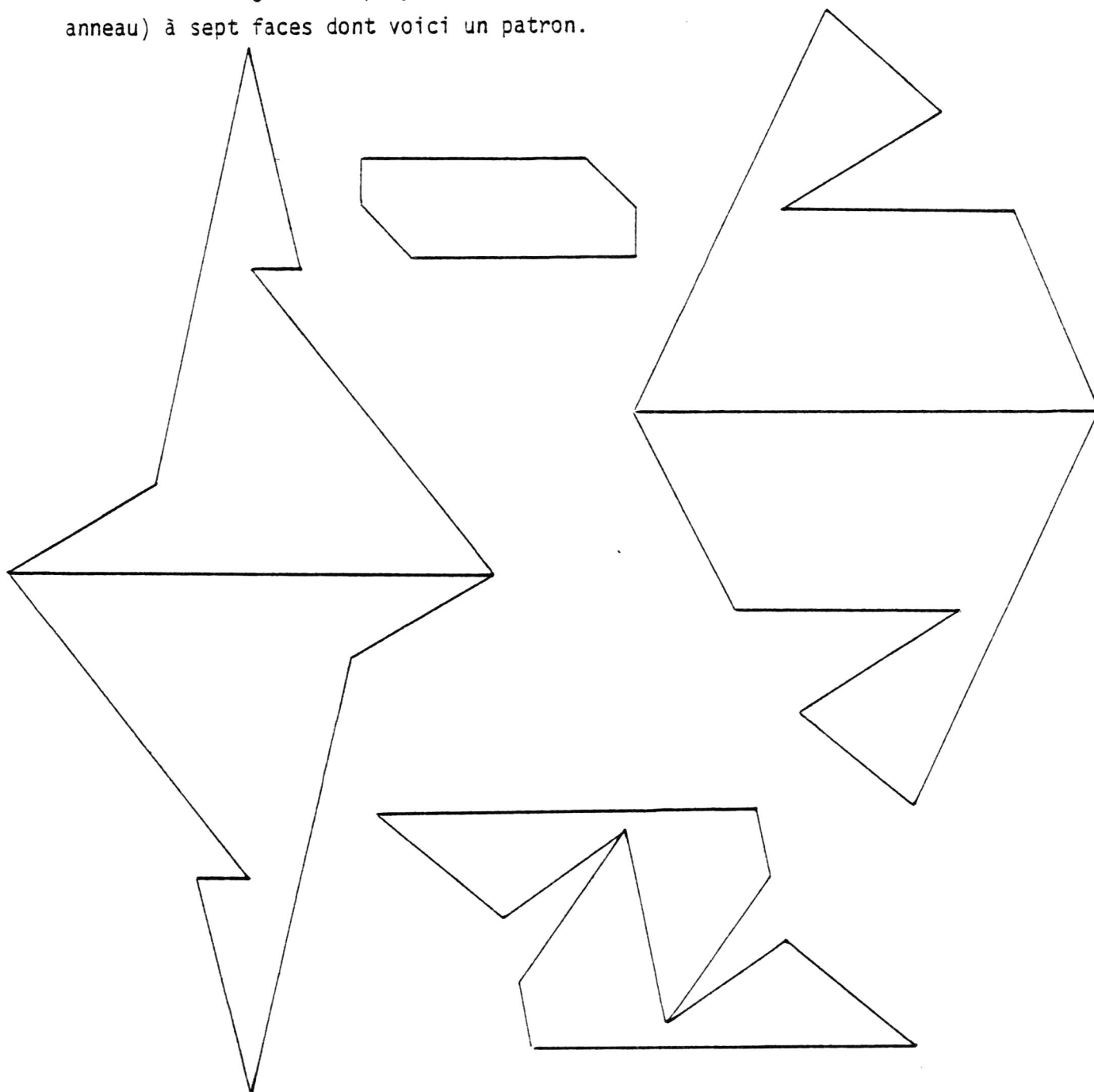
LE POLYEDRE DE SZILASSI	ACTIVITE ELEVE : N° 9
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

Avez-vous déjà remarqué que le tétraèdre possède une propriété curieuse : chacune de ses faces est adjacente aux trois autres.

Connaissez-vous d'autres polyèdres ayant la même particularité ? ...

... Non, sans doute, puisqu'il fallut attendre 1977 pour qu'un hongrois, Lajos Szilassi découvre un tel objet.

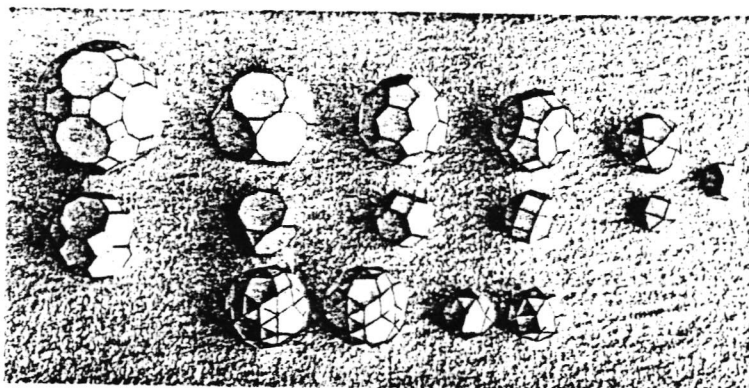
Il s'agit d'un polyèdre annulaire (c'est-à-dire percé d'un trou, comme un anneau) à sept faces dont voici un patron.



Pratiquement on aura intérêt à utiliser des faces trois ou quatre fois plus grandes que celles qui sont dessinées ici, de manière à ce que l'épaisseur du support joue aussi peu que possible. Pour la même raison il conviendra d'utiliser du carton fin.

Pour le collage des faces, une solution simple est d'utiliser du papier collant extérieur, mais les adroits utiliseront des languettes de collage internes ; de toute façon c'est la dernière face qui est difficile à placer !

Enfin il conviendra de colorier chaque face différemment pour mettre en évidence la remarquable propriété de cet objet.

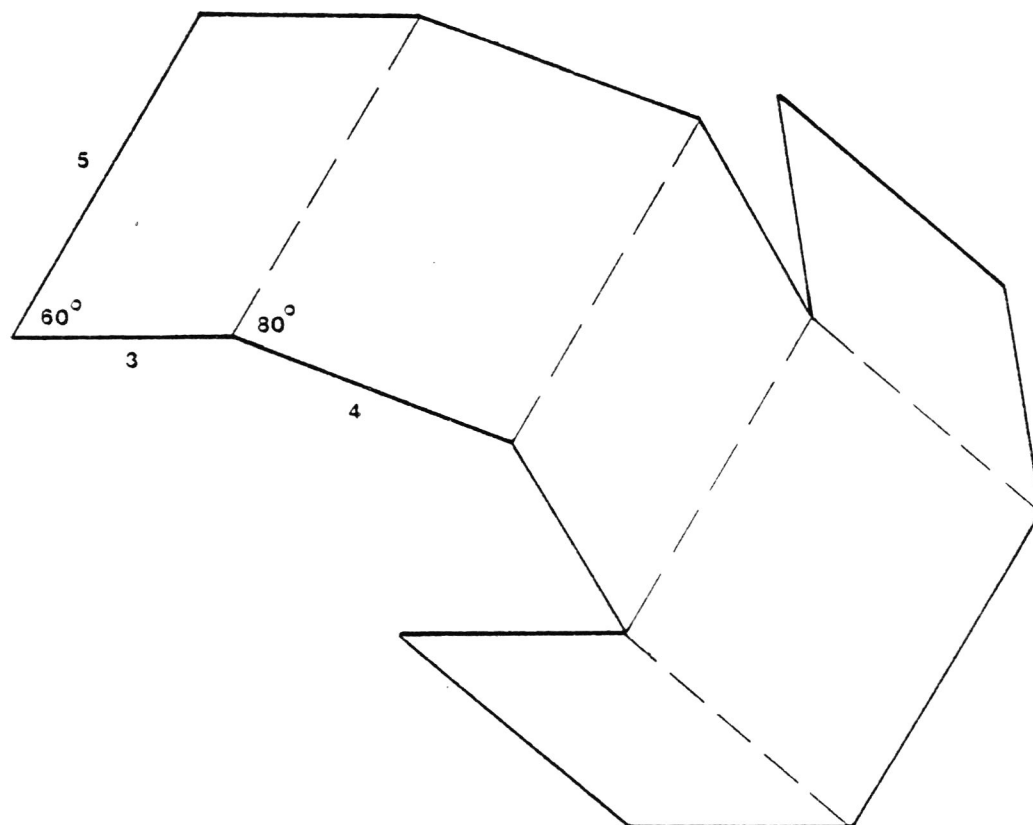


Sources : Martin Gardner, chronique du Scientific American.

REALISATION D'UN PARALLELEPIPEDE OBLIQUE

ACTIVITE ELEVE : N° 10

POLYEDRES

NIVEAU : 2^e

I Décalque sur du carton léger la figure ci-dessus - colorie l'intérieur de la figure tracée en traits continus.

Découpe selon les traits continus, plie selon les traits pointillés de façon à obtenir une boîte. Où se trouvent les parties coloriées ?

Cette boîte s'appelle un parallélépipède oblique - découpe maintenant toutes ses faces. Quelles remarques peux-tu faire ?

II Tu vas maintenant essayer de construire toi-même des patrons de parallélépipèdes obliques. Pour chacun d'eux il te faut construire six parallélogrammes.

1er parallélépipède

nombre de parallélogrammes	mesure d'un côté	mesure d'un autre côté	mesure d'un secteur angulaire
2	7	4	60°
2	7	9	70°
2	4	9	80°

Essaie maintenant de disposer tes parallélogrammes les uns à côté des autres de façon à obtenir le patron d'une boîte.

Tu peux pour chacun de tes essais coller avec du scotch les parallélogrammes qui se trouvent l'un à côté de l'autre, et vérifier si tu obtiens bien une boîte en pliant.

Si tu n'y arrives pas, tu peux pour t'aider colorier une face de chaque parallélogramme de façon à ce que toutes les parties coloriées se trouvent à l'extérieur de la boîte - rappelle-toi alors les remarques que tu as faites sur la première boîte.

Compare la boîte que tu obtiens avec celle de tes camarades ; vous devriez avoir deux sortes de boîte.

Note pour chaque sorte de boîte, la somme des angles des trois parallélogrammes qui se trouvent en chaque sommet de la boîte.

Que remarques-tu ?

2ème patron

nombre de parallélogrammes	mesure d'un côté en cm	mesure d'un autre côté en cm	mesure d'un secteur angulaire en degré
2	5	7	45
2	5	4	65
2	4	7	85

Compare la boîte que tu construis avec celles de tes camarades.

Que remarques-tu ? Essaie d'expliquer pourquoi.

POLYEDRES REGULIERS CONVEXES

ACTIVITE ELEVE : N° 11

POLYEDRES

NIVEAU : 6ème ET AU DELA

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont un même polygone régulier et tels qu'à chaque sommet le nombre de faces soit le même.

On va s'intéresser ici aux polyèdres réguliers convexes.

A Cherche un patron pour les polyèdres réguliers suivants :

a) le tétraèdre

ses faces sont 4 triangles équilatéraux
chaque sommet appartient à 3 faces

b) le cube

bien connu

c) l'octaèdre

ses faces sont 8 triangles équilatéraux
chaque sommet appartient à 4 faces

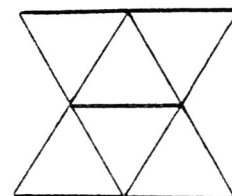
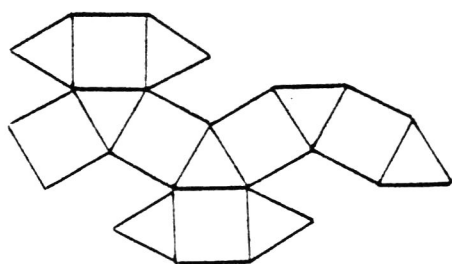
d) le dodécaèdre

ses faces sont 12 pentagones réguliers
chaque sommet appartient à 3 faces

e) l'icosaèdre

ses faces sont 20 triangles équilatéraux
chaque sommet appartient à 5 faces.

B Ce patron est-il celui d'un polyèdre régulier ?



et celui-ci ?

◇ En fait, tu vas prouver qu'il n'existe pas beaucoup d'autres polyèdres convexes réguliers que les 5 polyèdres du A.

Pour cela il te faut faire quelques remarques :

- 1) dans un polyèdre chaque sommet appartient à au moins 3 faces !
- 2) la somme des angles des faces qui entourent un même sommet doit être inférieure à 360° (pour un polyèdre convexe).

Maintenant, raisonne :

Si un polyèdre convexe régulier a des faces qui ont

- a) 3 côtés ce sont des triangles équilatéraux (angle 60°)

Chaque sommet peut appartenir à • 3 faces (somme des angles $60+60+60=180$
c'est possible)

il s'agit du tétraèdre

- 4 faces (somme des angles $4 \times 60 = 240$
toujours possible)

il s'agit du ...

Continue le raisonnement avec les triangles, puis les carrés, etc ...

Conclue.

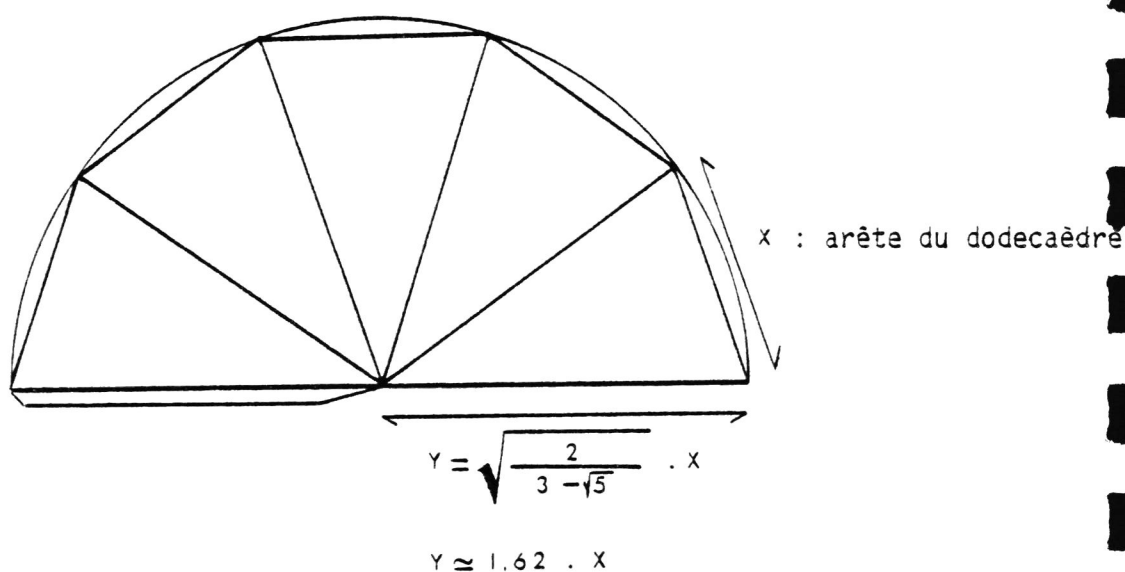
LES POLYEDRES DE KEPLER-POINSOT	ACTIVITE ELEVE N° 12
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

Les polyèdres de Kepler-Poinsot sont des polyèdres réguliers non convexes. Les anciens en ignoraient l'existence ; Kepler découvrit les 2 dodecaèdres étoilés et Poinsot les deux autres.

On a démontré ultérieurement que ce sont les seuls.

Le Petit dodécaèdre étoilé

Pour le construire, le plus simple est de fabriquer des pyramides à base pentagonale et de les coller à l'aide d'onglets sur un dodecaèdre :



Il faut 12 telles pyramides.

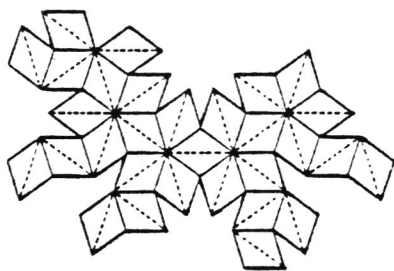
Les faces du polyèdre ainsi constituées sont des pentagones étoilés dont seules les "branches" émergent.

Colorier (pour chaque face) les branches d'une même face d'une seule couleur sera un coloriage intéressant.

Le grand dodecaèdre

Un patron est ici utilisable, mais on aura intérêt à le prévoir assez grand, les sommets, étant l'intersection de cinq faces, portent dix plis.

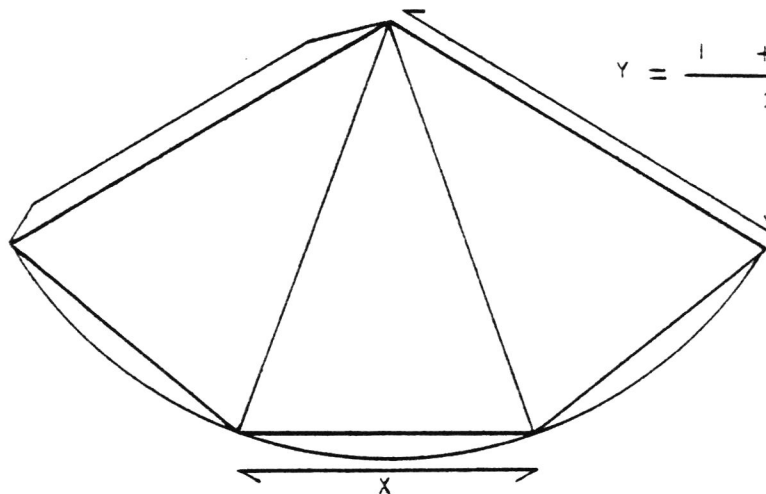
Seul un coloriage approprié pourra mettre en évidence les parties des faces (pentagonales) qui ne sont pas cachées.



les plis pointillés sont à plier dans un sens, les plis pleins dans l'autre.

Le grand dodecaèdre étoilé.

Pour le construire on pourra fabriquer 20 pyramides à base triangulaire et les coller à l'aide d'onglets sur un icosaèdre :



$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x \approx 1,6 \cdot x$$

arête de l'icosaèdre

Remarque : le grand et le petit dodecaèdre étoilé ont des facettes identiques (respectivement 60 et 20 triangles isocèles)

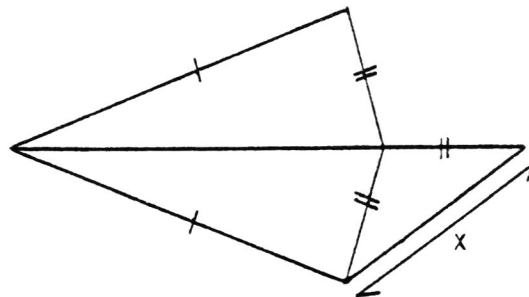
On pourra donc, avec une collection de 80 triangles, construire ces deux polyèdres en utilisant du papier collant transparent pour les assembler.

Pour obtenir 80 triangles identiques rapidement voir la technique B page 58

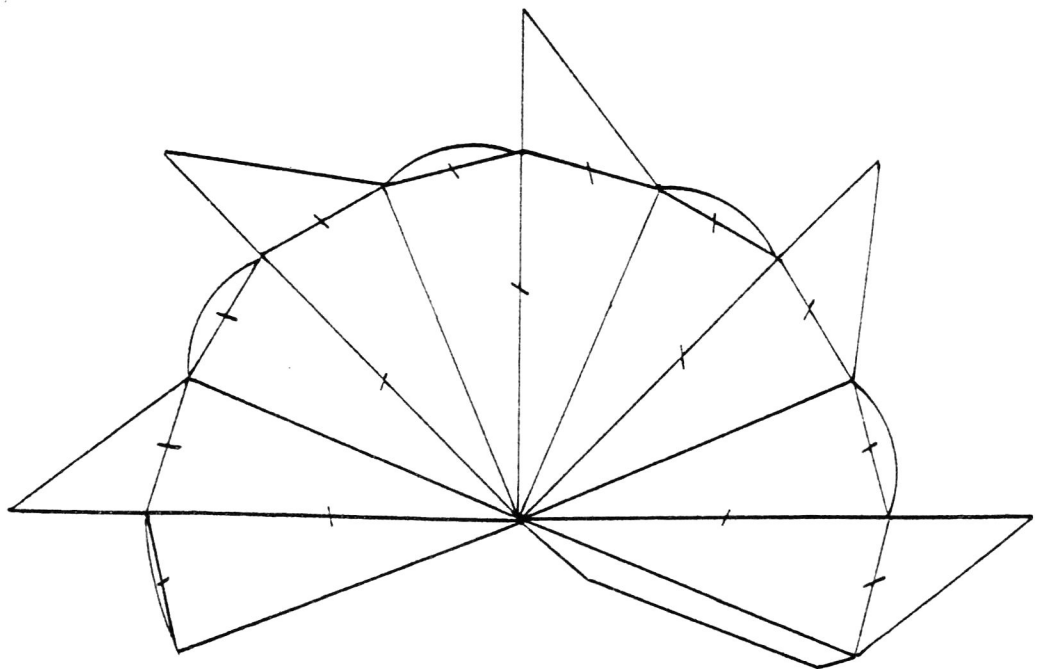
Le grand icosaèdre

Voici une technique de construction relativement aisée pour ce grand polyèdre (elle est due à Mr Bridge, cité par Cundy et Rolett)

a) Il faut d'abord fabriquer un élément de ce type .

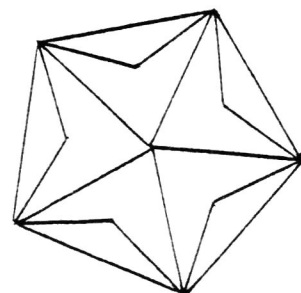


b) ensuite on en déduit un quintuple du précédent :



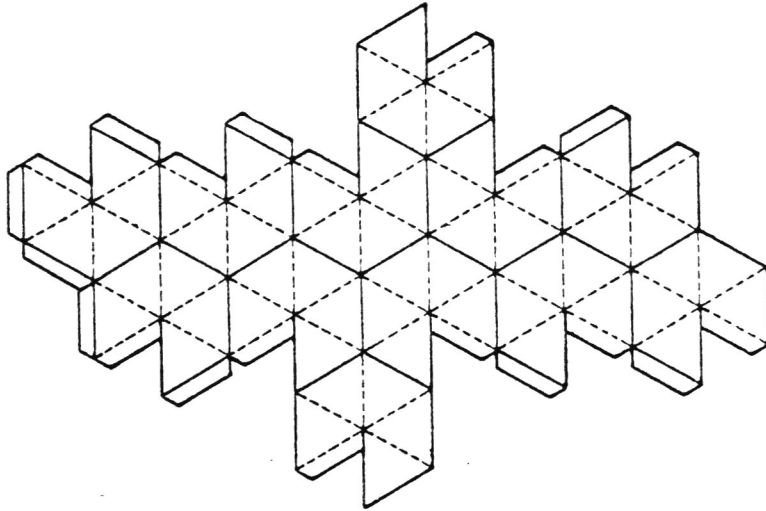
On marquera (au cutter) les plis de la manière suivante : les plis cochés au verso (ils seront à l'intérieur du polyèdre), les autres plis au recto (ils seront à l'extérieur). Ceci en n'omettant pas de placer les languettes indiquées..

Après pliage et collage, à titre indicatif, on obtient une sorte de pyramide (non convexe) qui vue de-dessus donne ceci :



c) il vous faut maintenant fabriquer 11 autres pyramides identiques.

d) reste à réaliser le patron du support de vos pyramides (un deltaèdre)
dont voici un modèle :



les triangles équilatéraux ont pour côté la longueur x qui est cotée au a).

et à fabriquer ce deltaèdre.

e) puis, finalement, on collera les 12 pyramides dans les creux du deltaèdre où elles viennent s'encastrent !

En général, quand on arrive au bout, on est assez fier ...

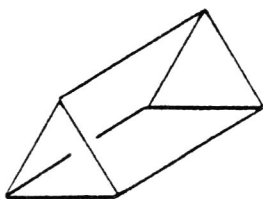
POLYEDRES ARCHIMEDIENS	ACTIVITE ELEVE : N° 13
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

On appelle polyèdre archimédien un polyèdre dont les faces sont choisies parmi 2 polygones réguliers différents disposés de telle sorte qu'en chaque sommet la même disposition se retrouve.

Les plus simples des polyèdres archimédiens sont :

des prismes, dont les faces sont d'une part 2 polygones réguliers superposables situés dans des plans parallèles.

par exemple :



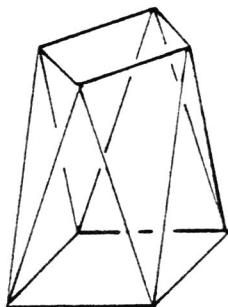
d'autre part des carrés orthogonaux aux polygones précédents.

1) Imagine un patron pour un prisme archimédien à bases hexagonales et réalise le.

des anti-prismes, dont les faces sont d'une part 2 polygones réguliers

superposables situés dans des plans parallèles

par exemple :



d'autre part des triangles équilatéraux situés dans des plans orthogonaux aux polygones précédents.

2) Imagine un patron pour un anti-prisme archimédien à bases hexagonales et réalise le.

Il y en a autant, de chaque sorte, que de polygones réguliers, c'est-à-dire vraiment beaucoup.

Hormis les prismes et les anti-prismes archimédiens existent 13 polyèdres archimédiens convexes dont voici les patrons.

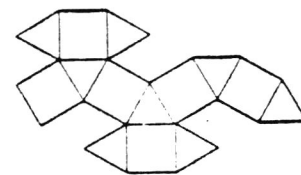
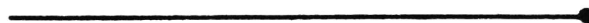
3) Choisis un des ces solides et réalise le.

(Une classe aura intérêt à se partager le travail. En sélectionnant les meilleurs réussites, on pourra réaliser une exposition du meilleur effet).

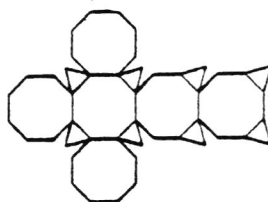
Tétraèdre tronqué



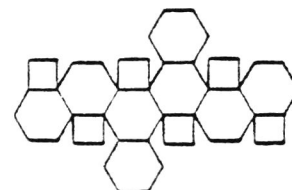
Cuboctaèdre



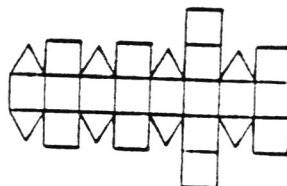
Cube tronqué



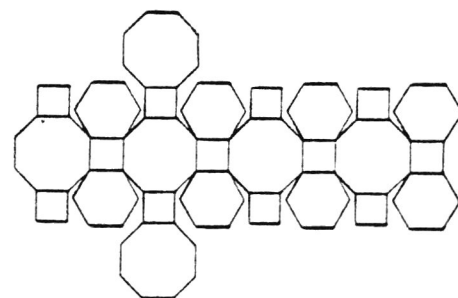
Octaèdre tronqué



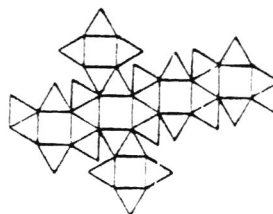
Petit Rhombicuboctaèdre



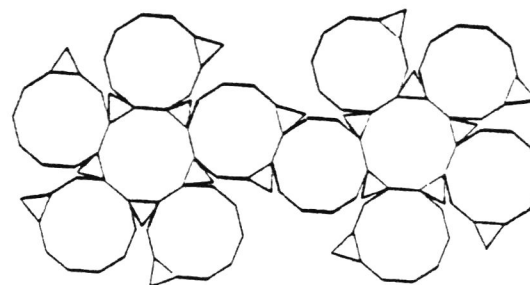
Grand Rhombicuboctaèdre



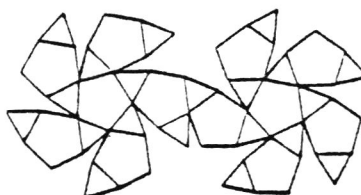
Snub-cube



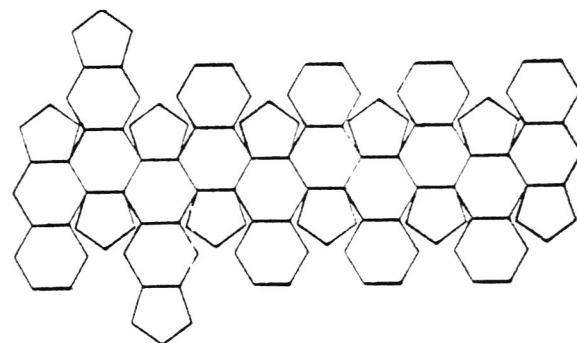
Dodecaèdre tronqué



Icosidodecaèdre



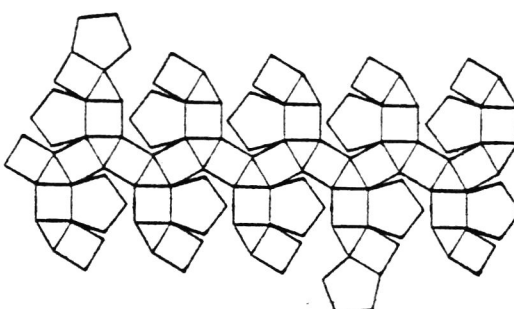
Icosaèdre tronqué



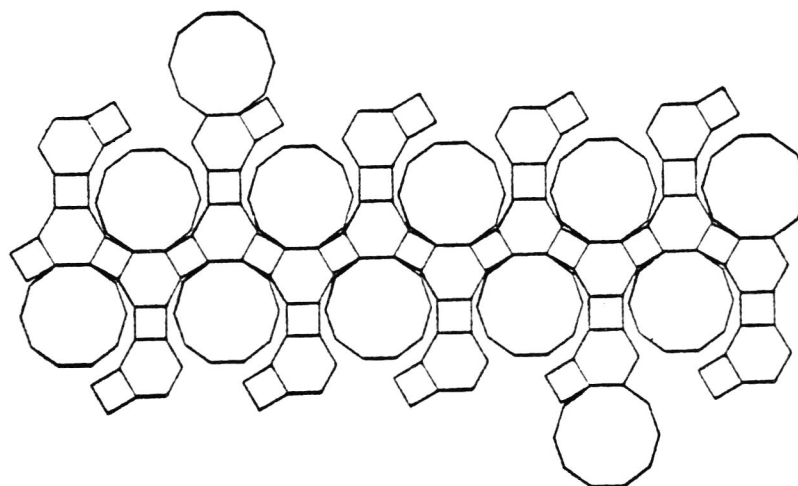
Petit



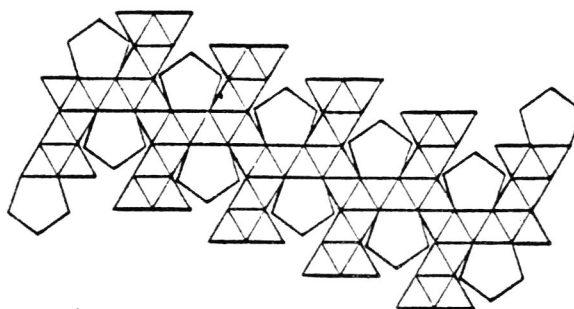
Rhombicosidodecaèdre



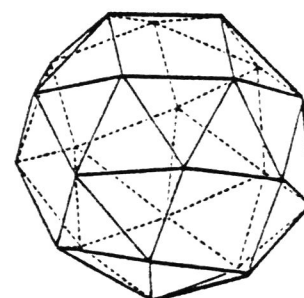
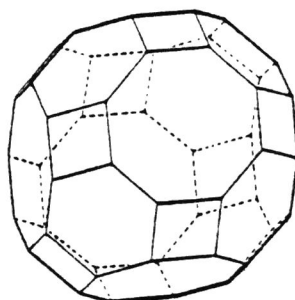
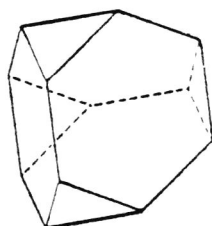
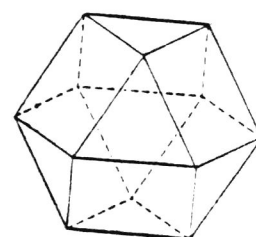
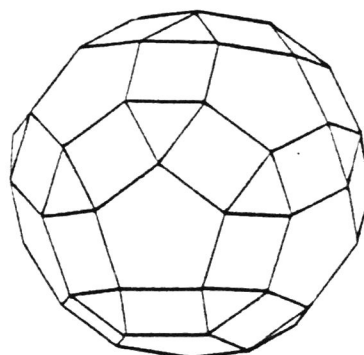
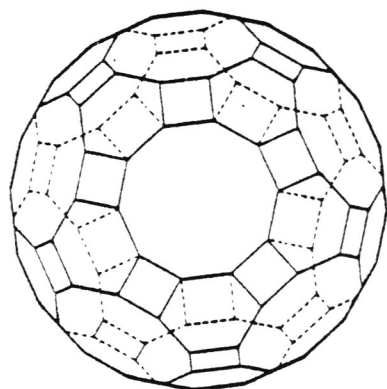
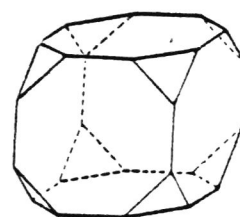
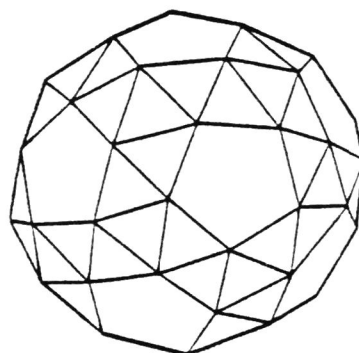
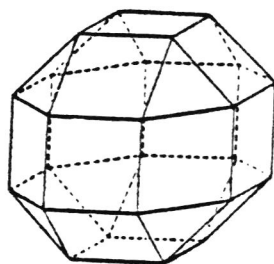
Grand
Rhombicosidodecaedre



Snub
dodecaedre



4 ➡ Voici divers dessins représentant des polyèdres archimédiens.
Sauras-tu retrouver leurs noms ?



Un système de codage existe pour différencier ces solides :

On repère un type de face par le nombre de ses côtés et on indique en exposant le nombre de faces de ce type intervenant à chaque sommet.

Par exemple le cube sera codé 4^3 (les faces ont 4 côtés et chaque sommet appartient à 3 carrés).

le dodecaèdre est codé 5^3 .

le cube tronqué est codé 3.8^2 (les faces sont des triangles (3) qui n'apparaissent qu'une fois par sommet (1) : $3^1 = 3$; et aussi des octaèdres (8) qui apparaissent deux fois par sommets (2) : 8^2).

- 5⇒ Code ainsi :
- a) un tétraèdre
 - b) un icosaèdre
 - c) un cuboctaèdre
 - d) un grand rhombicosidodecaèdre
 - e) un Snub dodecaèdre

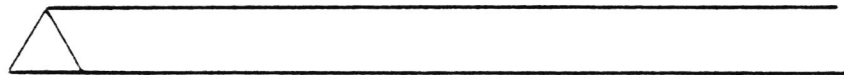
- 6⇒ Quels sont les solides ainsi codés ?
- a) 5.6^2
 - b) 3^4
 - c) 3.4.5.4

DELTAEDRES	ACTIVITE ELEVE : N° 14
POLYEDRES	NIVEAU : TOUS

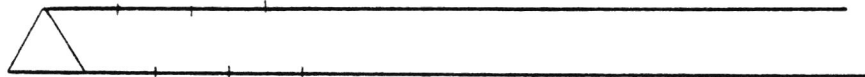
Un deltaèdre est un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux de mêmes dimensions.

- ◇ A Fabrique-toi une bonne collection de triangles équilatéraux de mêmes dimensions (dans un premier temps une quarantaine par exemple).*

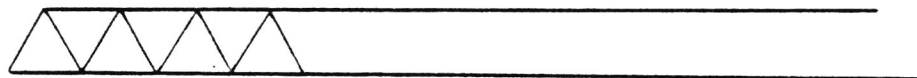
Une technique commode pourra être d'en construire un (au compas) puis de tracer une bande comme ci-dessous :



Enfin de reporter le côté du triangle sur les deux bords de la bande :



Il ne reste plus qu'à découper :



- ◇ B Maintenant, tu vas assembler (avec du papier adhésif) tes triangles de manière à fabriquer divers deltaèdres convexes. Essaie d'en trouver un maximum.

* Dans un objectif de gain de temps le professeur pourra apporter une collection de triangles équilatéraux pour la classe : une technique très rapide (utilisant un massicot) (voir thème 3 page 57) est donnée dans HOLDEN : "formes, espaces et symétries" CEDIC (P. 198).

◇ C Ta classe se trouve maintenant à la tête d'une collection de deltaèdres convexes !
le problème est de savoir si vous les avez tous !

Raisonnons en recherchant le nombre possible, n , de faces pour un deltaèdre régulier.

→ chaque face ayant 3 côtés, un deltaèdre aura $\frac{3n}{2}$ arêtes

{ Chaque arête a été comptée deux fois }

Donc n est un nombre pair.

→ chaque sommet appartient à, au moins, 3 faces et à, au plus, 5 faces
(6 triangles équilatéraux adjacents forment un hexagone plan).

le plus petit deltaèdre convexe est donc tel que chacun de ses sommets appartienne à 3 faces :

C'est un polyèdre régulier qui a 4 faces.

Quel est son nom ?

le plus grand deltaèdre convexe est donc tel que chacun de ses sommets appartienne à 5 faces :

C'est un polyèdre régulier qui a 20 faces.

Quel est son nom ?

Récapitulons : n est un nombre pair compris entre 4 et 20

Quelles sont les possibilités ?

(Attention ! pour autant, chaque possibilité ne conduit pas à un deltaèdre existant - en fait il n'y a pas de deltaèdre à 18 faces)

Finalement . : Combien y a t-il de deltaèdres convexes ? *

Trouve un nom pour chacun !

Classe les !

* à cette question il y a de bonnes chances qu'une classe puisse répondre.
on peut effectivement construire 8 deltaèdres (seul manque celui qui aurait 18 faces).

RELATION D'EULER	ACTIVITE ELEVE : N° 15
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

Préalable : cette activité ne peut guère se concevoir sans qu'aient été réalisés un certain nombre de polyèdres (extraits ou non des activités élèves précédentes).

A Pour chacun des polyèdres convexes dont tu disposes, remplis le tableau suivant :

	F Nombre de faces	S Nombre de sommets	A Nombre d'arêtes
Cube	6	8	12
...			

Une relation simple relie ces trois nombres - Découvre-la (**)

Cette égalité s'appelle la Relation d'Euler. Elle est vraie (entre autres) pour tous les polyèdres convexes.

B [Pour ceux qui ont construit les polyèdres de Kepler-Poinsot]

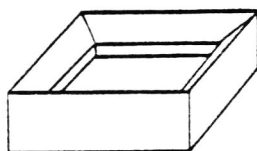
Pour les quatres polyèdres de Kepler-Poinsot (activité élève n° 12), la relation d'Euler est-elle vérifiée ?

Quelle est la particularité de ceux pour lesquels elle est vraie ? (***)

(**) on trouve finalement $S + F - A = 2$

(***) ils sont étoilés ; on comprendra bien pourquoi en regardant la démonstration qu'en donne Berger (Géométrie, Vol. 3, CEDIC)

- C Pour cette question il te faudra fabriquer des polyèdres non convexes "à un trou" ; par exemple :



Fabrique un tableau analogue à celui du A, puis trouve une relation entre les nombres F, S et A.

- D Recommence comme au C avec des polyèdres non convexes, cette fois à deux trous. Trouve la relation qui relie alors F, S et A

- E Peux-tu deviner la relation qui relie F, S et A pour un polyèdre à 10 trous ?, à n trous ?

On trouvera :
 $S + F - A = 2 [1 - T]$ où T est le nombre de trous du polyèdre.

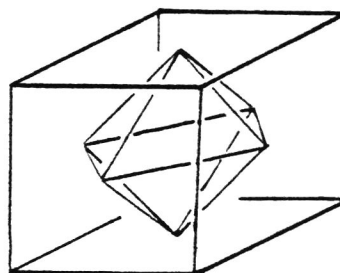
DUALITE	ACTIVITE ELEVE : N° 16
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

Si, dans un polyèdre à faces régulières, on joint les centres des faces adjacentes, on obtient les arêtes d'un autre polyèdre.

On dit que ce dernier est Dual du premier polyèdre.

◇ Par exemple

Pour un cube on peut réaliser le dessin suivant :



- Quel est le dual d'un cube ?
- Compte les arêtes, les sommets et les faces d'un cube et de son dual -
Que remarques-tu ?
Explique !
- Compte le nombre de côtés des faces du cube - où peux-tu retrouver ce nombre sur son dual ?
Explique !
- Compte le nombre d'arêtes par sommet sur le cube - où peux-tu retrouver ce nombre sur son dual ?
Explique !
- Comment sont disposées les arêtes qui se correspondent dans le polyèdre et son dual ?

B Polyèdres réguliers

Dans un polyèdre régulier les faces sont les mêmes et chaque sommet porte la même séquence d'arêtes et de faces. On peut comprendre alors que le dual d'un polyèdre régulier soit régulier.

- a) Quels sont les Duals des cinq polyèdres convexes ?
(Voir activité élève N° 11).

Conseil : tu peux soit faire un dessin, soit faire jouer ton imagination, soit compter faces et sommets et tenter de deviner.

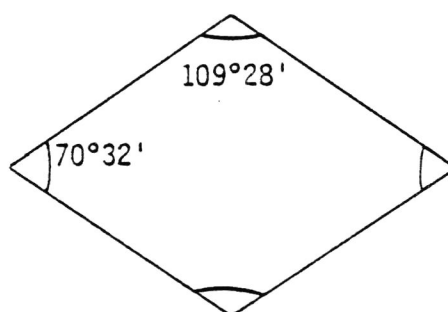
- b) Quels sont les Duals des quatre polyèdres de Kepler-Poinsot ??
(Voir activité élève N° 12).

C Polyèdres Archimédiens

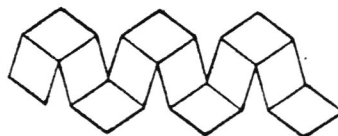
Dans un polyèdre Archimédien, les faces sont de deux sortes de polygones réguliers mais les sommets comportent la même séquence de faces (voir activité élève N° 13).

- a) En raisonnant, combien y aura-t'il de sortes de faces dans le polyèdre dual d'un polyèdre archimédien ?
- b) De même, combien y aura-t'il de sortes de sommets dans le polyèdre dual d'un polyèdre archimédien ?
- c) Le polyèdre dual d'un cuboctaèdre est appelé un dodécaèdre rhombique (de rhombe, vieux mot pour losange).

Voici le modèle d'une de ses faces :



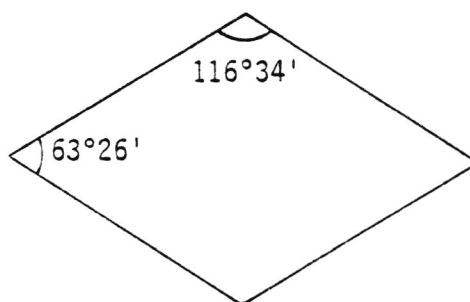
et en voici un patron :



Construis-le .

d) le dual de l'Icosidodecaèdre est aussi formé de losanges : on l'appelle le Triacontaèdre rhombique.

Voici le modèle d'une de ses faces, combien en a t'il ?



Imagines en un patron (Pense à l'alternance des différentes sortes de sommets).

UN POLYEDRE FLEXIBLE	ACTIVITE ELEVE : N° 17
POLYEDRES	TOUS NIVEAUX

Il est assez intuitif de penser qu'un polyèdre convexe est rigide, c'est-à-dire que les distances entre ses sommets sont fixes. Effectivement, cela a été prouvé par Cauchy en 1813.

Par contre qu'en est-il pour un polyèdre non convexe ?

La question est restée "ouverte" (c'est-à-dire sans réponse) jusqu'en 1977 où un chercheur américain, R. Connelly, a effectivement construit un polyèdre flexible (c'est-à-dire dont les distances de certains sommets sont variables, mais dont les faces sont rigides).

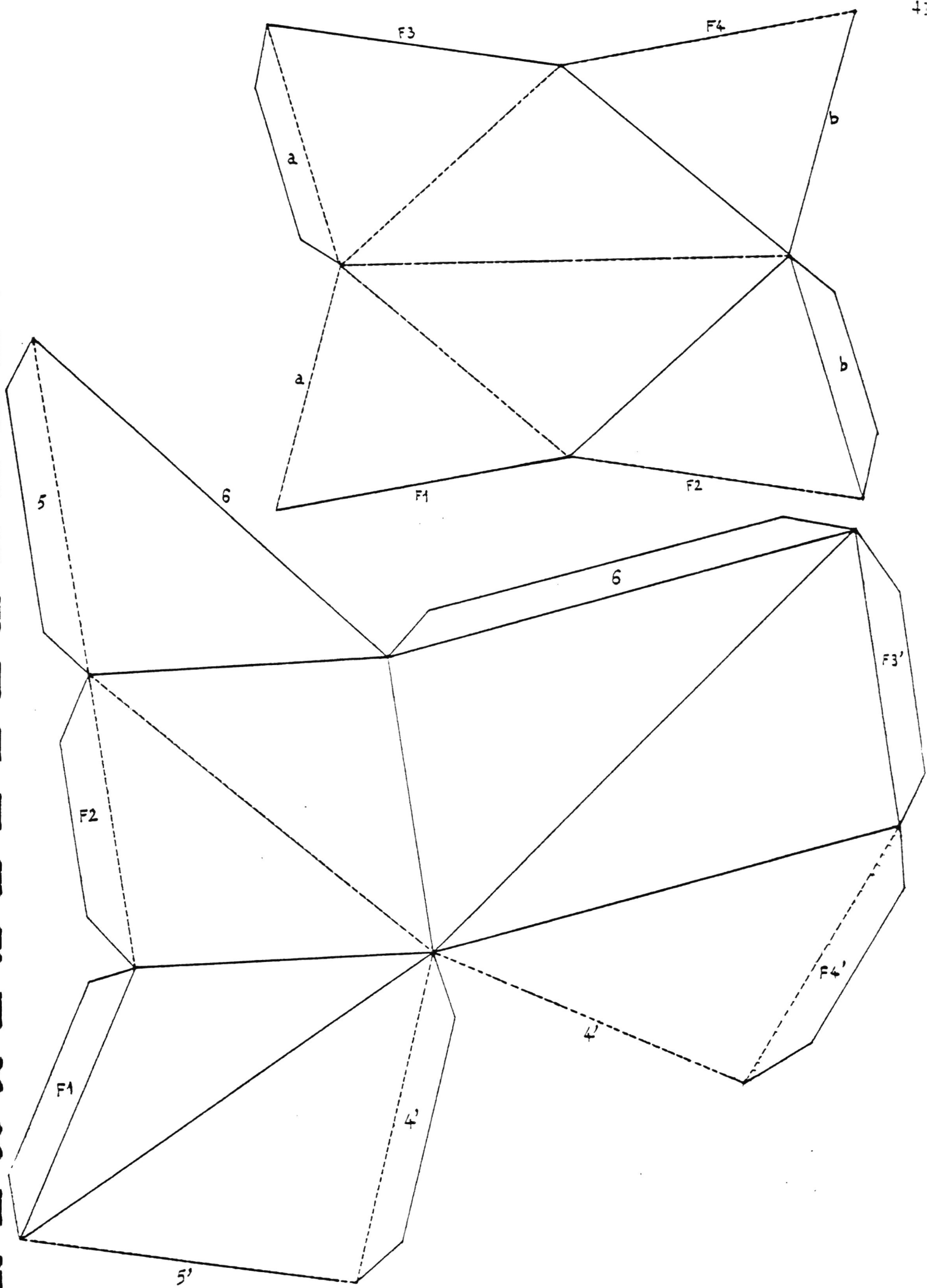
Voici une technique de construction d'un polyèdre flexible à 16 sommets que nous avons extraite d'un article de J. Lefort dans l'OUVERT, le bulletin de l'I.R.E. de Strasbourg.

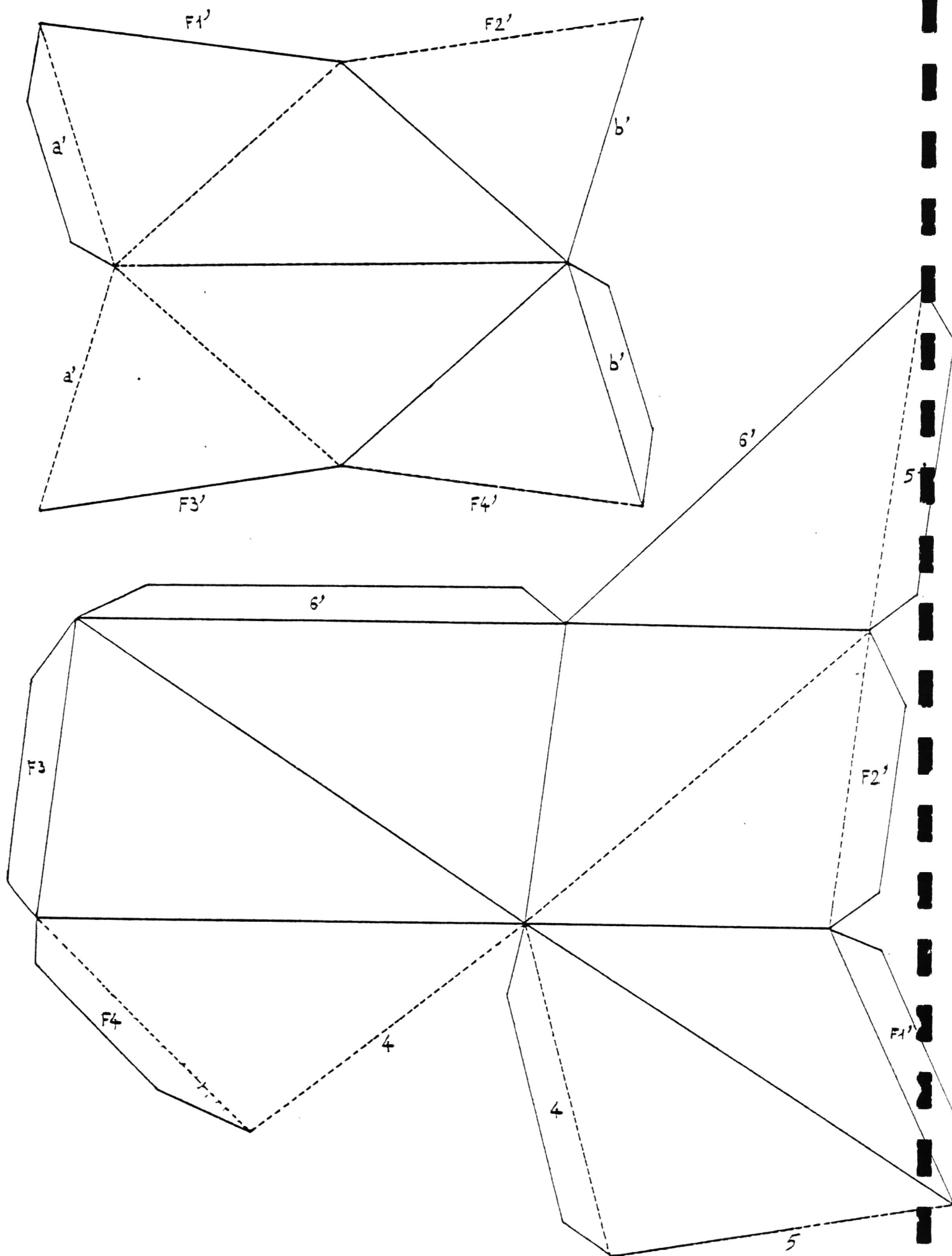
La réalisation en est assez délicate, le papier étant trop peu rigide. L'idéal serait d'utiliser du carton contre collé, mais alors il faudra tenir compte de son épaisseur au moment de la réalisation.

La technique suivante fonctionne assez bien avec du carton fin.

- [1] Réaliser les patrons des 4 morceaux indiqués (par exemple par perçage avec une pointe de compas). (Voir page suivante).
- [2] Reporter sous la feuille les repères des différentes arêtes.
- [3] Marquer les plis continus au cutter au recto de la feuille (plis saillants) et les plis pointillés au verso (plis rentrants).
- [4] Coller les pattes dans l'ordre suivant :
a, b, a', b', F_2 , F_1 , F_2' , F_1' , F_4' , F_3' , 6, 5, 4, F_4 , F_3 , 4', 5', 6'

Pour comprendre "d'où cela sort", on pourra consulter l'article de Lefort déjà cité ou "How to built a flexible Polyhedral Surface", R. Connelly, Cornell University, ou encore "A Counter example to the rigidity conjecture for polyhedra", Publications math. de l'IHES N° 67, PUF.







POLYEDRES

THEMES

QUELQUES PAVAGES DE L'ESPACE

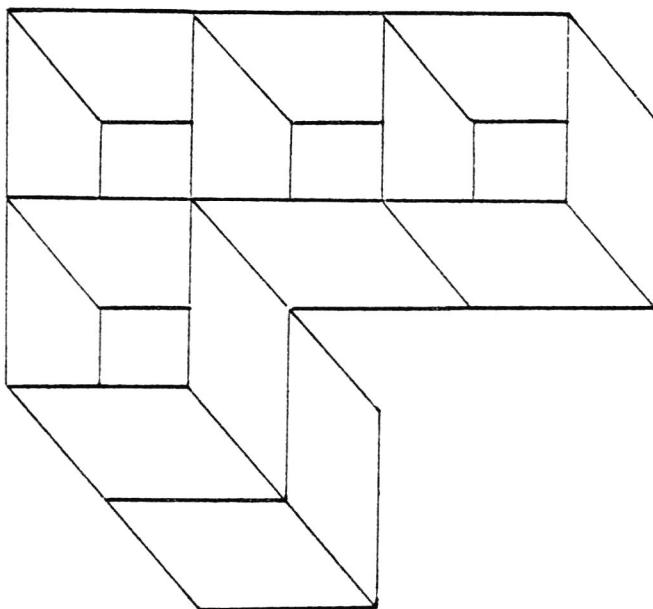
POLYEDRES

THEME 1

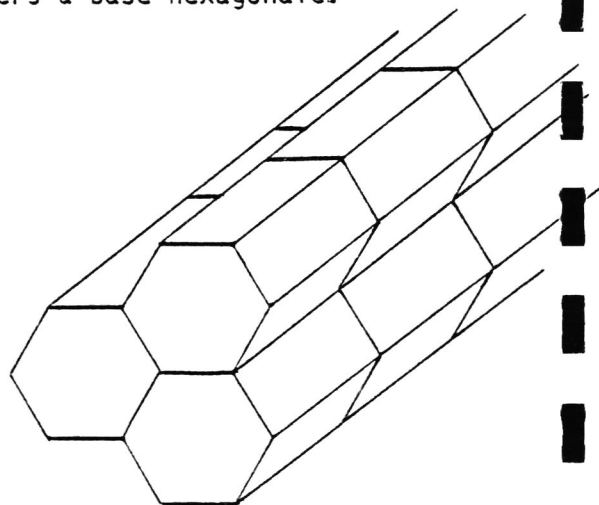
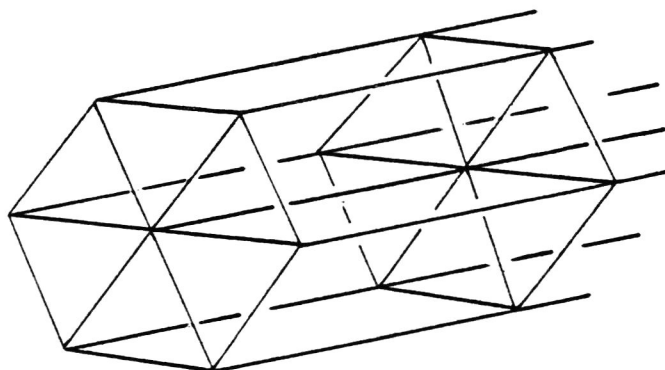
Les photos sont tirées de "Formes Espaces et Symétries" de A. Holden (Ed. CEDIC).

L'idée de départ est de s'intéresser à diverses sortes de pavages de l'espace.

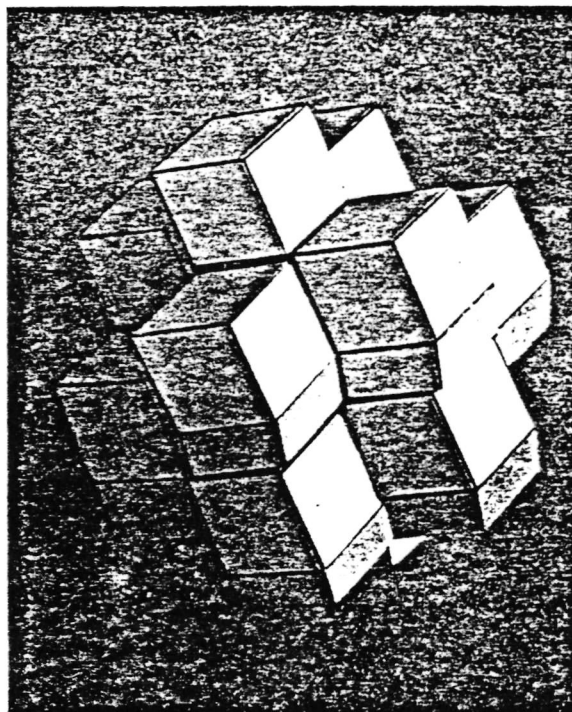
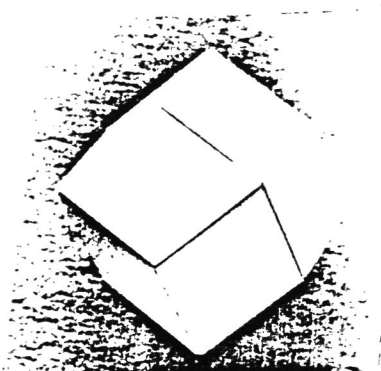
Il y en a ● d'évidents : pavage par des cubes, des parallélépipèdes rectangles.



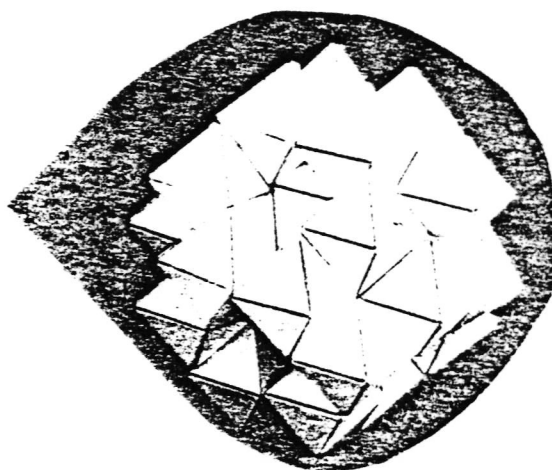
- de presque évidents : prismes réguliers à base triangulaire.
prismes réguliers à base hexagonale:



- d'autres beaucoup plus difficiles à trouver, comme par exemple pavage par des dodécaèdres rhombiques.

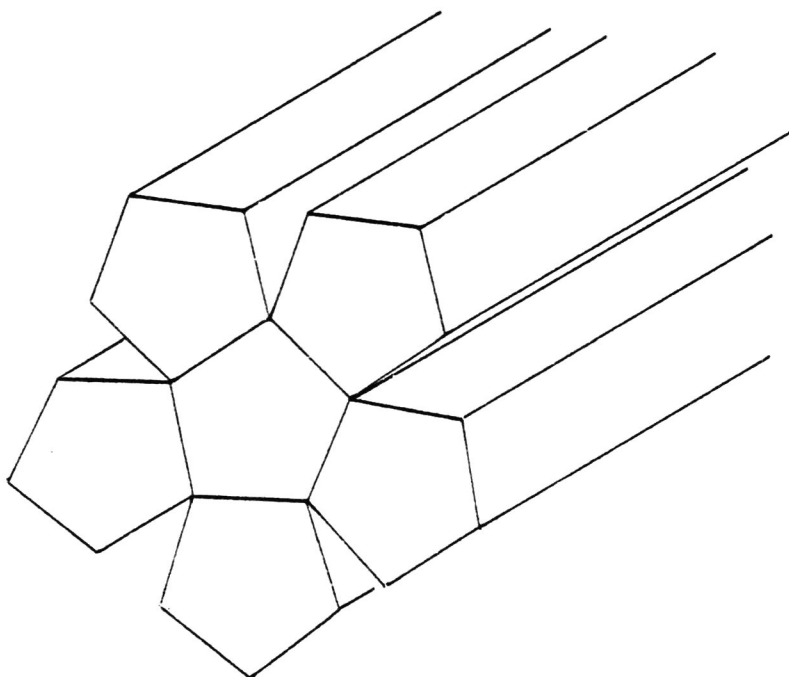


- ou encore pavage utilisant deux sortes de solides avec par exemple des tétraèdres et des octaèdres.



Quelles activités peut-on envisager autour de ce thème ?

- se contenter de regarder les pavages les plus simples comme par exemple ceux obtenus avec une sorte de solide, des prismes réguliers, manque un peu d'intérêt car on voit assez rapidement que cela revient à chercher les pavages réguliers du plan ; c'est ainsi par exemple que l'on ne peut paver l'espace avec des prismes réguliers pentagonaux tout simplement parce qu'on ne peut paver le plan avec des pentagones réguliers.



Il y a des "vides" qui ne peuvent être remplis par des prismes pentagonaux réguliers.

- pour les autres pavages, on voit mal comment des élèves de premier cycle pourraient les trouver.

Alors ... ?

Indiquons d'abord pour le professeur que si l'on cherche des pavages avec des polyèdres réguliers ou archimédiens ou leurs duals

- utilisant une sorte de solide , on en trouve seulement 5 :

cubes
prismes triangulaires
prismes hexagonaux
dodécaèdres rhombiques
octaèdres tronqués

- utilisant plusieurs sortes de solides arrangés tous de la même façon autour de chaque arête ,
on en trouve 3 de plus :
tétrahédres et octaédres
tétrahédres et tétraédres tronqués
octaédres et cuboctaédres

Pour les élèves : une activité intéressante, nous paraissant possible au niveau du 1er cycle, consiste en la réalisation explicite de pavages non triviaux par empilement de solides. Le problème majeur est, malheureusement, que cette activité demande un matériel important.

Regardons les choses de plus près :

- supposons que l'on commence à organiser les solides pour faire un pavage - quand peut-on s'arrêter ? c'est-à-dire à partir de quel moment est-on sûr que les solides choisis pavent effectivement l'espace ? Ceci est réalisé quand l'un des solides utilisés n'est plus visible de l'extérieur, que l'on s'est assuré qu'il n'y avait pas de "vide" non visible de l'extérieur et que l'on a vérifié que les solides dont on dispose s'adaptent dans les "vides" extérieurs.
- prenons par exemple le cas du pavage par des dodécaédres rhombiques : chaque dodécaèdre rhombique a 12 faces ; pour réaliser un début de pavage il faut donc • 13 dodécaédres rhombiques : un au centre et ses 12 voisins :
l'assemblage peut être obtenu en collant les solides par leurs faces.
 - 1, au minimum, dodécaèdre rhombique "volant" permettant de vérifier que les formes extérieures sont compatibles avec un remplissage par un tel solide.
 - Soit au minimum 14 dodécaédres rhombiques.

Tentative de conclusion

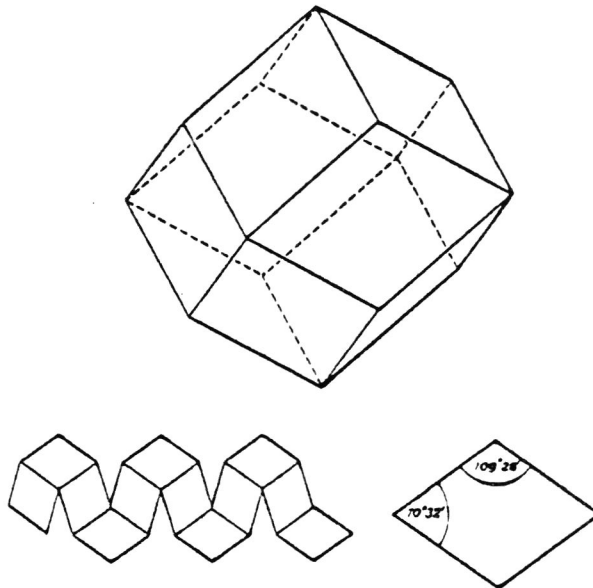
Si donc au cours de vos pérégrinations, mathématiques ou non, vous rencontrez 14 dodécaédres rhombiques, n'hésitez pas : confiez-les à vos élèves avec un peu de colle et faites-en un jeu de construction dont la règle est "empiler les solides de façon à ce qu'il n'y ait pas d'espaces vides entre eux".

Vous pourrez ensuite leur expliquer ce qu'est un pavage de l'espace et leur faire deviner les pavages simples dont nous parlions plus haut.

Quelques données pratiques et encore une belle photo.

1 dodécaèdre rhombique

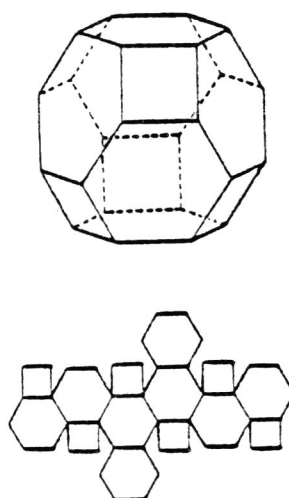
- Voici sa forme et son patron.



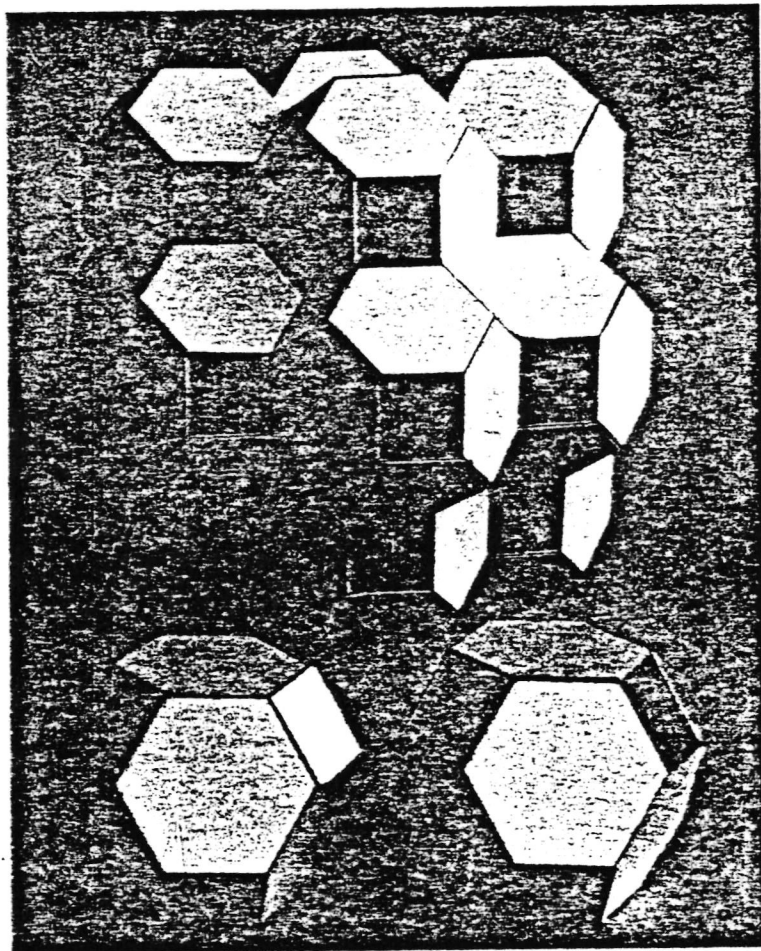
- il en faut au moins 14.
- photo du pavage (voir pages précédentes).

2 octaèdre tronqué

- forme et patron.



- il en faut 16
- 1 au centre et 14 voisins
- 1 "volant".



3 tétraèdres et dodécaèdres

- patrons : voir fiches correspondantes
- photo : voir pages précédentes.

CATALOGUE DES PRINCIPAUX POLYEDRES

THEME 2

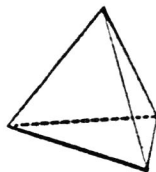
POLYEDRES

POLYEDRES REGULIERS

Un polyèdre ...

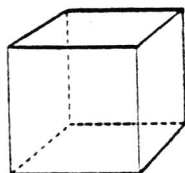
et

... son dual

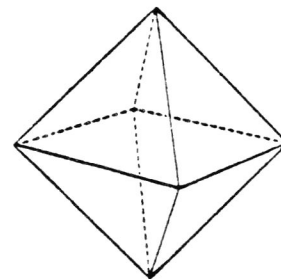
TETRAEDRE

$$F = 4, S = 4, A = 6$$

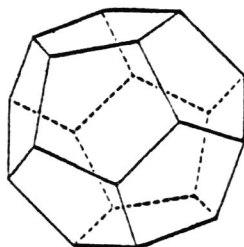
AUTO-DUAL

CUBE

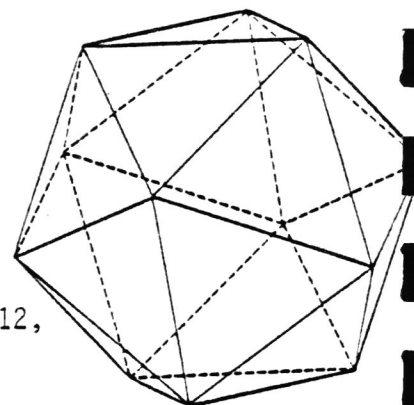
$$F = 6, S = 8, A = 12$$

OCTAEDRE

$$F = 8, S = 6, A = 12$$

DODECAEDRE

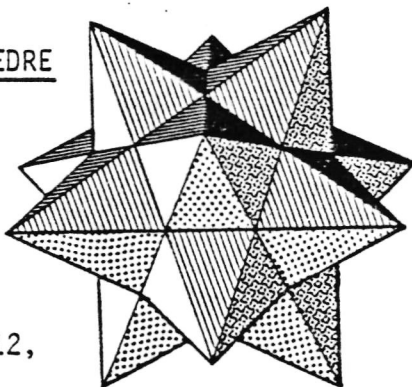
$$F = 12, S = 20, A = 30$$

ICOSAEDRE

$$F = 20, S = 12, \\ A = 30$$

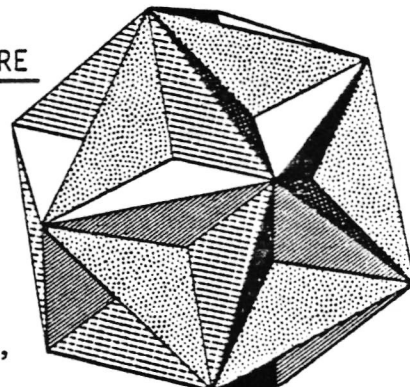
et les non-convexes (polyèdres de KEPLER-POINSOT)

PETIT DODECAEDRE
ETOILE



$F = 12, S = 12,$
 $A = 30$

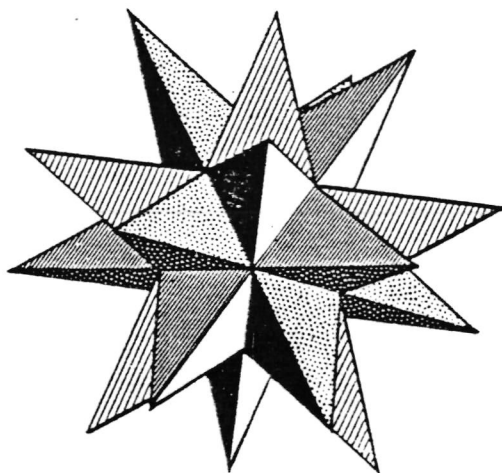
GRAND DODECAEDRE



$F = 12, S = 12,$
 $A = 30$

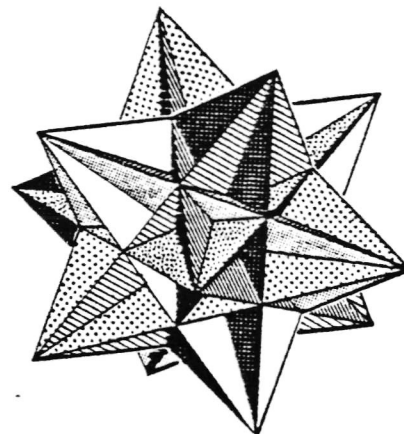
GRAND DODECAEDRE ETOILE

$F = 12, S = 20, A = 30$



GRAND ICOSAEDRE

$F = 20, S = 12, A = 30$

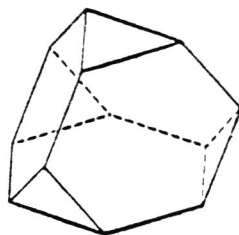


POLYEDRES ARCHIMEDIENS (OU SEMIS-REGULIERS)

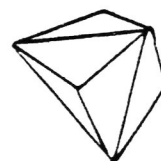
Un polyèdre ...

et

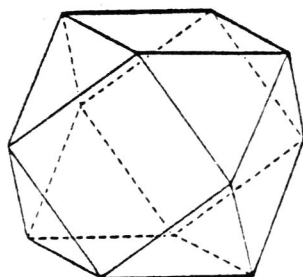
... son dual

TETRAEDRE TRONQUE

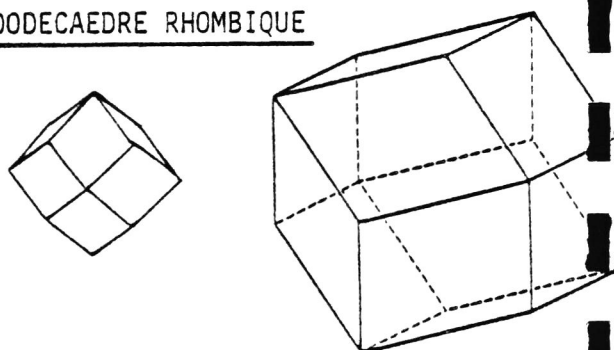
faces triangulaires : 4
 faces hexagonales : 6
 $S = 12$ $A = 18$

TRIAKITETRAEDRE

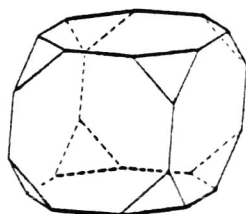
$F = 12$, $S = 10$, $A = 18$

CUBOCTAEDRE

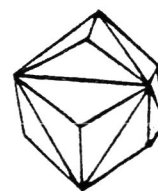
faces triangulaires : 8
 faces carrées : 6
 $S = 12$ $A = 24$

DODECAEDRE RHOMBIQUE

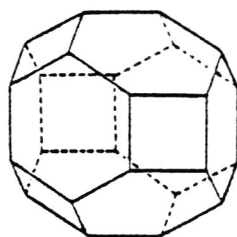
$F = 12$, $S = 14$, $A = 24$

CUBE TRONQUE

faces triangulaires : 8
 faces octogonales : 6
 $S = 24$ $A = 36$

TRIAKIOCTAEDRE

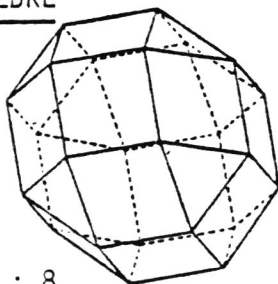
$F = 24$, $S = 14$, $A = 36$

OCTAEDRE TRONQUE

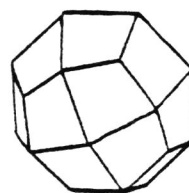
faces carrées : 6
 faces hexagonales : 8
 $S = 24$ $A = 36$

TETRAKIHXAEDRE

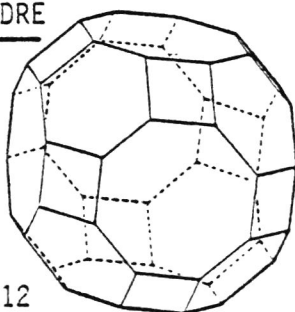
$F = 24$, $S = 14$, $A = 36$

PETIT RHOMBICUBOCTAEDRE

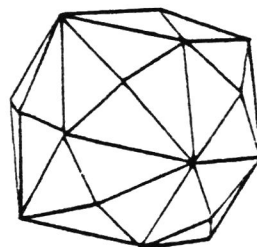
faces triangulaires : 8
 faces carrées : 6
 S = 4 A = 48

ICOSITETRAEDRE TRAPEZOIDAL

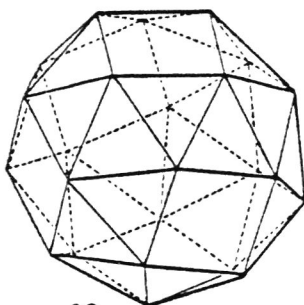
F = 24, S = 10, A = 48

GRAND RHOMBICUBOCTAEDRE

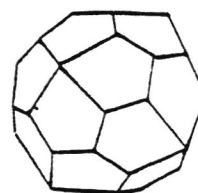
faces carrées : 12
 faces hexagonales : 8
 faces octogonales : 6
 S = 48 A = 72

HEXAKIOCTAEDRE

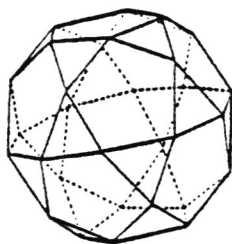
F = 48, S = 26, A = 72

SNUB-CUBE

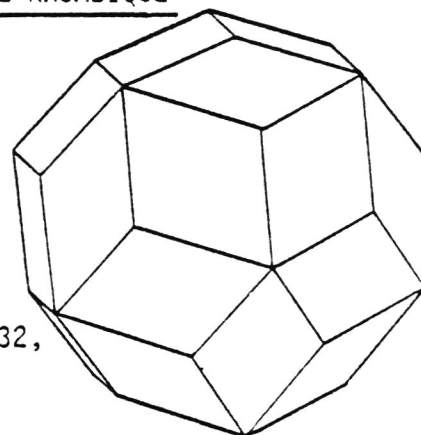
faces triangulaires : 32
 faces carrées : 6
 S = 24 A = 60

ICOSITETRAEDRE PENTAGONAL

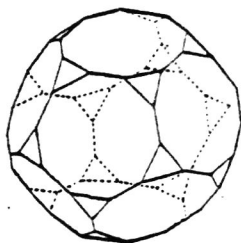
F = 24, S = 38, A = 60

ICOSIDODECAEDRE

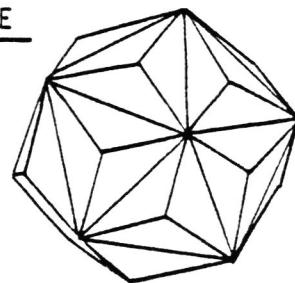
faces triangulaires : 20
 faces pentagonales : 10
 S = 30 A = 60

TRIACONTAEDRE RHOMBIQUE

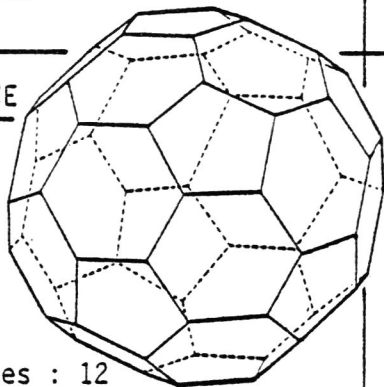
F = 30, S = 32,
 A = 60

DODECAEDRE TRONQUE

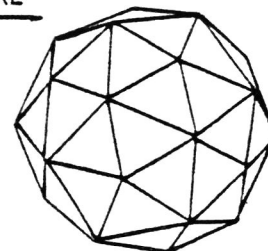
faces triangulaires : 20
 faces décagonales : 12
 $S = 60$ $A = 90$

TRIAKI ICOSAEDRE

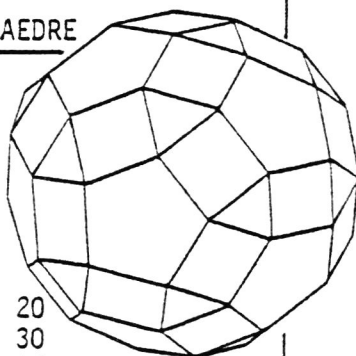
$F = 60, S = 32, A = 90$

ICOSAEDRE TRONQUE

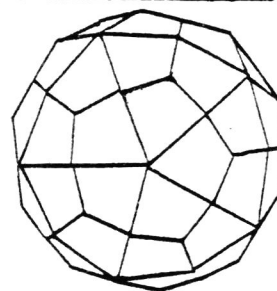
faces pentagonales : 12
 faces hexagonales : 20
 $S = 60$ $A = 90$

PENTAKIDODECAEDRE

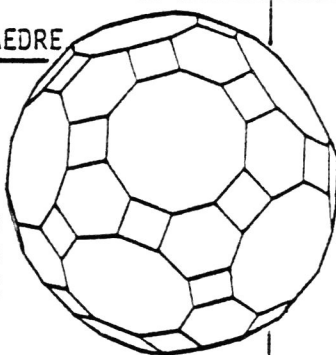
$F = 60, S = 32, A = 90$

PETIT RHOMBICOSIDODECAEDRE

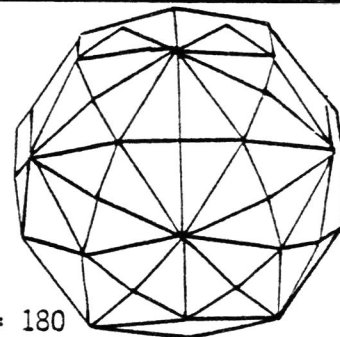
faces triangulaires : 20
 faces carrées : 30
 faces pentagonales : 12
 $S = 60$ $A = 120$

HEXAONTAEDRE-TRAPEZOIDAL

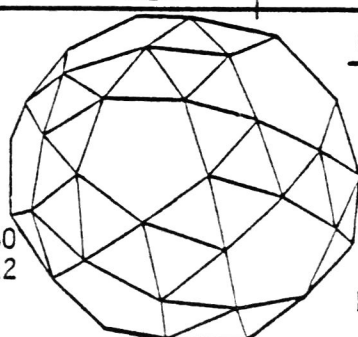
$F = 60, S = 62, A = 120$

GRAND RHOMBICOSIDODECAEDRE

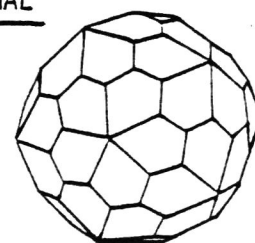
faces carrées : 30
 faces hexagonales : 20
 faces décagonales : 12
 $S = 120$ $A = 180$

HEXAKI-ICOSAEDRE

$F = 120, S = 62, A = 180$

SNUB-DODECAEDRE

faces triangulaires : 80
 faces pentagonales : 12
 $S = 60$ $A = 150$

HEXAONTAEDRE PENTAGONAL

$F = 60, S = 92, A = 150$

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION	THEME N° 3
POLYEDRES	

Dans la construction de Polyèdres, plusieurs techniques sont possibles.

En gros, on peut en mettre en évidence deux qui utilisent du carton et quelques autres qui se servent d'autres matériaux.

Ⓐ Utilisation d'un patron

Pour construire un polyèdre à partir d'un patron (on dit aussi développement) il faudra utiliser du papier épais (ou du carton fin) genre papier à dessin.

a) Réalisation d'un plan

Pour des polyèdres assez simples on réalisera sur la feuille un patron complet ; pour des polyèdres plus complexes, il sera plus commode d'utiliser des morceaux de patrons.

Une technique utile est de réaliser un exemplaire soigné de chaque type de face puis de le reproduire en utilisant un calque où l'on percera les sommets du polygone avec une épingle. C'est fiable et rapide.

b) Pattes de collage

On complètera le dessin en disposant des pattes de collage autour du patron : il suffit de prévoir une patte pour un côté sur deux, en alternant tout autour du patron (du moins pour des polyèdres pas trop complexes).

c) Marquage des plis

A l'aide d'un cutter on marquera les plis du côté destiné à devenir l'extérieur du solide (mais du côté intérieur pour les plis concaves d'un polyèdre non convexe).

d) Collage

On utilisera une colle à séchage rapide.

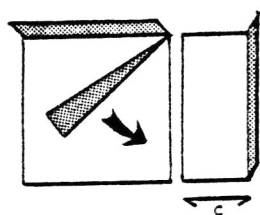
⑧ Découpage des faces (technique due à Holden ; formes espaces et symétries CEDIC

Cette technique est plus simple que la précédente ; elle permet de plus d'obtenir très rapidement un grand nombre de polygones identiques, ce qui peut être précieux dans une classe.

On pourra utiliser du carton fin, qui est onéreux, ou bien du contrecollé, ce qui permet la réalisation de modèles durables.

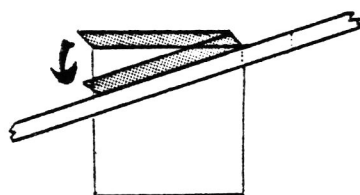
L'outil de base est un massicot complété par un guide extérieur fixe.

Guide latéral

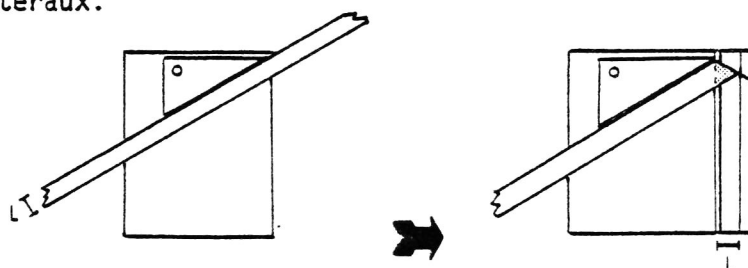


Guide extérieur

- en coupant les feuilles de Carton on obtient des bandes de largeur constante c .
- en découpant les bandes on obtient des carrés de côté c .
- en décalant le guide extérieur on obtient des rectangles.
- en pivotant le guide latéral on obtient des parallélogrammes.

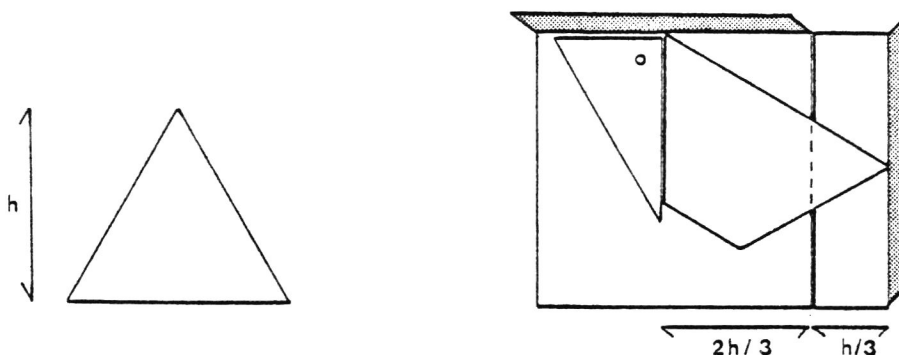


- en utilisant une équerre 30° , 60° on peut découper des triangles équilatéraux.



On retourne la bande

- f) en remplaçant l'équerre par un autre système d'angle différent, la technique précédente donne des triangles isocèles.
- g) pour avoir un hexagone régulier, il faut découper les trois sommets d'un triangle équilatéral au tiers de la hauteur du triangle.



Dans cette technique, on pourra, soit coller les faces avec du papier adhésif ("magique")

, soit positionner les faces entre elles avec du ruban adhésif (à l'intérieur) et coller les arêtes avec de la colle.

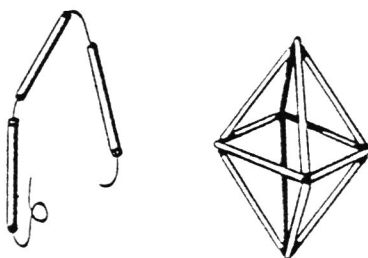
③ Autres techniques

a) Pailles et fils

Avec cette technique spectaculaire on construira seulement les arêtes des polyèdres.

Matériel nécessaire : du fil de couturière

des pailles (diverses couleurs ajoutent à l'intérêt).



b) Verre et Plexiglass

Manquant d'expérience dans l'utilisation de ces matériaux, nous pouvons simplement vous renvoyer à CUNDY, Modèles Mathématiques CEDIC, Page 88.

c) Cartonnages du Commerce

Il existe une série de livrets à l'OCDL qui permettent assez facilement la construction de polyèdres convexes (faces découpées et élastiques)

On peut mentionner aussi la très belle pochette "MC. Esher Kaleïdocycles" (Doris SCHATTSCHEIDER et Wallace WALKER ; Ballantine USA) qui contient des modèles décorés très étonnants).

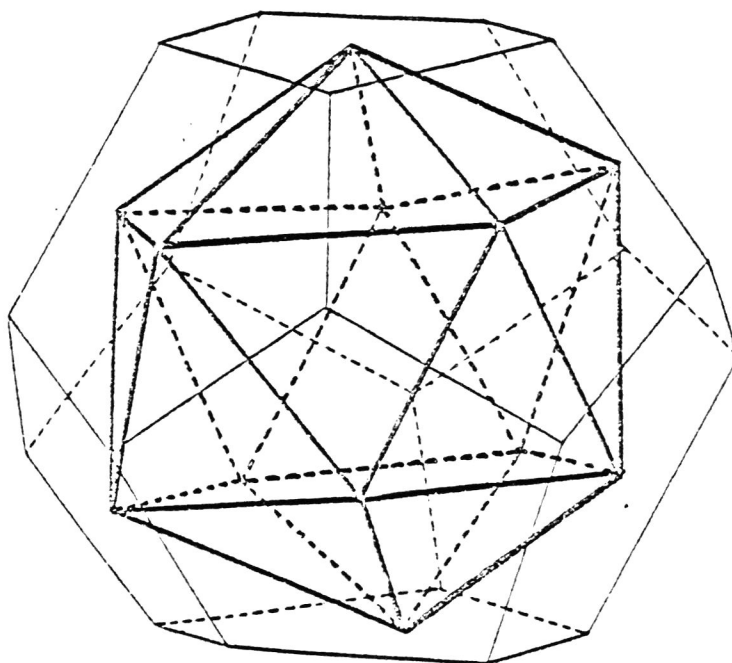
d) Plastiques

Un casse tête astucieux (vendu dans le commerce) fournit une collection de triangles équilatéraux en plastique transparent qui peuvent s'accoler les uns aux autres par des cliquets.

Ce jeu permettra la construction de trois des cinq polyèdres de Platon et de toute la collection des deltaèdres (voir activité élève N° 14).

e) Polystyrène ou pomme de terre

Pour construire un cube ou des solides simples et les découper ensuite, le polystyrène (emballage de glace) ou la pomme de terre peuvent être utiles. Le découpage artisanal à la scie ou au couteau n'est pas toujours évident.







VARIATIONS

SPATIALES

ACTIVITES

ELEVES

DESSINER 1	ACTIVITE ELEVE : N° 18 TOUS NIVEAUX
------------	---

D'après "expériences d'enseignement de la géométrie dans le secondaire"
par le groupe de travail de Louvain-la-neuve.

(4e cahier du colloque Inter-I.R.E.M de Nantes 79)

matériel : chaque élève doit disposer d'un cube (un élément d'un jeu de cubes pour
chaque enfant par exemple)

1- La consigne est de dessiner le cube dans diverses positions ; les élèves pourront
ensuite échanger leurs dessins, chacun essayant de mettre son cube dans les diverses
positions dessinées par l'autre.

Cet exercice devrait normalement conduire à une réflexion concernant les
conventions de dessin (cf. thème 4).

- . les parallèles de l'objet sont dessinées parallèles (perspective cava-
lière)

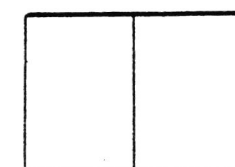
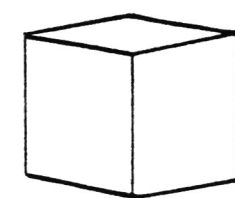
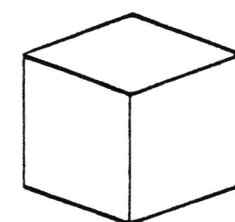
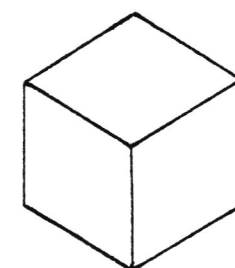
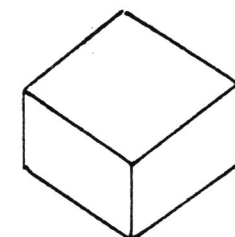
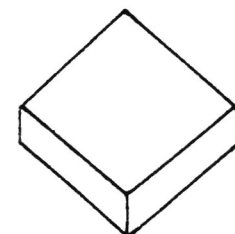
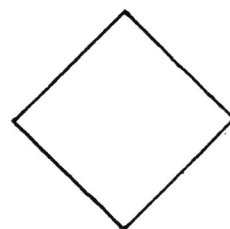
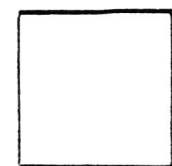
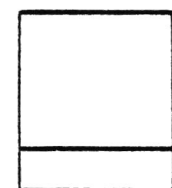
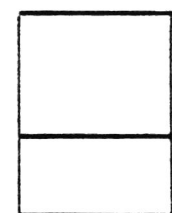
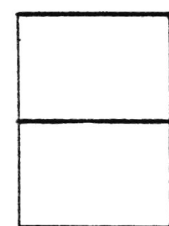
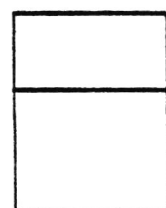
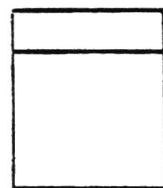
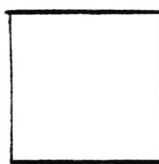
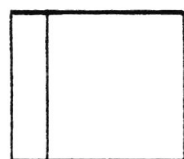
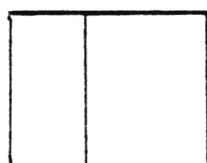
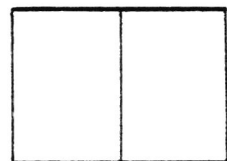
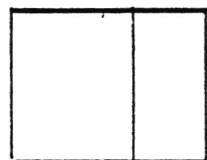
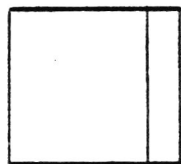
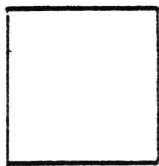
- . Conservation des longueurs pour certains segments - proportion pour d'autres

2- On donne à chaque élève une copie de la page suivante.

Que représentent ces trois séquences ?

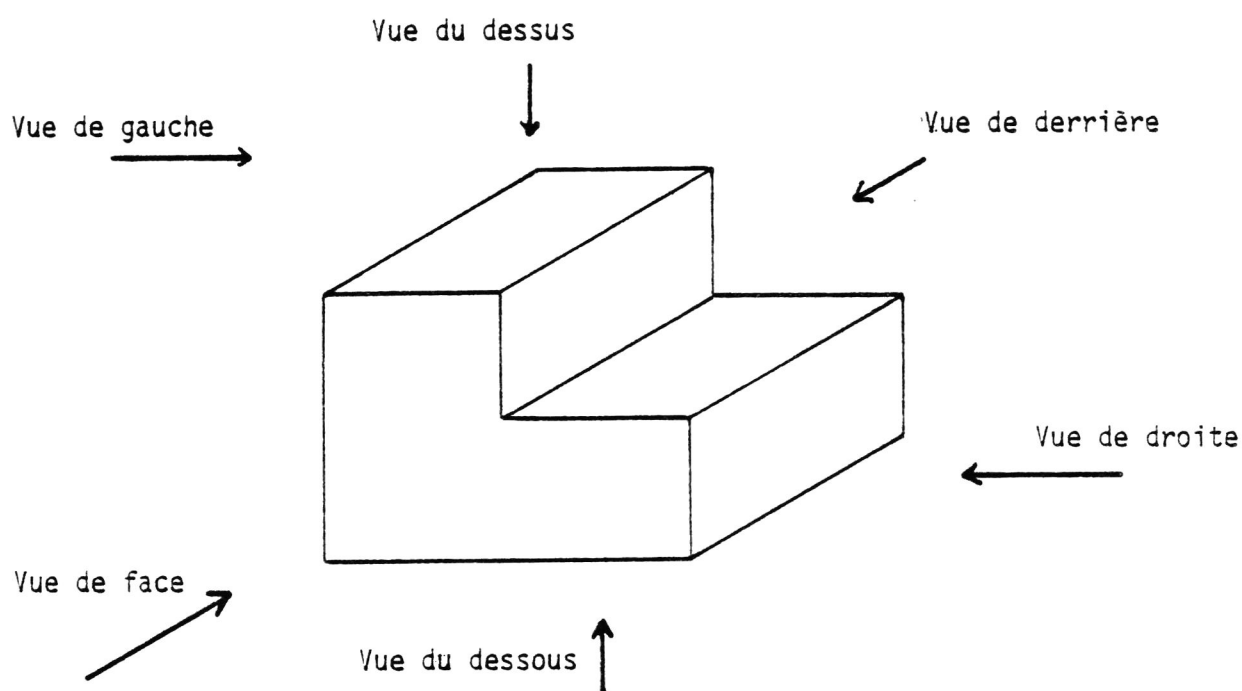
pour guider un peu : chacune des séquences est un extrait de dessin animé montrant
un objet en mouvement ; quel objet, quel mouvement ?

Prendre un objet de même nature et le placer successivement dans toutes les
positions indiquées par le dessin.



DESSINER 2	ACTIVITE ELEVE : N° 19 TOUS NIVEAUX
------------	--

I Voici un objet dessiné en perspective cavalière



Il s'agit d'un cube auquel on a retiré un "morceau" parallélépipédique

1) Dessiner

Vue de face, de derrière
 Vue de gauche, de droite
 Vue du dessus, du dessous

Une vue suffit-elle pour connaître le solide ?

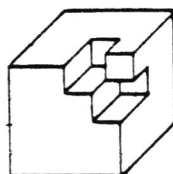
Deux vues etc

2) réaliser un patron pour cet objet

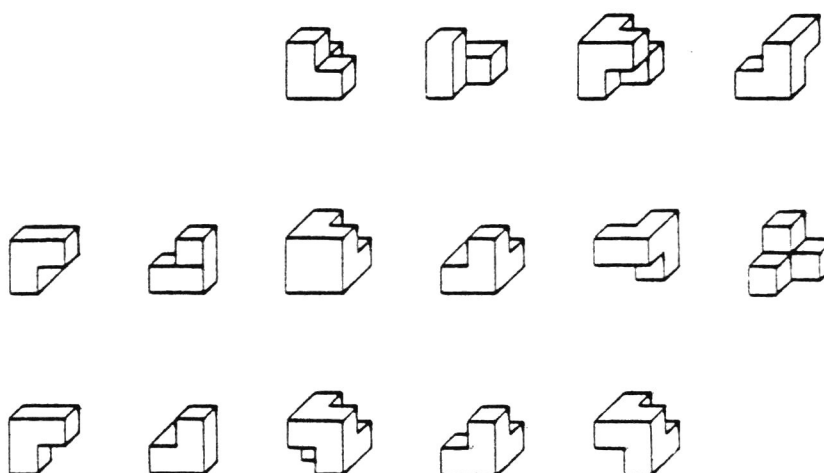
Plusieurs méthodes sont possibles. On peut chercher un patron directement (ce n'est pas bien difficile) on peut essayer de découper un patron du cube, ce qui pose un problème : peut-on partir de n'importe quel patron du cube ?

II

1) Dessiner les vues de face, de derrière, de gauche, de droite, du dessus, du dessous pour l'objet suivant:



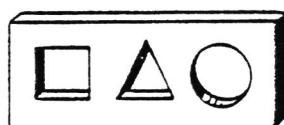
2) Parmi les morceaux suivants quel est celui qui manque à la pièce du II 1) pour être cubique (tiré de "Espace et géométrie" de F. Boule, Ed. Cedic)



III

Voici une planchette percée de trois trous de formes différentes ; peut-on construire un objet susceptible de boucher successivement ces trois trous ?

(tiré de "Faire des mathématiques" 5e, Ed. Cedic)

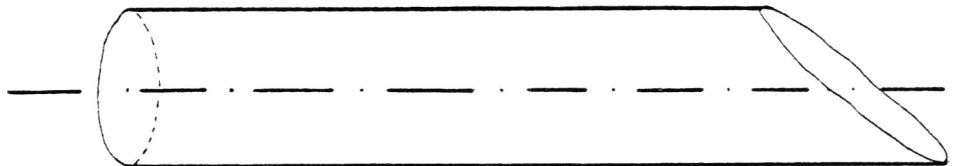


INTERSECTION D'UN CYLINDRE ET D'UN PLAN	ACTIVITE ELEVE : N° 20 NIVEAU : voir çï-dessous
---	---

Niveau : une fonction sinus intervenant dans cette activité, on peut estimer que des connaissances de trigonométrie sont indispensables ; dans ce cas le niveau est "à partir de 3ème" ; on peut aussi se donner cette fonction sous forme de tableau de valeurs numériques et la construire point par point sans référence préalable à la trigonométrie ; elle est dans ce cas faisable en 5ème ou 4ème.

Activités mises en jeu : observation - conjecture avec vérification par l'expérience
construction d'une courbe plane point par point - utilisation
d'une table de trigonométrie ou d'une calculatrice.

L'idée de départ était la réalisation d'un patron pour un tuyau cylindrique coupé d'un côté par un plan oblique par rapport à l'axe du cylindre de l'autre par un plan perpendiculaire à l'axe.



Cet exercice apparaît comme beaucoup trop difficile au niveau du premier cycle, mais on peut réaliser un certain nombre d'activités autour de ce thème :

1ère étape : présenter aux élèves des solides de ce type :

- . certains, en papier, auront été réalisés auparavant par collage (il est important de disposer d'objets en papier afin de pouvoir les découper ultérieurement pour observer des patrons).
- . d'autres, en carton, pourront être réalisés devant les élèves en découpant à la scie à métaux des supports de papier type Sopalin.

2ème étape : la consigne est : "essayez d'imaginer un patron pour ce type d'objet".

Il y a bien sûr deux problèmes : l'un, simple, pour ce qui concerne le côté coupé perpendiculairement à l'axe, l'autre, nettement plus délicat, pour le côté oblique.

Les élèves pourront émettre des hypothèses et les vérifier rapidement par découpage du patron supposé et recollement ; certains arriveront peut-être par approximations successives à trouver un patron acceptable.

De toute façon, ils pourront au bout de quelques temps se convaincre de l'allure de la courbe cherchée en découpant plusieurs des solides proposés dans la 1ère étape (la façon de découper peut d'ailleurs susciter un certain nombre de réflexions).

3ème étape : réalisation d'un patron

Tracer point par point la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sin x$ pour x variant de 0 à 360 (degrés) (préciser, s'il y a lieu, l'écart maximum entre les abscisses de deux points consécutifs).

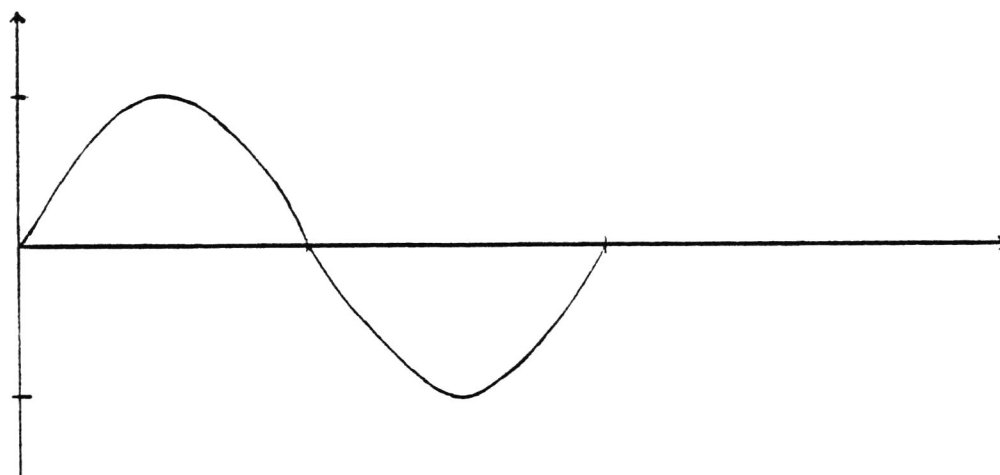
Cette consigne nécessite des précisions qui dépendent des connaissances des élèves et du matériel autorisé.

→ élèves ne connaissant pas de trigonométrie : table de valeurs numériques ou calculatrice.

→ élèves connaissant un peu de trigonométrie :

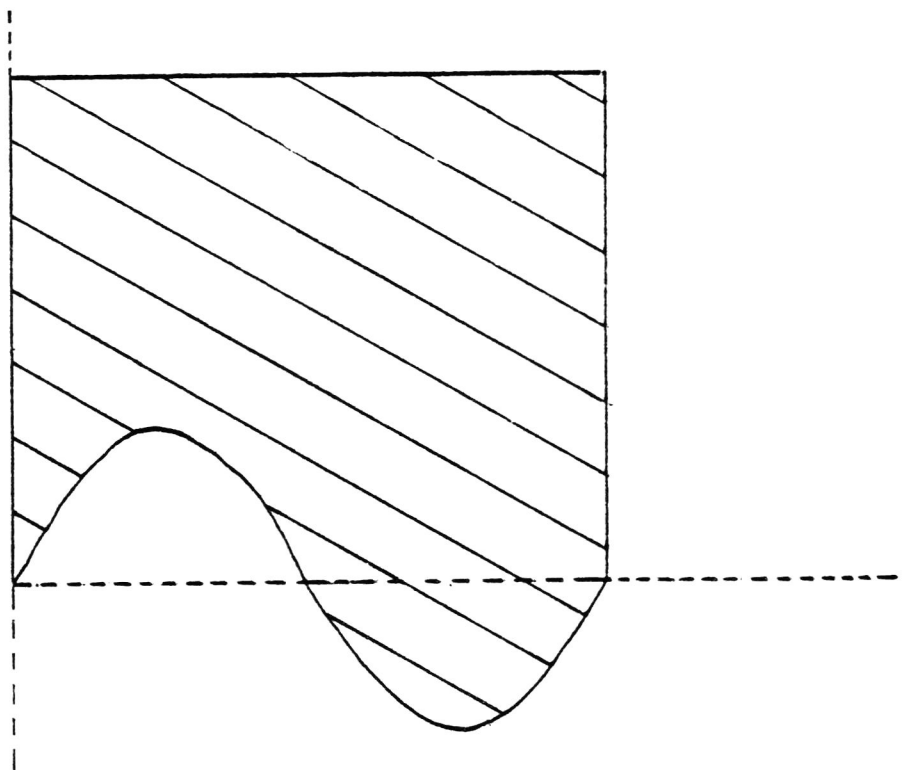
- . table de trigonométrie : mais dans ce cas les élèves ne connaissant la fonction sinus que pour x variant entre 0 et 90°, éventuellement entre 0 et 180°, il faudra leur expliquer comment trouver les sinus sur les intervalles manquants.

- . calculatrice : pas de problème mais il est alors intéressant de faire remarquer que dans ce cas, la machine en sait plus que l'élève qui l'utilise.



On pourra signaler que cette courbe est une partie d'une autre nommée "sinusoïde".

. dessiner un patron sur la feuille



. le découper - effectuer le collage.

4ème étape (récréative) ou "comment construire une sinusoïde avec du papier, une scie et un morceau de manche à balai (ou une bougie)".

Enrouler la feuille de papier sur le manche à balai ou la bougie ; découper à la scie en biseau puis dérouler le papier.

LA PYRAMIDE TRONQUEE	ACTIVITE ELEVE : N°21
CALCUL DE VOLUMES	NIVEAU : 3ème

Voici une édifiante petite histoire de tronc de pyramide qui me paraît pouvoir déboucher sur quelques réflexions non dénuées d'intérêt.

I- Je vais vous le démontrer par a + b

Il s'agit d'un problème élémentaire : calculer le volume d'un tronc de pyramide régulière à bases carrées, en fonction de sa hauteur et des côtés de ses bases.

C'est un problème à la portée d'un élève de 3ème et qui semble de nature à satisfaire les instances rédactrices de l'alinéa ci-dessous, extrait du programme de 3ème, élaboré à la commission du 20 juillet 1978 :

"..... exercices de géométrie dans l'espace, par exemple
..... pyramide régulière (calcul d'éléments métriques)".

C'est me semble-t-il une bonne question, mettant en oeuvre plusieurs activités et permettant d'utiliser quelques connaissances éparses :

. il faut déjà arriver à représenter l'objet sur une feuille de papier.
Posez la question à brûle-pourpoint à vos élèves, vous ne serez pas déçus.

. il faut ensuite retrouver dans de lointains souvenirs du programme de cinquième le moyen de calculer le volume d'une pyramide, et pourquoi pas, en profiter pour une révision des formules usuelles.

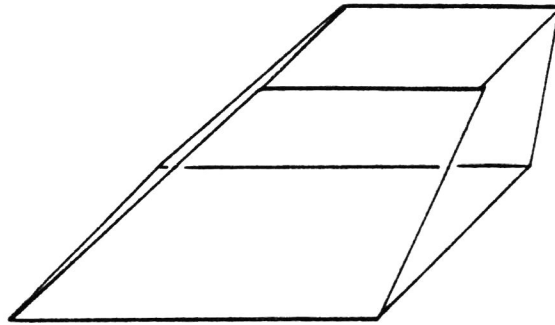
. il faut encore ajouter à cela un zest de Thalès, connaissance fraîchement acquise de la classe de 3ème, ainsi qu'un rien de Pythagore.

. il faut enfin se livrer à des manipulations de calcul littéral requérant une certaine pratique.

Cela peut donner à peu près ceci, dans une rédaction à l'intention de l'élève, du type guidage pas à pas :

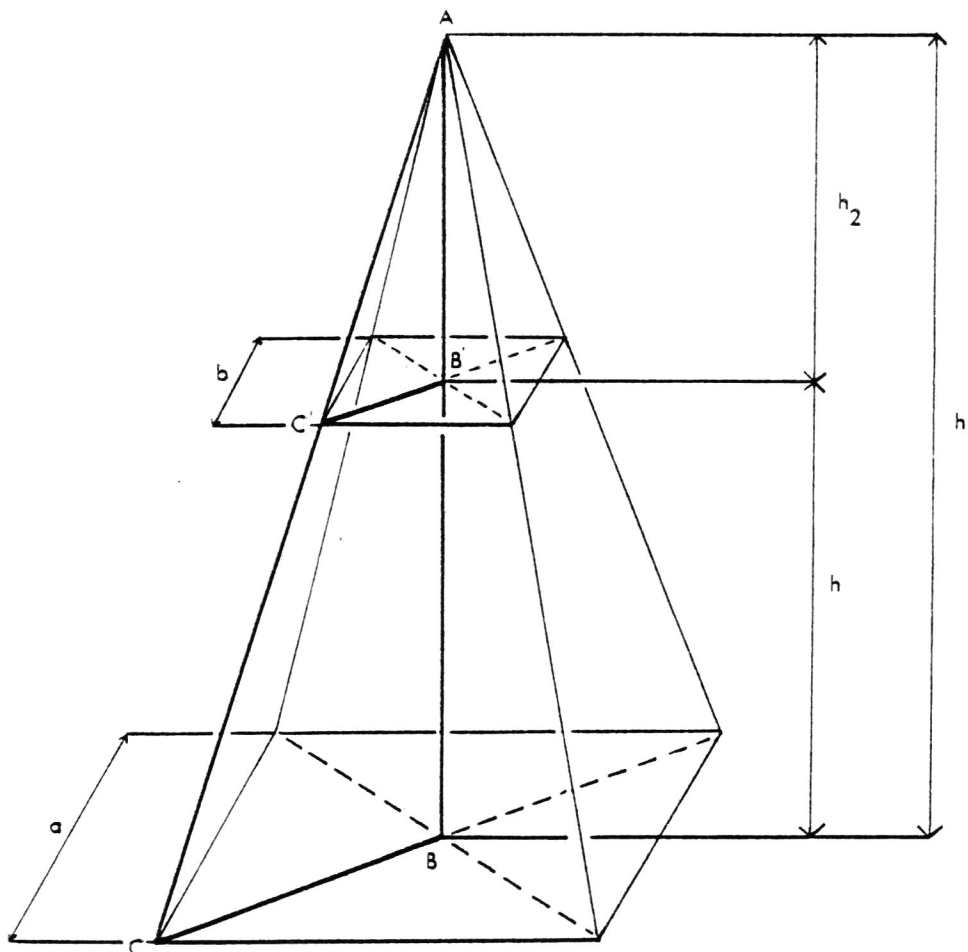
1) Dessine une pyramide à base carrée. Quelle est la formule qui permet de calculer son volume, connaissant sa hauteur et le côté de sa base.?

2) Voici ci-dessous le dessin d'un tronc de pyramide.
Comprends-tu comment est fait un tel solide ?
Décris-le.



Dessine maintenant un tronc de pyramide à base carrée qui soit régulière.

3) Tu vas calculer le volume de ce tronc de pyramide régulière à bases carrées, en fonction des données résumées sur le dessin.



a) exprime en fonction de h_1 et a le volume de la grande pyramide. Exprime en fonction de h_2 et b le volume de la petite pyramide.

Quel est alors, en fonction de h_1 , h_2 , a et b le volume du tronc de pyramide ?

b) Utilise l'énoncé de Thalès dans les triangles ABC et A'B'C' (au fait, pourquoi peux-tu l'utiliser ici ?).

Démontre alors que $\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b}$.

Exprime alors h_1 et h_2 en fonction de h , a et b .

c) En utilisant les résultats des questions qui précèdent, écris la formule permettant de calculer le volume d'un tronc de pyramide en fonction de sa hauteur h et des côtés a et b de ses bases carrées.

remarques : • ce texte n'est donné qu'à titre indicatif. Le problème peut donner lieu à une recherche plus libre, guidée au besoin par le professeur.

• au 3.a le calcul de BC et B'C' permet de réviser le calcul de la diagonale au carré.

• au 3.b la manipulation $\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b} = \frac{h_1 - h_2}{a - b}$ permet de revoir une propriété des "proportions" ou si l'on préfère, des applications linéaires.

• le 3.c nécessitera un peu d'aide de la part du professeur pour la fabrication de $a^3 - b^3$.

II- Nihil novi sub sole

Ce qui est rigolo, c'est que les Egyptiens de l'Antiquité, eux, n'avaient pas attendu la venue de Monsieur Thalès (axiome ou théorème de son prénom, déjà ?) pour savoir calculer un tel volume.

Il faut dire que les Egyptiens, les pyramides, ils connaissaient.

On trouve en effet dans le Papyrus de Moscou (datant des environs de l'an 2000 avant notre ère) un calcul où la méthode employée revient à l'utilisation de la formule $V = \frac{1}{3} h (a^2 + ab + b^2)$, péniblement "découverte" par nos élèves dans l'exercice précédent.

III- Je vais vous le démontrer par



et



En se penchant sur la manière dont les Egyptiens avaient pu parvenir à cette formule, les historiens des mathématiques ont échafaudé d'audacieuses hypothèses.

Il s'agit là bien sûr d'hypothèses qui ne sont nullement attestées sur le plan historique, mais qui peuvent pour nous être une bonne illustration du fait suivant :

Il y a diverses manières de faire des mathématiques.

Le bricolage intuitif qui va suivre est certes bien éloigné des majestueuses théories que nous avons mission de dérouler à longueur de journées devant les têtes blondes émerveillées. Il a pourtant son intérêt, son charme, et il serait bien dommage de le rejeter à priori.

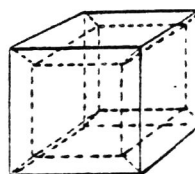
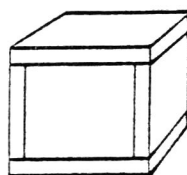
Voici deux démonstrations plus intuitives de la formule qui nous occupe et qui exigent peu de présupposés.

1) La première est empruntée à l'ouvrage de Dedron et Itard "mathématiques et mathématiciens" (p. 47).

Une caisse cubique creuse a pour arête extérieure a, pour arête intérieure b. Les panneaux ont pour épaisseur h. Chacun des six panneaux peut être considéré comme un tronc de pyramide d'épaisseur h, de bases a^2 et b^2 , de volume V. Le volume total des panneaux est alors 6 V. La même caisse, dans une construction moins soignée, pourra être formée de six panneaux parallélépipèdes, de même épaisseur h, deux, carrés, de côté a, deux, rectangles, de côté a et b, deux autres, carrés, de côté b. Le volume total 6 V est donc :

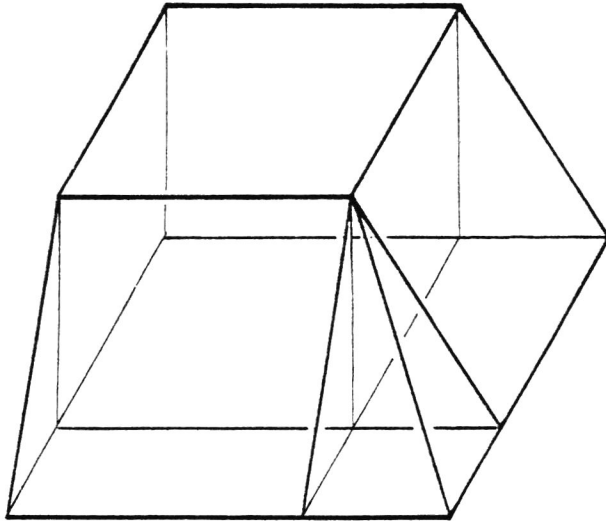
$$2 a^2 h + 2 a b h + 2 b^2 h,$$

et nous retrouvons la formule Egyptienne.



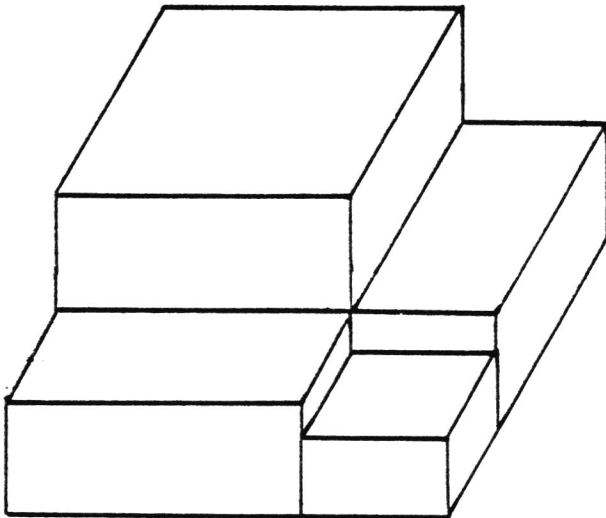
2) La deuxième d'après Van der Waerden dans Science awakening, tome 1, concerne une pyramide non régulière mais ayant 3 arêtes perpendiculaires.

Le calcul se résume par les dessins suivants :



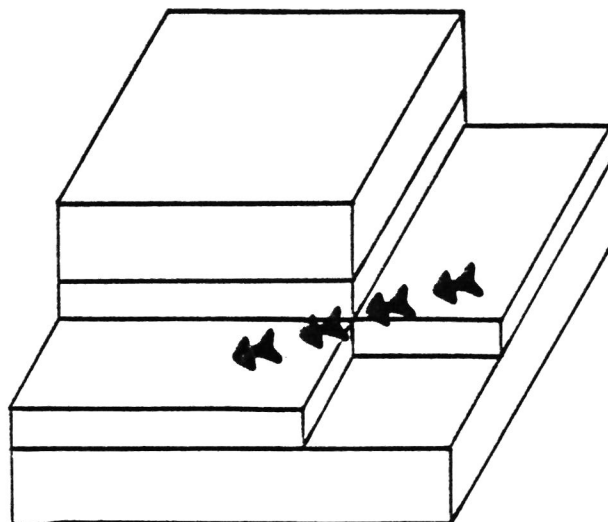
On découpe le tronc de pyramide en 4 morceaux :

- 1 parallélépipède rectangle
- 2 prismes à base triangulaire
- 1 pyramide



Connaissant le volume d'un prisme et celui d'une pyramide, on peut remplacer notre solide par un solide de même volume, composé uniquement de parallélépipèdes rectangles.

Pour calculer le volume de ce nouveau solide et retrouver la formule égyptienne, il suffit de le découper en tranches horizontales d'épaisseur $\frac{1}{3}h$:



- la 1ère tranche a un volume de $\frac{1}{3} h a^2$
 - la 2ème tranche a un volume de $\frac{1}{3} h ab$, ce qui se voit bien si l'on se livre au petit découpage-recollage de bloc qu'indique la flèche.
 - la 3ème tranche a un volume de $\frac{1}{3} h b^2$
- d'où le volume total $\frac{1}{3} h (a^2 + ab + b^2)$.

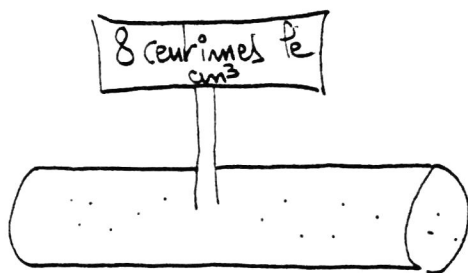
Je trouve cette dernière démonstration profondément convaincante. Elle permet de comprendre, de retenir, mieux de donner du sens à une formule qui ainsi - pour une fois - ne reste pas formelle.

Peut-être serait-il temps de donner dans notre enseignement une petite place à ces autres mathématiques, brièvement illustrées ici. N'oublions pas de montrer à nos élèves qu'il y a aussi en mathématiques des choses jolies qui leur sont accessibles, avant qu'ils ne soient tout à fait dégoûtés par le formalisme aride dont ils sont hélas souvent abreuvés depuis leur plus jeune âge.

III- En guise de post-scriptum à l'intention des amateurs de concret.

Le problème envisagé ici n'est pas dépourvu d'application pratique.

Chacun sait en effet que le tronc de pyramide est une forme largement utilisée par les fabricants de fromages de chèvre et qu'un consommateur averti se doit de comparer les volumes avant d'acheter



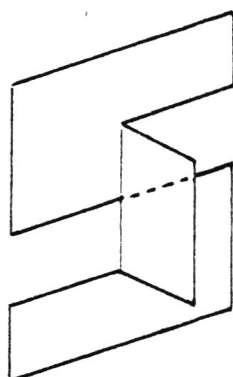
L'HYPERCARTE	ACTIVITE ELEVE.: N° 22
OBJETS IMPOSSIBLES	TOUS NIVEAUX

Voici une activité instructive et fort étonnante.

En guise de préparation le professeur :

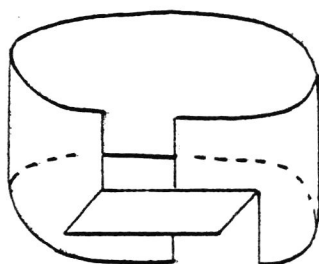
- soit dessinera au tableau la figure ci-dessous.
- soit en réalisera un modèle à partir d'une feuille de carton fort rectangulaire (dans ce cas il coloriera les 2 "faces" de l'hypercarte de 2 couleurs différentes et laissera la "languette" blanche). (Mais il ne laissera pas les élèves y toucher !).

Pour les élèves la question est de savoir si on peut réaliser cet objet à partir d'une feuille rectangulaire sans découpage et recollage.... et de le réaliser effectivement. Les élèves ont tendance à penser qu'il y a truquage, mais ils ont tort.



l'Hypercarte

Comme variante, on pourra construire l'hypercasquette ci-dessous



que l'on peut construire :

- soit à partir d'une bande rectangulaire longue en procédant comme pour l'hypercarte et en recollant les extrémités.
- soit à partir d'une bande de Möbius, par découpage.

On peut alors remarquer qu'en fait on peut placer autant de visières que l'on veut autour de l'anneau (en nombre impair de préférence).

OPTIMISATION	ACTIVITE ELEVE : N° 23
CALCULS DE VOLUMES	5ème et au-delà

Matériel : quelques feuilles de format standard 21 x 29, 7.

1. Un vieux problème : les récipients cylindriques.

a) avec ta feuille, tu peux, en l'enroulant, construire deux récipients cylindriques (sans fonds) différents.

Construis-les en utilisant du papier adhésif.

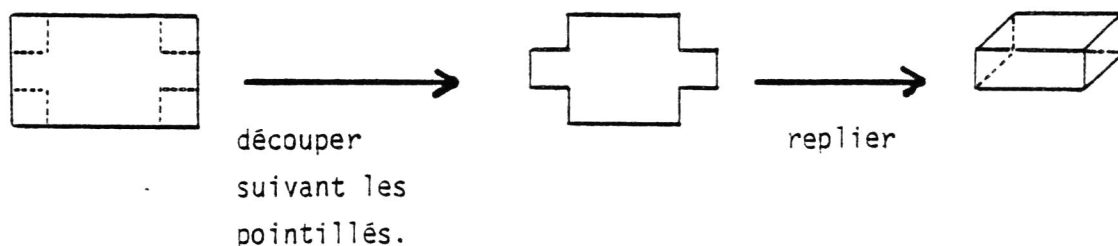
Lequel a le plus grand volume ?

b) et si tu disposes d'une feuille de dimensions $a \times b$ (où a et b sont deux nombres positifs) ?

Justifie ta réponse .

2. Les boîtes parallélépipédiques.

Avec ta feuille tu peux construire des boîtes de forme parallélépipédique sans couvercle, mais avec un fond :



Le problème est de savoir comment découper la feuille pour avoir la boîte qui a le plus grand volume.

- niveau premier cycle - seuls des sondages sont ici possibles ; dans une classe chacun pourra construire son propre parallélépipède, puis calculer son volume.

Un diagramme côté des carrés découpés/volume mettra clairement en évidence le maximum qu'on pourra approximer correctement.

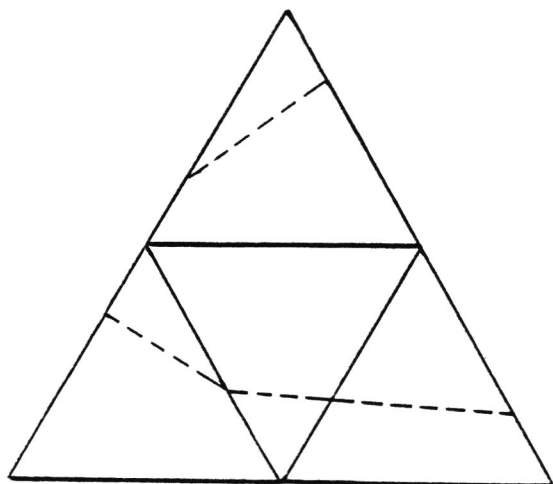
- niveau second cycle - Une mise en équation conduit à un problème du second degré. On obtient un maximum pour une découpe de 4 petits carrés d'environ 4, 042 cm de côté.

TRACER DES LIGNES FERMEES SUR UN TETRAEDRE

ACTIVITE ELEVE : N°24

NIVEAU : 5ème

I Voici le patron d'un tétraèdre régulier

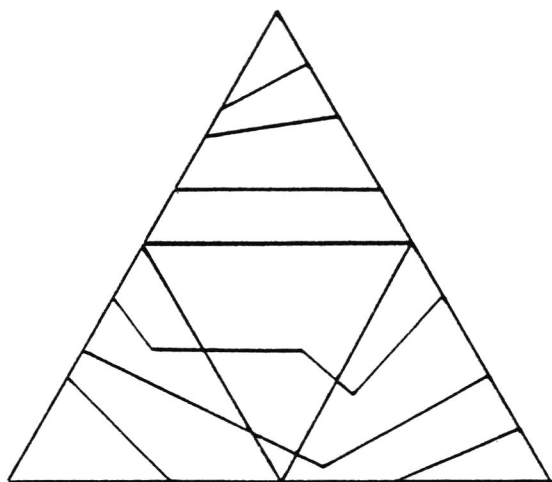


découpe soigneusement sur du carton léger le patron ci-contre. Fabrique le tétraèdre de façon que les traits en pointillés soient à l'extérieur.

Que remarques-tu ?

Une analyse du patron te permet-elle d'expliquer ta remarque.

II Voici le patron d'un autre tétraèdre



1) Essaie sans construire le tétraèdre de colorier d'une couleur différente les lignes qui vont se refermer sur le tétraèdre.

2) Dessine un patron de tétraèdre et dessine au moins une ligne se refermant sur le tétraèdre.

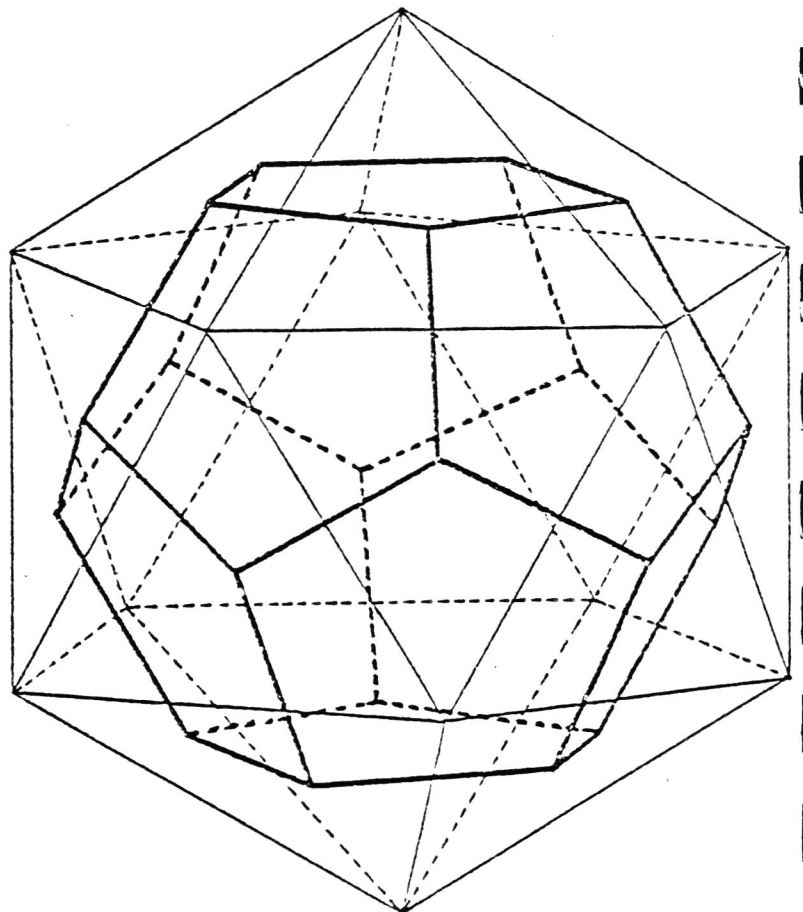
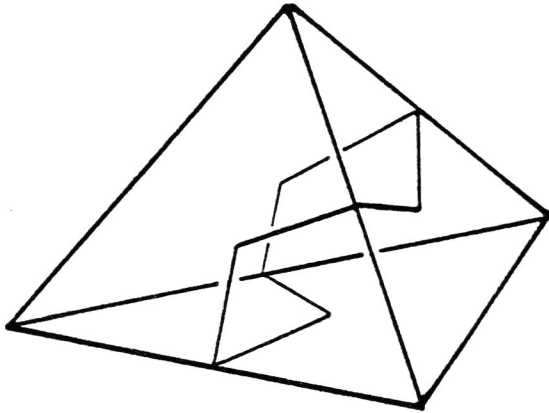
III On veut tracer sur le tétraèdre une ligne fermée sachant que :

- elle est formée de segments de droites.
- elle passe une fois et une seule par le centre de chaque face.
- la ligne joignant les centres de deux faces adjacentes passe par le milieu de leur arête commune.

On a dessiné ci-contre un tétraèdre en perspective sur lequel une telle ligne est tracée.

Essaie de la dessiner sur un patron du tétraèdre.

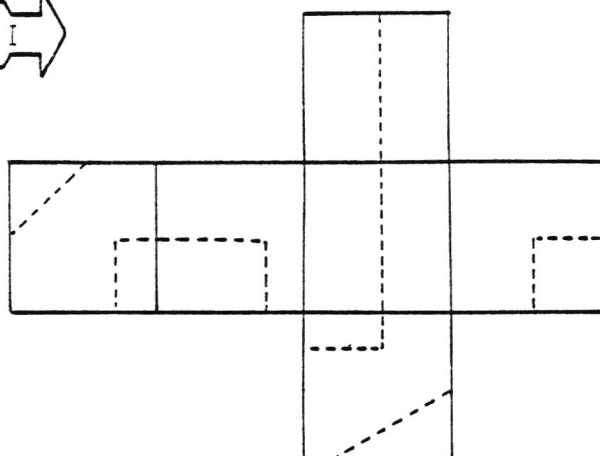
Construis ensuite le tétraèdre de façon que la ligne soit à l'extérieur.
Découpe selon cette ligne.
Que remarques-tu ?



TRACER DES LIGNES FERMEES SUR UN CUBE

ACTIVITE ELEVE : N° 25

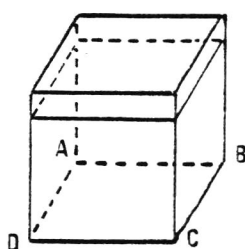
NIVEAU : 5ème



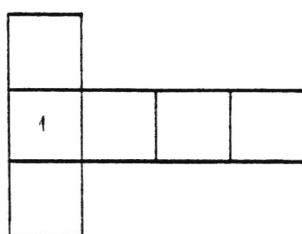
Décalque soigneusement le patron ci-contre et fabrique le cube de façon que les traits en pointillés soient à l'extérieur.

Que remarques-tu ?

Est-ce que une analyse du patron aurait permis de le prévoir ?

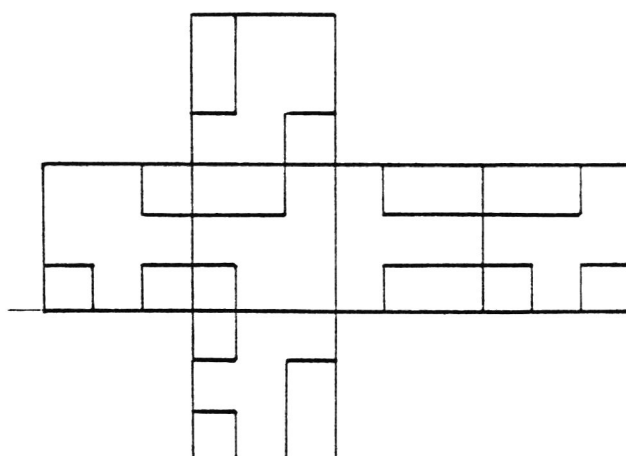


La ligne tracée sur la surface extérieure du cube dessinée ci-contre représente l'intersection du cube et d'un plan parallèle à la face ABCD.



Sur un patron comme celui dessiné ci-contre trace l'intersection du cube avec un plan parallèle à la face 1

Recommence successivement avec les autres faces.

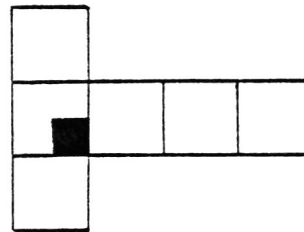


Combien y-a-t'il de lignes fermées tracées sur le cube ?.

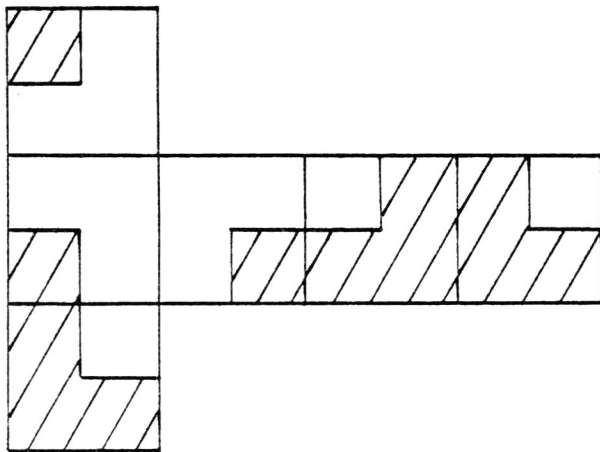
Colorie de couleurs différentes les régions qu'elles délimitent.

82

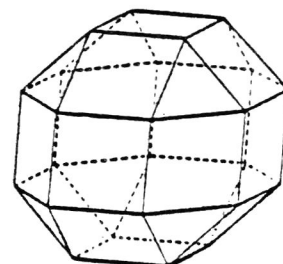
Recommence sur le patron ci-contre où une face a déjà été coloriée.

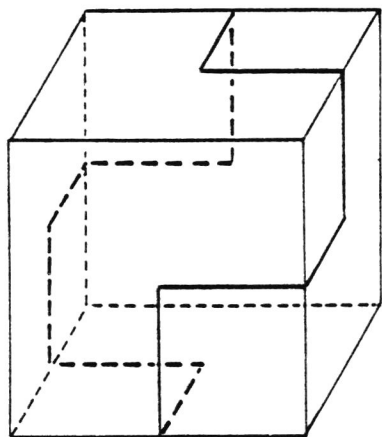


Voici un patron du cube colorié qui "marche bien" ; la partie hachurée est en plusieurs morceaux.



On veut construire uniquement ce qui correspond à la partie hachurée, fabrique un patron de cette partie.





On veut tracer sur le cube une ligne fermée vérifiant :

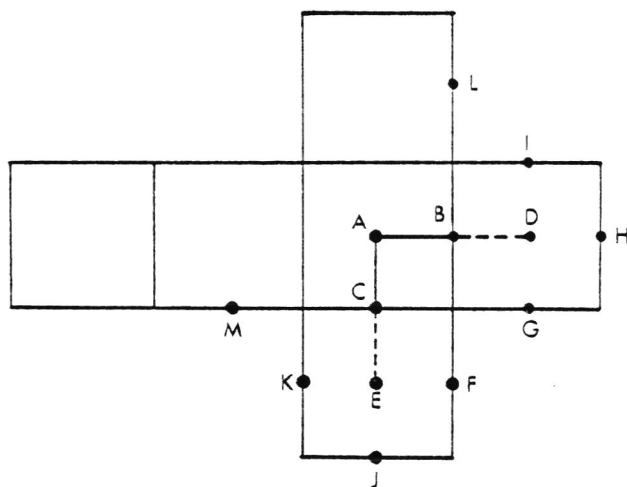
- elle est formée de segments de droites
- elle passe une fois et une seule par le centre de chaque face.
- la ligne joignant les centres de deux faces adjacentes passe par le milieu de leur arête commune.
- elle ne se recoupe pas.

Une telle ligne est tracée sur le cube dessiné en perspective ci-contre (fig 1)

Observe bien ce dessin. Quel est le tracé qui apparaît sur chaque face du cube ?

On veut maintenant essayer de tracer cette ligne sur un patron.

On peut bien sûr y arriver en s'aidant du dessin (fig 1).



Voici une autre méthode :

- ayant tracé les segments $[AB]$ et $[AC]$ on trace les segments $[BD]$ et $[CE]$ pour atteindre 2 centres de faces.
- maintenant on peut tracer soit le segment $[DG]$ soit le segment $[DI]$.
- si on trace $[DG]$, la ligne doit repartir en F ce qui oblige à tracer le segment $[EF]$. La ligne est déjà fermée, il manque 3 centres de face.
- donc on trace $[DI]$

maintenant explique pourquoi on doit tracer $[EK]$, et continue sur les autres faces.

La ligne tracée sur la surface extérieure du cube la divise en deux régions qu'on veut colorier de deux couleurs différentes. Peux-tu faire le coloriage sur le patron. Construis le cube et découpe suivant la ligne, que remarques-tu ?

CYLINDRE BERLINGOT TETRAEDRE	ACTIVITE ELEVE : N° 26 NIVEAU : 5e pour les manipulations 3e pour les calculs
------------------------------------	---

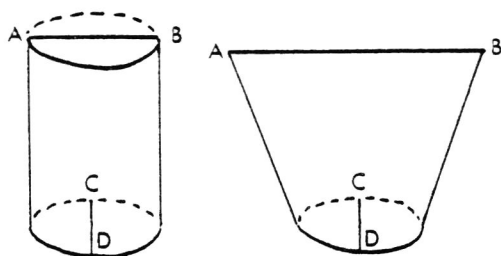
On pouvait acheter il y a quelques années du "tetralait" et on trouve encore actuellement des "berlingots" de lait chocolaté ou de jus de fruits. Ils sont fabriqués à partir d'un long cylindre de papier fort, plein de liquide. Une machine pince ce cylindre et soude entre elles les 2 parois selon un segment de droite. Deux segments successifs sont orthogonaux et écartés de façon que le tétraèdre obtenu soit (presque) régulier.

1ère manipulation :

Si on peut se procurer des "berlingots" vendus dans le commerce, les ouvrir selon les soudures (boire d'abord le liquide).

2ème manipulation :

Prendre un cylindre droit en papier fort - Repérer sur les cercles frontières deux diamètres orthogonaux. Souder avec du papier adhésif les deux demi cercles AB de façon à former un segment (qui sera plus long que le diamètre AB mais qui sera l'arête AB du tétraèdre obtenu). Faire de même sur CD. (Choisir la hauteur du cylindre donnant un tétraèdre le plus régulier possible). Marquer les arêtes du tétraèdre obtenu.



3ème manipulation :

Dessiner sur du papier fort le patron d'un tétraèdre régulier. Construire le tétraèdre. Repérer deux arêtes orthogonales et ouvrir le long de ces arêtes pour former un cylindre.

Dans les trois cas les observations porteront sur les arêtes non soudées qui deviennent, sur le cylindre, des morceaux d'hélices, sur le lien entre la hauteur du cylindre et la hauteur d'une face du tétraèdre.

Le volume d'un tétraèdre régulier de côté a est $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Réponds maintenant aux questions suivantes :

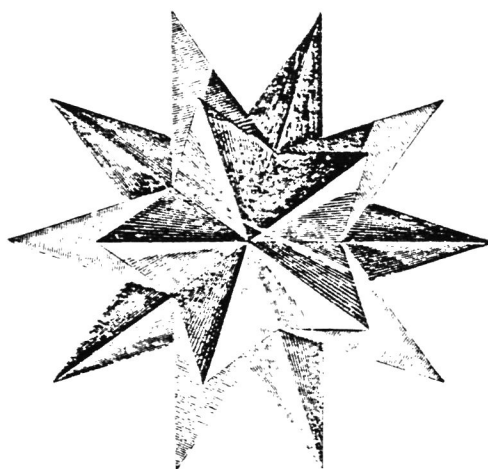
1) Quelle doit être la hauteur du cylindre pour obtenir un tétraèdre régulier de côté 10 cm ?

Quelles sont les dimensions du développement du cylindre ?

Quel est le rayon du cercle de base ?

Quel est le volume du tétraèdre ainsi obtenu ?

2) Quelle doit être la hauteur du cylindre pour obtenir un tétraèdre d'un litre ?



D'UN PROBLEME DES OLYMPIADES AU CUBE OCTAEDRIQUE D'ARCHIMEDE	ACTIVITÉ ELEVE : N° 27 NIVEAU : 5ème
--	---

On a posé aux XVe Olympiades internationales de mathématiques le problème suivant :

"Existe-t'il dans l'espace (à trois dimensions) un ensemble fini M de points non tous contenus dans un même plan, satisfaisant à la propriété suivante :

Pour tout couple de points (p, q) de M il existe un couple (r, s) de points de M tel que les droites pq et rs soient distinctes et parallèles.

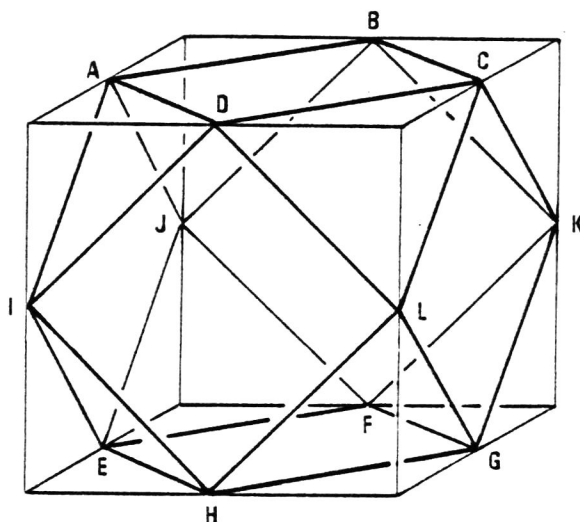
Posé de cette façon le problème est trop difficile pour des élèves de 5e mais on peut leur demander de vérifier l'existence d'un tel ensemble : les sommets du cube octaédrique d'Archimède forment en effet un ensemble M satisfaisant au problème.

Activité élève proposée

I Dessine un cube en perspective cavalière et marque les milieux des arêtes : $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$.

Vérifie que l'ensemble de ces douze points est une solution du problème posé aux Olympiades .

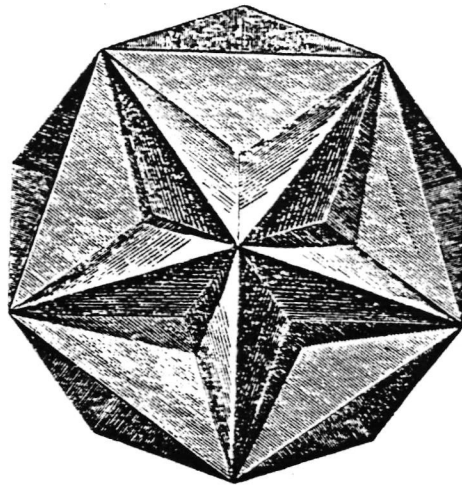
Conseils éventuels : Sois méthodique. Trouve une parallèle à $AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL$ - Dois-tu faire d'autres vérifications ?... Justifie ta réponse.



Pour le professeur

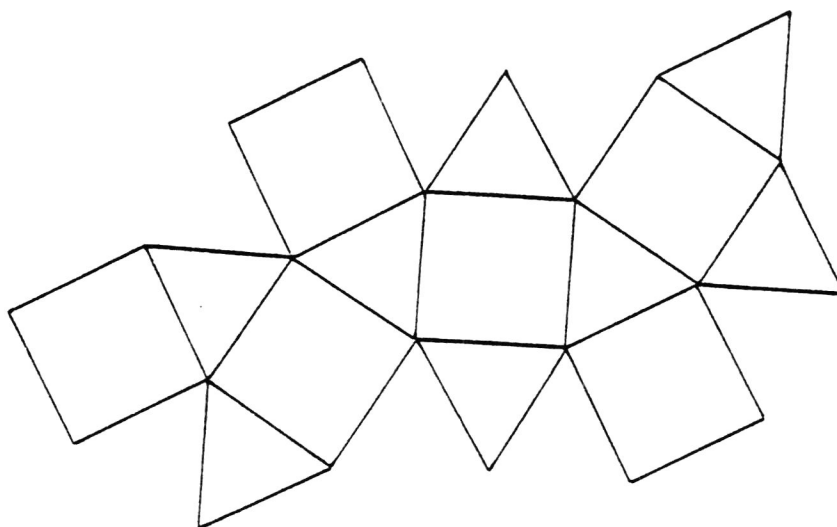
- 1) AB // DC 2) AC // EG 3) AD // BC 5) AE // CG
6) AF // DG 7) AG // IH 8) AH // BG 9) AI // CL 10) AJ // CK
11) AK // IG 12) AL // JG

Les autres vérifications sont inutiles
puisque l'on est en présence d'un solide
archimédien (même situation en chaque
sommet).



Si l'activité sur les polyèdres archimédiens n'a pas été faite, on peut prolonger :

- II** Dessine le polyèdre qui a pour sommets ABCDEFGHIJKL.
Construis-le à partir du patron suivant.



Tu as construit le cube octaédrique d'archimède.

Comment pourrait-on obtenir un tel polyèdre à partir d'un cube en bois, avec une scie ?

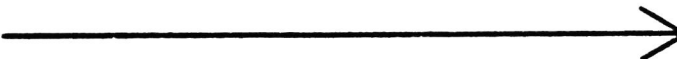
III Prolongements facultatifs

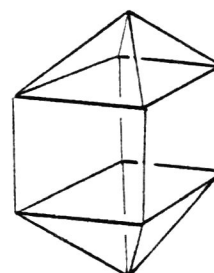
1) Trouve dans le plan un ensemble fini de points satisfaisant à la propriété du problème des olympiades.

2) Trouve dans l'espace une autre solution plus simple que le cube octaédrique d'archimède.

Réponses :

1) Les sommets d'un hexagone régulier, par exemple.

2) 



HELICES	ACTIVITE ELEVE : N° 28 NIVEAU : 6ème
---------	--

D'après Gardner (les "Ah, Ah" mathématiques)

Activité de classe

Partager la classe en deux parties.

1) Les élèves du 1er groupe disposent de feuilles de papier de même hauteur (12 cm par exemple et de longueurs différentes (de 5 à 25 cm par exemple)

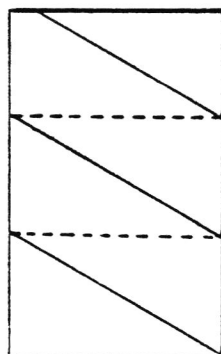


Ils tracent sur ces feuilles des droites de la façon suivante :

Une droite passant par le coin en bas à gauche et inclinée à 30° (par exemple) avec l'horizontale (la même inclinaison pour tous).

Si cette droite rencontre le bord droit de la feuille, repartir du bord gauche à la même hauteur et tracer une autre droite de même inclinaison.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on atteigne le bord supérieur de la feuille.



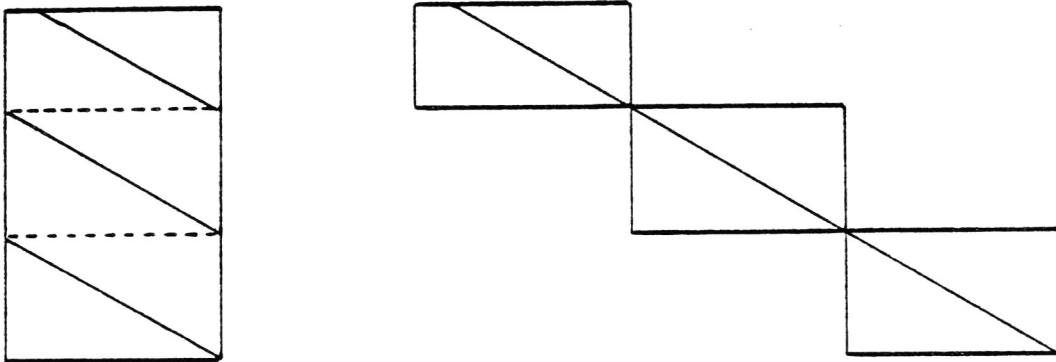
Ensuite ils forment avec ces feuilles des cylindres droits (fermés avec du ruban adhésif) et observent les courbes tracées sur ces cylindres. Si les droites ont été bien tracées les courbes sont des hélices de pas constant.

2) Les élèves du deuxième groupe (qui ne savent pas comment ont été fabriquées les hélices) sont chargés de mesurer les longueurs des hélices. A eux de trouver une méthode (ficelle ou remise à plat). Ils constateront que toutes les hélices ont la même longueur.

3) Réflexion collective : Pourquoi ?

Solution : Cette longueur ne dépend que de la hauteur du cylindre et de l'angle que fait en chaque point l'hélice avec le plan horizontal.

Pour s'en rendre compte on peut remettre la feuille à plat et matérialiser cette longueur après découpage éventuel de la feuille :



Eventuellement (classe de 3ème) calculer la longueur de l'hélice.

PETITES QUESTIONS

ACTIVITE ELEVE : N° 29

NIVEAU : variable

I Dessine en perspective cavalière un solide ayant six sommets ABCDEF et vérifiant :

$AB \parallel DE$

$AD \parallel CF \parallel BE$

Les autres côtés étant non parallèles.

II On veut découper un cube en bois de 3 cm de côté en 27 petits cubes de 1 cm de côté chacun.

On peut grouper plusieurs morceaux pour les présenter ensemble à la scie.

Quel est le nombre minimum de coups de scie nécessaires ?

(Tiré de "L'effet Ha Ha" de M. Gardner).

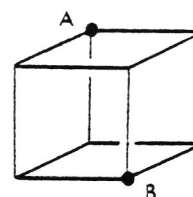
Réponse :

Il faut au minimum 6 coups de scie car le cube central a 6 faces . On vérifiera aisément que 6 coups de scie conviennent.

III Voici un cube :

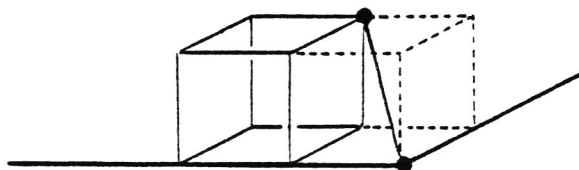
Comment arriver à mesurer la longueur de sa diagonale AB si l'on dispose seulement d'une règle graduée (assez longue) ?

(Tiré de "Ha Ha" ou l'éclair de la compréhension mathématique de M. Gardner)



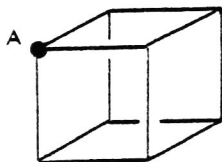
Réponse :

On peut "matérialiser" la longueur AB en plaçant le cube au coin d'une table rectangulaire puis en lui faisant pivoter autour de l'arête verticale contenant A qui ne bouge donc pas; la diagonale se mesure de A au coin de la table .



En classe de 3ème on pourra demander le calcul de AB en fonction du côté du cube.

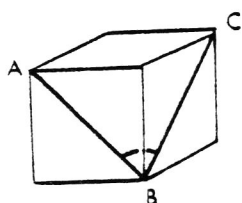
IV



Dessine un "chemin" qui passe une fois et une seule par chaque sommet en suivant des arêtes et qui revient en A.

Trouve plusieurs solutions - Peux-tu les trouver toutes ?

V Voici tracées sur deux faces d'un cube deux diagonales issues d'un même sommet.



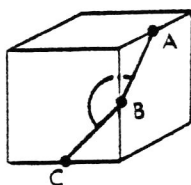
Quelles est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?

(Tiré de "Ha Ha" ou l'éclair de la compréhension mathématique de M. Gardner)

Réponse :

60° car on peut, en traçant une troisième diagonale, faire apparaître le triangle équilatéral ABC.

Plus difficile :



A, B, C étant les milieux de trois arêtes disposées comme l'indique la figure, quelle est la mesure de l'angle ABC ?

Réponse :

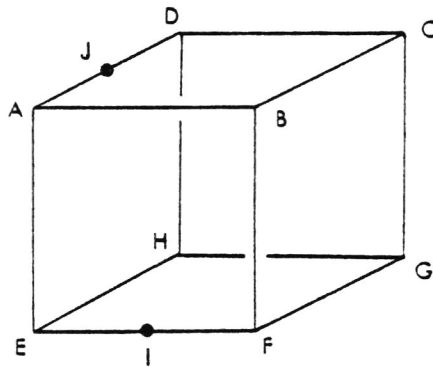
126° car l'intersection du plan ABC avec les faces du cube est un hexagone régulier. Ce n'est pas facile à prouver (c'est faisable en 2e par exemple)...

... mais on peut le vérifier en sciant un cube de bois.

VI

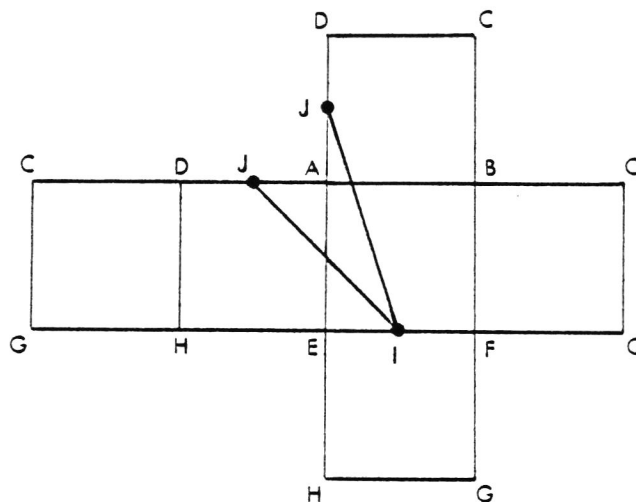
ABCDEFGH est un cube - I est le milieu de EF -
J est le milieu de AD.

Quel est le plus court chemin tracé sur le cube
pour aller de I en J ?



Solution :

Utiliser un patron du cube - le chemin le plus court est, sur le patron, le segment IJ : Il y en a deux possibles, mais l'un est plus court que l'autre : en 3ème on fera les calculs, dans les classes inférieures on mesurera.





VARIATIONS

SPATIALES

THEMES



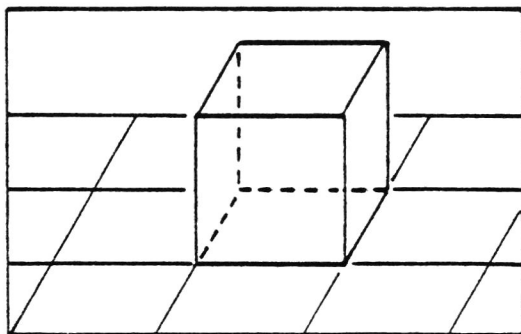
CONVENTIONS DE DESSIN	THEME 4
-----------------------	---------

I La Perspective cavalière (dite aussi perspective de convention).

Pour représenter dans un plan des figures ou des objets de l'espace à trois dimensions, on utilise le plus souvent, en mathématiques, la perspective cavalière (introduite en France au XVI^e siècle par les ingénieurs militaires et employée en Cartographie jusqu'au XIX^e siècle) qui est un cas particulier simple de la "perspective parallèle" ou "axonométrie".

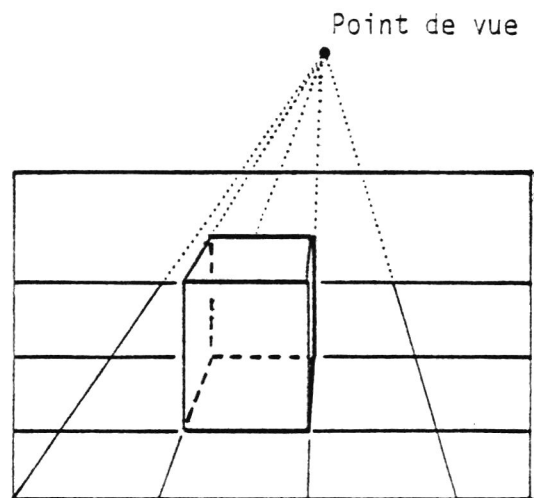
C'est une perspective dont le point de vue est rejeté à l'infini, c'est donc une projection cylindrique sur un plan vertical (le plan du tableau) celui-ci étant le plus souvent parallèle à un plan privilégié de l'objet à représenter, la projetante faisant un angle quelconque avec le plan du tableau (angle que l'on choisira néanmoins avec soin comme on le montrera plus loin).

Exemple :



Perspective cavalière

On a choisi le tableau parallèle à une face du cube.



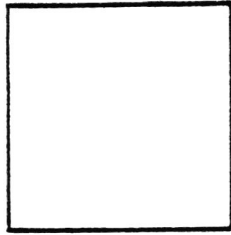
perspective centrale

Pourquoi la plupart des livres de mathématiques utilisent-ils la perspective cavalière ? Il y a certainement des raisons pratiques : Les dessins en perspective cavalière sont plus faciles à réaliser, et des raisons didactiques : Les parallèles restent parallèles, les milieux sont conservés, ce qui peut faciliter les raisonnements et la "bonne vision" de l'objet.

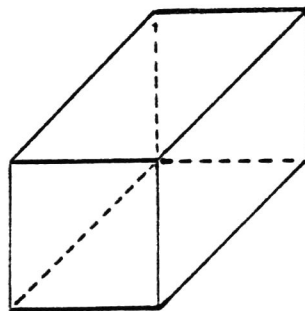
Choix de la direction de la projetante

Ce choix est fait en fonction de l'objet à représenter dans le but de faciliter sa vision dans l'espace et d'éviter des confusions possibles.

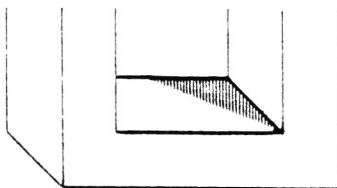
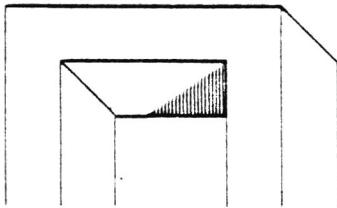
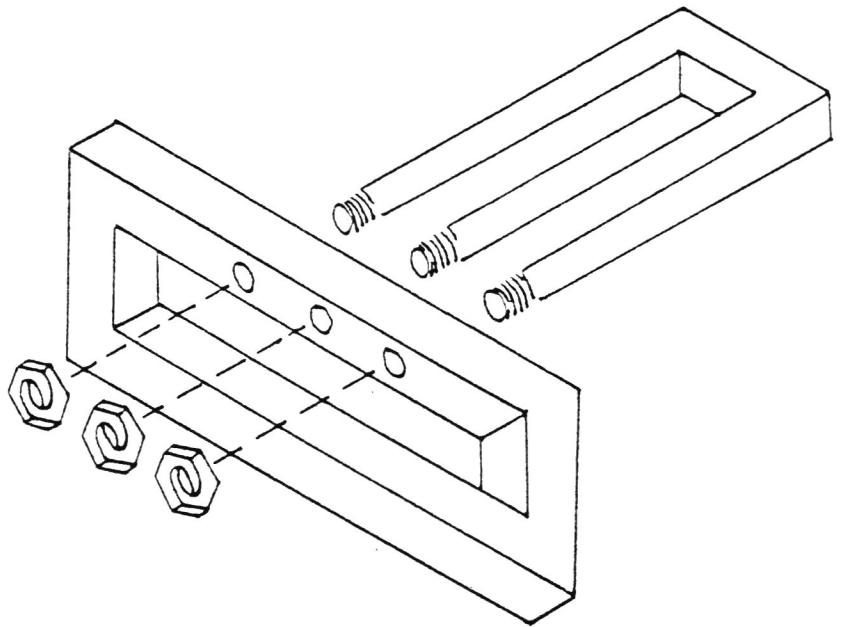
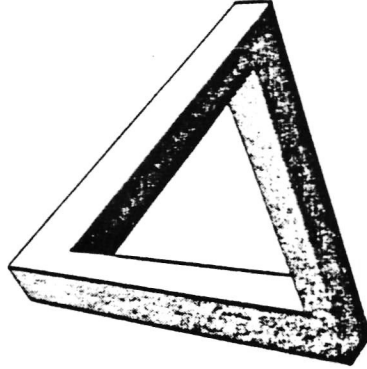
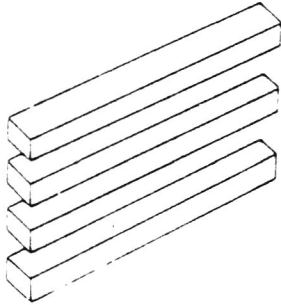
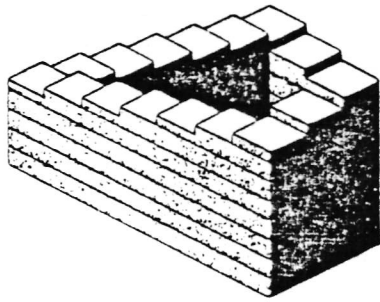
Exemples :

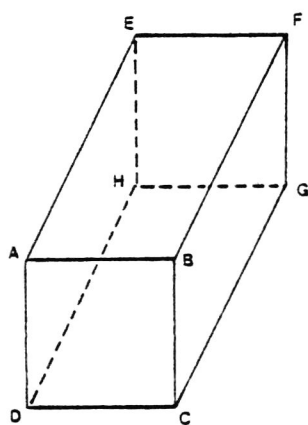


Ceci peut représenter un cube dessiné en perspective cavalière avec une projetante perpendiculaire au plan du tableau (lui-même parallèle à une face du cube). Mais ce n'est pas vraiment la meilleure façon de représenter un cube.



Ceci représente un cube dessiné en perspective cavalière avec une projetante parallèle à une diagonale du cube. Deux sommets opposés du cube ont donc des projections confondues - ce qui est une source de confusion - ceci a d'ailleurs été utilisé pour réaliser des "dessins faux" :



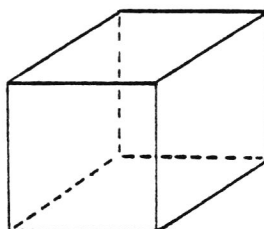


Ceci représente un cube (?) vu de "très loin" et de "très au-dessus".
 On a du mal à "voir" qu'il s'agit d'un cube car en apparence AE semble plus long
 que AB. On peut mettre en évidence expérimentalement ce phénomène en regardant
 l'ombre (projection cylindrique du cube sur un plan) d'un cube au soleil couchant :
 on peut arriver à avoir des ombres très allongées.

II Les conventions

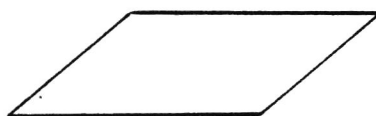
Outre le fait que l'on utilise le plus souvent la perspective de convention (perspective cavalière), d'autres conventions sont nécessaires lorsqu'on représente dans un plan des figures de l'espace. Il est nécessaire de les expliquer soigneusement aux élèves.

Si en effet on dessine :



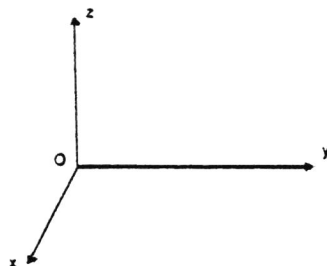
Les élèves "voient" généralement un cube.

Mais si on dessine :



ils voient un parallélogramme et non la représentation conventionnelle d'un plan.

Et si on dessine



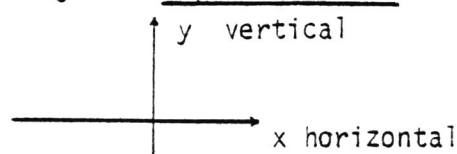
ils voient un dessin plat et non un trièdre trirectangle.

Evidemment les dessins sont généralement placés dans un certain contexte et accompagnés d'une légende qui lève les ambiguïtés ; mais il ne faut pas hésiter à multiplier les explications.

1) Horizontal, vertical..... méfiance.

Le professeur dessine au tableau (plan vertical), l'élève sur sa feuille (plan horizontal), attention aux confusions possibles lorsque chacun va représenter des droites horizontales ou verticales.

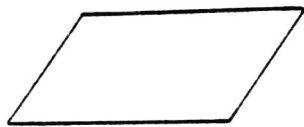
Il semble nécessaire de bien préciser qu'il s'agit de représentations de droites de l'espace, un repère de référence n'étant pas superflu.



2) Voici quelques conventions couramment utilisées :

Représentation d'un plan

Un plan (ou plutôt une portion de plan) horizontal est souvent représenté :



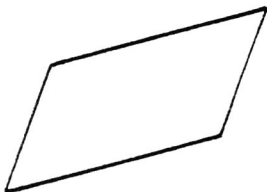
avec deux "côtés" horizontaux (par rapport à un repère $\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array}$ tracé . au tableau pour le professeur . sur la feuille de papier pour l'élève)

Un plan vertical :

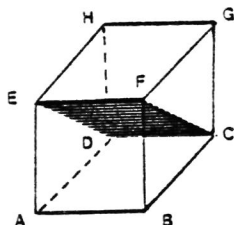


avec deux "côtés" verticaux (par rapport au repère précédent)

Un plan oblique

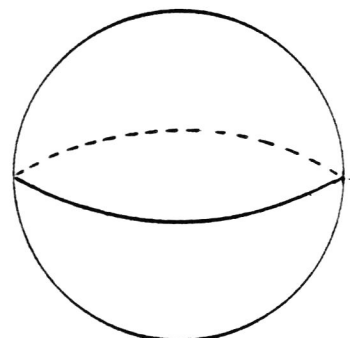
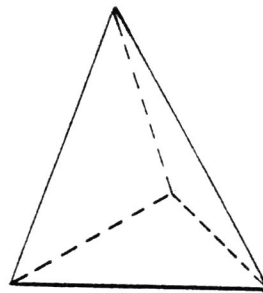
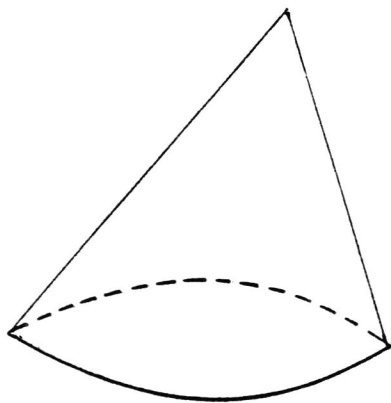


Remarque : ces conventions ne sont pas obligatoires et on peut être obligé de ne pas les utiliser, exemple :



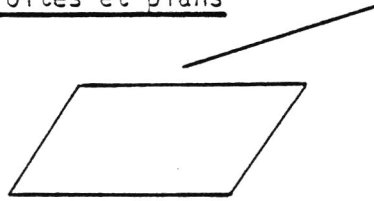
le plan EFGD est représenté avec deux "côtés" horizontaux et il n'est pas horizontal.

D'autre part il peut être commode d'avoir une portion de plan limitée par un triangle, un cercle ou toute autre figure plane.



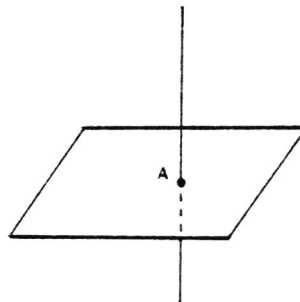
Ce qui est "caché" est généralement tracé en pointillé. Ce n'est évidemment pas obligatoire mais c'est pratique pour voir ce qui est "devant", ce qui est "derrière".

Représentation de droites et plans

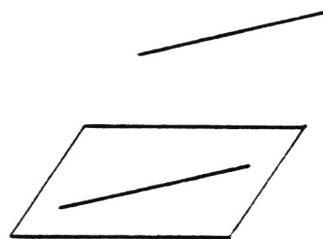


Ce dessin est ambigu. La droite est-elle parallèle ou non au plan ? On peut évidemment accompagner le dessin d'un texte précisant la situation ou :

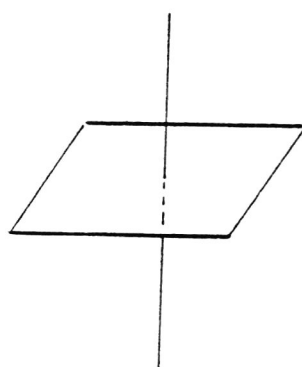
- Si la droite et le plan sont sécants faire apparaître leur point commun.



- Si la droite est parallèle au plan, faire apparaître dans le plan une droite parallèle à la précédente.

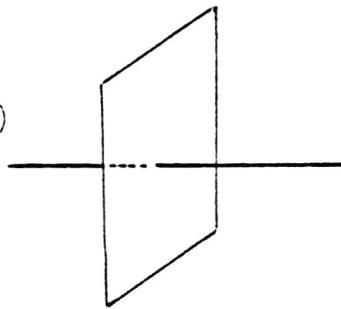


- Si la droite est perpendiculaire au plan, utiliser la situation la plus claire :



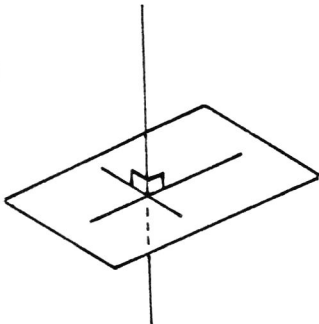
plan horizontal, droite verticale

ou (c'est moins clair)



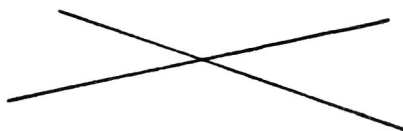
plan vertical, droite horizontale

ou



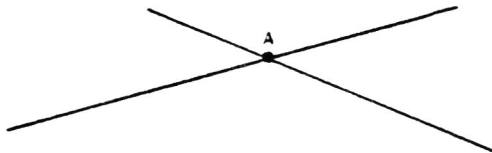
Représentation de deux droites

Tracer dans le plan deux droites perpendiculaires à la première droite ce qui nécessite la "marque" conventionnelle  pour l'angle droit qui ne se conserve pas dans la projection.

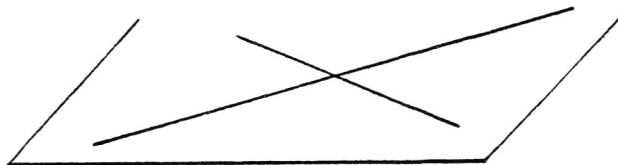


Ce dessin est ambigu - Les droites sont-elles sécantes ou non ?

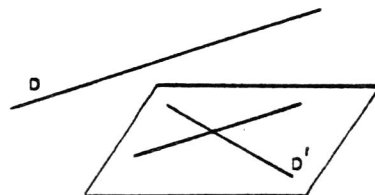
Pour dessiner deux droites sécantes de l'espace ou bien on fera apparaître le point commun



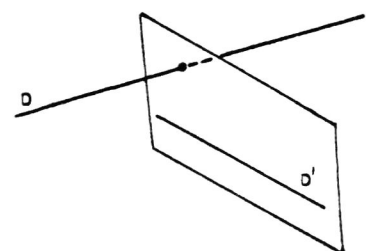
ou bien on fera apparaître le plan contenant ces deux droites



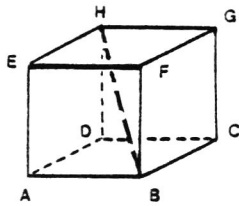
Pour dessiner deux droites non sécantes et non parallèles (cas qui ne pose pas de problème en perspective cavalière puisque le parallélisme est conservé par une projection cylindrique) il pourra être commode de tracer l'une des droites parallèles à un plan contenant l'autre



ou encore de tracer l'une des droites D sécante avec un plan contenant D' , avec D et D' non sécantes.

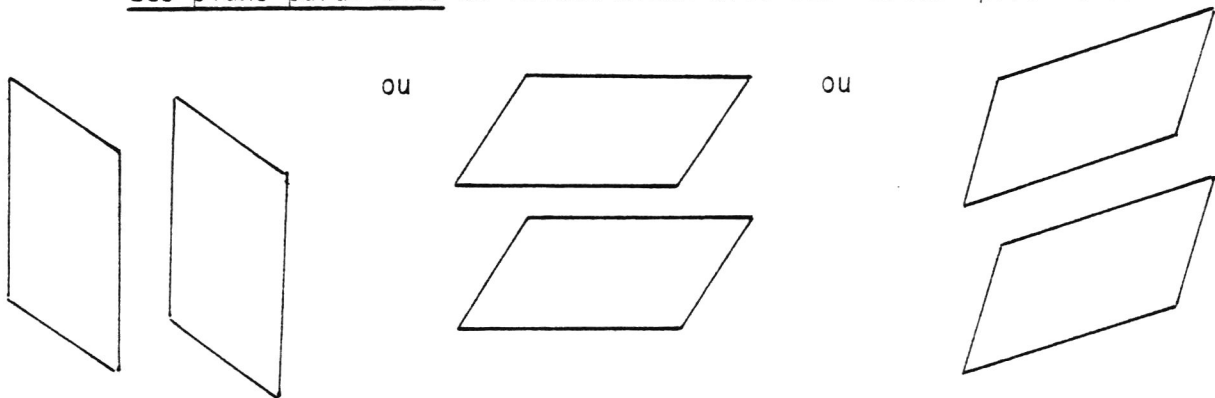


Bien sûr on ne peut pas toujours éviter les difficultés et les élèves peuvent avoir du mal à réaliser que les droites EF et BH ne sont pas sécantes (encore qu'ici EF (dessinée en plein) soit "devant" BH (en pointillés)) et que les droites DC et HB (toutes les deux en pointillés) ne sont pas non plus sécantes.

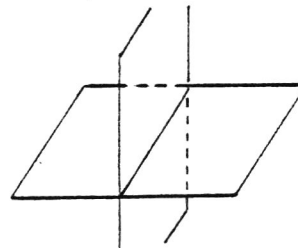


Représentation de deux plans

Les plans parallèles se voient mieux avec des "côtés" parallèles



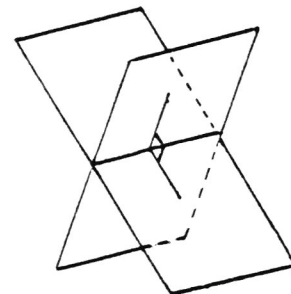
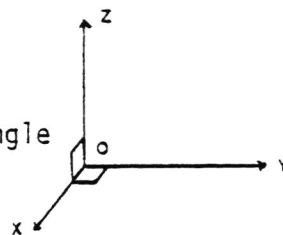
Les plans perpendiculaires ne posent pas de problème si l'un est horizontal et l'autre vertical.



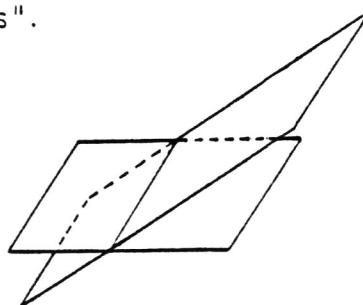
Ils en posent dans les autres cas où un signe conventionnel est nécessaire pour indiquer qu'un rectiligne est droit :

(Le rectiligne est le secteur intersection du dièdre et d'un plan orthogonal à son arête).

Un trièdre trirectangle



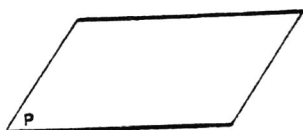
Les plans sécants sont plus clairement sécants si on fait apparaître leur droite commune parallèle aux "côtés".



III Que faire avec les élèves ?

Pour conclure ce chapitre destiné à provoquer, chez les enseignants qui le liront, une réflexion sur la peu facile représentation plane des figures de l'espace nous dirons qu'il ne faut pas hésiter à tout expliquer aux élèves, la perspective et les conventions, ce qui est imposée par l'une et ce que facilitent les autres, les difficultés inévitables, etc.....

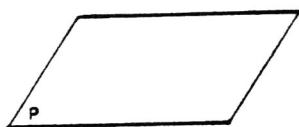
On peut aussi éviter les questions embarrassantes du genre :



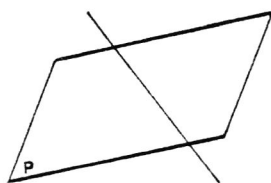
A

Le point A est-il un point du plan P ?

ou



Cette droite est-elle incluse dans P ?



Et celle-ci ?

(On ne peut poser ce genre de questions que dans des cas non ambigus, comme le cube).

Enfin il ne faut sans doute pas trop exiger que les élèves "voient" bien l'espace représenté sur un plan. La manipulation des objets (cube, polyèdres, cylindres, cônes, prismes, sphères, etc....) est indispensable pour que les enfants puissent commencer à faire quelques raisonnements simples sur leurs représentations planes.



BIBLIOGRAPHIE

B I B L I O G R A P H I E

OUVRAGES DE REFERENCE

- | | | |
|--------------------------|--|------------|
| - BERGER | Geométrie | CEDIC |
| | Une somme, fort bien faite, de résultats . | |
| | Lecture difficile mais passionnante (5 tomes, en français) . | |
| - COXETER | Introduction to geometry | JOHN WILEY |
| - HILBERT ET COHN-VOSSEN | Geometry and the imagination | CHELSEA |

PLUS SPECIFIQUEMENT SUR LES POLYEDRES

- | | | |
|--|--|----------------------------|
| - WENNINGER | Polyhedron Models | CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS |
| - HOLDEN | Forme, Espace et Symétrie | CEDIC |
| - CUNDY et ROLLET | Modèles Mathématiques | CEDIC |
| - Chacun des recueils de GARDNER contient une ou plusieurs idées intéressantes de manipulation : | | |
| | Problèmes et divertissements mathématiques (2 tomes) | DUNOD |
| | Nouveaux divertissements mathématiques | DUNOD |
| | Casses têtes mathématiques de SAM LLOYD | DUNOD |
| | Jeux du scientific american | CEDIC |
| | Math'festival | Belin |
| | Haha ou l'éclair de la compréhension mathématique | Belin |
| | La magie des paradoxes | Belin |

BROCHURES

- A la recherche d'activités mathématiques - 5^e
I.R.E.M de Rennes (77/78)
- Autour du cube
I.R.E.M de Paris-Sud (80)
- Espace I (N° 24)
Espace II (N° 25)
Maths, Dessin, Perspective
Bulletin de liaison des professeurs de Mathématiques.
AUDECAM/I.R.E.M de Paris-Sud

POCHETTES DE MANIPULATIONS

- JENKINS ET WILD Curiosités mathématiques BASS & BASS
- SCHATTSCHEIDER et WALKER
 M.C ESCHER kaleïdocycles BALLANTINE

(Ces deux pochettes sont bourrées d'idées exploitables en classe)



S O M M A I R E

S O M M A I R E

PREMIERE PARTIE : POLYEDRES

ACTIVITES ELEVES

Numéro	Intitulé	Niveau mini.	Page
1	recherche de tous les patrons d'un cube	6	6
2	développements d'un tétraèdre régulier	5	8
3	27 petits Cubes	tous	10
4	construire des boîtes	5	11
5	cécouper un cube en six tétraèdres	3	12
6	des tétraèdres dans un cube	6	13
7	construction de divers solides	tous	15
8	le dodécaèdre rhombique en kit	3	17
9	le polyèdre de SZILASSI	tous	18
10	un parallélépipède oblique	2	20
11	polyèdres réguliers convexes	tous	22
12	polyèdres de KEPLER-POINSOT	tous	24
13	polyèdres archimédiens	tous	28
14	deltaèdres	tous	33
15	la relation d'EULER	tous	35
16	dualité	tous	37
17	un polyèdre flexible	tous	40

Thèmes

Numéro	Intitulé	Page
1	quelques pavages de l'espace	46
2	catalogue des principaux polyèdres	52
3	techniques de construction	57

SECONDE PARTIE : VARIATIONS SPATIALES

Activités élèves

Numéro	Intitulé	Niveau mini.	Page
18	dessiner 1	tous	64
19	dessiner 2	tous	66
20	intersection d'un cylindre et d'un plan	3	68
21	la pyramide tronquée		71
22	l'hypercarte		77
23	optimisation		78
24	tracer des lignes fermées sur un tétraèdre		79
25	tracer des lignes fermées sur un cube		80
26	cylindre, berlingot, tétraèdre	3	82
27	un problème des olympiades	5	86
28	hélices	6	89
29	Petites questions	variable	91

Thèmes

Numéro	Intitulé		Page
4	conventions de dessins		97

Bibliographie

FABRICATION

DACTYLOGRAPHIE : Martine LAMY

MAQUETTE : Didier MISSENARD

PAGE DE TITRE : Pierre CHAMPEAUX

REPROGRAPHIE : Mmes DIERAERT et LAMY

Michel TORRESANI

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M.
PARIS VII

- 3 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 4 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 1
- 7 - PAVAGES ET COLORIAGES
- 9 - DES CHIFFRES ET DES NOTES
- 10 - CALCUL MENTAL
- 11 - CALCUL 1
- 12 - CALCUL 2
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 2
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERS
- 17 - COLORIAGES GEOMETRIQUES
- 19 - COCOTTES, DRAPEAUX ET GEOMETRIE
- 20 - QUI COURT ?
- 21 - ALMANATHEMATIQUES
- 22 - FRISES
- 23 - RECURRENCE
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - LES FORCES EN STATIQUE
- 26 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 27 - LE NOMBRE D'OR
- 28 - ROTATIONS - ANGLES EN SECONDE
- 29 - LA VITESSE
- 30 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 31 - FONCTIONS ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 32 - LES ANGLES
- 33 - L'INFORMATIQUE / L'ENSEIGNEMENT
- 34 - METROLOGIE
- 35 - ACTIVITES SPACIALES
- 36 - AU PAYS DES CYCLOIDES
- 37 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES

GAZETTE INFORMATIQUE n° 4

"Reproduction de textes anciens"

- I - " DISME " (1585)
- II- " GEOMETRIE ELEMENTAIRE " de F. KLEIN (1896)

Editeur : I.R.E.M.

Directeur/Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage : 300 exemplaires Dépôt légal : 2-86612-006-X
février 1982