IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII

Reproduction de textes anciens

3
mai 1982

DICTIONNAIRE
MATHEMATIQUE
OU
IDEE GENERALE
DES
MATHEMATIQUES

Par M. OZANAM, Profeſſeur des Mathematiques.

Premier fascicule

Année de parution : 1691 Langue originale : français
Edition reproduite : ESTIENNE MICHALET (Paris) - 1691

DICTIONNAIRE MATHEMATIQUE

OU

IDEE GENERALE

DES

MATHEMATIQUES

Par M. OZANAM, Profeſſeur des Mathematiques.

Premier fascicule

Jacques OZANAM, né en Bresse en 1640, est issu d'une famille juive convertie au catholicisme.
Destiné à l'église par son père, contre ses inclinations, il se consacre aux sciences exactes dès la mort de papa. Sans fortune, il vit alors en enseignant les mathématiques à Lyon puis à Paris, où il acquiert une solide réputation. Privé de ses élèves par les guerres, il meurt dans un semi-dénuement en 1717.
On lui doit de nombreux ouvrages sur la trigonométrie, l'arpentage, la perspective, etc...

L'exergue est un montage à partir de l'Eloge académique d'OZANAM par FONTENELLE.

Le nom d'OZANAM reste surtout attaché à ses célèbres Récréations mathématiques et physiques (première édition, Paris 1694) qui cunnurent plus d'une dizaine d'éditions jusqu'à la fin du XVIII° siècle (dont des traductions en anglais). Largement inspirées par les ouvrages antérieurs de BACHET de MEZIRIAC, LEURECHON, MYDORGE et Daniel SCHWENTER, les Récréations contiennent la solution d'une foule de problèmes d'arithmétique, de géométrie, d'optique, de gnomonique, de mécanique et de pyrotechnie.

Citons également, car il fut célèbre à l'époque, son Cours de mathématiques, qui comprend toutes les parties les plus utiles à un homme de guerre et à tous ceux qui veulent se perfectionner dans les mathématiques (Paris, 1693, 5 vol.), qui connut

.../...

.../...

deux éditions et fut traduit en anglais (Londres 1708).

OZANAM est également l'auteur de Nouveaux éléments d'algèbre (Amsterdam 1702), pour lesquels LEIBNIZ avait beaucoup d'estime.

Le Dictionnaire mathématiques (Paris 1691), dont nous donnons ici une reproduction partielle, est le premier " dictionnaire " (en fait il s'agit plutôt d'une encyclopédie) consacré au corpus que recouvrait le vocable " mathématiques " au XVII° siècle.
On voit, sur la table des matières, qu'il recouvre non seulement la " mathématique simple ", c'est-à-dire l'arithmétique et la géométrie, mais aussi la " mathématique mixte " qui va de la cosmographie à la musique, en passant par l'optique, la navigation ou l'architecture.

On a choisi de reproduire, en deux fascicules, les parties consacrées à l'arithmétique et à l'algèbre d'une part, et les principes généraux du raisonnement mathématique (axés principalement sur la géométrie) suivis de la géométrie, tant spéculative que pratique d'autre part.

Cet ouvrage est le reflet du cursus mathématique " classique" enseigné dans les collèges à la fin du XVII° siècle ; on y remarquera l'absence du calcul infinitésimal* dont le premier exposé didactique en français (du calcul différentiel) est le traité du marquis de l'HOPITAL (1696).
Le lecteur du XX° siècle y trouvera, à travers des notations et une terminologie souvent déconcertante pour lui, une initiation à la lecture des textes mathématiques anciens.

J.L. Verley

* Bien que certains résultats cités d'ARCHIMEDE ou HUYGENS appartiennent à la préhistoire de ce calcul.

DICTIONNAIRE
MATHEMATIQUE,
OU
IDÉE GENERALE
DES
MATHEMATIQUES.

DANS LEQUEL L'ON TROUVE, outre les Termes de cette ſcience, pluſieurs Termes des Arts & des autres ſciences; Avec des raiſonnemens qui conduiſent peu à peu l'eſprit à une connoiſſance univerſelle des Mathematiques.

Par M. OZANAM, Profeſſeur des Mathematiques.

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, Imprimeur du Roy, ruë Saint Jacques, à l'Image ſaint Paul.

M. DC. XCI.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

JE me ſuis ſouvent étonné qu'en un ſiecle auſſi éclairé que celui-cy, où les Arts & les Sciences ſemblent avoir receu leur derniere perfection, on n'ait point encore tenté de donner un Dictionnaire, qui expliquât éxactement tous les Termes des Mathematiques, dont l'uſage eſt devenu ſi commun. La Juriſprudence, la Medecine, la Philoſophie, la Theologie, l'Hiſtoire, la Geographie, la Peinture, l'Architecture, la Sculpture, la Fortification, la Navigation, la Botanique, le Jardinage, & les Arts les plus communs ont leurs Dictionnaires. L'Arithmetique, la Geometrie, l'Aſtronomie, l'Optique, la Mecanique, la Muſique, & toutes les autres parties des Mathematiques ont encore plus beſoin de ce ſecours, pour être plus difficiles, & en même tems neceſſaires à pluſieurs Perſonnes, qui ſont ſouvent obligées de parler de ces ſortes de choſes avec les honnêtes gens.

Nous vivons dans un Regne ſi rempli de grands évenemens, ſi floriſſant pour les Lettres & pour les Arts, ſi celebre par les nouvelles découvertes qui ſe ſont faites en Phyſique & en Aſtronomie, & ſi magnifique par les ouvrages publics, que pour parler de l'Hiſtoire de LOUIS

LE GRAND, il faut necessairement parler de Guerres, & de Places fortifiées, investies, assiegées, défendues, & emportées: des voyages de long-cours, de la fabrique des Vaisseaux & des Galeres, & de la Navigation: des observations celestes, & des nouvelles Machines inventées pour conduire les eaux, pour aplanir les Montagnes, pour passer les rivieres & pour les détourner, pour couper des Masses de pierre, pour élever des édifices superbes, pour foüiller dans les entrailles de la Terre, & pour faire toutes les autres merveilles, qui font aujourd'hui le bonheur de la France, & l'admiration des Etrangers.

Où sont les Arts & les Sciences, qui n'ayent besoin d'emprunter le secours des Mathematiques, ou pour agir, ou pour s'expliquer de mille choses qui en dépendent, soit pour leurs operations, soit pour leur intelligence? La jurisprudence a recours aux proportions, pour tenir la juste balance qui regle les interêts, les droits, les pretentions, & les differens de la vie civile, du commerce, & des societez. Combien de fois est-elle obligée d'apeller la Geometrie à ses jugemens, pour diviser des Terres litigieuses, pour regler les confins, & pour assigner les heritages dans les partages qui se font.

N'est-ce pas par l'art des combinaisons que la Physique a découvert une infinité d'éfets surprenans, & reduit à un petit nombre de Principes seurs, fixes, & invariables, tant d'experiences qu'elle a faites, & qu'elle fait encore tous les jours?

La nouvelle Philosophie ne considere-t-elle pas tous les Animaux comme autant de Machines, par les raports qu'a la circulation du sang, les mouvemens des nerfs, des muscles, & des esprits, & les battemens des arteres, avec les ressorts des Mecaniques, l'équilibre des liqueurs, les vibrations des Pendules, & les lignes droites, obliques, & traversantes, qui composent les plans des fibres dans la struſture des chairs, & dans leurs diſpoſitions : ce qui a fait donner à certains muſcles les noms de *Trapezes*, & de *Rhomboïdes*, noms barbares & énigmatiques, pour ceux qui ne ſont pas initiez dans les miſteres de la Geometrie?

La connoiſſance de l'Aſtronomie n'eſt-elle pas mêmes neceſſaire à un Medecin pour les prognoſtics, & pour donner aux malades des remedes à propos? C'eſt ſans doute ce qui a engagé tant d'habiles Medecins à joindre aux lumieres de la Phyſique, les lumieres des Mathematiques, dans leſquelles pluſieurs ont excellé.

Aprés avoir parlé en general des principales utilitez d'un Dictionnaire des Mathematiques, il faut rendre raiſon de l'ordre que j'ay tenu dans celui-cy. Je n'ay pas ſuivi l'ordre Alphabetique, que l'on obſerve ordinairement en de ſemblables livres, où l'on ne cherche que l'explication & les divers uſages des mots. J'ay crû que l'ordre & la methode des Sciences ſeroit plus propre, parce qu'on y verroit chaque Terme en ſa place avec les Definitions des choſes, leurs uſages & leurs raports, & que ce livre pourroit être en même tems non ſeulement un Dictionnaire, mais encore un Rudiment des Mathematiques, pour ceux qui ſont bien aiſes de voir les choſes dans leurs ſources. C'eſt ainſi que Julius Pollux fit autrefois ſon Dictionnaire Grec pour des matieres plus aiſées, & qui demandoient moins de ſuite que les Termes d'une ſcience Methodique.

J'ay premierement traité de la Mathematique Simple, c'eſt à dire de l'Arithmetique & de la Geometrie, & enſuite de la Mathematique Mixte, qui comprend la Coſmographie, l'Aſtronomie, la Geographie, la Theorie des Planetes, l'Optique, la Mecanique, l'Architecture tant civile que Militaire, & la Muſique.

Ces parties ſont diviſées en d'autres parties : comme l'Arithmetique en Arithmetique vulgaire ou pratique, & en Algebre : la Geometrie en Geometrie ſpeculative, & en

Geometrie Pratique : la Geographie en Navigation, & en Geographie Aſtronomique, Naturelle, Civile, & Hiſtorique : l'Optique en Perſpective, Gnomonique, Catoptrique, Dioptrique, & Peinture : la Mecanique en Statique, & en Hydroſtatique, &c.

J'ay tâché de ne laiſſer en tout cela échaper aucun des Termes qui ont beſoin d'être expliquez, pour être entendus de tout le monde : mais je n'ay pas jugé neceſſaire de groſſir ce Volume des Termes qui ſont communs aux Mathematiques & aux autres Arts, & qui ſont dans un uſage ſi commun que perſonne ne les ignore. J'y ay ajouté en échange l'explication de pluſieurs Termes de Phyſique, & de l'Hiſtoire naturelle, & de divers Arts, parce qu'ils entroient par occaſion dans mon ſujet, & que j'ay cru que mes Lecteurs ſeroient bien aiſes de les aprendre. Enfin ſi j'ay don- plus d'étenduë à la Navigation qu'aux autres Traitez, c'eſt parce qu'à preſent la France n'eſt pas moins redoutable ſur la Mer que ſur la Terre, & qu'elle eſt en état non ſeulement de ne rien craindre des entrepriſes de tous ſes ennemis ſur les deux Mers, mais encore de leur donner la loy par la plus puiſſante Armée qu'on ait vû ſur l'Ocean.

TABLE
DES TRAITEZ
contenus dans ce Livre.

TABLE DES TRAITEZ.

TABLE

13

ARITHMETIQUE.

L'ARITHMETIQUE est la Science de la *quantité discrete*, ou des nombres. Elle a deux parties, l'*Arithmetique commune*, & l'*Algebre*, dont nous donnerons les définitions dans la suite.

Le NOMBRE est l'assemblage de plusieurs choses de même genre. Le nombre est assez souvent de choses separées de lieu, & leur assemblage ne se fait que dans nôtre esprit : tellement que

NOMBRER, ou *conter* n'est autre chose qu'enveloper plusieurs unitez dans une seule idée.

L'*Unité* est un nombre entier, par lequel nous disons qu'une chose est une sans la diviser, en la separant de toute autre chose. Ainsi nous nommons la pierre *Une*, que nous prenons toute entiere sans y considerer les parties, & que nous separons par pensée de tout ce qui n'est pas pierre.

Le *Nombre entier* est celuy qui signifie une ou plusieurs choses de même genre sans sous-division d'aucune : comme 25 pains, sans aucune division d'un autre.

Deux est l'assemblage d'un & d'un.

Trois est l'assemblage de deux & d'un.

Quatre est l'assemblage de trois & d'un, &c.

Comme les Multitudes peuvent changer en une infinité de manieres par l'addition continuelle de l'unité à la multitude precedente, il se pourroit faire que nous en eussions des idées indépendantes les unes des autres : même les noms & les caracteres, dont nous nous servons pour les exprimer, pourroient être tous differens, sans que l'un empruntât rien de l'autre, ce qui eût demandé une memoire & une imagination prodigieuse, pour aprendre sans confusion autant de choses differentes que nous en avons besoin pour nôtre usage. Mais nous nous trouvons délivrez de cette difficulté par la methode vulgaire de conter, qui est à present en usage, & dont on ne sçauroit assez admirer l'artifice, qui nous soulage, soit dans la conception & dans la prononciation de bouche, soit aussi dans l'expression par écrit.

Quant à la prononciation, il est évident que nous n'avons qu'*Un*, *Deux*, *Trois*, *Quatre*, *Cinq*, *Six*, *Sept*, *Huit*, *Neuf*, & *Dix*, pour mots absoluts, ausquels il répond autant d'idées differentes, & qui ne disent aucun raport entr'eux ; car le plus grand de tous ceux-là, qui est le *Dix*, étant consideré comme Un, se repete en suite jusqu'à dix fois, pour faire le *Cent*, lequel étant encore repeté dix fois fait le *Mille*, dix desquels s'appellent *Dix Milliers*, & de dix fois dix mille se fait *Cent Mille*, lesquels étant pris dix fois font le *Million*, dont les dix font les *Dix Millions*. Ce qui est encore évident des nombres moyens entre ceux-là, car *cinquante-deux*, par exemple, signifie cinq dizaines & deux de plus.

Il paroît encore que nous n'avons pas plus de caracteres absolument divers.

1 ſignifie *Un.*
2 ſignifie *Deux.*
3 ſignifie *Trois.*
4 ſignifie *Quatre.*
5 ſignifie *Cinq.*
6 ſignifie *Six.*
7 ſignifie *Sept.*
8 ſignifie *Huit.*
9 ſignifie *Neuf.*

Car pour exprimer *Dix*, nous nous ſervons de 1 avec le o, ou *Zero*, ou *Nul*, en cette ſorte 10, de ſorte qu'un ſeul o eſt la marque de *Dizaine.* D'où il ſuit que 30 ſignifie *Trente*, parce que ce ſont trois dizaines, &c.

Pour les nombres qui ne ſont pas compoſez d'un nombre précis de dizaines, comme *Trente-deux*, on les marque par ces caracteres 32, ſçavoir par le 3, qui ſignifie trois dizaines, & par le 2, qui ſignifie deux unitez, que l'on met à la place du o, lors qu'outre les dizaines il y a quelques unitez.

Chacun de ces mêmes neuf differens caracteres, ou *chifres*, mis devant deux o, ſignifie autant de centaines qu'il valoit d'unitez dans ſa premiere ſignification, & même devant deux autres chifres mis à la place des o, pour ſignifier quelques dizaines & quelques unitez, &c. Tellement que quand vous trouverez autant de chifres ou caracteres qu'il vous plaira, pour en ſçavoir la valeur, vous n'avez qu'à apliquer par penſée à chacun deux de ſuite en commençant de droit à gauche les mots ſuivans avec leurs ſignifications.

Unitez	*Mille*	*Million.*
Dizaines	*Dizaine de Mille*	*Dizaine de Million.*
Centaines	*Centaine de Mille*	*Centaine de Million.*

Ce qui étant par exemple pratiqué à l'égard du nombre ſuivant 957327621, vous prononcerez qu'il vaut *neuf cens cinquante-ſept millions trois cens vingt-ſept mille ſix cens vingt-un :* parce que 9 mis devant huit lettres ſignifie *neuf cens Millions*, le 5 mis devant ſept autres lettres ſignifie *cinquante millions*,

neuf cens	*cinquante*	*ſept millions.*	*Trois cens*	*vingt*	*ſept mille*	*Six cens*	*vingt*	*un.*
9	5	7.	3	2	7.	6	2	1.
Centaine de million	*Dizaine de million*	*Million*	*Centaine de mille*	*Dizaine de mille*	*Mille.*	*Centaine*	*Dizaine*	*Unité*

le 7 mis devant les ſix autres ſignifie *ſept millions*, le 3 mis devant les cinq autres signifie *trois cens mille*, le 2 mis devant les quatre autres signifie *vingt mille*, le 7 mis devant les trois autres signifie *sept mille*, le 6 mis devant les deux autres signifie *six cens*, le 2 mis devant une seule lettre signifie *vingt*, & le 1 sans aucune lettre suivante signifie simplement *une unité*.

Ainsi vous voyez qu'il ne vous faut pas hazarder de dire la signification d'un nombre exprimé par plusieurs caracteres, que vous ne soyez premierement attentif au dernier. Ce n'est pas neanmoins que quand on vous cacheroit deux ou plusieurs chifres d'un nombre, dont on ne vous montreroit que quelques autres, par ce qui a été dit jusques à present, vous ne pussiez assurément dire que l'unité prise dans un tel ordre qu'on voudra, vaut dix unitez de l'ordre suivant. Ainsi dans le nombre precedent 957327621, vous pourrez dire que l'unité prise dans 6, vaut dix de celles que l'on considereroit dans 2.

AJOÛTER ou *additionner plusieurs nombres ensemble*, c'est en trouver un, que l'on apelle *Somme*, lequel égale tous les autres. Ainsi on connoît que la *somme* de ces trois nombres 3, 5, 9, est 17.

OTER ou *soustraire un nombre d'un plus grand*, est trouver un nombre qu'on nomme *Difference*, par lequel le plus grand surpasse le plus petit. Ainsi on connoît que la *difference* de ces deux nombres 3, 5, est 2.

Oter plusieurs nombres d'un autre, est trouver l'excez de ce nombre sur la somme de tous les autres. Ainsi on connoît que l'excez de ce nombre 25 sur ces trois 5, 6, 8, est 6.

MULTIPLIER *un nombre par un autre*, est en trouver un troisiéme, qu'on apelle *Produit*, qui contienne autant de fois le multiplié, qu'on apelle *Multiplicande*, que le multipliant qu'on nomme *Multiplicateur*, comprend d'unitez. Ainsi multiplier 12 par 3, c'est prendre 12 trois fois, & l'on a 36 pour le *produit*. Plus le multipliant contient d'unitez, plus de fois le produit doit contenir le multiplié : & moins le multipliant contient d'unitez, moins aussi le produit contiendra le multiplié. D'où il suit que si le multipliant est une fraction, ou partie de l'unité, le produit sera moindre que le multiplié. Ainsi en multipliant 12 par $\frac{3}{4}$, le produit est 9, qui est bien moindre que le multiplié 12.

Multiplier plusieurs nombres ensemble est en multiplier premierement deux ensemble, & multiplier en suite le produit par l'un des autres, & le second produit par l'un des autres, s'il y en a davantage, & ainsi en suite jusqu'à ce que le dernier ait multiplié. Ainsi on connoîtra que le produit de ces quatre nombres 2, 3, 5, 7, est 210.

Quand on multiplie un nombre par luy-même, le produit se nomme *Nombre quarré*, ou *Quarré* du premier nombre, lequel est apellé *Racine quarrée* du produit.

Quand on multiplie le *Quarré* par le premier nombre, c'est-à-dire par sa *Racine quarrée*, le produit se nomme *Nombre cubique*, ou *Cube* du premier nombre, lequel est apellé *Racine cubique* du produit.

Quand on multiplie le *Cube* par le premier nombre, c'est-à-dire par sa Racine cubique, le produit se nomme *Nombre quarré-quarré*, ou *Quarré-quarré* du premier nombre, lequel on apelle *Racine quarré-quarrée* du produit.

Quand on multiplie le *Quarré-quarré* par le premier nombre, c'est-à-dire par sa *Racine quarré-quarrée*, le produit se nomme *Nombre sursolide*, ou *Sursolide* du premier nombre, lequel est apellé *Racine sursolide* du produit, & ainsi en suite.

Chacun de ces produits differens, que l'on peut avoir en multipliant continuellement par le premier nombre, qui en est la Racine commune, se nomme *Puissance*, laquelle on apelle *Puissance du second degré*, quand elle est un *Nombre quarré*: *Puissance du troisiéme degré*, quand elle est un *Nombre cubique*, & ainsi en suite. D'où il suit qu'à l'égard de ces Puissances leur Racine commune peut passer pour une *Puissance du premier degré*, laquelle se nomme *Racine du second degré*, quand elle est une *Racine quarrée*: *Racine du troisiéme degré*, quand elle est une *Racine cubique*, & ainsi de suite. Pour le nombre qui exprime le degré de la Puissance, il se nomme *Exposant* de cette Puissance. Ainsi on connoît que l'Exposant d'un nombre quarré est 2, que l'Exposant d'un nombre cubique est 3, &c.

Quand on multiplie deux nombres ensemble, le produit se nomme *Nombre plan*: tel est ce nombre 12, à l'égard des deux 3, 4, qui le produisent, & qui en sont apelez les *côtez*.

Il est évident que quand ces deux nombres ou côtez seront égaux, ils produiront un *Nombre quarré*.

Quand on multiplie trois nombres ensemble, le produit se nomme *Nombre solide*. Tel est ce nombre 24, à l'égard des trois nombres 2, 3, 4, qui le produisent, & qui en sont apelez les côtez. Il est évident que quand ces trois nombres ou côtez seront égaux, ils produiront un *nombre cubique*.

Quand on multiplie quatre nombres ensemble, le produit s'apelle *Nombre Plan-plan*. Tel est ce nombre 180, à l'égard des quatre nombres 2, 3, 5, 6, qui le produisent. Il est évident que quand ces quatre nombres ou côtez seront égaux, ils produiront un *Nombre Quarré-quarré*.

Quand on multiplie cinq nombres ensemble, le produit s'apelle *Nombre Plan solide*. Tel est ce nombre 1260, à l'égard des cinq nombres 2, 3, 5, 6, 7, qui le produisent. Il est évident que quand ces cinq nombres ou côtez seront égaux, ils produiront un *Nombre sursolide*, &c.

DIVISER *un nombre par un autre*, est trouver un nombre apellé *Quotient*, qui contienne autant d'unitez que le nombre à diviser, qu'on nomme *Dividende*, contient le nombre qui divise, lequel on apelle *Diviseur*. Il est évident que si le Dividende & le Diviseur sont composez chacun à part de plusieurs unitez, le Quotient sera moindre que le Dividende. Ainsi en divisant 12 par 3, le Quotient est 4, qui est bien moindre que le Dividende 12. Mais si le Diviseur étoit une fraction, parce que le Dividende le contiendroit plus de fois que l'unité même, il est évident que le Quotient seroit plus grand que le Dividende. Ainsi en divisant 12 par cette fraction $\frac{3}{4}$, le Quotient est 16, qui est bien plus grand que le Dividende 12.

Quand le Diviseur est plus grand que le Dividende, on écrit le Dividende au dessous du Diviseur avec une ligne entre-deux, pour en faire une fraction, qui sera le Quotient. Ainsi en divisant 2 par 3, on a $\frac{2}{3}$ pour Quotient. Nous expliquerons

expliquerons dans la ſuite plus particulierement ce que c'eſt que *Fraction*.

Diviſer un nombre par pluſieurs autres, eſt diviſer ce nombre par le produit de tous les autres. Comme diviſer ce nombre 360 par ces trois 2, 3, 5, c'eſt diviſer 360 par 30, & le Quotient eſt 12.

Tirer la Racine Quarrée d'un nombre, eſt en trouver un autre, lequel étant multiplié par luy-même produiſe le nombre propoſé, ou c'eſt en trouver un autre, dont le quarré ſoit égal au nombre propoſé : comme tirer la racine quarrée de ce nombre 25, c'eſt trouver 5, dont le quarré eſt 25.

Tirer la Racine cubique d'un nombre, eſt en trouver un autre, lequel étant multiplié par ſon quarré produiſe le nombre propoſé, ou c'eſt en trouver un autre, dont le cube ſoit égal au nombre propoſé. Comme tirer la Racine cubique de ce nombre 125, c'eſt trouver 5, dont le cube eſt 125.

Tirer la Racine Quarré-quarrée d'un nombre, eſt en trouver un autre, lequel étant multiplié par ſon cube produiſe le nombre propoſé, ou c'eſt en trouver un autre, dont le Quarré quarré ſoit égal au nombre propoſé. Comme tirer la Racine Quarré-quarrée de ce nombre 625, c'eſt trouver 5, dont le Quarré-quarré eſt 625.

Tirer la Racine ſurſolide d'un nombre eſt en trouver un autre, lequel étant multiplié par ſon Quarré-quarré produiſe le nombre propoſé, ou c'eſt en trouver un autre, dont le Surſolide ſoit égal au nombre propoſé. Comme tirer la Racine ſurſolide de ce nombre 3125, c'eſt trouver 5, dont le ſurſolide eſt 3125 : & ainſi en ſuite.

Tout nombre propoſé n'a pas une Racine telle qu'on la demande, & alors cette Racine eſt apellée *Nombre irrationnel*. Telle eſt la racine quarrée de 10, la Racine cubique de 9, & cela ſe nomme *Aſymmetrie*.

Le *Nombre irrationnel* eſt donc celuy qui ne ſe peut pas exprimer : comme la Racine quarrée de 18, qui eſt plus grande que 4, & moindre que 5, & elle ne peut point s'exprimer par quelque nombre moyen entre ces deux, ſi ce n'eſt par aproximation, ſçavoir $4\frac{1}{5}$, ou mieux $4\frac{6}{25}$, ou mieux encore $4\frac{121}{500}$, &c.

Une telle Racine eſt auſſi apellée *Nombre ſourd*, & *Nombre incommenſurable*, que l'on repreſente ainſi ; $\surd 18$, lorſqu'on veut exprimer la Racine quarrée de 18, ou ainſi, $\surd C12$, lorſqu'on veut repreſenter la Racine cubique de 18, & ainſi en ſuite : & alors le nombre 18 eſt conſideré comme une Puiſſance à l'égard de ſa Racine.

Le *Nombre rationnel*, ou le *Nombre commenſurable*, eſt celuy qui ſe peut exprimer. Comme 2, 3, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, &c.

Le *Multiple d'un nombre* eſt un nombre plus grand, qui contient le plus petit un certain nombre de fois préciſément ſans aucun reſte. Ainſi on connoît que 12 eſt multiple de 3, parce qu'il le contient quatre fois exactement.

Le *Soumultiple d'un nombre* eſt un nombre plus petit, qui ſe trouve compris un certain nombre de fois exactement dans le plus grand. Ainſi on connoît que 3 eſt ſoumultiple de 12, parce qu'il ſe trouve dans 12 quatre fois préciſément.

Les *Equimultiples* ſont des nombres qui contiennent également, c'eſt-à-dire autant de fois les uns que les autres leurs ſoumultiples. Ainſi on connoît que les deux nombres 12, 6, ſont équimultiples de leurs ſoumultiples 4, 2, parce que chacun contient ſon ſoumultiple trois fois.

D

La MESURE *d'un nombre* eſt un nombre plus petit, qui le diviſe éxactement, c'eſt-à-dire ſans aucun reſte. Ou bien c'eſt un nombre ſoumultiple. Ainſi on connoît que 3 eſt la meſure de 12, ou meſure 12, parce que 3 diviſe éxactement 12, le Quotient étant 4 ſans qu'il reſte rien.

La *Commune meſure* de deux ou de pluſieurs nombres, eſt un nombre plus petit autre que l'unité qui les diviſe ou meſure tous éxactement. Ainſi 4 eſt la commune meſure de ces trois nombres 12, 20, 28, parce qu'il les meſure éxactement par ces trois 3, 5, 7.

La PARTIE *d'un nombre* eſt un nombre quelconque plus petit. Ainſi on connoît que 3, 4, 5, &c. ſont des parties de 7. Une partie peut être *Aliquote*, & *Aliquante*.

La *Partie aliquote d'un nombre* eſt un nombre plus petit, qui eſt compris dans le plus grand un certain nombre de fois éxactement, c'eſt-à dire qui meſure le plus grand, duquel il eſt dit partie aliquote. Ainſi on connoît que 3 eſt une partie aliquote de 12, parce que 3 meſure 12 par 4, ou ſe trouve compris dans 12 quatre fois éxactement. Il eſt évident que l'unité eſt une partie aliquote de tout nombre, parce que tout nombre eſt diviſible par 1.

La *Partie aliquante d'un nombre* eſt un nombre plus petit, lequel eſt contenu dans le plus grand un certain nombre de fois avec un reſte, c'eſt-à-dire qui ne meſure pas le plus grand, duquel il eſt dit partie aliquante. Ainſi on connoît que 2 eſt une partie aliquante de 7, parce que 2 ne meſure pas 7, puiſqu'il reſte 1 en diviſant 7 par 2.

Les *Semblables parties aliquotes* ſont celles qui ſont également contenues dans leurs multiples. Ainſi on connoît que ces deux nombres 3, 5, ſont des ſemblables parties aliquotes de ces deux 18, 30, parce que 3 eſt contenu ſix fois dans ſon multiple 18, & que pareillement 5 eſt contenu ſix fois dans ſon multiple 30. Il eſt évident que ces deux nombres 18, 30, ſont équimultiples des deux 3, 5.

Les *Semblables parties aliquantes* ſont des nombres, qui contiennent également de ſemblables parties aliquotes de leurs *Touts*. Ainſi on connoît que ces deux nombres 9, 18, ſont de ſemblables parties aliquantes de ces deux 12, 24, parce que 9 contient trois fois le quart de 12, qui eſt 3, & que pareillement 18 comprend trois fois le quart de 24, qui eſt 6.

Le TOUT eſt un nombre quelconque par raport à ſes parties aliquotes ou aliquantes. Ainſi 12 eſt un *Tout* à l'égard de ſes parties aliquotes 2, 3, &c. ou de ſes parties aliquantes 5, 7, &c.

Quand on dit que *le Tout eſt égal à toutes ſes parties enſemble*, cela ne ſe doit pas entendre de toutes ſes parties aliquotes, ni de toutes ſes parties aliquantes, mais des unes & des autres mêlées enſemble. Il peut neanmoins arriver qu'un *Tout* ſoit égal à toutes ſes parties aliquotes priſes enſemble, & alors on le nomme *Nombre parfait*. Comme 6, qui eſt égal à la ſomme de toutes ſes parties aliquotes 1, 2, 3. Tel eſt auſſi ce nombre 28, qui eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14. Tel eſt encore le nombre ſuivant 496, qui eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Les *Nombres amiables* ſont deux nombres entiers, dont chacun eſt égal à toutes les parties aliquotes de l'autre priſes enſemble. Tels ſont ces deux nombres 284,220,dont le premier 284 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1,2,4, 5,10,11, 20, 22, 44, 55, 110 du ſecond 220 : & reciproquement le ſecond 220 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142 du premier 284. Tels ſont auſſi les deux nombres ſuivans 18416, 17296, dont le premier 18416 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, 8648, du ſecond 17296, & reciproquement le ſecond 17296 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208, du premier 18416.

Le *Nombre Abondant* eſt celuy qui eſt moindre que toutes ſes parties aliquotes priſes enſemble : comme 24, qui eſt moindre que la ſomme 36 de toutes ſes parties aliquotes, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Le *Nombre Défaillant* eſt celuy qui eſt plus grand que toutes ſes parties aliquotes priſes enſemble : comme 15, qui eſt plus grand que la ſomme 9 de ſes parties aliquotes 1, 3, 5. Il eſt évident que tout nombre premier eſt Défaillant.

Le *Nombre Premier* eſt celuy qui n'eſt meſuré par aucun nombre que par l'unité : comme 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, &c. On le nomme auſſi *Nombre lineaire*, & encore *Nombre incompoſé*, pour le differencier du *Nombre compoſé*.

Le *Nombre compoſé* eſt celuy qui eſt meſuré par quelqu'autre nombre que par l'unité : comme 10, qui eſt meſuré par 2 & par 5. Il eſt évident qu'un nombre compoſé peut être un nombre quarré, un nombre cubique, &c. & auſſi un nombre Plan, un nombre Solide, &c. & c'eſt pour cela qu'il eſt auſſi apellé *Nombre Geometrique*.

Les *Nombres premiers entr'eux* ſont ceux qui n'ont point d'autre commune meſure que l'unité : comme 8, 15 : car 8 ſe peut bien diviſer par 2 & par 4, mais non pas 15 : & 15 eſt bien meſuré par 3 & par 5, mais non pas 8. On connoîtra de la même façon que ces trois nombres 8, 10, 15, ſont premiers entr'eux, parce qu'il n'y a point de nombre commun, qui les meſure tous trois.

Les *Nombres compoſez entr'eux* ſont ceux, qui ont une commune meſure autre que l'unité : comme 4, 10, dont la commune meſure eſt 2 : & auſſi 2, 6, 8, dont la commune meſure eſt auſſi 2.

Le *Nombre Arithmetique* eſt un nombre quelconque rationnel conſideré en ſoy indépendamment de tout autre nombre : comme 2, 4, 5, &c.

Le *Nombre pair* eſt celuy qui eſt diviſible par 2 : comme 4, 6, 10, &c. Il eſt évident que le premier nombre pair entre les entiers, eſt 2. Un nombre pair peut-être *Pairement pair*, & *Impairement pair*.

Le *Nombre pairement pair* eſt celuy qui eſt diviſible par 4 : comme 8, 12, 16, &c.

Le *Nombre impairement Pair* eſt celuy qu'un nombre impair meſure par un nombre pair : comme 42, que le nombre 7 qui eſt impair meſure par le nombre 6 qui eſt pair.

Le *Nombre Impair* eſt celuy qui ne peut pas être diviſé en deux également : comme 3, 9, 15, &c. Il eſt évident qu'un nombre impair differe de l'unité d'un nombre pair. Un nombre impair peut être *pairement impair*, & *impairement impair*.

Le *Nombre pairement impair* est celuy qu'un nombre impair mesure par un nombre pair : comme 10, que le nombre 5 qui est impair mesure par le nombre 2 qui est pair. Il est évident qu'un nombre pairement impair est aussi impairement pair.

Le *Nombre impairement impair* est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair : comme 15, qui est mesuré du nombre impair 3, par le nombre impair 5.

Le *Nombre également égal* est celuy qui est produit en multipliant un nombre par son égal, c'est-à-dire par lui-même : comme 9, qui est produit en multipliant 3 par 3. Il est évident qu'un nombre également égal est un nombre quarré.

Le *Nombre également égal également* est celuy qui est produit par la multiplication continuelle de trois nombres égaux : comme 8, qui est produit par la multiplication de ces trois égaux, 2, 2, 2. Il est évident qu'un nombre également égal également est un nombre cubique.

Le *Nombre inégalement inégal* est un nombre Plan, qui a les côtez inégaux : comme 18, dont les côtez 3, 6, sont inégaux. Un tel nombre peut être *Barlong*, *Parallelogramme*, & *Oblong*.

Le *Nombre Barlong* est un nombre Plan, dont les côtez different de l'unité : comme 6, dont les côtez 2, 3, different de l'unité. Il est évident qu'un nombre Barlong est un nombre pairement impair, ou impairement pair.

ep. 13. *Theon* apelle encore un nombre Barlong, celuy qui se fait par l'addition de deux nombres pairs differens de deux unitez : comme 18, qui est la somme de ces deux nombres pairs, 10, 8, dont la difference est 2.

Le *Nombre Parallelogramme* est un nombre Plan, dont les côtez different d'un nombre plus grand que l'unité : comme 48, dont les côtez 6, 8, different de 2, ou dont les côtez 2, 24, different de 22, ou dont les côtez 4, 12, different de 8.

Le *Nombre Oblong* est un nombre Plan, qui a deux côtez quelconques inégaux : comme 24, dont les côtez sont 3, 8, ou 4, 6, ou 2, 12.

Le *Nombre inégalement inégal inégalement* un est nombre solide, dont les trois côtez sont inégaux : comme 30, dont les trois côtez 2, 3, 5, sont inégaux.

Le *Nombre également égal Défaillant* est un nombre Solide, qui a deux côtez égaux, & le troisiéme côté plus petit qu'aucun des deux égaux : comme 48, qui a ces trois côtez 4, 4, 3, dont les deux premiers sont égaux entr'eux, & le troisiéme est plus petit qu'aucun de ces deux.

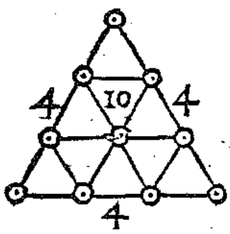
Le *Nombre également égal Abondant* est un nombre Solide, qui a deux côtez égaux, & le troisiéme côté plus grand qu'aucun des deux égaux : comme 30, qui a ces trois côtez 3, 3, 5, dont les deux premiers sont égaux entr'eux, & le troisieme est plus grand qu'aucun de ces deux.

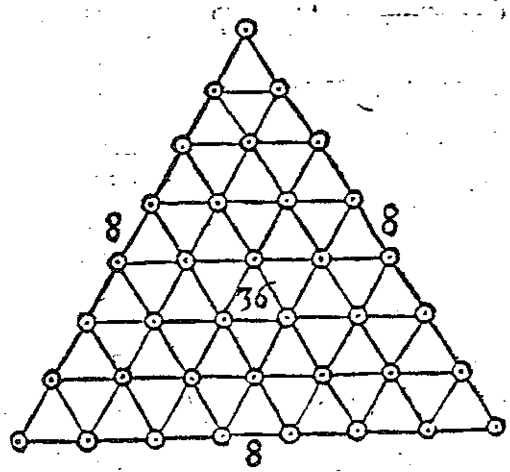
Le *Nombre circulaire*, ou *Spherique* est celuy, dont les Puissances finissent par un même nombre. Tel est ce nombre 5, dont le Quarré 25, le Cube 625, & toutes les autres Puissances finissent par le même nombre 5. Tel est aussi ce nombre 6, dont le Quarré 36, le Cube 216, & toutes les autres Puissances finissent par le nombre 6.

Le *Nombre Polygone*, ou *Figuré* est une multitude de points que l'on range dans le Plan d'un Polygone regulier parallelement aux côtez & aux rayons, ou aux côtez seulement du même Polygone. Il peut être *Simple*, & *Central*.

Le *Nombre Polygone simple* est la somme d'autant de nombres entiers que l'on voudra, apellez *Gnomons*, dont le premier est l'unité, & qui croissent à l'infini par un excez égal. La somme des deux premiers Gnomons est le premier nombre Polygone, dont le côté est 2. La somme des trois premiers Gnomons est le second nombre Polygone, dont le côté est 3. La somme des quatre premiers Gnomons est le troisiéme nombre Polygone, dont le côté est 4. Ainsi en suite. Ce nombre est apellé *Polygone*, parce qu'il represente le nombre des points qu'il faut pour remplir un Polygone regulier en égales distances prises sur des lignes paralleles aux côtez du Polygone. Ce que nous allons dire vous fera mieux comprendre cela.

Quand les Gnomons se surpassent de l'unité, comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainsi en suite, sçavoir 3, 6, 10, 15, 28, 36, 45, 55, 66, 78, &c. sont apellez *Nombres Triangulaires simples*, parce qu'ils representent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Triangle équilateral, en distances égales prises sur des lignes paralleles aux côtez du Triangle équilateral.

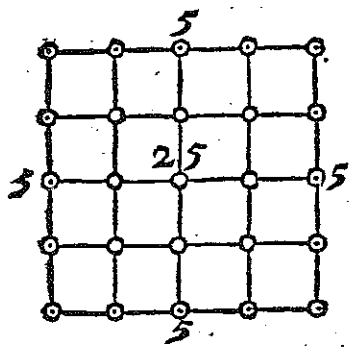


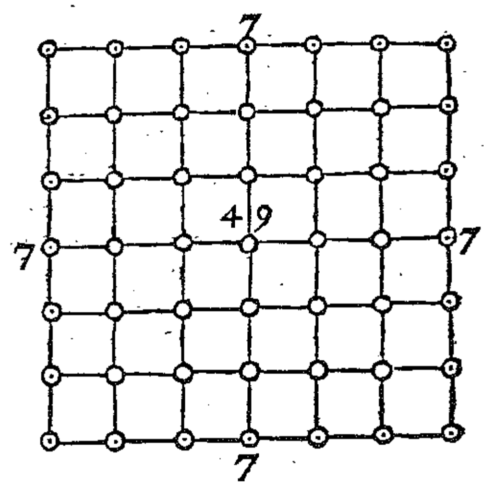


La proprieté de ces nombres Triangulaires est que quand ils sont mis par ordre, comme les precedens 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 66, 78, &c. la somme 9 des deux premiers 3, 6; la somme 16 du second & du troisiéme : la somme 25 du troisiéme & du quatriéme : la somme 36 du quatriéme & du cinquiéme, & ainsi en suite, est un nombre quarré.

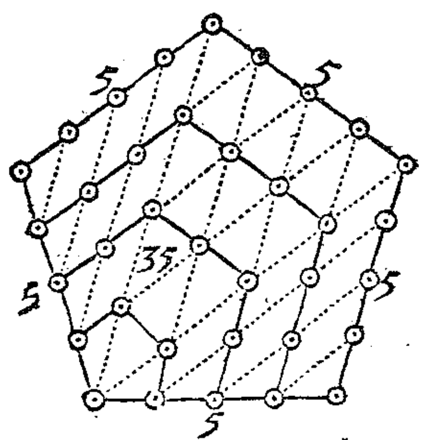
Mais il y a une autre proprieté remarquable, *Si on multiplie un nombre triangulaire par 8, & que l'on ajoûte l'unité au produit, la somme sera un nombre quarré.* Ainsi on connoît que ce nombre 78 est un nombre triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 624 étant augmenté de l'unité, la somme 625 est un nombre quarré, dont le côté est 25. D'où il suit que l'unité est virtuellement un nombre triangulaire, puisque cette proprieté luy convient : ce qui fait que dans les nombres triangulaires mis par ordre, on met ordinairement l'unité pour le premier.

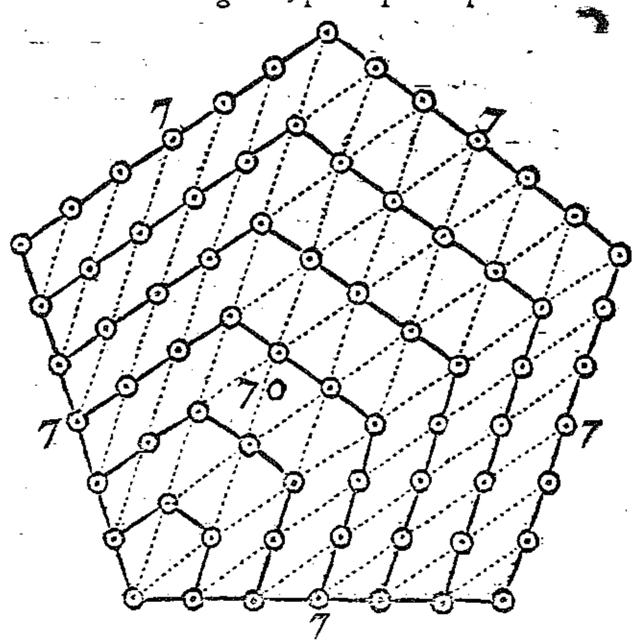
Quand les Gnomons se surpassent de deux unitez, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainsi en suite, sçavoir 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c. sont apellez *Nombres Quarrez simples*, parce qu'ils sont efectivement des nombres quarrez, & qu'ils representent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Quarré en distances égales prises sur des lignes paralleles aux côtez du Quarré.





Quand les Gnomons se surpassent de trois unitez, comme les suivans 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainsi en suite, sçavoir 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, &c, sont apellez *Nombres Pentagones*, parce qu'ils representent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Pentagone regulier en distances égales prises sur des lignes paralleles aux côtez du Pentagone.



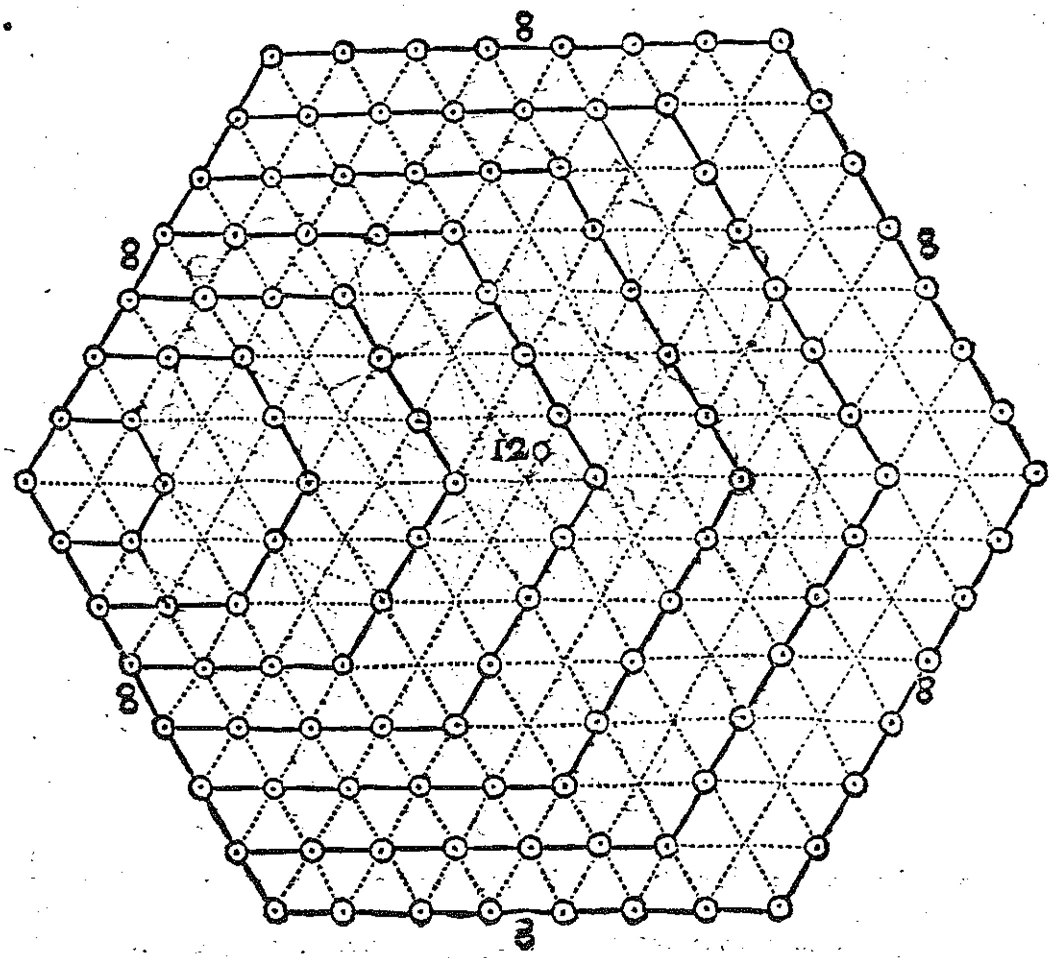


La proprieté de ces nombres Pentagones est que *chacun est égal à la som-*

me d'un Quarré de même côté & d'un Triangle dont le côté est moindre de l'unité. Ainsi ce nombre Pentagone 35, dont le côté est 5, est égal au Quarré 25 du même côté 5, & au Triangle 10, dont le côté est 4. Pareillement ce nombre Pentagone 70, dont le côté est 7, est égal au Quarré 49 du même côté 7, & au Triangle 21, dont le côté est 6. Ainsi des autres.

Mais le nombre Pentagone a une autre proprieté remarquable, sçavoir que *si on le multiplie par 24, & qu'au produit on ajoûte l'unité, la somme sera un nombre quarré*. Ainsi en multipliant ce nombre Pentagone 35 par 24, & en ajoûtant 1 au produit 840, on a ce nombre quarré 841, dont le côté est 29. De même en multipliant par 24 ce nombre Pentagone 70, & en ajoûtant l'unité au produit 1680, on a ce nombre quarré 1681, dont le côté est 41. Ainsi des autres.

Quand les Gnomons se surpassent de quatre unitez, comme les suivans 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainsi ensuite, sçavoir 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,

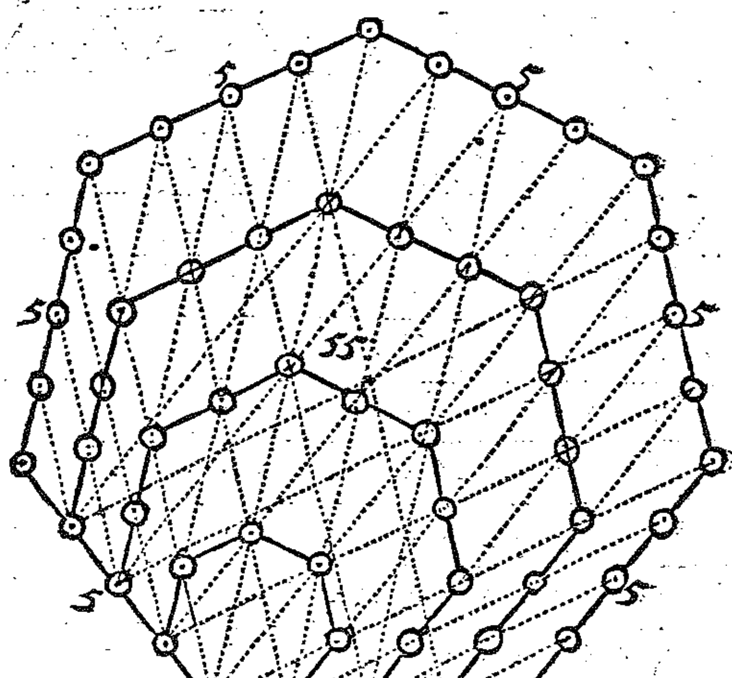


&c. sont apellez *Nombres Exagones*, parce qu'ils representent le nombre des points qu'il faut pour remplir un Exagone regulier, en distances égales, prises sur des lignes paralleles aux côtez de l'Exagone.

La proprieté de ces nombres Exagones est que *chacun est égal à la somme d'un Quarré de même côté, & de deux Triangles égaux, où le côté est moindre de l'unité dans chacun.* Ainsi l'Exagone precedent 120, dont le côté est 8, est égal au Quarré 64 du même côté 8, & aux deux Triangles égaux 28, 28, où le côté est 7 dans chacun. Outre cela dans les nombres Exagones, tous les nombres parfaits se rencontrent, comme 6, 28, &c.

Mais le nombre Exagone a une autre proprieté remarquable, sçavoir que *si on le multiplie par 8, & qu'au produit on ajoûte l'unité, la somme sera un nombre quarré*, comme dans le Triangle. Ainsi en multipliant par 8, l'Exagone precedent 120, & ajoûtant 1 au produit 960, la somme 961 est un nombre quarré, dont le côté est 31.

Quand les Gnomons se surpassent de cinq unitez, comme les suivans 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, & des quatre premiers, &c. sçavoir 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, &c. sont apellez *Nombres Eptagones*, & ainsi ensuite.



La proprieté de ces nombres Eptagones est que *chacun est égal à la somme d'un Quarré de même côté & de trois Triangles égaux, où le côté est moindre de l'unité dans chacun.* Ainsi l'Eptagone precedent 55, dont le côté est égal

égal au quarré 25 du même côté 5, & aux trois triangles égaux 10, 10, 10, où le côté est 4 dans chacun.

Mais le nombre Eptagone a une proprieté remarquable, sçavoir que *si on le multiplie par 40, & qu'on ajoûte 9 au produit, la somme sera un nombre quarré*. Ainsi en multipliant par 40 l'Eptagone precedent 55, & en ajoûtant 9 au produit 2200, la somme 2209 est un nombre quarré, dont le côté est 47.

Pour trouver promptement un Polygone, le côté étant donné, il n'y a qu'à regarder la Table suivante, qui pourra servir à ceux qui entendent l'Algebre.

Triangle $\frac{xx + 1x}{2}$. *Ou* $\frac{xx - 1x}{2}$.

Pentagone $\frac{3xx - 1x}{2}$.

Exagone $2xx - 1x$.

Eptagone $\frac{5xx - 3x}{2}$.

Octogone $3xx - 2x$.

Enneagone $\frac{7xx - 5x}{2}$.

Decagone $4xx - 3x$.

Endecagone $\frac{9xx - 7x}{2}$.

Dodecagone $5xx - 4x$.

On voit aisément par cette Table, que le côté du Polygone étant 1, le Polygone est aussi 1 : & c'est pour cela que dans l'ordre des nombres Polygones on met ordinairement l'unité pour le premier.

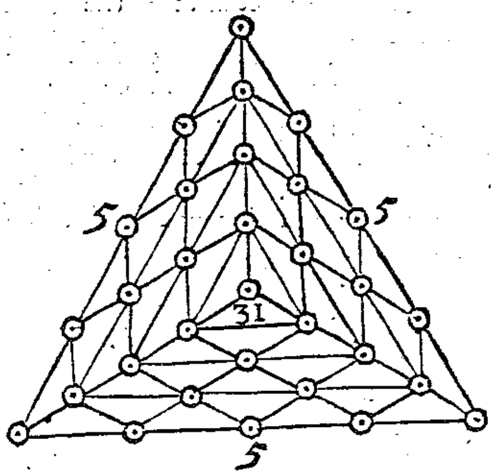
Ceux qui n'entendent pas l'Algebre, pourront se servir du Canon suivant, que nous avons tiré de *Bachet*, pour trouver un nombre Polygone, dont le côté est donné.

Multipliez le côté donné par le nombre des côtez du Polygone diminué de deux unitez, & ayant ôté quatre unitez du produit, multipliez le reste par la moitié du côté donné.

Les nombres Polygones sont d'un grand usage pour les partis du Jeu, & pour les combinaisons, & encore dans l'Algebre pour les Puissances des Binomes & Apotomes, comme l'on peut voir dans le Traité du *Triangle Arithmetique* de *M. Pascal*.

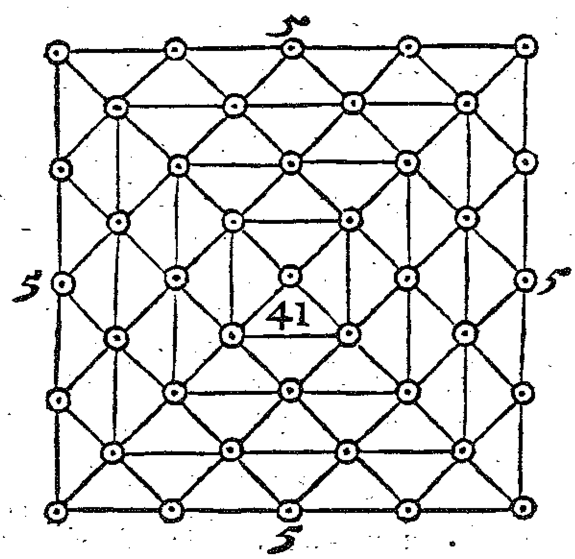
Le *Nombre Polygone Central* est un nombre égal à la somme de l'unité & du produit sous le nombre triangulaire simple, dont le côté est moindre de l'unité que celuy du Polygone central, & le nombre des côtez du Polygone central, lequel est ainsi apellé, parce qu'il represente le nombre des points qu'il faut pour remplir un Polygone regulier en distances égales prises dans les rayons du Polygone, & dans des lignes paralleles aux rayons & aux côtez du même Polygone.

Ce nombre peut être *Triangulaire*, comme le suivant, dont le côté est 5, & dont la valeur 31 se trouve en multipliant par 5 le triangle simple 10, dont le côté est 4, & en ajoûtant 1 au produit 30.



Les nombres Polygones centraux triangulaires par ordre ſont tels, 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, &c.

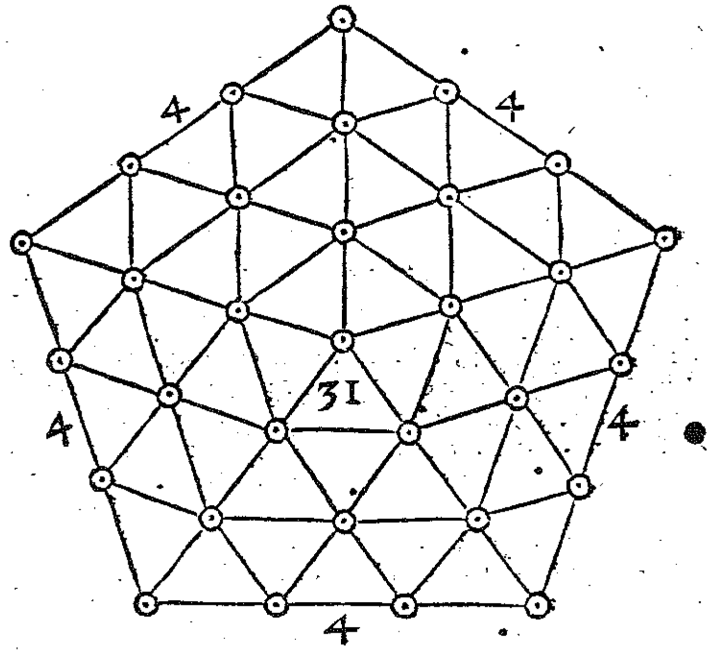
Il peut auſſi être *Quarré*, comme le ſuivant, dont le côté eſt auſſi 5, & dont la valeur 41 ſe trouve en multipliant par 4 le Triangle ſimple 10,



dont le côté eſt 4, & en ajoûtant 1 au produit 40.

Pareillement il peut être *Pentagone*, comme le ſuivant, dont le côté eſt 4, & dont la valeur 31 ſe trouve en multipliant par 5 le Triangle ſimple 6, dont le côté eſt 3, & en ajoûtant 1 au produit 30.

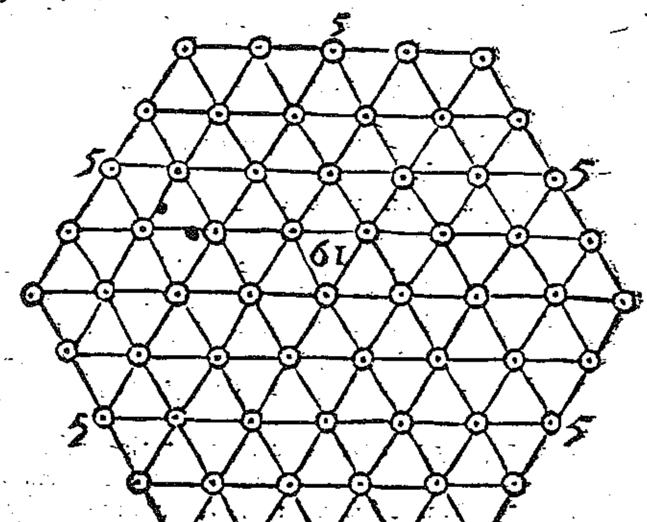
Il peut auſſi être *Exagone*, comme celuy d'aprés, dont le côté eſt 5, & dont la valeur 61 ſe trouve en multipliant par 6, le Triangle 10, dont le



côté est 4, & en ajoûtant 1 au produit 60 ; & ainsi en suite.

Les nombres Polygones centraux quarrez par ordre sont tels, 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, &c.

Les nombres Polygones centraux Pentagones par ordre sont tels, 1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, &c.



Les nombres Polygones centraux Exagones par ordre sont tels, 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.

Il est évident que tous les nombres Polygones centraux, où le nombre des côtez du Polygone est pair, sont impairs, à cause de l'unité qu'on ajoûte au produit du Triangle superieur & du nombre des côtez du Polygone.

Si l'on considere les nombres Polygones par ordre, comme des Gnomons, en mettant toûjours l'unité pour le premier, & qu'on ajoûte ensemble les deux premiers, &c. on aura des nombres que l'on nomme *Pyramidaux*, lesquels peuvent aussi être *Triangulaires*, *Quarrez*, *Pentagones*, *Exagones*, &c. selon que l'on aura ajoûté des Polygones *Triangulaires*, *Quarrez*, *Pentagones*, *Exagones*, &c.

Ainsi par le moyen de ces nombres Triangulaires simples 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, &c. on trouve ces nombres Pyramidaux Triangulaires, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, &c.

Par le moyen de ces nombres Quarrez simples 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c. on trouve ces nombres Pyramidaux quarrez, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, &c.

Par le moyen de ces nombres Pentagones simples 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, &c. on trouve ces nombres Pyramidaux Pentagones 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 640, &c.

Par le moyen de ces nombres Exagones simples 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, &c. on trouve ces nombres Pyramidaux Exagones 1, 7, 22, 50, 95, 161, 281, 434, 624, &c. Ainsi des autres.

Κόλουρος. Lorsque d'un nombre Pyramidal on ôte le premier nombre Polygone, dont il est composé, c'est-à-dire l'unité, le reste s'apelle *Nombre Pyramidal Tronqué*, duquel si l'on ôte le prémier & plus petit des nombres Polygones, dont il est composé, le reste se nomme *Nombre Pyramidal tronqué deux fois*, duquel si l'on ôte pareillement le premier & plus petit des nombres Polygones qui le composent, le reste s'apelle *Nombre Pyramidal tronqué trois fois*, & ainsi en suite. Il est évident que de semblables nombres peuvent aussi être *Triangulaires*, *Quarrez*, *Pentagones*, *Exagones*, &c.

Δικόλουρος. Τρικόλουρος.

Pareillement si l'on considere les nombres Pyramidaux par ordre, comme des Gnomons, en mettant toûjours l'unité pour le premier, & qu'on ajoûte ensemble les deux premiers, les trois premiers, les quatre premiers, & ainsi en suite, on aura d'autres nombres que l'on peut apeller *Pyramido-pyramidaux*. Ainsi par le moyen de ces nombres Pyramidaux Triangulaires 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, &c. on trouve ces nombres Pyramido-pyramidaux triangulaires, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, 715, &c. & par le moyen de ces nombres Pyramidaux quarrez 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, &c. on trouve ces nombres Pyramido-pyramidaux quarrez, 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825, 1210, &c.

Le TRIANGLE RECTANGLE *en nombres*, ce sont trois nombres rationnels, dont les deux plus petits, que l'on apelle *Base* & *Hauteur* du triangle, sont tels que leurs quarrez sont ensemble égaux au quarré du plus grand apellé *Hypotenuse*. Ainsi on connoît que ces trois nombres 5, 12, 13, representent un triangle rectangle, dont la hauteur est 5, la base est 12, & l'hypotenuse

13, parce que le quarré 169 de l'Hypotenuse 13 est égal au quarré 25 de la hauteur 5, & au quarré 144 de la base 12. Pareillement on connoît que ces trois nombres 8, 15, 17, representent un triangle rectangle, dont la hauteur est 8, la base est 15, & l'hypotenuse est 17, parce que le quarré 289 de l'hypotenuse est égal au quarré 64 de la hauteur 8, & au quarré 225 de la base 15. Ainsi des autres.

Le premier de tous les triangles rectangles en nombres entiers est 3, 4, 5.

Les Triangles rectangles peuvent être *de même espece*, & *de differente espece.*

Les *Triangles rectangles de même espece* sont ceux qui ont les côtez proportionnels : tels que sont les deux suivans 3, 4, 5, & 6, 8, 10.

Les *Triangles rectangles de diverse espece* sont ceux dont les côtez ne sont pas proportionnels : tels que sont ces deux 9, 12, 15, & 7, 24, 25.

Il est libre de prendre celuy qu'on voudra des deux plus petits nombres ou côtez d'un triangle rectangle pour base & pour hauteur. Ainsi dans ce triangle rectangle 20, 21, 29, la hauteur est 20, & la base est 21 : ou bien la hauteur est 21, & la base est 20.

Dans tout triangle rectangle, le produit sous la somme & la difference de l'hypotenuse & de l'un des deux autres côtez est un nombre quarré. Comme dans le triangle rectangle precedent 20, 21, 29, le produit 441 sous la somme 49 & la difference 9 de l'hypotenuse 29 & du côté 20, est un nombre quarré, dont le côté est 21 : & le produit sous la somme 50 & la difference 8 de l'hypotenuse 29 & de l'autre côté 21, est 400, dont la Racine quarrée est 20.

Les *Nombres generateurs* d'un triangle rectangle sont les Racines quarrées des moitiez de la somme & de la difference de l'hypotenuse & de l'un des deux côtez. D'où il suit qu'un triangle rectangle doit avoir deux paires de nombres generateurs. Ainsi on connoît que les deux nombres generateurs de ce triangle rectangle 28, 45, 53, sont 7, 2, ou $\sqrt{\frac{81}{2}}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$.

Ces deux nombres sont apellez *Generateurs*, parce qu'ils servent à former un triangle rectangle : car le double de leur produit est égal à l'un des deux plus petits côtez : la difference de leurs quarrez est égale à l'autre côté : & la somme des mêmes quarrez est égale à l'hypotenuse. D'où l'on tire une maniere aisée de former un triangle rectangle de deux nombres donnez : comme si l'on donne ces deux nombres, 5, 6, le triangle rectangle qu'on en formera, sera tel, 11, 60, 61.

Il est évident que lorsque les deux nombres generateurs seront les deux plus petits côtez d'un triangle rectangle, ils produiront un triangle rectangle, dont l'hypotenuse sera un nombre quarré. Comme si l'on donne ces deux nombres 3, 4, qui sont les deux plus petits côtez de ce triangle rectangle 3, 4, 5, on trouvera cet autre triangle rectangle 7, 24, 25, dont l'hypotenuse 25 a sa Racine quarrée 5. Pareillement si l'on donne ces deux nombres 5, 12, qui sont les deux plus petits côtez de ce triangle rectangle 5, 12, 13, on trouvera cet autre triangle rectangle 119, 120, 169, dont l'hypotenuse 169 a sa Racine quarrée 13.

Je diray icy en passant que lorsque deux triangles rectangles ont une même hauteur, la somme des quarrez de l'hypotenuse du premier triangle rectangle & de la base du second est égale à la somme des quarrez de l'hypotenuse du second triangle rectangle & de la base du premier, comme il est arrivé dans ces deux triangles rectangles,

12, 16, 20.
12, 9, 15.

où la somme des quarrez est 481, qui est l'hypotenuse de ce triangle rectangle 32, 480, 481, dont les nombres generateurs sont 15, 16.

L'Aire *d'un triangle rectangle en nombres*, est un nombre égal à la moitié du produit des deux plus petits côtez. Ainsi on connoîtra que l'aire de ce triangle rectangle 6, 8, 10, est 24, & que l'aire de celuy-cy 10, 24, 26, est 120; l'aire d'un triangle rectangle est toûjours divisible par 6.

Il y a une infinité de triangles rectangles, où l'aire est par tout le même nombre; tels sont les quatre triangles rectangles suivans,

40, 42, 58.
24, 70, 74.
15, 113, 112.
1681, 1412880, 1412881
1189

où l'aire commune est 840.

Il y a en nombres entiers une infinité de triangles rectangles, où la difference des deux plus petits côtez est égale à un même nombre: tels sont les triangles rectangles suivans,

5, 12, 13.
8, 15, 17.
21, 28, 35.
140, 147, 203.
297, 304, 425.
396, 403, 565.
833, 840, 1183.
4872, 4879, 6895.
28413, 28420, 40187.
117110, 117117, 185717.
5626320, 5626327, 112526477.

où la difference des deux plus petits côtez est 7.

Il y a aussi en nombres entiers une infinité de triangles rectangles, où l'excez de l'hypotenuse sur la base est égale à un même nombre, comme il arrive dans les triangles rectangles suivans,

3, 4, 5.
5, 12, 13.
7, 24, 25.
9, 40, 41.
11, 60, 61.
13, 84, 85.
15, 112, 113.
17, 144, 145.
19, 180, 181.
21, 220, 221.

23, 264, 265.
25, 312, 313.

où l'excez de l'hypotenuse sur la base est 1.

Par le moyen de ces triangles rectangles, nous en avons trouvé autant d'autres de la même qualité, tels que sont les suivans,

9, 40, 41.
25, 312, 313.
49, 1200, 1201.
81, 3280, 3281.
121, 7320, 7321.
169, 14280, 14281.
225, 25312, 25313.
289, 41760, 41761.
361, 65160, 65161.
441, 97240, 97241.
529, 139920, 139921.
625, 195312, 195313.

où les hauteurs sont des nombres quarrez, sçavoir les quarrez des hauteurs des triangles precedens.

Le *Nombre diametral* est un nombre Plan égal au double de l'aire d'un triangle rectangle, ou au produit de la hauteur & de la base d'un triangle rectangle, dont l'hypotenuse est apellée *Diametre* du nombre diametral, & la base & la hauteur du même triangle rectangle sont apellez *côtez* du nombre diametral. Ainsi on connoîtra que 12 est un nombre diametral, parce qu'il est égal au produit de la base 3 & de la hauteur 4 de ce triangle rectangle 3, 4, 5, & que les côtez de ce nombre diametral 12, sont 3, 4, & le diametre 5.

Le *Nombre rompu*, ou *Fraction*, est celuy qui represente une partie de l'unité. Il est composé de deux termes, que l'on separe ordinairement par une petite ligne, dont l'un qui est au dessus de la ligne, s'apelle *Numerateur*, & l'autre qui est au dessous, se nomme *Denominateur*.

Le *Numerateur* d'une Fraction est un nombre qui exprime en partie la quantité de la Fraction, ou qui exprime le nombre des parties de l'unité, lesquelles on prend pour faire la Fraction.

Le *Denominateur* d'une Fraction est un nombre, qui exprime la qualité ou l'espece, ou qui exprime le nombre entier des parties de l'unité. Dans cette Fraction $\frac{3}{4}$, le *Numerateur* est 3, & le *Denominateur* est 4.

J'ay dit que le *Numerateur* ne signifioit qu'imparfaitement & en partie la quantité de la Fraction : car en prononçant 3, quoy que l'on puisse presumer que ce soit trois parties, il reste toûjours à sçavoir quelle sorte de parties, & que le seul Dénominateur peut faire comprendre. Ainsi le Denominateur étant 4, on entend que les trois parties precedentes sont de celles desquelles l'unité en comprend quatre, & que par consequent la Fraction $\frac{3}{4}$ represente trois quatriémes parties de l'unité, ce qui est la même chose que la quatriéme partie des trois unitez.

Il arrive quelquefois dans la pratique, qu'une Fraction est plus grande que l'unité, ce que l'on connoît quand le Numerateur est plus grand que le Denominateur : & alors on la nomme *Fraction impropre*, comme $\frac{5}{2}$, qui vaut $2\frac{1}{2}$.

Les *Fractions de même dénomination*, ou *de même espece*, sont celles dont les Dénominateurs sont égaux, comme $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Les *Fractions de diverse dénomination*, ou *de differente espece*, sont celles dont les Dénominateurs sont inégaux : comme $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$.

Les *Fractions semblables*, ou *Equivalentes*, sont celles dont les Numerateurs sont semblables parties aliquotes, ou aliquantes de leurs dénominateurs : comme $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$.

La *Fraction premiere* est celle dont le Numerateur & le Denominateur n'ont point d'autre commune mesure que l'unité, comme $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$.

La *Fraction abaissée*, ou *reduite à moindres termes*, est celle qui est provenuë en divisant le Numerateur ou le Denominateur par leur commune mesure, quand ils en ont une. Ainsi en divisant le Numerateur & le Denominateur de cette Fraction $\frac{6}{15}$, par leur commune mesure 3, on a en moindres termes cette Fraction équivalente $\frac{2}{5}$.

La *Fraction de Fraction* est une partie d'une Fraction. Ainsi on connoît que $\frac{1}{2}$ est une Fraction de Fraction, sçavoir de cette Fraction $\frac{2}{3}$, parce qu'elle en est les trois quarts, puisqu'en multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, il vient $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$. Les deniers sont des Fractions à l'égard du sol, & des Fractions de Fractions à l'égard de la livre. Pareillement les Pouces sont des Fractions à l'égard des Pieds, & des Fractions de Fractions à l'égard de la Toise.

La *Fraction Decimale*, ou la *Dixme*, est une Fraction, qui exprime une ou plusieurs dixiemes parties de l'unité : & lorsque cette Fraction est une simple Fraction Decimale, on l'apelle *Prime*, comme $\frac{3}{10}$: mais si elle est une Fraction decimale d'une Fraction decimale, c'est-à-dire la dixiéme partie d'une Prime, ou la centiéme partie de l'unité, on la nomme *Seconde*, comme $\frac{3}{100}$, dont la dixiéme partie fait la *Tierce*, comme $\frac{3}{1000}$: & ainsi en suite.

L'*Evaluation* d'une Fraction, est la valeur de cette Fraction en livres, sols & deniers. Ainsi on connoîtra que cette Fraction d'écu, $\frac{3}{8}$, vaut une livre deux sols six deniers.

Les *Nombres Plans & Solides semblables* sont ceux qui ont leurs côtez proportionnels. Ainsi on connoît que ces deux nombres Plans 6, 54, sont sembla-
bles

bles, parce que les deux côtez 2, 3, du premier 6, sont proportionnels aux deux côtez 6, 9, du second 54. On connoît aussi que les deux nombres solides 30, 240, sont semblables, parce que tous les trois côtez 2, 3, 5, du premier 30 sont proportionnels aux trois côtez 4, 6, 10 du second 240. Nous dirons ce que c'est que nombres proportionnels, quand nous aurons dit ce que c'est que raison.

La RAISON *en nombres* est la comparaison que l'on fait de deux nombres entr'eux par raport à leur quantité. Cette raison peut être *Arithmetique*, *Geometrique*, & *Harmonique* : & les deux premieres peuvent être d'*Egalité*, & d'*Inegalité* ; *Egales* & *Inégales : De plus grande Inégalité*, & *de plus petite Inégalité : Rationnelles*, & *Irrationnelles*.

La *Raison Arithmetique* est la comparaison que l'on fait de deux nombres par rapport à l'excez du plus grand sur le plus petit, ou à ce qu'il manque au plus petit pour égaler le plus grand, quand ils sont inégaux, ou à l'égalité des deux nombres quand ils sont égaux.

La *Raison Geometrique* est la comparaison de deux nombres par raport au nombre des fois que l'un contient une des parties aliquotes de l'autre.

Une raison est toûjours composée de deux nombres apellez *Termes*, dont l'un se nomme *Antecedent*, & l'autre s'apelle *Consequent*.

L'*Antecedent* d'une raison, est le terme de la raison, lequel on compare à l'autre. Ainsi dans la raison de 2 à 3, le nombre 2 est l'*Antecedent*, parce qu'on le compare à 3 : & dans la raison de 3 à 2, le nombre 3 est l'*Antecedent*, parce qu'on le compare à 2.

Le *Consequent* d'une raison est le terme auquel on compare l'Antecedent. Comme dans la raison de 2 à 3, le nombre 3 est le *Consequent*, parce qu'on luy compare l'Antecedent 2 : & dans la raison de 3 à 2, le *Consequent* est 2, parce qu'on luy compare l'Antecedent 3.

La *Raison d'Egalité* est celle qui se trouve entre deux nombres égaux ; comme la raison de 2 à 2, la raison de 3 à 3, &c.

La *Raison d'Inégalité* est celle qui se trouve entre deux nombres inégaux ; comme la raison de 5 à 6, la raison de 6 à 5, &c.

Les *Raisons Arithmetiques égales*, ou *semblables*, sont celles où la difference des deux plus petits termes est égale à la difference des deux plus grands. Ainsi on connoît que la raison arithmetique de 2 à 5 est égale ou semblable à celle de 6 à 9, parce que la difference 3 des deux plus petits termes 2, 5, est égale à la difference des deux plus grands 6, 9.

Les *Raisons Geometriques égales*, ou *semblables*, sont celles, dont les plus petits termes sont de semblables parties aliquotes ou aliquantes des plus grands. Ainsi on connoît que la raison geometrique de 3 à 6 est *la même*, ou *égale*, ou *semblable* à celle de 4 à 8, parce que les plus petits termes 3, 4, sont de semblables parties aliquotes des plus grands 6, 8, & alors on dit que 3 est à 6, comme 4 est à 8, ce que l'on exprime ordinairement ainsi, 3, 6 :: 4, 8.

Les *Raisons Inégales* sont celles où l'antecedent n'a pas dans chacune un même raport à son consequent : ce qui fait que l'une peut être plus grande ou plus petite que l'autre, mais cela s'entend seulement de la raison geometrique.

La *Raiſon Geometrique plus grande qu'une autre*, eſt celle dont l'antecedent contient plus de parties aliquotes de ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre ne contient de parties aliquotes ſemblables de ſon conſequent. Ainſi on connoît que la raiſon de 10 à 4 eſt plus grande que celle de 3 à 2, parce que l'antecedent 10 contient cinq moitiez de ſon conſequent 4, & que l'antecedent 3 ne contient que trois moitiez de ſon conſequent 2.

La *Raiſon Geometrique plus petite qu'une autre*, eſt celle dont l'antecedent contient moins de parties aliquotes de ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre ne contient de parties aliquotes ſemblables de ſon conſequent. Ainſi on connoît que la raiſon de 3 à 2 eſt plus petite que celle de 7 à 4, parce que l'antecedent 10 contient trois moitiez de ſon conſequent 2, & que l'antecedent 7 contient plus de trois moitiez de ſon conſequent 4.

Lorſqu'on diviſe l'Antecedent d'une raiſon geometrique par ſon conſequent, le Quotient s'apelle *Denominateur* de la raiſon. Ainſi on connoîtra que le Denominateur de la raiſon de 2 à 3 eſt $\frac{2}{3}$, & que le Denominateur de la raiſon de 3 à 2 eſt $\frac{3}{2}$. Ainſi des autres.

La *Raiſon de plus grande Inégalité*, eſt celle où l'antecedent eſt plus grand que le conſequent. Ainſi on connoît que la raiſon de 3 à 2 eſt une raiſon de plus grande inégalité, parce que l'antecedent 3 eſt plus grand que le conſequent 2.

La *Raiſon de plus petite Inégalité* eſt celle où l'antecedent eſt plus petit que le conſequent. Ainſi on connoît que la raiſon de 2 à 3, eſt une raiſon de plus petite inégalité, parce que l'antecedent 2 eſt plus petit que le conſequent 3.

Une raiſon geometrique de plus grande inégalité peut être *Multiple*, *Surparticuliere*, *Surpartiente*, *Multiple Surparticuliere*, & *Multiple Surpartiente*.

La *Raiſon Multiple* eſt celle où l'antecedent contient le conſequent plus que d'une fois exactement : & alors cette raiſon s'apelle *Double*, ſi l'antecedent contient deux fois le conſequent, & ſon *Denominateur* ſera 2 : comme la raiſon de 6 à 3. La même raiſon ſe nomme *Triple*, quand l'antecedent contient trois fois le conſequent, & alors ſon *Denominateur* ſera 3: comme la raiſon de 12 à 4; & ainſi en ſuite.

La *Raiſon Surparticuliere* eſt celle où l'antecedent contient une fois le conſequent & de plus une partie aliquote du même conſequent : & ſi cette partie aliquote eſt une moitié, alors la raiſon s'apelle *Seſquialtere* : comme la raiſon de 3 à 2. Que ſi la partie aliquote eſt un tiers, la raiſon ſe nomme *Seſquitierce*, comme la raiſon de 8 à 6. Mais ſi la partie aliquote eſt un quart, la raiſon s'apelle *Seſquiquarte*, comme la raiſon de 15 à 12: & ainſi en ſuite.

La *Raiſon Surpartiente* eſt celle où l'antecedent contient une fois le conſequent & de plus une partie aliquante du même conſequent : & ſi cette partie aliquante eſt par exemple deux troiſiémes, alors la raiſon s'apelle *Surbipartiente tierces*, comme la raiſon de 20 à 12 : & ſi elle eſt trois quatriémes, la raiſon ſe nomme *Surtripartiente quartes*, comme la raiſon de 21 à 12 : Mais ſi elle eſt quatre cinquiémes, la raiſon ſe nomme *Surquadripar-*

tiente cinquiémes, comme la raison de 9 à 5. Ainsi des autres.

La *Raison Multiple Surparticuliere* est celle où l'antecedent contient plusieurs fois le consequent & de plus une partie aliquote du même consequent : & si l'antecedent contient par exemple deux fois le consequent & encore la moitié du même consequent, alors cette raison s'apelle *Double Sesquialtere*, comme la raison de 15 à 6 : & si l'antecedent contient trois fois le consequent & encore la troisiéme partie du même consequent, la raison se nomme *Triple Sesquitierce*, comme la raison de 20 à 6 : mais si l'antecedent contient quatre fois le consequent & encore une quatriéme partie du même consequent, la raison s'apelle *Quadruple Sesquiquarte*, comme la raison de 17 à 4. Ainsi des autres.

La *Raison Multiple Surpartiente* est celle où l'antecedent contient plusieurs fois le consequent & de plus une partie aliquante du même consequent : & si l'antecedent contient deux fois le consequent & encore par exemple les deux tiers du même consequent, alors cette raison s'apelle *Double-Surbipartiente-tierces*, comme la raison de 8 à 3 : & si l'antecedent contient trois fois le consequent & encore les trois quarts du même consequent, la raison se nomme *Triple Surtripartiente quartes*, comme la raison de 15 à 4 : mais si l'antecedent contient quatre fois le consequent & encore quatre cinquiémes du même consequent, la raison s'apelle *Quadruple-Surquadrupartiente quintes*, comme la raison de 24 à 5. Ainsi des autres.

Une raison geometrique de plus petite inégalité peut aussi être *Soumultiple*, *Sousurparticuliere*, *Sousurpartiente*, *Soumultiple surparticuliere*, & *Soumultiple surpartiente*.

La *Raison Soumultiple* est celle où l'antecedent est contenu exactement dans le consequent plus que d'une fois : & s'il y est contenu deux fois, la raison s'apelle *Soudouble*, comme la raison de 3 à 6 : & s'il y est contenu trois fois, la raison se nomme *Soutriple*, comme la raison de 2 à 6 ; mais s'il y est contenu quatre fois, la raison s'apelle *Souquadruple*, comme celle de 3 à 12. Ainsi des autres.

La *Raison Sousurparticuliere* est celle où le consequent contient une fois l'antecedent & de plus une partie aliquote du même antecedent : & si cette partie aliquote est une moitié, alors la raison s'apelle *Sousesquialtere*, comme la raison de 2 à 3 : & si la partie aliquote est un tiers, la raison se nomme *Sousesquitierce*, comme la raison de 6 à 8 : mais si la partie aliquote est un quart, la raison s'apelle *Sousesquiquarte*, comme la raison de 12 à 15. Ainsi des autres.

La *Raison Sousurpartiente* est celle où le consequent contient une fois l'antecedent, & de plus une partie aliquante du même antecedent : & si cette partie aliquante est par exemple deux tiers, alors la raison s'apelle *Sousurbipartiente tierces*, comme la raison de 3 à 5 : & si elle est trois quarts, la raison se nomme *Sousurtripartiente quartes*, comme la raison de 4 à 7 : mais si elle est quatre cinquiémes, la raison se nomme *Sousurquadrupartiente quintes*, comme la raison de 5 à 9. Ainsi des autres.

La *Raison Soumultiple Surparticuliere* est celle où le consequent contient plusieurs fois l'antecedent, & de plus une partie aliquote du même antecedent : & si le consequent contient par exemple deux fois l'antecedent, &

encore la moitié du même antecedent, alors cette raiſon s'apelle *Soudouble, Seſquialtere*, comme la raiſon de 2 à 5 : & ſi le conſequent contient trois fois l'antecedent, & encore la troiſiéme partie du même antecedent, la raiſon ſe nomme *Soutriple Seſquitierce*, comme la raiſon de 3 à 10 : mais ſi le conſequent contient quatre fois l'antecedent, & encore une quatriéme partie du même antecedent, la raiſon ſe nomme *Souquadruple Seſquiquarte*, comme la raiſon de 4 à 17. Ainſi des autres.

La *Raiſon Soumultiple Surpartiente* eſt celle où le conſequent contient pluſieurs fois l'antecedent, & de plus une partie aliquante du même antecedent : & ſi le conſequent contient deux fois l'antecedent ; & encore par exemple les deux tiers du même antecedent, alors cette raiſon s'apelle *Soudouble Surbipartiente tierces*, comme la raiſon de 3 à 8 : & ſi le conſequent contient trois fois l'antecedent, & encore les trois quarts du même antecedent, la raiſon ſe nomme *Soutriple Surtripartiente quartes*, comme la raiſon de 4 à 15 : mais ſi le conſequent contient quatre fois l'antecedent, & encore quatre cinquiémes du même antecedent, la raiſon s'apelle *Souquadruple-Surquadrupartiente quintes*, comme la raiſon de 5 à 24. Ainſi des autres.

La *Raiſon Arithmetique rationnelle* eſt celle dont les deux termes ſont rationnels : comme la raiſon de 2 à 3.

La *Raiſon Arithmetique irrationnelle* eſt celle dont les deux termes ne ſont pas rationnels : comme la raiſon de 2 à $\sqrt{3}$, & la raiſon de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{5}$.

La *Raiſon Geometrique rationnelle* eſt celle à laquelle on en peut donner une égale en nombres rationnels : commme la raiſon de 6 à 8, laquelle eſt égale à celle de deux nombres rationnels, & auſſi la raiſon de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{8}$, laquelle eſt égale à celle de ces deux nombres rationnels 1, 2. Toute Raiſon à laquelle on en peut donner une égale, ſe nomme *Raiſon donnée*.

La *Raiſon Geometrique irrationnelle* eſt celle à laquelle on n'en peut pas donner une égale en nombres rationnels ; Telle eſt la raiſon de 2 à $\sqrt{5}$, & auſſi la raiſon de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{6}$: mais la raiſon de $\sqrt{27}$ à $\sqrt{12}$ eſt rationnelle, parce qu'elle eſt égale à celle de 3 à 2.

La *Raiſon Harmonique* eſt la comparaiſon de deux nombres rationnels, en tant qu'ils ſont apliquez à meſurer l'Harmonie des ſons dans la Muſique.

Les *Nombres Commenſurables entr'eux* ſont ceux, dont la raiſon Geometrique eſt rationnelle. Ainſi on connoît que ces deux nombres $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, ſont commenſurables entr'eux, parce qu'elle eſt rationnelle, comme étant égale à celle de 3 à 5.

Les *Nombres Incommenſurables entr'eux* ſont ceux, dont la raiſon Geometrique eſt irrationnelle ; Tels ſont les deux nombres ſuivans, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, & auſſi 4, $\sqrt{7}$, & une infinité d'autres.

Les *Nombres Commenſurables en Puiſſance* ſont ceux, dont les quarrez ſont commenſurables entr'eux : comme 2, $\sqrt{3}$, parce que leurs quarrez 4, 3, ſont commenſurables entr'eux : & auſſi $\sqrt{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{50}}$, parce que leurs quarrez $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, ſont commenſurables entr'eux, comme étant dans la raiſon des deux nombres rationnels, 2, 5.

Les *Nombres incommenſurables en Puiſſance* ſont des nombres irrationnels, dont les quarrez ne sont pas commensurables entr'eux : comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{5}}$, & aussi 2, $\sqrt{\sqrt{6}}$, &c.

Le *Nombre double en Puissance d'un autre* est un nombre irrationnel, dont le quarré est double de cet autre nombre : comme $\sqrt{8}$ à l'égard de 4, & $\sqrt{6}$ à l'égard de 3, &c.

Les *Termes homologues* de plusieurs raisons, sont les antecedens aux antecedens : & les consequens aux consequens. Ainsi on connoît que dans les raisons de 2 à 3, de 4 à 6, & de 10 à 15, les termes homologues sont les antecedens 2, 4, 10, & aussi les consequens 3, 6, 15. Vous remarquerez que quand on dit simplement *Raison* sans specifier, cela s'entend de la Raison Geometrique.

La PROPORTION que l'on confond ordinairement avec la *Raison*, est une similitude de raisons, laquelle par consequent peut être *Arithmetique*, *Geometrique*, & *Harmonique*.

La *Proportion Arithmetique* est une similitude de raisons arithmetiques. Ainsi on connoît que ces quatre nombres 2, 5, 8, 11, sont en Proportion Arithmetique, parce la raison arithmetique de 2 à 5, est la même que celle de 8 à 11, l'excez dans chacune étant le même nombre 3.

La *Proportion Geometrique*, ou *Analogie*, est une similitude de raisons Geometriques. Ainsi on connoît que ces quatre nombres 2, 3, 4, 6, sont en Proportion Geometrique, parce que la raison Geometrique de 2 à 3, est semblable à celle de 4 à 6, chacune étant *Sousesquialtere*. On connoît pareillement que ces quatre nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{27}$, sont en proportion Geometrique, parce que la raison de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$, est égale à celle de $\sqrt{18}$ à $\sqrt{27}$, qui est la même que celle de $3\sqrt{2}$ à $3\sqrt{3}$.

La *Proportion Harmonique* est celle dont le premier terme est au dernier dans une raison Geometrique égale à celle de la difference des deux premiers à la difference des deux derniers. Ainsi on connoît que ces trois nombres 2, 3, 6, sont en proportion Harmonique, parce que le premier 2 est au dernier 6, comme la difference 1 des deux premiers à la difference 3 des deux derniers. On connoît pareillement que ces quatre nombres 2, 3, 6, 12, sont en proportion Harmonique, parce que le premier 2 est au dernier 12, comme la difference 1 des deux premiers, à la difference 6 des deux derniers.

Les *Nombres proportionnels* sont ceux qui composent une proportion, & si cette proportion est arithmetique, les nombres se nomment *Arithmetiquement proportionnels*, comme les quatre suivans, 2, 5, 6, 9, parce que la difference des deux premiers est égale à la difference des deux derniers : ou bien encore parce que la somme des deux extremes est égale à la somme des deux moyens. Quand la proportion est Geometrique, les nombres s'apellent *Geometriquement proportionnels*, comme les quatre suivans 3, 7, 6, 14, parce que la raison de 3 à 7 est égale à celle de 6 à 14, ou bien encore parce que le produit des deux extrêmes est égal au produit des deux moyens. Enfin quand la proportion est Harmonique, on dit que les nombres sont Harmoniquement proportionnels, comme les autres suivans 8, 6, 5, 4, parce que le premier 8 est au dernier 4, comme la difference 2 des deux premiers à la difference 1 des deux derniers. Quand on dit simplement *Nombres proportionnels* sans specifier, cela s'entend de la proportion Geometrique, qui est de plus grand usage, & de laquelle par consequent nous parlerons plus amplement.

Il semble par ce qui vient d'être dit, qu'une proportion ne doit pas avoir moins de quatre termes : elle peut neanmoins en avoir seulement trois, comme vous avez déja vû dans la Proportion Harmonique, & comme vous connoîtrez facilement dans l'Arithmetique, & dans la Geometrique, dans lesquelles il se peut faire que le consequent de la premiere raison soit l'antecedent de la seconde, qui est semblable, comme il arrive dans ces trois nombres 3, *6*, 9, qui sont en Proportion Arithmetique, parce que la difference des deux premiers est égale à la difference des deux derniers, ou bien encore parce que la somme des deux extrêmes est double du moyen ; & aussi dans ces trois autres nombres 3, *6*, 12, qui sont Geometriquement proportionnels, parce que la raison des deux premiers est semblable à celle des deux derniers, ou bien encore parce que le produit des deux extrêmes est égal au quarré du moyen.

Le second des trois nombres proportionnels est apellé *Moyen proportionnel Arithmetique*, quand la proportion est Arithmetique : *Moyen proportionnel Geometrique*, quand la proportion est Geometrique : & *Moyen proportionnel Harmonique*, quand la proportion est Harmonique. Le dernier est apellé *Troisiéme proportionnel Arithmetique*, quand la proportion est Arithmetique : *Troisiéme proportionnel Geometrique*, quand la proportion est Geometrique : & *Troisiéme proportionnel Harmonique*, quand la proportion est Harmonique.

Par la même raison on connoîtra que de quatre nombres proportionnels, le dernier doit être apellé *Quatriéme proportionnel Arithmetique*, quand la proportion est Arithmetique : *Quatriéme proportionnel Geometrique*, quand la proportion est Geometrique : & *Quatriéme proportionnel Harmonique*, quand la proportion est Harmonique.

Une Proportion Arithmetique & Geometrique peut être *Discontinue*, & *Continue* : *Rationnelle*, & *Irrationnelle*.

La *Proportion Discontinue* est celle où les termes moyens ne se peuvent pas prendre comme antecedens, & consequens. Ainsi on connoît que cette proportion geometrique est discontinue, 2, 4 : : 3, *6* ; car bien que 2 soit à 4, comme 3 est à *6* : neanmoins 2 n'est pas à 4, comme 4 est à 3. On connoît pareillement que cette proportion arithmetique 2, 5 : : 7, 10, est discontinue : car bien que 2 soit surpassé de 5, autant que 10 surpasse 7, neanmoins 5 ne surpasse pas 2, comme il est surpassé de 7. Il est évident qu'une proportion discontinue ne peut pas avoir moins de quatre termes.

La *Proportion Continue* est celle où les termes moyens sont antecedens & consequens tout ensemble, & alors les nombres de cette proportion sont apellez *continuellement proportionnels* : comme il arrive à ces quatre 2, *6*, 18, 54, qui sont dans une continuelle proportion geometrique, parce que non seulement 2 est à *6*, comme 18 est à 54, mais encore comme *6* est à 18, & par consequent comme 18 est à 54 ; & aussi à ces quatre 3, 5, 7, 9, qui sont en continuelle proportion arithmetique, parce que par tout l'excez est 2.

Quand plusieurs nombres sont dans une continuelle proportion geometrique, tels que sont les cinq suivants, 2, 4, 8, 16, 32, la raison du premier au troiſiéme s'apelle *Doublée* de celle du premier au ſecond, ou du ſecond au troiſiéme : & la raiſon du premier au quatriéme ſe nomme *Triplée* de la raiſon du premier au ſecond, ou de celle du ſecond au troiſiéme, ou de celle du troiſiéme au quatriéme ; & ainſi enſuite, parce que cette raiſon eſt *composée* d'autant de raiſons égales.

La *Raiſon Composée* eſt celle dont l'antecedent eſt égal au produit des antecedens de pluſieurs raiſons geometriques, & le conſequent égal au produit des conſequens des mêmes raiſons, ce qui s'appelle *Addition de Raiſons.* Ainſi on connoîtra que la raiſon composée de la raiſon de 2 à 3, de la raiſon de 4 à 5, & de la raiſon de 6 à 11, eſt égale à celle de 48 à 165. Il eſt évident qu'une Raiſon composée de deux raiſons égales eſt une Raiſon Doublée, & qu'une Raiſon composée de trois Raiſons égales, eſt une Raiſon Triplée.

La *Proportion Rationnelle* eſt celle où l'une des deux raiſons égales eſt rationnelle ; Telle eſt la Proportion ſuivante 2, 3 :: 4, 6, qui eſt Geometrique, & encore la ſuivante $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ :: $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, qui eſt encore Geometrique.

La *Proportion Irrationnelle* eſt celle où l'une des deux raiſons égales eſt irrationnelle ; Telle eſt la Proportion ſuivante 2, $\sqrt{6}$ :: $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, qui eſt Geometrique, & encore la ſuivante, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ :: $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$, qui eſt auſſi Geometrique.

Une Proportion Geometrique peut être *Par égalité bien rangée*, *Par égalité mal rangée*, *Par raiſon alterne*, *Par raiſon converſe*, *Par compoſition de raiſon*, *Par diviſion de raiſon*, & *Par converſion de raiſon.*

La *Proportion par égalité bien rangée* eſt quand il y a plus de deux termes dans un rang, & autant d'autres proportionnels dans un autre rang, & qu'on les compare avec le même ordre dans chaque rang. Comme s'il y a dans un rang ces trois nombres 2, 3, 9, & dans un autre rang ces trois autres 4, 6, 18, proportionnels aux precedens, en ſorte que 2 ſoit à 3, comme 4 eſt à 6, & 3 à 9, comme 6 à 18. Dans ce cas on peut rejetter les termes moyens dans chaque rang, & dire que le premier 2 eſt au dernier 9, du premier rang, comme le premier 4 de l'autre rang, au dernier 18.

La *Proportion par égalité mal rangée*, eſt quand il y a trois Nombres dans un rang, & trois autres proportionnels aux precedens dans un autre rang, & qu'on les compare avec un ordre different. Comme s'il y a dans un rang ces trois Nombres 2, 3, 9, & dans un autre rang ces trois autres 8, 24, 36, proportionnels aux trois precedens 2, 3, 9, par un ordre different, en ſorte que 2 ſoit à 3, comme 24 à 36, & 3 à 9, comme 8 à 24. Alors on peut auſſi rejetter les termes moyens dans chaque rang, & dire que le premier 2 du premier rang eſt au dernier 9, comme le premier 8 de l'autre rang, au dernier 36.

La *Proportion par raiſon alterne*, ou *par Echange*, *Permutando*, eſt quand on compare les antecedens de deux raiſons égales l'un avec l'autre. Comme ſi de ce qu'il y a même raiſon de 2 à 3, que de 4 à 6, on conclut *en permutant*, qu'il y a auſſi même raiſon de 2 à 4, que de 3 à 6. Cette maniere d'argumenter a auſſi lieu dans la Proportion arithmetique.

La *Proportion par raiſon converſe*, *Invertendo*, eſt une comparaiſon des consequens de deux raisons égales aux antecedens. Comme s'il y a même raison de 2 à 3, que de 4 à 6, on conclut qu'il y a aussi même raison de 3 à 2, que de 6 à 4. Cette maniere d'argumenter a aussi lieu dans la Proportion arithmetique.

La *Proportion par composition de raison*, *Componendo* est une comparaison de l'antecedent & du consequent pris ensemble au seul consequent dans deux raisons égales. Comme s'il y a même raison de 2 à 3, que de 4 à 6, on conclut qu'il y a aussi même raison de 5 à 3, que de 10 à 6.

La *Proportion par division de raison*, *Dividendo*, est une comparaison de l'excez de l'antecedent sur le consequent au même consequent dans deux raisons égales. Comme s'il y a même raison de 3 à 2, que de 12 à 8, on conclut qu'il y a aussi même raison de 1 à 2, que de 4 à 8.

La *Proportion par conversion de raison*, est la comparaison de l'antecedent à la difference de l'antecedent & du consequent dans deux raisons égales. Comme si y ayant même raison de 2 à 3, que de 8 à 12, on conclut qu'il y a aussi même raison de 2 à 1, que de 8 à 4.

Quand on a seulement trois nombres proportionnels, cela se nomme *Medieté Arithmetique*, lorsque la proportion est Arithmetique : *Medieté Geometrique*, lorsque la proportion est Geometrique, & *Medieté Harmonique*, lorque la proportion est Harmonique.

Si au plus grand de deux nombres on ajoûte leur difference, on aura un troisiéme nombre, lequel avec les deux precedens fera une *Medieté Arithmetique*.

Si par le premier de deux nombres on divise le quarré du second, on aura un troisiéme nombre, lequel avec les deux precedens fera une *Medieté Geometrique*.

Si on divise l'unité separément par chacun de trois nombres en proportion arithmetique, on aura trois fractions, qui feront une *Medieté Harmonique*. Comme si par ces trois nombres arithmetiquement proportionnels 2, 3, 4, on divise l'unité, on aura ces trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, lesquelles étant reduites en même denomination, donnent en entiers cette Medieté Harmonique 6, 4, 3.

Outre ces trois Medietez, les Anciens en ont inventé encore trois autres, dans lesquelles le plus grand terme est apellé *Premier*, le moyen est apellé *Second*, & le plus petit est apellé *Troisiéme*. Cela étant supposé,

La *Quatriéme Medieté* est celle où le troisiéme terme est au premier, comme l'excez du premier sur le second, à l'excez du second sur le troisiéme : comme 6, 5, 3.

La *Cinquiéme Medieté* est celle où le troisiéme terme est au second, comme l'excez du premier sur le second, à l'excez du second sur le troisiéme : comme 41, 35, 16.

La *Sixiéme Medieté* est celle où le second terme est au premier, comme l'excez du premier sur le second, à l'excez du second sur le troisiéme : comme 6, 4, 1.

Outre ces six Medietez les Modernes en ont inventé quatre autres, où l'excez du premier terme sur le second est apellé *Premier*, l'excez du second sur le troisiéme est apellé *Second* ; & l'excez du premier sur le troisiéme est apellé *Troisiéme*. Cela étant supposé.

La

La *Septiéme Medieté* est celle où le troisiéme excez est au premier, comme le second terme est au troisiéme; comme 7, 6, 1, où le premier terme est toûjours égal à la somme des deux autres.

La *Huitiéme Medieté* est celle où le troisiéme excez est au premier, comme le premier terme est au second: comme 6, 4, 3.

La *Neuviéme Medieté* est celle où le troisiéme excez est au premier, comme le premier terme est au troisiéme: comme 9, 7, 3.

La *Dixiéme Medieté* est celle où le troisiéme excez est au second, comme le second terme est au troisiéme: comme 7, 6, 4.

La PROGRESSION est une suite de quantitez, qui gardent entre elles quelque sorte de raport semblable, & chacune de ces quantitez s'apelle *Terme*. La Progression peut être *Geometrique*, & *Arithmetique*.

La *Progression Geometrique* est une suite de nombres qui sont dans une continuelle proportion Geometrique: comme 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, 81, &c. Cette Progression peut augmenter ou diminuer à l'infiny.

La *Progression Arithmetique* est une suite de nombres, qui sont dans une continuelle proportion arithmetique: comme 1, 2, 3, 4, 5, &c. ou 1, 3, 5, 7, 9, &c. Cette Progression peut augmenter à l'infiny, mais non pas diminuer.

Cette Progression se peut appeller *Progression Arithmetique simple*, parce que les premieres differences y sont égales: car il y en a une autre que l'on peut appeller *Progression Arithmetique composée*, dont les differences ne sont pas égales, c'est à dire dont les termes ne se surpassent pas également, mais seulement les dernieres differences y sont égales, quand on a pris en premier lieu leurs differences, & en aprés les differences de ces differences, & ainsi en suite.

Les *Logarithmes*, les nombres Polygones, & toutes les Puissances des nombres naturels sont dans cette Progression, que l'on peut apeller *Progression du second degré*, quand les secondes differences y sont égales: *Progression du troisiéme degré*, quand elle a ses troisiémes differences égales, & ainsi en suite.

Les Sinus, les Tangentes, & les Secantes, & même tous les changemens qui sont causez par les mouvemens celestes, comme les Assensions droites, les Amplitudes orientales, les Declinaisons, &c. croissent & décroissent à peu prés selon cette Progression, pour le moins dans des divisions fort petites, ce qui est d'un tres-grand usage pour la construction de la Table de Sinus à l'égard des *Secondes*, & des *Tierces*, & des Logarithmes, & pour la supputation de plusieurs Tables Astronomiques aussi à l'égard des *Secondes* & des *Tierces* de dégrez, &c.

Pour trouver des nombres dans une Progression arithmetique composée, servez-vous de ce Quadrinome $a^4 + 2a^3 + 4aa + 3a$, que nous avons tiré de *M. Wallis*. Si l'on suppose $a \propto 0$, & en suite $a \propto 1$, & en aprés $a \propto 2$, puis $a \propto 3$, & ainsi en suite, on aura des nombres qui seront dans une Progression du quatriéme degré, parce que les quatriémes differences y sont égales, comme vous voyez.

	a^4 +	$2a^3$ +	$4aa$ +	$3a$.					
a ꝏ 0.	0 +	0 +	0 +	0 ꝏ	0				
a ꝏ 1.	1 +	2 +	4 +	3 ꝏ	10	10	34		
a ꝏ 2.	16 +	16 +	16 +	6 ꝏ	54	44	82	48	34
a ꝏ 3.	81 +	54 +	36 +	9 ꝏ	180	126	154	72	24
a ꝏ 4.	256 +	128 +	64 +	12 ꝏ	460	280	250	96	
a ꝏ 5.	625 +	250 +	100 +	15. ꝏ	990	530			

Les *Logarithmes* ſont des nombres d'une Progreſſion Arithmetique, placez vis-à-vis d'autant de nombres d'une Progreſſion Geometrique; deſquels ils ſont apellez *Logarithmes*. Ainſi on connoît que les nombres de cette Progreſſion Arithmetique 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſont les Logarithmes des nombres de cette Progreſſion Geometrique 1, 10, 100, 1000, 10000, &c.

La *Raiſon de deux Raiſons Geometriques*, eſt la Raiſon Geometrique de leurs Denominateurs. Ainſi on connoîtra que la Raiſon de 2 à 3 eſt à la raiſon de 5 à 6, comme $\frac{2}{3}$ à $\frac{5}{6}$, ou comme 4 à 5.

Les *Raiſons Geometriques proportionnelles*, ſont celles dont les Denominateurs ſont Geometriquement proportionnels. Ainſi on connoîtra que ces trois raiſons, ſçavoir les raiſons de 2 à 3, de 4 à 7, & de 24 à 49, ſont proportionnelles, parce que leurs Denominateurs $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{24}{49}$, ſont proportionnels. On connoîtra de la même façon que ces quatre raiſons ſont proportionnelles, ſçavoir les raiſons de 2 à 3, de 4 à 5, de 7 à 9, & de 14 à 15, parce que leurs Denominateurs $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{14}{15}$, ſont proportionnels.

La *Proportionnalité* eſt la proportion qui ſe rencontre entre deux Raiſons Geometriques & leurs Denominateurs, ou bien entre quatre Raiſons Geometriques proportionnelles. Ainſi on connoît qu'il y a une Proportionnalité entre ces deux raiſons, ſçavoir les raiſons de 2 à 3, de 4 à 5, & leurs Denominateurs $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, ou 5, 6: & qu'il y a auſſi une Proportionnalité entre ces quatre raiſons proportionnelles, ſçavoir les raiſons de 2 à 5, de 3 à 4, de 2 à 7, & de 15 à 28.

Le *Quarré Magique* eſt un Quarré contenant des nombres en proportion arithmetique, tellement diſpoſez en des rangs paralleles aux côtez du quarré dans lequel ils ſont placez, que les ſommes des nombres, qui ſe trouvent dans chaque rang, & dans chaque diagonale, ſont égales entre elles.

Le premier Quarré ſuivant repreſente en lettres neuf nombres en conti-

$3b - 2a$	$8b - 7a$	b
$2b - a$	$4b - 3a$	$6b - 5a$
$7b - 6a$	a	$5b - 4a$

5	10	3
4	6	8
9	2	7

nuelle proportion Arithmetique, où les sommes de chaque rang & de chaque diagonale sont $12b - 9a$: le second Quarré represente la même chose en nombres, où nous avons donné 2 à la lettre a, & 3 à la lettre b.

Pareillement le premier des deux Quarrez suivans represente en lettres seize nombres en continuelle proportion arithmetique, où les sommes de chaque rang & de chaque diagonale sont $30b - 26a$: & le second quarré

a	$14b - 13a$	$13b - 12a$	$3b - 2a$
$11b - 10a$	$5b - 4a$	$6b - 5a$	$8b - 7a$
$7b - 6a$	$9b - 8a$	$10b - 9a$	$4b - 3a$
$12b - 11a$	$2b - a$	b	$15b - 14a$

2	16	15	5
13	7	8	10
9	11	12	6
14	4	3	17

represente la même chose en nombres, où nous avons aussi donné 2 à la lettre a, & 3 à la lettre b.

A l'occasion du Quarré Magique nous avons icy ajoûté le Quarré suivant, qui contient neuf nombres, dont les trois de chaque rang & de chaque diagonale sont en proportion harmonique.

a 1260	$\frac{2ac}{a + c}$ 840	c 630
$\frac{2am}{a + m}$ 504	$\frac{2cm}{c + m}$ 420	$\frac{2acm}{2am + ac - cm}$ 360
m 315	$\frac{2acm}{2ac + am - cm}$ 280	$\frac{acm}{ac + am - cm}$ 252

ALGEBRE.

L'ALGEBRE est une ſcience, par le moyen de laquelle on peut reſoudre tout Probleme poſſible dans les Mathematiques. Pour cette fin on a inventé cette ſorte de calcul qu'on apelle *Algebre*, qui ſe diſtingue en la *Vulgaire* & en la *Specieuſe*.

L'*Algebre vulgaire* ou *nombreuſe* qui eſt celle des Anciens, eſt celle qui ſe pratique par nombres. Elle ſert ſeulement à trouver les ſolutions des Problemes d'Arithmetique ſans demonſtrations, comme l'on peut voir dans *Diophante*: c'eſt pourquoy nous n'en parlerons pas davantage.

L'*Algebre Specieuſe*, ou *Nouvelle*, que l'on nomme auſſi *Logiſtique Specieuſe*, ou ſimplement *Specieuſe*, eſt celle qui exerce ſes raiſonnemens par les especes ou formes des choses designées par les lettres de l'Alphabet, qui soulagent extrémement l'imagination de ceux qui s'apliquent à cette belle science : car sans cela il faudroit retenir dans son esprit toutes les choses dont on auroit besoin pour découvrir la verité de ce que l'on cherche, ce qui ne se pourroit faire que par une forte imagination, & par un grand travail de la memoire.

L'Algebre Specieuse n'est pas comme la nombreuse, limitée par un certain genre de Probleme, & elle n'est pas moins utile à inventer toutes sortes de Theoremes, qu'à trouver les Solutions & les Demonstrations des Problemes, comme l'on pourra voir dans nos Traitez *de l'Invention des Theoremes*, & *de l'Invention des Demonstrations*, lorsqu'ils auront le bonheur de paroître.

Les lettres dont on se sert dans l'Analyse, representent chacune en particulier des Lignes, ou des Nombres, selon que le Probleme est de Geometrie ou d'Arithmetique, & ensemble elles representent des Plans, des Solides, & des *Puissances* plus élevées selon le nombre de ces lettres : car s'il y a deux lettres, comme *ab*, elles representent un *Rectangle*, dont les deux dimensions sont representées par les deux lettres *a*, *b*, sçavoir un côté par une lettre *a*, & l'autre côté par l'autre lettre *b*, afin que par leur mutuelle multiplication elles produisent le Plan *ab*. De sorte que s'il y a deux lettres égales, c'est-à-dire deux mêmes lettres, comme *aa*, ce Plan *aa* sera un *Quarré*, dont le côté est *a*.

Mais s'il y a trois lettres, comme *abc*, elles representeront ensemble un *Solide*, sçavoir un *Parallelipipede* rectangle, dont les trois dimensions seront exprimées par les trois lettres, *a*, *b*, *c*, sçavoir la longueur par la lettre *a*, la largeur par l'autre lettre *b*, & la hauteur par la derniere lettre *c*, afin que par leur multiplication continuelle elles produisent le *Solide abc*. De sorte que si les trois lettres du solide sont les mêmes, comme *aaa*, ce solide *aaa* representera un *Cube*, dont le côté est *a*.

Enfin s'il y a plus de trois lettres, elles representeront ensemble une grandeur plus élevée, & d'autant de dimensions qu'il y aura de lettres, mais elle ne sera qu'*imaginaire*, parce que dans la nature on ne connoît point de quantité qui ait plus de trois dimensions. Cette Puissance ou *Grandeur imaginaire* est apellée *Plan-plan*, quand elle est exprimée par quatre lettres, & quand ces quatre sont les mêmes, comme *aaaa*, ce Plan-plan *aaaa*, se nomme *Quarré-quarré*, dont le côté est *a*. Cette même Puissance est apellée *Plan-Solide*, quand elle est representée par cinq lettres, & quand ces lettres sont les mêmes, comme *aaaaa*, ce Plan-Solide *aaaaa* est apellé *Sur-solide*, dont le côté est *a*.

Ainsi vous voyez que ces Puissances vont toûjours croissant par une continuelle addition de lettres, laquelle est équivalente à une continuelle multiplication : & quand elles sont composées de lettres toutes égales entr'elles, *Viete* les nomme *Grandeurs Scalaires*, parce qu'elles montent par un degré conforme au nombre de leurs lettres. Ce degré a esté apellé ailleurs *Exposant*, & *Viete* le nomme *Degré Parodique*. Ainsi *aa* est une *Puissance du second degré*, parce qu'elle a deux lettres, & *aaa* est une *Puissance du troisiéme degré*, parce qu'elle a trois lettres, & ainsi en suite. C'est pourquoy la *Racine*, ou le *côté commun a*, de toutes ces Puissances sera virtuellement une *Puissance du premier degré*.

Mais comme en prolongeant ces grandeurs Scalaires par une continuelle addition de lettres, le nombre de ces lettres peut devenir si grand, qu'il seroit difficile de les conter, & même de les écrire sur le papier, on a coûtume d'écrire seulement la Racine, & de luy ajoûter à droite l'*Exposant* de la Puissance, c'est-à-dire le nombre des lettres dont la Puissance qu'on veut exprimer est composée. Comme pour representer un Sursolide, ou une Puissance du cinquiéme degré, dont le côté soit a, au lieu de la representer par ces cinq lettres $aaaaa$, on l'exprime ainsi, a^5. De même pour representer le Cube de a, on écrit ainsi, a^3, & pour en representer le Quarré-quarré, on écrit ainsi, a^4. Ainsi des autres.

Il est aisé de conclure par ce qui a été dit, que les Grandeurs Scalaires, ou les Puissances de quelque Racine, comme de a, ont cette suite naturelle,

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ \&c.$$

& qu'elles sont dans une continuelle proportion Geometrique cependant que leurs degrez ou exposans sont dans une continuelle proportion arithmetique, puisque les Puissances croissent par une continuelle multiplication d'une même Racine, & que leurs Exposans croissent par une continuelle addition de celuy de la même Racine, lequel est 1 : car il est bien évident que a vaut autant que a^1. Ces grandeurs Scalaires sont apellées dans l'Algebre nombreuse, ou des anciens, *Nombres Cossiques*, ou *Nombres Algebraiques*, parce que *Cosa* en Italien signifie Algebre.

Pour mieux comprendre cela, que l'on mette pour la Racine a, tel nombre que l'on voudra, comme 3, & alors on connoîtra que a^2 vaudra 9, que a^3 vaudra 27, & que les autres Puissances seront telles qu'elles sont icy marquées ;

$$\begin{array}{ccccccccc} a^1, & a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & a^8, & \&c. \\ 3, & 9, & 27, & 81, & 243, & 729, & 2187, & 6561, & \&c. \end{array}$$

où l'on voit que les Puissances ou grandeurs Scalaires 3, 9, 27, 81, &c. sont dans une continuelle proportion Geometrique, & que leurs Exposans 1, 2, 3, 4, &c. sont dans une continuelle proportion Arithmetique. C'est pourquoy ces Exposans peuvent être considerez comme les Logarithmes de leurs Puissances. D'où il suit que l'exposant d'une Puissance qui est produite par la multiplication de deux Puissances, est égal à la somme des Exposans de ces deux mêmes Puissances. Ainsi le Sursolide 243 a 5 pour Exposant, sçavoir la somme des Exposans 1, 4, des Puissances 3, 81, qui le produisent, ou des Exposans 2, 3, des Puissances 9, 27, qui le produisent.

Ainsi vous voyez qu'il y a grande difference entre $3a$ par exemple & a^3, car a^3 signifie le cube de la Racine a, & $3a$ represente le triple de la même Racine a ; de sorte que si a vaut 3, son cube a^3 vaudra 27, & son triple $3a$ vaudra seulement 9. De même $2a^3$ exprime le double du cube de la Racine a : tellement que si a vaut 3, le Solide $2a^3$ vaudra 54.

Une Puissance peut être *Reguliere*, & *Irreguliere* que nous expliquerons aprés avoir parlé des *Monomes*, & des *Polynomes*, ou *Multinomes*.

Le MONOME est une grandeur qui n'a qu'un seul nom, c'est à dire qu'un seul terme : comme ab, aab, $aaabb$, &c. Il peut être *Rationnel*, & *Irrationnel*.

Le *Monome Rationnel* est celuy qui n'est precedé d'aucun caractere de Racine, comme les precedens ab, aab, &c.

Le *Monome Irrationnel* eſt celuy qui eſt precedé d'un caractere de Racine, comme $\sqrt{ab}$, qui ſignifie Racine quarrée du Plan ab, $\sqrt{C.aab}$, qui ſignifie Racine cubique du Solide aab, $\sqrt{3}$, qui ſignifie Racine quarrée du nombre 3. Ainſi des autres.

Les Monomes irrationnels peuvent être *Commenſurables*, & *Incommenſurables*.

Les *Monomes commenſurables* ſont ceux dont la raiſon ſe peut exprimer par deux nombres rationnels, & alors on les apelle auſſi *Racines commenſurables :* comme $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{8ab}$, parce que leur Raiſon eſt égale à celle de ces deux nombres rationnels, 1, 2. Il eſt évident que tous les Monomes rationnels ſont commenſurables.

Les *Monomes incommenſurables* ſont ceux, dont la raiſon ne ſe peut pas exprimer par deux nombres rationnels, & alors on les apelle auſſi *Racines incommenſurables :* comme $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{6ab}$, parce que leur raiſon eſt égale à celle de ces deux nombres 1, $\sqrt{3}$, qui ne ſont pas rationnels tous deux.

Le *Polynome*, ou *Multinome* eſt une grandeur compoſée de pluſieurs Monomes joints par les Signes $+$, qui ſignifie *plus*, ou $-$ qui ſignifie *moins* ; comme $a+b$, $2+\sqrt{3}$, &c. leſquels on apelle *Binomes*, parce qu'ils ſont compoſez de deux Monomes : c'eſt pourquoy quand ils ſeront compoſez de trois Monomes, on les apellera *Trinomes :* comme $a+b-c$, $2+\sqrt{3}-\sqrt{6}$. & ainſi en ſuite.

Neanmoins quand un Binome en nombres a un Monome affecté du Signe $-$, comme $2-\sqrt{3}$, *Euclide* le nomme *Apotome*, pour le differencier du Binome en nombres, où chaque Monome eſt affirmé, dont il fait ſix eſpeces, que nous expliquerons aprés avoir dit qu'une grandeur affectée du ſigne $+$ ſe nomme *Affirmée*, & que celle qui eſt affectée du Signe $-$, s'appelle *Niée*, & de plus que ce que nous allons dire des Binomes, ſe peut de la même façon apliquer aux Apotomes, ſans qu'il ſoit beſoin de les definir chacun en particulier.

Le *Binome Premier* eſt celuy où le plus grand des deux Monomes eſt un nombre rationnel, & où la difference des quarrez des deux mêmes Monomes eſt un nombre quarré : ce qui fait qu'un ſemblable Binome a toûjours une Racine quarrée, comme $3+\sqrt{5}$, dont la Racine quarrée eſt $\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$. & auſſi $7+\sqrt{40}$, dont la Racine quarrée eſt $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Ainſi des autres.

Le *Binome Second* eſt celuy où le plus petit Monome eſt un nombre rationnel, & où la Racine quarrée de la difference des quarrez des deux Monomes eſt commenſurable avec le plus grand Monome ; comme $4+\sqrt{18}$, $6+\sqrt{48}$, &c. Il eſt évident qu'un ſemblable Binome n'a point de Racine quarrée.

Le *Binome Troiſiéme* eſt celuy dont les Monomes ſont irrationnels, & tels que la Racine quarrée de la difference de leurs quarrez eſt commenſurable avec le plus grand Monome : ce qui fait qu'un ſemblable Binome a toûjours une Racine quarrée : comme $\sqrt{24}+\sqrt{18}$, dont la Racine quarrée eſt $\sqrt{\sqrt{\frac{27}{2}}}+\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}$, & auſſi $\sqrt{48}+\sqrt{45}$, dont la Racine quarrée eſt $\sqrt{\sqrt{\frac{75}{4}}}+\sqrt{\sqrt{\frac{27}{4}}}$. Ainſi des autres. *Stevin* donne ce Binome $\sqrt{50}+\sqrt{32}$ pour exem-

ple,

ple, mais cet exemple eſt mal propoſé, parce que $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ n'eſt pas proprement un Binome, puiſqu'il eſt égal à ce Monome $\sqrt{162}$, ou $9\sqrt{2}$, car $\sqrt{50}$ vaut autant que $5\sqrt{2}$, & $\sqrt{32}$ autant que $4\sqrt{2}$.

Le *Binome Quatriéme* eſt celuy où le plus grand Monome eſt rationnel, & où la Racine quarrée de la difference des quarrez des deux Monomes eſt incommenſurable avec le même plus grand Monome, comme $5 + \sqrt{12}$, $4 + \sqrt{3}$, &c. Il eſt évident qu'un ſemblable Binome n'a point de Racine quarrée.

Le *Binome Cinquiéme* eſt celuy où le plus petit Binome eſt rationnel, & où la Racine quarrée de la difference des quarrez des deux Monômes eſt incommenſurable avec le plus grand Monome: comme $2 + \sqrt{6}$, $3 + \sqrt{5}$, &c. Il eſt auſſi évident qu'un ſemblable Binome n'a point de Racine quarrée.

Le *Binome Sixiéme* eſt celuy dont chaque Monome eſt irrationnel, & où la Racine quarrée de la difference des quarrez des mêmes *Monomes*, eſt incommenſurable avec le plus grand Monome: ce qui fait auſſi voir qu'un tel Binome n'a point de Racine quarrée: comme $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, &c.

Un Polynome peut comme le Monome, être *Rationnel*, & *Irrationnel*.

Le *Polynome Rationnel* eſt celui qui n'eſt precedé d'aucun caractere de Racine qui s'étende univerſellement ſur toutes les parties conjointement bien que quelqu'une des mêmes parties puiſſe être irrationnelle: comme ce Trinome $aa + bb - \sqrt{aabc}$, & auſſi comme ce Quadrinome $2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Le *Polynome Irrationnel* eſt celuy qui eſt precedé d'un caractere de Racine qui s'étend univerſellement ſur toutes les parties ou monomes conjointement, ce qui a fait apeller un ſemblable Polynome irrationnel, *Racine Univerſelle*: comme $\sqrt{aa + 4ab + bb}$, qui ſignifie la Racine quarrée du Trinome $aa + 4ab + bb$, & auſſi comme $\sqrt{C.\ a^3 + 3aab - 3abb - b^3}$, qui ſignifie la Racine cubique du Quadrinome $a^3 + 3aab - 3abb - b^3$.

Les Polynomes irrationnels peuvent auſſi comme les Monomes irrationnels, être *Commenſurables*, & *Incommenſurables*.

Les *Polynomes Commenſurables* ſont ceux, dont le Quotient, que l'on trouve en diviſant l'un par l'autre, a une Racine conforme à l'expoſant commun de leurs Racines: tels ſont ces deux Polynomes $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$, dont le Quotient 4 a ſa Racine quarrée 2. Tels ſont auſſi ces deux Polynomes $\sqrt{C.\ 2aab + 3abb + b^3}$, $\sqrt{C.\ 54aab + 81abb + 27b^3}$, dont le Quotient 27 a ſa Racine cubique 3. Il eſt évident que *les Polynomes rationnels* ſont commenſurables.

Les *Polynomes Incommenſurables* ſont ceux dont le Quotient n'a pas une Racine conforme à l'expoſant commun de leurs Racines: tels ſont ces deux Polynomes $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, $\sqrt{\sqrt{6} + 3}$, dont le Quotient 3 n'a point de Racine quarrée. Il eſt évident que les Polynomes irrationnels, qui n'ont pas un même expoſant, c'eſt à dire qui ne ſont pas *ſemblables*, ſont incommenſurables: tels que ſont les deux ſuivans; $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\sqrt{C.\ 2 + \sqrt{6}}$.

Tout Polynome, & tout Monome eſt une Puiſſance à l'égard de ſa Racine. C'eſt pourquoy tout ce que nous avons dit des Polynomes & des Monomes ſe peut appliquer aux Puiſſances, leſquelles comme il a déja été dit, peuvent être *Regulieres*, & *Irregulieres*.

La *Puissance Reguliere* est celle qui a une Racine conforme à son Exposant : telle est cette Puissance quarrée $9aabb$, parce qu'elle a sa Racine quarrée $3ab$. Telle est aussi cette Puissance cubique $26 + \sqrt{675}$, dont la Racine cubique est $2 + \sqrt{3}$.

La *Puissance Irreguliere* est celle qui n'a pas une Racine conforme à son Exposant : telle est cette Puissance quarrée $aa + 3ab$, parce qu'elle n'a point de Racine quarrée, laquelle par consequent ne se peut exprimer qu'en cette sorte, $\sqrt{aa + 3ab}$. Telle est aussi cette Puissance cubique $a^3 + 3abb$, parce qu'elle n'a point de Racine cubique, laquelle on exprimera ainsi, $\sqrt{C \cdot a^3 + 3abb}$.

Les Puissances regulieres & irregulieres peuvent être *Homogenes*, & *Heterogenes*.

Les *Puissances Homogenes* sont celles qui ont un nombre égal de lettres ; ou autant de dimensions les unes que les autres, quand elles sont litterales, ou qui ont un même Exposant, quand elles sont numeriques. Ainsi on connoît que ces deux Puissances litterales ab, cd, sont homogenes, parce que chacune a deux dimensions, ce qui fait qu'on les peut apeller *Puissances de deux dimensions*. Pareillement on connoît que ces deux Puissances litterales $aab + abc$, $acc + cdd$, sont homogenes, parce que chacune a trois dimensions, ce qui fait aussi qu'on les peut appeller *Puissances de trois dimensions*. On connoît aussi que ces deux Puissances numeriques $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $4 + \sqrt{6}$, sont homogenes, en les considerant chacune comme quarrée, ou comme cubique, &c.

Les *Puissances Heterogenes* sont celles qui ont plus de lettres ou de dimensions l'une que l'autre, quand elles sont litterales, ou dont les exposans sont differens, quand elles sont numeriques. Ainsi on connoît que ces deux Puissances litterales $ab + cd$, $aab + abb$, sont heterogenes, parce que la premiere a deux dimensions, & que la seconde est de trois dimensions. On connoît aussi que ces deux Puissances numeriques $2 - \sqrt{3}$, $4 + \sqrt{5}$, sont heterogenes, en concevant la premiere comme un quarré, & la seconde comme un cube.

Toute Puissance peut être considerée comme un nombre, parce que quand elle est litterale, les lettres qui s'y rencontrent peuvent être prises pour des nombres. C'est pourquoy les termes dont nous nous sommes servis dans les nombres peuvent convenir à proportion aux Puissances litterales, qui seront dans la suite de cette Algebre le sujet de nos raisonnemens, & c'est pour cela que nous avons emprunté en quelques endroits des termes de l'Arithmetique, sans les avoir icy expliquez particulierement, & que nous negligerons d'en expliquer plusieurs autres que l'on peut trouver dans l'Arithmetique, pour les apliquer à proportion dans les grandeurs litterales : comme par exemple, *Puissances premieres entre elles*, *commune mesure de deux ou de plusieurs Puissances*, &c. La division qui se fait par lettres est apellée *Application*.

Les *Grandeurs commensurables en Puissance* sont celles, dont les Puissances semblables sont commensurables. Ainsi on connoît que ces deux grandeurs $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{3cd}$, sont commensurables en Puissance, parce que leurs quarrez $2ab$, $3cd$, sont commensurables,

Les quantitez inconnues sont ordinairement representées dans l'Algebre par les dernieres lettres de l'Alphabet *x*, *y*, *z*, & les quantitez connues ou données par les autres lettres indifferemment. Ainsi lorsque dans une *Equation* vous verrez l'une de ces trois lettres *x*, *y*, *z*, vous la devez concevoir comme representant une ligne inconnue, ou un nombre inconnu, c'est à dire une ligne ou un nombre que l'on cherche, & que l'on trouve en reduisant l'*Equation*.

L'EQUATION est la comparaison que l'on fait de deux grandeurs inégales, apellées *Membres de l'Equation*, pour les rendre égales. Nous joindrons ces deux membres par ce caractere ꝏ, qui signifie *égal*: comme *aax* ꝏ *bcc*, qui signifie que le solide *aax* doit être égal au solide *bcc*.

L'EGALITE' est la comparaison de deux grandeurs égales en effet & en lettres: comme *ab* ꝏ *ab*. De l'Equation on vient à l'Egalité en changeant une lettre inconnue en une autre qui rende égaux les deux membres de l'Equation. Comme si l'on a cette Equation *aax* ꝏ *bcd*, en changeant la lettre *x* en $\frac{bcd}{aa}$, l'Equation proposée *aax* ꝏ *bcd*, se changera en cette Egalité, *bcd* ꝏ *bcd*. De même si l'on a cette Equation, 4 *toises* ꝏ 24 *pieds*, en prenant une toise pour la quantité inconnue, & en la changeant en 6 *pieds*, car elle deviendra connue par la force de l'Equation, on aura cette égalité 24 *pieds* ꝏ 24 *pieds*. Ainsi vous voyez que l'Egalité est un effet de l'Equation.

Voicy la raison pour laquelle on se sert des lettres de l'Alphabet dans l'Analyse, & le moyen de parvenir à une Equation, ou bien à une Egalité.

Quand on se propose de resoudre un Probleme par le moyen de l'Algebre, soit d'Arithmetique ou de Geometrie, on doit premierement considerer toutes les conditions de la Question, & les examiner par ordre: & pour travailler avec plus d'ordre & de facilité, on doit mettre dans son calcul autant de lettres differentes qu'il y aura de quantitez connues & d'inconnues, & il sera bon de se servir toûjours des mêmes lettres pour les inconnues, afin que s'y étant accoûtumé, on puisse discerner les quantitez *connues* d'avec les *inconnues*, les *connues* étant celles qui sont données, & aussi celles qui peuvent être prises à volonté, & les *inconnues* étant celles que l'on cherche, & aussi celles que l'on ne peut pas prendre à discretion.

Nous nous sommes servi dans nôtre Diophante des cinq lettres *u*, *x*, *y*, *z*, *&*, pour les quantitez inconnues, & des autres lettres indifferemment pour les connues, excepté la lettre *l*, que nous avons mise par tout pour l'unité, lorsqu'il s'est agi de comparer ensemble par addition, ou par soustraction deux grandeurs de divers genre. Alors cette comparaison s'est faite en multipliant la plus basse quantité par l'unité *l* autant de fois qu'il a été necessaire pour la rendre aussi élevée que la plus haute, & pour cela cette grandeur n'a point été changée, parce que l'unité en multipliant n'aporte aucun changement. Quoy que cela soit inutile dans les nombres, on le doit neanmoins ainsi pratiquer quand on veut resoudre le Probleme en lignes au lieu de nombres, car ainsi on conserve *la loy des Homogenes*, & l'on connoît quand on a manqué dans son calcul, ce qui arrivera lorsqu'il s'y trouvera quelque terme plus ou moins élevé que les autres, c'est à dire de plus ou de moins de dimensions : & de plus on suit les regles de la Geometrie, qui nous aprend qu'il n'y a aucune relation entre une Ligne & un Plan, ny entre un Plan & un Solide, &c. parce que ces grandeurs sont heterogenes.

Aprés avoir ainsi donné les noms aux quantitez connues, & aux inconnues, on accomplira toutes les conditions de la Question les unes aprés les autres, en commençant par celle qui semblera la plus commode, & chaque condition donnera une Equation particuliere, laquelle étant reduite comme il faut, on trouvera une quantité inconnue égale à quelque chose, & si à sa place on substitue sa valeur trouvée, au lieu de trois lettres inconnues par exemple qu'il y avoit au commencement, on n'en aura plus que deux, de sorte que les trois quantitez inconnues seront exprimées par des lettres, entre lesquelles il n'y en aura que deux inconnues, & elles satisferont à une condition de la Question, & au lieu des deux autres Equations, ou s'il y a trois lettres inconnues, on en aura deux autres avec deux lettres inconnues seulement.

De même en reduisant l'une de ces deux dernieres Equations, on trouvera l'une des deux quantitez inconnues égale à quelque chose, & en substituant à sa place sa valeur trouvée, on n'aura plus qu'une lettre inconnue, de sorte que les trois quantitez inconnues seront exprimées par des lettres, entre lesquelles il n'y aura qu'une inconnue, & elles satisferont à deux conditions de la Question, & la derniere Equation se trouvera changée en une autre, où il n'y aura qu'une lettre inconnue, que l'on connoîtra en reduisant cette derniere Equation comme les deux precedentes : & si l'on substitue par tout à la place de cette derniere lettre inconnue sa valeur trouvée, on n'aura plus de lettres inconnues ; & les trois quantitez lesquelles auparavant étoient inconnues seront connues, puisqu'elles seront exprimées en lettres connues. Ainsi le Probleme sera resolu, lequel sera Simple, si la valeur de chaque lettre inconnue est rationnelle : car si elle est irrationnelle, & que sa Puissance soit un Quarré, le Probleme sera Plan, & si cette Puissance est un cube, le Probleme sera Solide, & il sera plus que Solide, si la Puissance est un Sursolide.

Quand un Probleme est Simple, on le peut toûjours resoudre en Geometrie par le cercle, & par la ligne droite, parce qu'on peut toûjours trouver la quantité qu'on cherche par une quatriéme proportionnelle à trois lignes droites données. En voicy un exemple.

PROBLEME SIMPLE.

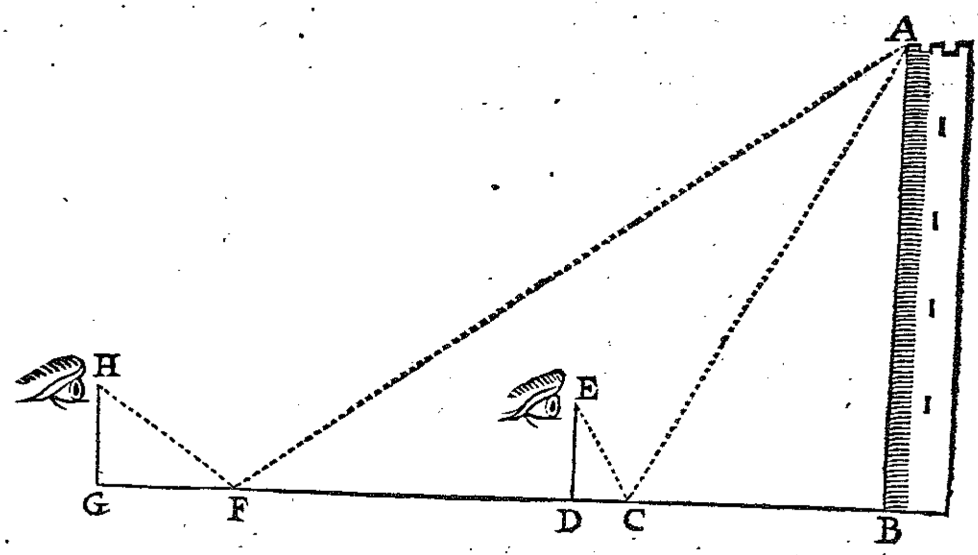
Mesurer la Hauteur inaccessible AB, par le moyen d'un Miroir Plan.

Ayant placé horizontalement une portion de Miroir plan au point C, qui soit au niveau avec la base BC, retirez-vous en vous tenant bien droit, jusques en D, en sorte que l'œil étant en E, il aperçoive le sommet A par l'angle de reflexion ECD égal à l'angle d'incidence ACB.

Aprés cela transportez vôtre piece de Miroir sur le même Plan Horizontal en ligne droite, en quelque lieu commode, comme en F, pour s'en éloigner comme auparavant, jusqu'à ce qu'étant par exemple en G, & l'œil en H, vous apercevriez le même sommet A par l'angle de Reflexion GFH égal à l'angle d'incidence AFB. Cette preparation étant faite, supposez

$$CD \propto a.$$
$$DE \propto b \propto GH.$$
$$CF \propto c.$$
$$GF \propto d.$$
$$AB \propto x.$$

& dans les triangles rectangles semblables ABC, CDE, vous trouverez BC $\propto \frac{ax}{b}$, & par consequent BF $\propto c + \frac{ax}{b}$. Dans les triangles semblables ABF, FGH, on a cette analogie, BF, AB : : GF, GH, ou $c + \frac{ax}{b}$, x : : d, b, & par consequent cette Equation $bc + ax \propto dx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{bc}{d - a}$, d'où l'on tire cette analo- 14



gie, $d - a$: : b : c, x, ou GF — CD, DE : : CF, AB, qui fait connoître que pour trouver la Hauteur AB, on doit chercher aux trois quantitez GF — CD, DE, CF, une quatriéme proportionnelle, puisque la ligne AB est quatriéme proportionnelle aux trois GF — CD, DE, CF, comme nous allons démontrer.

Demonstration.

Dans les triangles semblables ABC, CDE, on a cette analogie, CD, BC : : DE, AB: c'est pourquoy si à la place des deux derniers termes DE, ou GH, AB, on met les deux GF, BF, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables ABF, FGH, on aura cette autre analogie CD, BC : : GF, BF, & en composant on aura celle-cy, BD, CD : : BG, GF, & en permutant on aura celle-cy BD, BG : : CD, GF, & en divisant on aura celle-cy, GD, BD : : GF — CD, CD, & en permutant on aura celle-cy GD, GF — CD : : BD, CD, & en divisant on aura celle-cy, CF, GF — CD : : BC, CD, 20 & si à la place des deux derniers termes BC, CD, on met les deux AB, DE, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables ABC, CDE, on aura cette derniere analogie, CF, GF — CD : : AB, DE, qui fait connoître que la ligne AB est quatriéme proportionnelle aux trois GF — GD, DE, CF. Ce qu'il faloit démontrer.

Quelquefois le Probleme est si simple, qu'il se peut resoudre sans l'invention d'une troisiéme ou d'une quatriéme proportionnelle, comme il arrive dans le suivant.

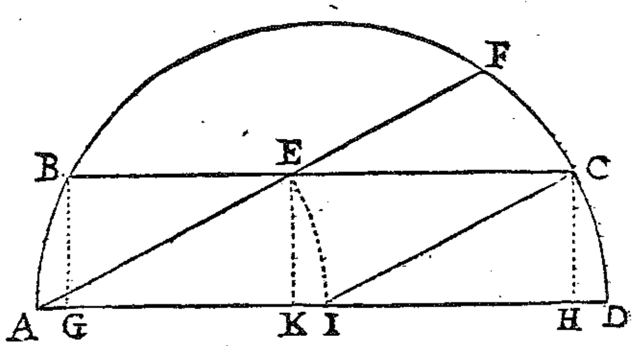
PROBLEME SIMPLE.

Trouver sur la Corde donnée BC parallele au diametre AD, du demi-cercle donné ABCD, le point E, par lequel tirant de l'extremité A, la droite AEF, la partie AE soit égale à la partie CE, ou la partie EB égale à la partie EF.

AYant tiré des deux points B, C, les droites BG, CH, perpendiculaires au diametre AD, lesquelles seront également éloignées du centre I du demi-cercle ABCD, supposez

$$AD \propto a.$$
$$BC \propto b \propto GH.$$
$$AE \propto x \propto EC.$$

pour avoir AG, ou DH $\propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, & EB $\propto b - x$, laquelle est égale à la ligne GK, en supposant que EK soit perpendiculaire à AD. Si à GK $\propto b - x$, on ajoûte AG $\propto \frac{1}{2}a$



$- \frac{1}{2}b$, on aura AK $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - x$. Si à la ligne GH $\propto b$, on ajoûte la ligne DH $\propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, on aura GD $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & parce que le Rectangle AGD est égal au quarré de la ligne BG, ou de son égale EK, on aura EKq $\propto \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, & dans le triangle rectangle AKE, on trouvera cette Equation, $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}ab - ax - bx + xx \propto xx$, ou $aa + ab \propto 2ax + 2bx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{1}{2}a$, c'est-à dire AE $\propto$ AI.

CONSTRUCTION.

Si donc on décrit de l'extremité A par le centre I, l'arc de cercle IE, on aura sur la corde BC le point E, par lequel tirant la droite AEF, la partie AE sera égale à la partie EC, & la partie EB à la partie EF.

DEMONSTRATION.

Car si l'on tire le Rayon IC, il sera parallele à la ligne AE, à cause de l'égalité des deux angles A, I, qui sont mesurez par les arcs égaux IE, CD, & la figure AICE sera un Rhombe, ce qui rend la ligne AE égale à la ligne EC, & par consequent la ligne EB égale à la ligne EF. Ce qu'il faloit démontrer.

Quand le Probleme est Solide, on le peut toûjours resoudre en Geometrie par le cercle & par la ligne droite. En voicy un exemple.

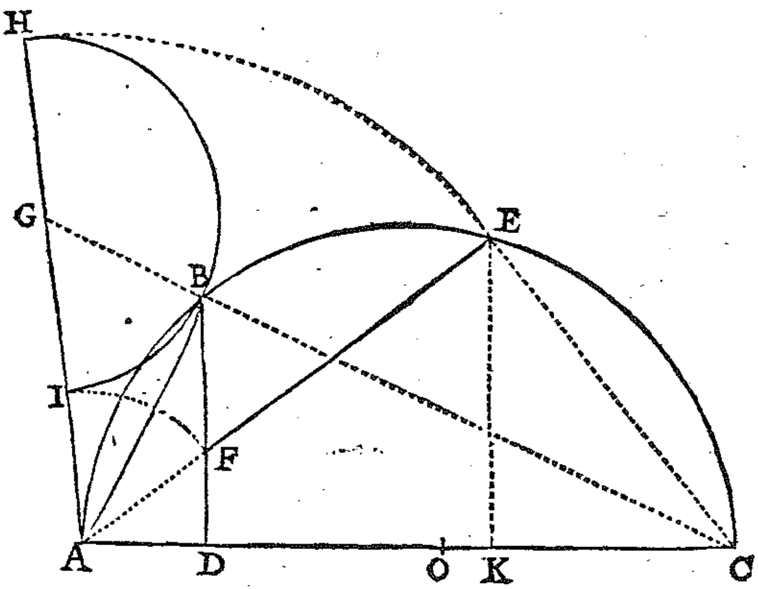
PROBLEME PLAN.

Etant donnez le Demi-cercle ABC, & le Sinus droit BD, tirer de l'extremité A du diametre AC, la corde AE, en sorte que la partie EF comprise entre la circonference & le Sinus droit, soit égale à la ligne donnée AO.

Ayant tiré du point E, le Sinus EK, avec les cordes AB, CE, BC, supposez

$$AO \propto a \propto EF.$$
$$AD \propto b.$$
$$AC \propto d.$$
$$AF \propto x.$$

pour avoir AE $\propto x + a$, & AB $\propto \sqrt{bd}$: & dans les triangles rectangles semblables ADF, AKE, on trouvera AK $\propto \frac{bx + ab}{x}$; & comme dans les triangles rectangles



semblables AEC, AEK, on trouve la même AK $\propto \frac{xx + 2ax + aa}{d}$, on aura cette Equation, $\frac{xx + 2ax + aa}{d} \propto \frac{bx + ab}{x}$, ou $x^3 + 2axx + aax - bdx - abd \propto 0$, laquelle étant divisée par $x + a \propto 0$, on aura cette autre Equation, $xx + ax - bd \propto 0$, d'où l'on tire la construction suivante, que nous avons prise de la Methode commune pour resoudre les Equations de deux dimensions, & que nous avons abregée, parce que la corde AB se trouve égale à la Racine quarrée de l'Homogene de comparaison bd, laquelle par consequent sera la base du triangle rectangle qu'il faut décrire, & dont la hauteur doit être égale à la moitié du côté coëfficient a, ou à la moitié de la ligne donnée AO. Ce triangle est facile à décrire, parce que l'angle ABC est droit.

CONSTRUCTION.

Prolongez la ligne BC, au delà de B, vers G, en sorte que la ligne BG soit égale à la moitié de la ligne donnée AO, & menez la droite AG, laquelle étant prolongée se trouve coupée aux deux points H, I, par un cercle décrit du centre G, par le point B, & la ligne AI sera la Racine veritable de l'Equation $xx + ax - bd \propto o$, ou la longueur de la ligne AF, qu'on cherche. Si donc on fait la ligne AF $\propto$ AI, & qu'on mene la droite AFE, la partie interceptée EF sera égale à la ligne donnée AO, c'est-à-dire à la ligne HI.

DEMONSTRATION.

Car puisque les deux angles opposez D, E, du Quadrilatere CDFE, sont droits, ce Quadrilatere sera dans un cercle, & le Rectangle EAF sera égal au Rectangle CAD, ou, au quarré AB, c'est-à-dire au Rectangle HAI, parce que la droite AB touche le cercle HBI : & à cause de AF $\propto$ AI, par la construction, on aura EA $\propto$ HA, & par consequent EF $\propto$ HI. Ce qu'il faloit démontrer.

SCOLIE.

Il est évident que la ligne AH est la Racine fausse de la même Equation $xx + ax - bd \propto o$, & qu'elle est égale à la ligne AE. C'est pourquoy on pourra trouver le point E, par un cercle décrit du centre A par le point H. Ainsi vous voyez que la racine fausse AH sert icy pour la construction du Probleme, sans qu'il soit besoin de la transporter de l'autre côté : ce que l'on pourroit neanmoins faire, & alors la ligne comprise entre le Sinus droit BD prolongé, & la circonference ABC aussi prolongée seroit aussi égale à la ligne donnée AO.

Voicy encore un autre Probleme Plan, où les deux racines peuvent servir pour le resoudre.

PROBLEME PLAN.

Tirer du point A donné sur le Plan du cercle donné BDC, dont le centre est E, la droite AC, en sorte que la corde BC soit égale à la ligne donnée AO.

Ayant tiré du point donné A, la touchante AD, supposez.

AO $\propto a \propto$ BC.
AD $\propto b$.
AC $\propto x$.

pour avoir AB $\propto x - a$, & parce que le Rectangle CAB est égal au quarré AD, on aura cette Equation, $xx - ax \propto bb$. D'où l'on tire cette

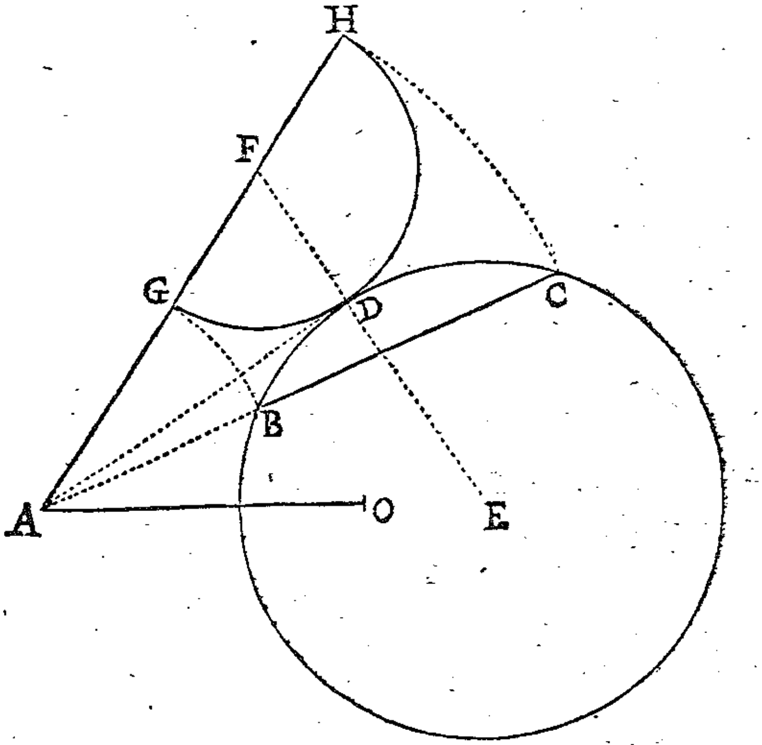
CONSTRUCTION.

Ayant tiré la touchante AD, tirez du centre A par le point D d'attouchement la droite EDF, en sorte que DF soit égale à la moitié de la ligne donnée AO, & décrivez du centre F par le point D une circonference de cercle GDH, qui se trouve icy coupée aux deux points G, H, par la droite AF. Faites enfin AC $\propto$ AH, & la corde BC sera égale à la ligne donnée AO.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rectangle HAG est égal au quarré de la touchante AD, aussi-bien que le Rectangle CAB, ces deux Rectangles HAG, CAB, seront égaux, dont les hauteurs AH, AC, étant égales par la construction, les bases AG, AB, seront égales aussi, lesquelles étant ôtées des lignes égales AH, AC, il restera la ligne GH, ou le double de la ligne DF, c'est-à-dire la ligne donnée AO égale à la corde BC. Ce quil faloit demontrer.

SCOLIE.



SCOLIE.

Puisque la Racine fausse AG est égale à la ligne AB, on voit qu'elle contribuë aussi à la solution du Probleme : mais dans la pratique il est plus seur de se servir de la Racine veritable AH, parce qu'étant plus grande, elle donne le point C, le plus éloigné, par lequel on pourra tirer plus exactement la ligne AC. Il est évident que la ligne droite AO, ne doit pas être plus grande que le diametre du cercle donné BDC.

Quand le Probleme est solide, on le peut toûjours resoudre en Geometrie par le Cercle, & par quelqu'autre section Conique. En voicy un exemple.

PROBLEME SOLIDE.

Etant donné sur un Plan le Demi-cercle BCD, & la droite FH perpendiculaire au diametre BD, trouver sur la circonference donnée BCD le point C, par lequel tirant au centre A du demi-cercle le BCD, la droite ACF, & la droite CG perpendiculaire à la ligne donnée FH; la partie FG soit égale à la ligne donnée AO.

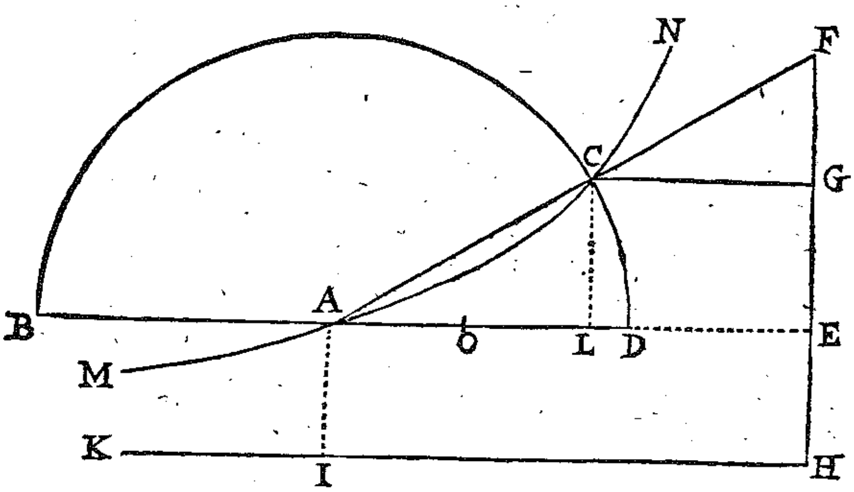
AYant tiré du point C, la droite CL perpendiculaire au Diametre BD, supposez

$$\begin{aligned} AC &\propto a. \\ AO &\propto c \propto FG. \\ AE &\propto d. \\ CL &\propto x \propto EG. \\ AL &\propto y. \end{aligned}$$

pour avoir EF $\propto x + c$, & dans le triangle rectangle ALC, on trouvera cette Equation $xx + yy \propto aa$, qui est un lieu au cercle donné. Dans les triangles semblables ALC,

K

AEF, on a cette analogie AE, EF :: AL, CL, ou d, $x + e :: y, x$, & par consequent cette Equation $dx \propto xy + ey$.



Supposez $x + e$, ou FF $\propto z$, pour avoir $x \propto z - e$, & par consequent cette autre Equation $dz - ed \propto yz$, ou $dz - yz \propto ed$. Supposez encore $d - y$, ou LE, ou CG $\propto u$, pour avoir cette derniere Equation; $zu \propto ed$, qui est un lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, d'où l'on tire cette

CONSTRUCTION.

Ayant tiré du centre A la droite AI perpendiculaire au diametre BD, & égale à la ligne donnée AO, tirez par le point I la droite indefinie KH parallele au diametre BD: & décrivez du centre H par le centre A, au dedans des Asymptotes HF, HK, l'Hyperbole MN, qui coupe icy la circonference BCD au point C, par lequel si l'on tire la droite ACF, & la droite CG parallele au diametre BD, la partie FG sera égale à la ligne donnée AO.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rectangle HIA est égal au Rectangle HGC, par la nature des Asymptotes, on connoit que les deux lignes HI, CG, ou AE, CG sont proportionnelles aux deux HG, HE: c'est pourquoy si au lieu des deux lignes AE, CG, on met les deux EF, FG, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables AEF, CGF, on aura cette analogie, EF, FG :: HG, HE, & en divisant on aura celle-cy, EF, EG :: HG, EG, où l'on voit que la ligne EF est égale à la ligne HG: c'est pourquoy en ôtant de chacune la ligne commune EG, il restera la ligne FG égale à la ligne EH, ou AI, ou AO. Ce qu'il faloit démontrer.

Nous avons fait servir icy le Cercle donné, pour avoir une solution plus courte, ce qu'il faut toûjours faire quand cela est facile, comme vous allez encore voir dans le Probleme suivant.

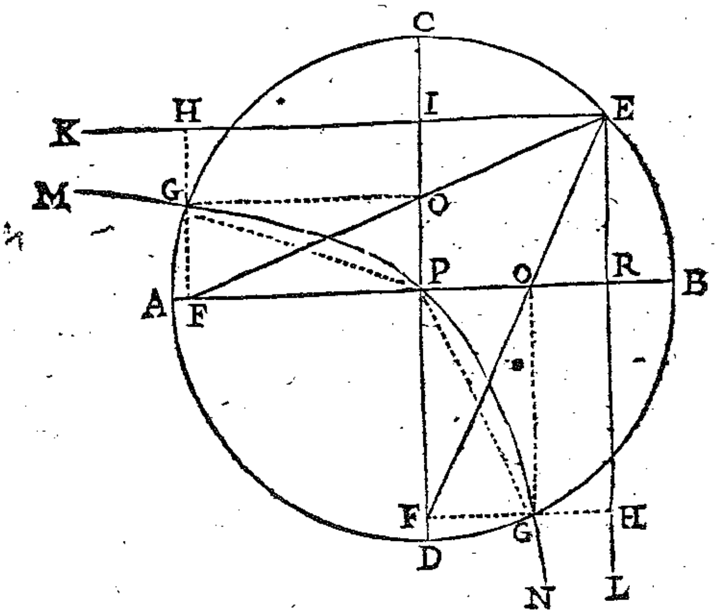
PROBLEME SOLIDE.

Trouver sur l'un des deux Diametres perpendiculaires AB, CD, du cercle donné ABCD, le point F, par lequel & par le point donné E, sur la circonference du cercle donné, tirant la droite EF, la partie FO terminée par les deux Diametres perpendiculaires, soit égale au Rayon AP du même cercle.

Ayant tiré du point donné E, les deux lignes indéfinies EK, EL, paralleles aux Diametres donnez de position AB, CD, supposez

$AE \propto a \propto FO.$
$PI \propto b \propto ER.$
$EI \propto c \propto PR.$
$FP \propto x.$
$OP \propto y.$

pour avoir $FR \propto x + c$, & dans le triangle rectangle FPO, on trouvera cette Equa-



tion, $xx + yy \propto aa$, qui est un lieu au cercle donné, & dans les triangles semblables FPO, FRE, on trouvera cette analogie, FP, PO : : FR, RE, ou x, y : : $x + c$, b, & par consequent cette Equation, $bx \propto xy + cy$, qui est un lieu à une Hyperbole entre ses Asymptotes, où le Rectangle commun est bc, d'où l'on tire cette

CONSTRUCTION.

Ayant décrit du centre E par le centre P, entre les Asymptotes EK, EL, l'Hyperbole MPN, qui coupe icy le cercle donné au point G, tirez par ce point G, la ligne HF perpendiculaire au Diametre sur lequel on cherche le point F, & vous aurez sur ce Diametre le point F qu'on cherche : de sorte que si l'on tire la droite EF, la partie FO sera égale au Rayon AP.

DEMONSTRATION.

Car si l'on joint la droite GO, & qu'on tire le Rayon GP, la figure FGOP sera un Parallelogramme, ce que nous démontrons ainsi. Dans les triangles semblables EIO, EHF, on aura cette analogie, EI, IO : : EH, FH, c'est pourquoy si à la place des deux derniers termes EH, FH, ou EH, ER, on met les deux PR, GH, qui sont en même raison, par la nature des Asymptotes, on aura cette autre analogie, EI, IO : : PR, GH, où l'antecedent EI étant égal à l'antecedent PR, le consequent IO sera aussi égal au consequent GH, ce qui rend la ligne OP aussi égale à la ligne FG, ainsi la figure FGOP est un Parallelogramme, dont les diagonales PG, FO, seront par consequent égales. Ce qu'il faloit faire & démontrer.

Enfin quand le Probleme est Sursolide, on le peut toûjours resoudre en

Geometrie par une ligne du premier genre, & une ligne d'un genre plus élevé. En voicy un exemple.

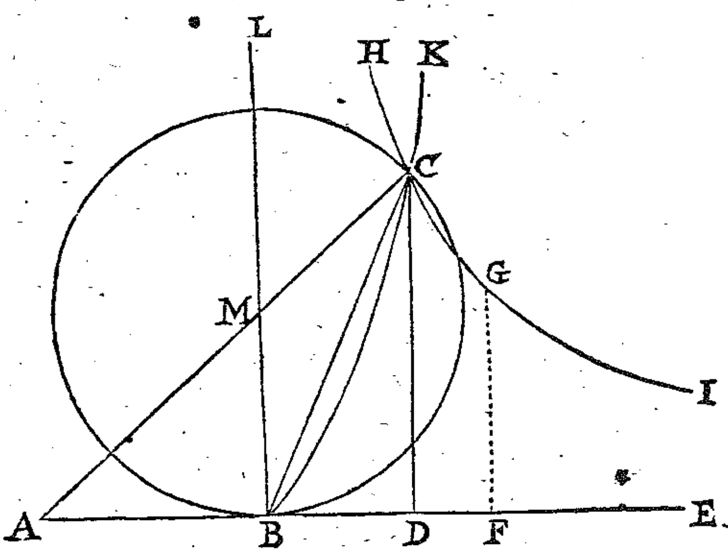
PROBLEME SURSOLIDE.

Etant donnez sur la ligne AE donnée de position les deux points, A, B, trouver le point C, duquel tirant aux deux points donnez, A, B, les droites, AC, BC, & la droite CD perpendiculaire à la ligne AE, l'angle ACB, soit égal à l'angle BCD, & le Quarré AB égal au Rectangle CDB.

Si l'on suppose

$$AB \propto a.$$
$$CD \propto x.$$
$$BD \propto y.$$

on aura AD $\propto a + y$, & ACq $\propto aa + 2ay + yy + xx$, & parce que la ligne BC doit diviser l'angle ACD en deux également, on aura cette analogie, ABq, BDq : : ACq, CDq, ou aa, yy : : $aa + 2ay + yy + xx, xx$, & par consequent cette Equation, $aaxx \propto aayy + 2ay^3 + y^4 + xxyy$, ou $aaxx - xxyy \propto y^4 + 2ay^3 + aayy$, laquelle étant divisée par $a + y$, on aura cette autre Equation, $axx - yxx \propto y^3 + ayy$, qui



est en un lieu à une ligne du second genre. Mais parce que le Quarré AB doit être égal au Rectangle BDC, on aura cette Equation $aa \propto xy$, qui est un lieu à un Hyperbole entre ses Asymptotes, d'où l'on tirera cette

CONSTRUCTION.

Ayant fait BF égale à AB, élevez du point F la ligne FG égale & perpendiculaire à la ligne BF, ou AB, & décrivez du centre B, par le point G, entre les Asymptotes BE, BL, qui doivent être perpendiculaires, l'Hyperbole HI. Aprés cela décrivez par le point B, sur l'axe BL, la courbe BCK conformément au premier lieu trouvé $axx - yxx \propto y^3 + ayy$, sçavoir en tirant du point A, une ligne quelconque AMC, & en faisant MC $\propto$ BC, car ainsi on aura un point C de cette courbe, laquelle coupe icy l'Hyperbole au point C, qui sera celuy qu'on cherche : de sorte que l'angle ACB sera égal à l'angle BCD, & le quarré AB égal au Rectangle BDC.

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne BM est égale à la ligne CM, par la construction, c'est-à-dire par la proprieté de la courbe BCK, l'angle BCM sera égal à l'angle CBM, & par consequent à l'angle alterne BCD. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Parce que chacune des deux lignes BF, FG, a été faite égale à la ligne AB, leur Rectangle BFG sera égal au Quarré AB : & parce que ce Rectangle BFG est égal au Rectangle BDC, par la nature des Asymptotes, il s'ensuit que le Rectangle BDC est égal au même Quarré AB. Ce qui restoit à démontrer.

SCOLIE.

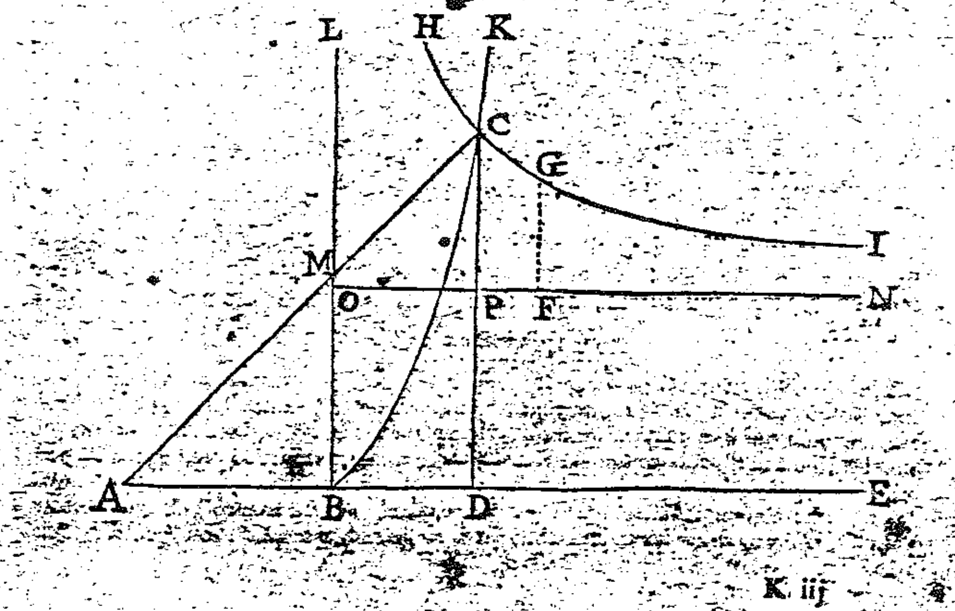
Vous prendrez garde que la ligne FG étant prolongée autant que l'on voudra, aprochera toûjours de la courbe BK aussi prolongée sans jamais la rencontrer, & qu'elle luy est asymptote, parce que dans le premier lieu trouvé, on trouve $xx = \frac{y^3 + ayy}{a - y}$, &c.

Il est encore à remarquer que si du point M pris à discretion sur l'axe BL, on décrit par le sommet B de la courbe BK, une circonference de cercle, qui coupe la courbe BK en un point, comme C, la ligne droite tirée de ce point C, au point A, passera toûjours par le centre de ce cercle.

Si au lieu de faire le Quarré AB égal au Rectangle BDC, on veut faire la ligne AC égale à la somme des deux BD, CD, le quarré AC sera égal au quarré de BD + CD; ainsi on aura cette Equation, $aa + 2ay + yy + xx = xx + 2xy + yy$, ou $xy - ay = \frac{1}{2}aa$, qui est un lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, & alors on aura cette autre

CONSTRUCTION.

Ayant décrit la courbe BCK, comme il vient d'être enseigné, prenez sur l'axe BL la ligne BO égale à la ligne AB, & tirez par le point O, la ligne indéfinie NO parallele à la ligne AE. Aprés cela prenez sur cette ligne ON, la partie OF égale à la même ligne AB, & tirez du point F la droite FG, perpendiculaire à ON, & égale à la moitié de OF, ou de AB, ou de BO, pour décrire du centre O, par le point G, au dedans des Asymptotes OL, ON, l'Hyperbole HI, qui donnera sur la courbe BK le point C qu'on cherche, de sorte qu'on aura $AC = BD + CD$.



DEMONSTRATION.

A de cause OF $\propto$ AB, & de FG $\propto \frac{1}{2}$AB, le Rectangle OFG, ou OPC, qui luy est égal, par la proprieté des Asymptotes, vaudra $\frac{1}{2}$ABq. C'est pourquoy on aura ABq $\propto$ 2OPC, ou ABq $\propto$ 2BDPC, & ajoûtant 2ABD, on aura ABq + 2ABD $\propto$ 2BDPC + 2ABD, & à cause de AB $\propto$ PD, le Rectangle 2ABD se changera en celuy-cy, 2BDPD : ainsi on aura ABq + 2ABD $\propto$ 2BDPC + 2BDPD, & à cause de PC + PD $\propto$ CD, on aura ABq + 2ABD $\propto$ 2BDC, & ajoûtant BDq + CDq, on aura ABq + 2ABD + BDq + CDq $\propto$ 2BDC + BDq + CDq, & à cause de ABq + 2ABD + BDq $\propto$ ADq, par 4. 2. on aura ADq + CDq, ou ACq $\propto$ 2BDC + BDq + CDq, & par consequent AC $\propto$ BD + CD. Ce qu'il faloit demontrer.

S'il y avoit encore une ou plus de conditions à accomplir dans la Question, en sorte qu'il restât encore une ou plusieurs Equations à resoudre, Il est évident qu'on ne pourroit pas ajoûter ces conditions à la Question, puisque toutes les quantitez inconnues sont déterminées, & que par consequent elle seroit mal proposée.

Mais s'il y a plus de quantitez inconnues que de conditions dans la Question, de sorte qu'aprés avoir resolu toutes les Equations, il reste encore quelques lettres inconnues, on pourra prendre ces lettres inconnues pour connues, c'est à dire telles que l'on voudra, pourvû que leurs valeurs supposées ne passent pas les limites que la nature du Probleme prescrit bien souvent, & alors la Question peut recevoir une infinité de solutions differentes & en ce cas on l'apelle *Lieu* étant proposée en Geometrie, & ce Lieu sera une Ligne, quand il ne restera qu'une lettre inconnue, & un Plan quand il en restera deux, & quand il en restera trois, le Lieu sera un Solide, &c. c'est à dire que la Question proposée se pouvant resoudre en une infinité de manieres differentes, il y a plusieurs points qui la peuvent resoudre, & que ces points sont dans une Ligne, dans un Plan, ou dans un Solide.

On connoît encore quand un Probleme Geometrique est un Lieu, lorsque c'est un Theoreme, & l'on connoît quand c'est un Theoreme, lorsque tous les termes qui sont dans un membre de l'Equation sont les mêmes que ceux de l'autre membre, c'est à dire lorsque l'Equation se change en Egalité; & si le point que l'on cherche est dans une Ligne, le Lieu est une Ligne, & s'il est dans un Plan le Lieu est Plan, & il seroit Solide, si le point qu'on cherche, étoit dans un Solide.

Quoyque nous ayons déja donné au commencement de ce Traité deux Problemes indeterminez, qui sont des Lieux à la Ligne, neanmoins pour une plus grande intelligence de ce que nous venons de dire, nous en ajoûterons encore icy deux autres, dont l'un sera à la Ligne droite, & l'autre à la Surface.

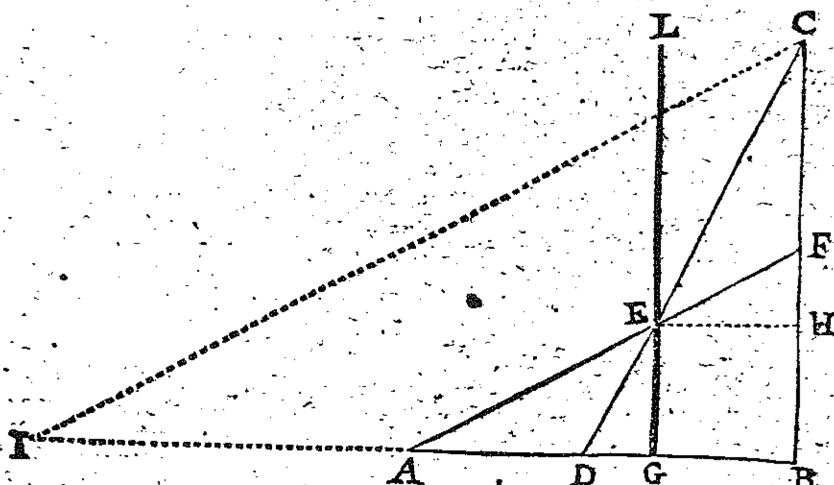
PROBLEME I.

Trouver au dedans de l'angle donné ABC, le point E, par lequel & par les deux points A, D, donnez sur le côté AB, tirant les droites ED, EA, lesquelles étant prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre côté BC, en deux points, comme F, C; les deux lignes FB, FC, soient égales entr'elles.

Ayant tiré du point E, la ligne EH parallele à la ligne AB, & la ligne EG parallele à l'autre ligne BC, supposez.

$$AF \propto a.$$
$$DB \propto b.$$
$$BG \propto x \propto EH.$$
$$EG \propto y \propto BH.$$

pour avoir AG $\propto a - x$, & dans les triangles semblables AGE, ABF, on trouvera BF $\propto \frac{ay}{a - x} \propto$ CF, c'est pourquoy on aura BC $\propto \frac{2ay}{a - x}$, de laquelle ôtant BH $\propto y$, on aura CH $\propto \frac{ay + xy}{a - x}$, & dans les triangles semblables CHE, CBD, on trouvera $x \propto \frac{ab}{2a - b}$: & comme l'autre quantité inconnue y se trouve indéterminée, cela fait connoître que le Probleme proposé est un lieu à la ligne droite, dont la construction sera telle.



CONSTRUCTION.

Ayant prolongé le côté AB jusques en I, en sorte que la ligne AI soit égale à la ligne AB, cherchez aux trois lignes DI, BD, AB, une quatriéme proportionnelle BG, & tirez par le point G, la droite indéfinie GL, laquelle étant parallele à la ligne BC sera le lieu qu'on cherche; de sorte que si on y prend à discretion un point, comme

E, pour en tirer aux deux points donnez A, D, les droites AEF, DEC, la ligne BF sera égale à la ligne CF.

DEMONSTRATION.

Ayant joint la droite CI, & ayant tiré par le point E, la droite EH parallele à la ligne AB, on considerera que puisque par la construction, on a cette analogie, DI, DB : : AB, BG, si à la place des deux derniers termes AB, GB, ou AB, HE, on met les deux BF, HF, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables ABF, EHF, on aura cette autre analogie, DI, DB : : BF, HF, c'est pourquoy en composant on aura celle-cy, BI, DB : : BF + HF, HF.

Dans les triangles semblables ABF, EHF, on a cette analogie AB, EH, ou AI, BG : : BF, FH, c'est pourquoy en composant on aura celle-cy, AI + BG, BG : : BF + HF, HF, & si à la place des deux derniers termes BF + HF, HF, on met les deux BI, BD, qui sont en même raison, par la derniere analogie de l'article precedent, on aura celle-cy, AI + BG, BG : : BI, BD, & en permutant on aura celle-cy, AI + BG, BI : : BG, BD, & en divisant on aura celle-cy, AG, BI : : GD, BD, & si à la place des deux derniers termes GD, BD, on met les deux GE, BC, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables EGD, CBD, on aura celle-cy, AG, BI : : GE, BC, qui fait connoître que les deux triangles EGA, CBI, sont semblables, & que par consequent la ligne AF est parallele à la ligne CI. D'où il suit que puisque la ligne AB est égale à la ligne AI, par la construction, aussi la ligne BF est égale à la ligne CF. Ce qu'il faloit démontrer.

PROBLEME II.

Trouver le point A au dedans du Parallelogramme Rectangle donné BCDE, duquel tirant aux quatre angles droits B, C, D, E, les droites AB, AC, AD, AE; la somme des deux quarrez opposez AB, AD, soit égale à celle des deux quarrez opposez AC, AE.

Ayant tiré par le point A, la droite GH parallele au côté BE, ou CD, & la droite IF, parallele au côté BC, ou DE, supposez

$$BE \propto a \propto CD \propto GH.$$
$$BC \propto b \propto ED \propto FI.$$
$$BF \propto x \propto GA \propto CI.$$
$$AF \propto y \propto AG \propto EH.$$

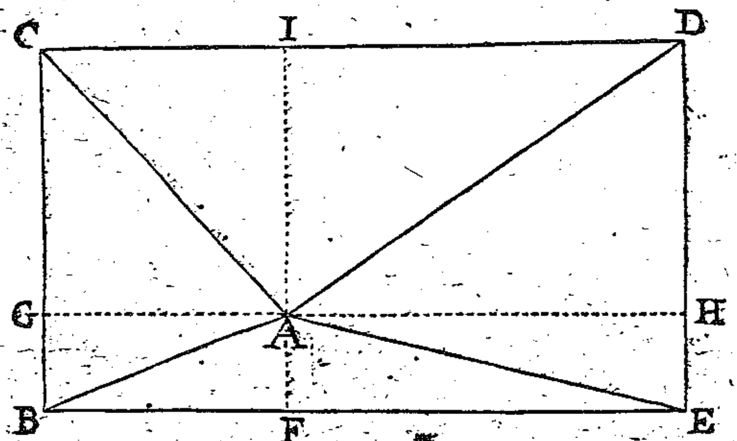
Pour avoir $AH \propto a - x \propto EF \propto DI.$
$$CG \propto b - y \propto AI \propto DH.$$
$$ABq \propto xx + yy.$$
$$ACq \propto xx + yy - 2by + bb.$$
$$ADq \propto aa - 2ax + xx + yy - 2by + bb.$$
$$AEq \propto aa - 2ax + xx + yy.$$

Parce que la somme des deux quarrez AB, AD, doit être égale à celle des deux AC, AE, on aura cette Equation, $aa - 2ax + 2xx + 2yy - 2by + bb \propto aa - 2ax + 2xx + 2yy - 2by + bb$, laquelle étant une Egalité, fait connoître que le Probleme proposé est un Theoreme, & qu'il est un lieu à la surface, sçavoir le Rectangle proposé BCDE.

CONSTRUCTION.

Si donc on prend à discretion dans le Rectangle donné BCDE, un point, comme A, duquel on tire aux quatre angles droits B, C, D, E, les droites AB, AC, AD, AE, la somme des quarrez des deux lignes opposées AB, AD, sera égale à celle des quarrez des deux lignes opposées AC, AE.

DEMONSTRATION.



DEMONSTRATION.

Si à $AHq \propto AHq$, on ajoûte $CGq \propto DHq$, on aura $AHq + CGq \propto AHq + DHq$, & à cause de $AHq + DHq \propto ADq$, on aura $AHq + CGq \propto ADq$, & si on ajoûte encore $AGq \propto BFq$, on aura $AHq + CGq + AGq \propto ADq + BFq$, & à cause de $CGq + AGq \propto ACq$, on aura $AHq + ACq \propto ADq + BFq$, & enfin si l'on ajoûte $HEq \propto AFq$, on aura $AHq + ACq + HEq \propto ADq + BFq + AFq$, & à cause de $AHq \propto HEq \propto AEq$, & de $BFq + AFq \propto ABq$, on aura $ACq + AEq \propto ABq + ADq$. Ce qu'il faloit démontrer.

Comme toute la science & la pratique de l'Algebre dépend des Equations, nous tâcherons d'expliquer icy par ordre tous les termes qui leur conviennent : & pour commencer, nous dirons premierement qu'il y a des Equations *Pures*, & *Composées*.

L'*Equation Pure* est celle où la lettre inconnue ne se trouve par tout que dans un même degré, telle est l'Equation suivante $ax + bx \propto cd$, & aussi la suivante $axx + bxx \propto cdd$.

L'*Equation Composée* est celle où la lettre inconnue se trouve mêlée par divers degrez, telle est l'Equation suivante, $xx + ax \propto bc$, & encore celle-cy, $x^3 + axx - bbx \propto c^3 - bbc$.

Une Equation pure & composée est dite *de plusieurs dimensions*, lorsque la lettre inconnue y monte à deux, ou à plusieurs degrez : & quand elle monte au second degré, c'est à dire au quarré, elle est dite *Equation quarrée*, ou *Equation de deux dimensions* : & *Equation cubique*, ou *Equation de trois dimensions*, quand la lettre inconnue y monte au troisiéme degré, c'est à dire au cube, & ainsi ensuite. Ainsi on connoît que cette Equation $xx + ax \propto bc$ est quarrée, ou de deux dimensions, & que la suivante $x^3 - abx \propto acc$ est cubique, ou de trois dimensions.

Une Equation pure où la lettre inconnue n'a qu'un degré, ou qui n'a qu'une dimension, se nomme *Equation Simple* : comme $ax + bx \propto cd$.

Une Equation *Composée*, ou de plusieurs dimensions, est encore dite *Affectée*, tantôt *par addition*, quand tous les termes inconnus, que l'on suppose tous dans un même membre de l'Equation, sont affirmez : quelquefois *par soustraction*, quand quelqu'un des termes inconnus est nié : & d'autrefois *par addition & par soustraction*, quand ces mêmes termes sont les uns affirmez & les autres niez. Tantôt *sous le quarré*, quand outre le premier & le dernier terme, il y en a un autre, où le quarré de la lettre inconnue se rencontre : quelquefois *sous le côté*, lors que dans cet autre terme la lettre inconnue s'y rencontre simplement au premier degré: & d'autrefois *sous le côté & sous le quarré*, lors qu'outre le premier & le dernier terme il y en a deux autres, dont l'un contient le quarré de la lettre inconnue, & l'autre la lettre inconnue simple.

Ainsi on connoît que cette Equation $xx + ax \propto bc$, est affectée sous le côté par addition, & que la suivante $x^3 - axx \propto bcc$, est affectée sous le quarré par soustraction, & encore que la suivante $x^3 + axx - bcx \propto bcd$ est affectée sous le quarré par addition, & sous le côté par soustraction.

Les TERMES d'une Equation sont les parties ou les monomes qui la composent, dans lesquels la lettre inconnue, quand elle s'y rencontre, y a des degréz differens : car toutes les parties où elle ne se rencontre pas, ou celles dans lesquelles elle se rencontre en un même degré, passent pour un seul terme. Ainsi les termes de cette Equation $xx + 2ax \propto cd$, sont xx, $2ax$, cd, & les termes de celle-cy, $xx + ax + bx \propto ad + bd$, sont xx, $ax + bx$, $ad + bd$, ou xx, cx, cd, en mettant la lettre c à la place de $a + b$.

Tous les termes d'une Equation doivent être homogenes entre eux, parce que les grandeurs homogenes n'affectent pas les heterogenes, & c'est pour cela que le terme où la lettre inconnue ne se rencontre pas, & qui fait ordinairement un membre de l'Equation, est appellé par excellence *Homogene de comparaison*, ou simplement *Homogene*. Comme dans cette Equation $x^3 - axx \propto bcc$, l'Homogene de comparaison est bcc, & dans celle-cy, $xx + bx \propto ac + cc$, l'Homogene est $ac + cc$. Ainsi des autres.

Il ne peut avoir dans une Equation qu'un terme *connu*, mais il y en peut avoir plusieurs *inconnus*.

Le *Terme connu* est celuy où la lettre inconnue ne se rencontre pas, c'est à dire c'est l'Homogene de comparaison.

Les *Termes inconnus* sont ceux où la lettre inconnue se rencontre : comme dans cette Equation $x^3 + axx - bcx, \propto abc + bcc$, les termes inconnus sont x^3, axx, bcx, & le connu est l'Homogene $abc + bcc$.

Le Premier terme d'une Equation est celuy où le degré de la lettre inconnue se trouve le plus élevé.

Le *Second terme* d'une Equation est celuy où la lettre inconnue descend d'un degré au dessous du plus élevé, qui se trouve dans le premier terme.

Le *Troisiéme terme* d'une Equation est celuy où la lettre inconnue s'abaisse de deux degrez au dessous du plus haut, qui est dans le premier terme, & ainsi en suite jusqu'à l'Homogene de comparaison, qui est le *Dernier terme*. Ainsi dans cette Equation $x^3 + axx - bbx \propto acc$, le premier terme est x^3, le second est axx, le troisiéme est bbx, & le dernier est l'Homogene acc.

Quoy que dans tous les termes d'une Equation le degré de la lettre inconnue ne diminue pas également, à cause de quelque terme qui manque, cela n'empêche pas que le terme où la lettre inconnue est abaissé de deux degrez par exemple, au dessous du premier, ne soit appellé *Troisiéme*. Ainsi dans l'Equation suivante $x^4 + aaxx + b^3x, \propto c^4$, où le second terme manque, le premier terme est x^4, le troisiéme est $aaxx$, le quatriéme est b^3x, & le dernier est l'Homogene de comparaison c^4.

La quantité connue qui se trouve dans le second terme, est apellée *Côté Coëfficient*, ou *Coëfficient du second terme*, parce qu'avec le degré de la lettre inconnue qu'il multiplie, il compose une grandeur homogene au premier terme &c. à tous les autres. C'est pourquoy on apelle aussi *Plan coëfficient*, ou *Coëfficient du troisiéme terme*, la quantité connue du troisiéme terme, & *So-*

side coefficient, ou le *Coefficient du quatriéme terme*, la quantité connue du quatriéme terme, & ainsi en suite jusqu'au dernier terme, que nous avons apellé *Homogene de comparaison*.

La lettre inconnue d'une Equation a autant de valeurs differentes, ou égales, que l'Equation a de dimensions. Ces valeurs sont apellées *Racines de l'Equation*, lesquelles peuvent être *Veritables*, *Fausses*, & *Imaginaires*.

La *Racine veritable* est la valeur affirmée de la lettre inconnue d'une Equation.

La *Racine fausse* est la valeur niée de la lettre inconnue d'une Equation.

La *Racine imaginaire* est la valeur de la lettre inconnue d'une Equation, exprimée par la Racine quarrée d'une grandeur niée, comme $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-aa}$, $\sqrt{-ab}$, &c.

Cette Racine peut aussi être un Binome, comme $1+\sqrt{-11}$, ou $1-\sqrt{-11}$, &c. laquelle comme les Racines réelles, peut être veritable, & fausse, avec cette difference qu'elle peut être veritable & fausse tout ensemble, sans qu'il s'ensuive aucune absurdité.

Quoyque ces Racines puissent être considerées comme veritables & fausses tout ensemble, il y en a neanmoins qui sont *essentiellement fausses*, comme les deux precedentes $1+\sqrt{-11}$, $1-\sqrt{-11}$, & d'autres qui sont *essentiellement veritables*, comme $4+\sqrt{-48}$; ou $3+\sqrt{-4}$, &c.

Les *Racines essentiellement fausses* sont celles où le triple du quarré de la partie rationnelle est plus petit que le nombre qui se trouve dans l'irrationnelle.

Les *Racines essentiellement veritables* sont celles où le triple du quarré de la partie rationnelle est égal ou plus grand que le nombre qui se trouve dans l'irrationnelle.

Dans toute Equation l'Homogene de comparaison est égal au produit de toutes les Racines, & elle est toûjours divisible par un Binome composé de la lettre inconnue & de l'une de ses Racines.

Le but de l'Algebre est de connoître les Racines d'une Equation : car sans cela le Probleme ne sçauroit être resolu : pour cette fin, on a souvent besoin de *reduire* l'Equation.

Reduire une Equation est luy donner une disposition propre & commode pour en pouvoir connoître plus facilement les Racines. Cette Reduction se fait en plusieurs manieres, dont les principales sont la *Transformation*, l'*Antithese*, l'*Hypobibasme*, le *Parabolisme*, & l'*Isomerie*.

La TRANSFORMATION d'une Equation est le changement que l'on fait de cette Equation en une autre plus facile. Ce changement se pratique ordinairement en supposant la quantité inconnue égale à une autre quantité inconnue augmentée ou diminuée d'une quantité connue qui luy soit homogene. Comme pour transformer cette Equation $xx - 2ax \propto ab$, on supposera par exemple $x \propto z + a$, & en mettant $z + a$ à la place de x, & $zz + 2az + aa$ à la place de xx, l'Equation proposée $xx - 2ax \propto ab$, se trouvera transformée en celle-cy, $\underline{zz - aa} \propto ab$, ou par antithese, en celle-cy $zz \propto \overline{ab + aa}$, ce qui donne $z \propto \sqrt{.\overline{ab + aa}}$, & par consequent $x \propto a + \sqrt{.\overline{ab + aa}}$.

L'ANTITHESE est la transposition d'un terme de l'un des deux membres d'une Equation à l'autre membre; & pour cela l'Equation n'est point changée,

L ij

parce que le même terme eſt ajoûté ou ôté des deux membres de l'Equation. On ſe ſert de l'Antitheſe pour tranſporter les termes d'une Equation d'un membre à l'autre, quand ils n'ont pas la diſpoſition, qu'ils doivent avoir, qui eſt ordinairement telle, que le premier terme ſoit mis le premier en ordre, & qu'il ſoit ſuivi immediatement par le ſecond, s'il n'y maque pas, & que le ſecond ſoit ſuivi par le troiſiéme, & ainſi en ſuite, juſqu'à l'Homogene, lequel à cauſe de cela eſt apellé *dernier terme*. On obſerve cet ordre par le moyen de l'Antitheſe en cette ſorte. Si le terme qu'on veut tranſporter d'un membre à l'autre eſt affirmé, on l'ôte de chaque membre de l'Equation, & on l'ajoûte s'il eſt nié, car ainſi la tranſpoſition ſe trouve faite, & pour cela l'Equation n'eſt point changée, ſuivant l'axiome qui nous aprend que *ſi à des grandeurs égales on ajoûte ou qu'on ôte des grandeurs égales, les ſommes ou les differences ſeront égales.* C'eſt ainſi que cette Equation $x^3 - 3axx \propto b^3 - bbx + 2axx$, ſe changera en celle-cy, $x^3 - 5axx + bbx \propto b^3$.

L'Hypobibasme eſt un égal abaiſſement de tous les degrez de la lettre inconnue d'une Equation, lorſqu'elle ſe trouve dans tous les termes, & cet abaiſſement ſe fait en ôtant le plus bas degré de la lettre inconnue de tous les termes de l'Equation, ce qui diminue le nombre des dimenſions. C'eſt ainſi que l'Equation ſuivante $x^4 + 2ax^3 \propto bbxx$, ſe reduit en celle-cy, $xx + 2ax \propto bb$, & la ſuivante $x^4 - aaxx \propto c^3x$, en celle-cy, $x^3 - aax \propto c^3$.

Le Parapolisme eſt l'aplication des termes d'une Equation à la grandeur connue du premier terme, ou la diviſion que l'on fait de tous les termes d'une Equation par la quantité connue qui multiplie le premier terme, pour avoir ainſi le premier terme reduit à l'unité, c'eſt à dire qu'il n'eſt multiplié par aucune autre quantité que par l'unité. C'eſt ainſi que l'Equation ſuivante $axx + 2abx \propto bcc$, ſe reduit en celle-cy, $xx + 2bx \propto \frac{bcc}{a}$, & la ſuivante $abx^3 + aabbx \propto abcdd$, en celle-cy, $x^3 + abx \propto cdd$.

L'Isomerie eſt la maniere de delivrer une Equation de fractions, qui ſont toûjours incommodes dans le calcul; ce qui ſe fait en reduiſant en même denomination toutes les fractions, & en multipliant chaque membre de l'Equation par le Denominateur commun. C'eſt ainſi que l'Equation ſuivante $\frac{1}{4}x^3 + axx - \frac{bccx}{a} \propto abb$, ſe reduira en celle-cy, $ax^3 + 4aaxx - 4bccx \propto 4aabb$.

Delivrer une Equation d'aſymmetrie eſt la changer en une autre, où il n'y ait aucun terme inconnnu irrationnel, ce qui ſe fait ordinairement par la multiplication. C'eſt ainſi que cette Equation $xx - \sqrt{bbcx} \propto ab$, où il y a une aſymmetrie quarrée, ſe reduit en celle-cy, $x^4 - 2abxx - bbcx + aabb \propto 0$, où il n'y a aucune aſymmetrie. C'eſt auſſi de la même facon que la ſuivante $ab - ac \propto \sqrt{abxx + aacx}$, où il a une Racine univerſelle, qui s'étend ſur les deux termes inconnus conjointement, ſe reduit en celle-cy, $abxx + aacx \propto aabb - 2aabc + aacc$, laquelle par le Paraboliſme ſe reduit en celle-cy, $xx + \frac{acx}{b} \propto ab - 2ac + \frac{acc}{b}$. C'eſt encore ainſi que la ſuivante $xx - \sqrt{C.\,aabbcx} \propto ab$, où il y a une aſymmetrie cubique, ſe reduit à celle-cy, $x^6 - 3abx^4 + 3aabbxx - aabbcx \propto a^3b^3$, ſans aucune aſymmetrie.

Augmenter les Racines d'une Equation d'une quantité donnée, c'est la transformer en une autre, dont les Racines surpassent celles de la proposée d'une quantité égale à la donnée : ce qui se fait en supposant la quantité ou lettre inconnue de l'Equation proposée, plus la quantité donnée, égale à une autre lettre inconnue. C'est ainsi que l'Equation suivante $xx + ax - cc \propto 0$, se transforme en celle-cy, $yy - 2by + ay + bb - ab - cc \propto 0$, dont les Racines surpassent celles de la premiere de la quantité b, à cause de $x + b \propto y$.

On n'augmente ainsi les Racines d'une Equation d'une quantité donnée que lorsqu'elles sont réelles & veritables : car quand elles sont imaginaires, elles ne s'augmentent ny ne se diminuent, & quand elles sont fausses, elles se diminuent de la même quantité donnée, comme dit *M. Des Cartes*.

On peut aisément connoître quand une des Racines fausses de l'Equation proposée est égale à la quantité donnée, sçavoir lorsqu'il vient une Equation plus basse, c'est à dire lorsque le dernier terme s'évanouit, parce qu'alors l'Equation se peut abaisser par l'Hypobibasme. D'où il est aisé de conclurre que lorsque les deux derniers termes s'évanouïront, l'Equation proposée aura deux Racines fausses égales chacune à la quantité donnée : parce que comme a fort bien remarqué *M. l'Abbé de l'Anion* il se doit évanouïr autant de derniers termes qu'il y aura de Racines fausses égales dans une Equation, lorsqu'on en augmente les Racines d'une quantité égale à l'une de ces Racines fausses égales : de sorte que si toutes les Racines d'une Equation sont fausses & égales entre elles, tous les termes hors le premier s'évanouïront, & si toutes sont inégales, il ne s'évonouïra que le dernier terme.

Les Racines fausses deviennent veritables, lorsqu'elles sont moindres que la quantité donnée ; ce que l'on peut connoître par l'Equation transformée, où l'ordre des + & des — change, lorsque la quantité donnée est plus grande que l'une des Racines fausses. Ainsi on peut juger à peu prés de la valeur des Racines fausses d'une Equation, comme dit *M. Des Cartes*, qui nous aprend qu'une Equation a autant de Racines fausses qu'il y a deux signes semblables qui se suivent, & autant de veritables qu'il y a de changemens de + & de —, lorsque tous les termes de l'Equation sont dans un même membre, en sorte que l'autre membre soit o.

Cette Regle me semble infaillible, quoyque quelques-uns ayent crû qu'elle souffroit des exceptions, dans les Equations de deux dimensions, dont les deux Racines sont imaginaires : car l'exemple qu'ils ont apporté sur ce sujet ne me semble pas suffisant. En voicy un qui est de la même nature.

Proposons cette Equation quarrée, $xx - 2x + 12 \propto 0$, dont les Racines $1 + \sqrt{-11}$, $1 - \sqrt{-11}$, selon la Regle precedente doivent être veritables ; puisque dans l'Equation proposée il y a deux changemens de + & de — : aussi elles sont veritables & fausses tout ensemble, sans que pour cela il s'ensuive aucune contradiction, parce que ces deux Racines sont imaginaires.

Car premierement elles peuvent bien être considerées comme veritables, parce que la partie $\sqrt{-11}$, qui est commune à chacune de ces deux Racines, ne peut augmenter ny diminuer la partie rationnelle 1, qui est affirmée.

Mais par la définition des Racines imaginaires, on connoît que ces deux Racines $1 + \sqrt{-11}$, $1 - \sqrt{-11}$, sont essentiellement fausses, parce que le triple du quarré de la partie rationnelle est plus petit que le nombre qui se trouve dans l'irrationnelle.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de ce que, si l'on multiplie l'Equation proposée $xx - 2x + 12 \propto 0$, par $x + 3$, ou par $x + 4$, ou par $x + 5$, & par une infinité d'autres Binomes qu'on peut trouver en fractions, il vient une Equation cubique, dont toutes les Racines sont fausses.

Il n'arrivera pas la même chose dans cette autre Equation quarrée, $xx - 6x + 13 \propto 0$, parce que ses deux Racines imaginaires $3 + \sqrt{-4}$, $3 - \sqrt{-4}$, sont essentiellement veritables, parce que le triple du quarré de la partie rationnelle est plus grand que le nombre qui se trouve dans l'irrationnelle. Car si on la multiplie par $x + a$, il viendra cette Equation de trois dimensions $x^3 + axx - 6xx - 6ax + 13x + 3a \propto 0$, dont les Racines ne peuvent être fausses par la Regle precedente, à moins que a ne soit plus grand que 6, & moindre que $2\frac{1}{6}$, ce qui est impossible.

Diminuer les Racines d'une Equation d'une quantité donnée, est la transformer en une autre, dont les Racines soient moindres que celles de la proposée d'une quantité égale à la donnée : ce qui se fait en supposant la lettre inconnue de l'Equation proposée, moins la quantité donnée, égale à une autre lettre inconnue. C'est ainsi, que l'Equation suivante $xx + ax - cc \propto 0$, se transforme en celle-cy, $yy + ay + 2by + ab + bb - cc \propto 0$, dont les Racines sont moindres que celles de la proposée de la quantité donnée b, à cause de $x - b \propto y$.

On ne diminue ainsi les Racines d'une Equation d'une quantité donnée, que lorsqu'elles sont réelles & veritables : car quand elles sont réelles & fausses, elles s'augmentent de la même quantité donnée, & quand elles sont imaginaires, elles ne se diminuent, ni ne s'augmentent.

On peut aisément connoître quand l'une des Racines veritables de l'Equation proposée est égale à la quantité donnée, sçavoir lorsqu'il vient une Equation plus basse, c'est à dire lorsque le dernier terme s'évanouit, parce qu'alors on peut abaisser l'Equation par l'Hypobibasme.

Les Racines veritables deviennent fausses, lorsqu'elles sont moindres que la quantité donnée, ce que l'on peut connoître par l'Equation transformée, où l'ordre des + & des − change, lorsque la quantité donnée est plus grande qu'une Racine veritable. Ainsi on peut juger à peu prés de la valeur d'une Racine veritable.

Il est aisé de conclure que si on diminue les Racines d'une Equation d'une quantité égale à l'une de ces Racines veritables, il s'évanouira autant de derniers termes qu'il y aura de Racines veritables égales à la quantité donnée, & que par consequent si toutes les Racines sont veritables & égales, tous les termes excepté le premier s'évanouïront, & si toutes sont inégales, il ne s'évanouïra que le dernier terme, comme il a été premierement remarqué par *M. l'Abbé de Lanion*.

Multiplier les Racines d'une Equation par un nombre donné, est la transformer en une autre, dont les Racines contiennent autant de fois celles de la proposée que le nombre donné comprend d'unitez : ce qui se fait en multipliant la lettre inconnue de l'Equation proposée par le nombre donné, & en égalant le produit à quelqu'autre lettre inconnue. C'est ainsi que cette Equation $xx + ax - dd \propto 0$, se transforme en celle, $yy + 2ay - 4dd \propto 0$, dont les Racines sont doubles de celles de la proposée, à cause de $2x \propto y$.

Par cette maniere de multiplier les Racines d'une Equation par un nombre donné, on peut toûjours délivrer une Equation de fractions numeriques sans changer le premier terme, ce que nous n'avons pas pû faire par l'*Isomerie*, sçavoir en multipliant les Racines de l'Equation par le dénominateur de la fraction que l'on veut ôter, ou par le produit des dénominateurs de toutes les fractions, quand il y en a plusieurs à ôter. C'est ainsi que cette Equation $x^3 - \frac{2}{3}axx + \frac{3}{4}bbx \propto abb$, se changera en celle-cy, $y^3 - 8ayy + 108bby \propto 1728abb$, dont les Racines sont dodecuples de celles de la proposée, à cause de $12x \propto y$.

On peut aussi par cette maniere faire ce que *Viete* apelle *Transmutation canonique*, c'est-à-dire faire que le coëfficient du second terme d'une Equation soit tel que l'on voudra, sçavoir en multipliant les Racines de l'Equation par le coëfficient donné divisé par le coëfficient du second terme : ou bien faire que le coëfficient du second terme soit égal à un quarré donné, & pareillement faire que le coëfficient du quatriéme terme soit égal à un cube donné, & ainsi en suite, sçavoir en multipliant les Racines de l'Equation par le côté du quotient, qui viendra en divisant la Puissance donnée par le coëfficient qu'on veut changer, en prenant le dernier terme pour un coëfficient, si on le veut changer.

Diviser les Racines d'une Equation par un nombre donné, est la transformer en un autre, dont les Racines soient contenues autant de fois dans celles de l'Equation, que le nombre donné comprend d'unitez ; ce qui se fait en divisant la lettre inconnue de l'Equation proposée par le nombre donné, & en égalant le quotient à une autre lettre inconnue. C'est ainsi que cette Equation $xx + 6ax - 12dd \propto 0$, se transforme en celle-cy, $yy + 3ay - 3dd \propto 0$, dont les Racines sont les moitiez de celles de la proposée, à cause de $\frac{1}{2}x \propto y$.

Tirer les Racines des Racines d'une Equation, est la transformer en une autre, que *Stevin* apelle *Equation dérivative*, dont les Racines sont les Racines quarrées, cubiques, &c. de celles de la proposée, que le même Auteur apelle *Equation primitive* ; ce qui se fait en égalant la lettre inconnue au quarré, ou au cube, &c. de quelqu'autre lettre inconnue. C'est ainsi que cette Equation primitive $xx + ax \propto bb$, se transforme en cette dérivative $y^4 + layy \propto llbb$, dont les Racines sont les Racines quarrées de celles de sa primitive, à cause de $lx \propto yy$, la lettre l representant l'unité pour conserver la loy des Homogenes. C'est aussi que cette Equation primitive $x^3 + axx - bbx \propto c^3$, se change en cette dérivative $y^6 + lay^4 - llbbyy \propto l^3c^3$, dont les Racines sont les Racines quarrées de celles de sa primitive, à cause de $lx \propto yy$. C'est encore ainsi que la même Equation primitive $x^3 + axx - bbx \propto c^3$, se change en cette dérivative $y^9 + llay^6 - l^4bby^3 \propto l^6c^3$, dont les Racines ſont les Racines cubiques de ſa primitive, à cauſe de $llx \propto y^3$. Ainſi des autres.

Il eſt aiſé de connoître qu'en tirant la Racine quarrée des Racines d'une Equation primitive, les Racines fauſſes deviennent imaginaires dans l'Equation dérivative, parce qu'une Racine fauſſe étant une quantité niée, elle ne peut pas avoir une Racine quarrée.

Il eſt auſſi aiſé de connoître que pour avoir une Equation dérivative, au lieu de l'unité, on peut prendre telle autre quantité connue que l'on voudra, & alors les Racines de l'Equation dérivative ſeront moyennes proportionnelles entre celles de l'Equation primitive & cette même quantité, & elles ſuivront en proportion la même quantité, quand il y aura pluſieurs moyennes continuellement proportionnelles. Comme ſi dans cette Equation primitive $x^3 + axx - aax \propto b^3$, on ſuppoſe $ax \propto yy$, on aura cette Equation dérivative $y^6 + aay^4 - a^4yy \propto a^3b^3$, dont les Racines ſont moyennes proportionnelles entre celles de l'Equation primitive & la quantité connue a. De même en ſuppoſant $aax \propto y^3$, la même Equation primitive $x^3 + axx - aax \propto b^3$, ſe changera en cette dérivative $y^9 + a^3y^6 - a^6y^3 \propto a^6b^3$, dont chaque Racine eſt la premiere de deux moyennes continuellement proportionnelles entre chaque Racine de l'Equation primitive & la quantité connue a, qu'il faut prendre pour la premiere des quatre continuellement proportionnelles.

On voit icy qu'une Equation dérivative eſt telle, que la lettre inconnue qui ſe trouve dans le terme penultiéme, n'a pas moins de deux degrez, & que les degrez de la même lettre inconnue qui ſe trouve dans tous les termes inconnus, ſont dans une proportion continuellement arithmetique, où l'excez eſt plus grand que l'unité.

Cet excez fait connoître la qualité des Racines de l'Equation dérivative : car s'il eſt l'expoſant d'un quarré, les Racines de l'Equation dérivative ſeront les Racines quarrées des Racines de ſa primitive à l'égard de l'unité, & s'il eſt l'expoſant d'un cube, les Racines de l'Equation dérivative ſeront les Racines cubiques de celles de ſa primitive, à l'égard de la même unité, & ainſi en ſuite, autrement elles ſeroient moyennes proportionnelles entre la quantité connue & les Racines de la primitive, comme nous avons déja dit.

Ce même excez fait auſſi connoître de quelle Equation primitive une Equation eſt dérivative : car ſi en diviſant par cet excez le plus haut degré de la lettre inconnue, le quotient eſt l'expoſant d'un quarré, & que la lettre inconnue ne ſe trouve que dans deux termes, l'Equation ſera dérivative d'une Equation de deux dimenſions : & ſi en diviſant par le même excez le plus haut degré de la lettre inconnue, le quotient eſt l'expoſant d'un cube, & que la lettre inconnue ſe trouve dans deux ou trois termes ſeulement, l'Equation ſera dérivative d'une Equation de trois dimenſions. Ainſi des autres.

Il eſt aiſé par une operation contraire à la precedente, de reduire une Equation dérivative en ſa primitive, ſçavoir en la reduiſant à une autre, dont les Racines ſoient les quarrez de celle de la dérivative, ſi l'excez de la proportion arithmetique eſt l'expoſant d'un quarré, ou le cube ſi le même excez eſt l'Expoſant d'un cube, & ainſi en ſuite.

Ajoûter

Ajoûter un terme qui manque à une Equation, eſt la transformer en une autre, où le terme que l'on demande ſe rencontre, ce qui ſe fait en augmentant ou en diminuant les Racines de l'Equation d'une quantité telle que l'on voudra.

Oter un terme d'une Equation eſt la transformer en une autre, où le terme que l'on ſouhaite manque.

Il eſt tres-utile d'ôter le ſecond terme d'une Equation, & principalement des Equations de deux dimenſions & de leurs dérivatives, parce qu'ainſi on les rend pures, ce qui fait qu'on en peut aiſément connoître les Racines, quoy que cette methode ne ſoit pas la plus courte.

On peut auſſi quelquefois rendre pure une Equation de trois & de quatre dimenſions, en ôtant le ſecond terme, ſçavoir lorſque l'Equation ſe peut abaiſſer par l'extraction de la Racine cubique quand elle eſt de trois dimenſions, & de la Racine quarrée quand elle eſt de quatre dimenſions; car dans ce cas ſi l'Equation eſt de trois dimenſions, le troiſiéme terme ſe détruit, ce qui fait que l'Equation devient pure : & ſi l'Equation eſt de quatre dimenſions, le quatriéme terme s'évanoüit, ce qui fait que l'Equation devient dérivative d'une Equation de deux dimenſions, que l'on peut toûjours rendre pure.

Comme ſi de cette Equation cubique $x^3 + 6axx + 12aax \propto abb$, on ôte le ſecond terme, en ſuppoſant $x \propto y - 2a$, on aura cette Equation pure, $y^3 \propto abb + 8a^3$. Mais on aura plûtôt en ajoûtant $8a^3$ à chaque membre de l'Equation, pour avoir cette autre Equation, $x^3 + 6axx + 12aax + 8a^3 \propto abb + 8a^3$, ou prenant la Racine cubique de chaque membre, on a cette Equation ſimple, $x + 2a \propto \sqrt{C.\overline{abb + 8a^3}}$.

Pareillement ſi de cette Equation de quatre dimenſions $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx - bbxx - 2abbx \propto 2aabb$, que nous avons tirée des Commentaires de *Schooten ſur la Geometrie de M. Des Cartes*, page 318 de l'impreſſion de l'année 1659, on ôte le ſecond terme, en ſuppoſant $x \propto z - a$, on aura cette Equation $z^4 - 2aazz - bbzz \propto aabb - a^4$, qui étant dérivative d'une Equation de deux dimenſions, ſe peut reduire à ſa primitive, en ſuppoſant $zz \propto ay$, pour avoir cette Equation primitive $yy - 2ay - \frac{bby}{a} \propto bb - aa$, que l'on rendra pure, en ſuppoſant $y \propto u + a + \frac{bb}{2a}$, pour avoir cette Equation pure $uu \propto 2bb + \frac{b^4}{4aa}$: mais on aura plûtôt fait en ajoûtant $\frac{1}{4}b^4$ à chaque membre de l'Equation, pour avoir cette autre Equation, $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx - bbxx - 2abbx + \frac{1}{4}b^4 \propto 2aabb + \frac{1}{4}b^4$, où prenant la Racine quarrée de chaque membre, on a cette Equation de deux dimenſions, $xx + 2ax - \frac{1}{2}bb \propto \sqrt{2aabb + \frac{1}{4}b^4}$; que l'on rendra pure en ſuppoſant $x \propto y - a$, &c.

La Rhetique, ou l'*Exegetique* eſt la maniere de trouver en nombres ou en lignes les Racines de l'Equation du Probleme, ſelon qu'il eſt d'Arithmetique, ou de Geometrie.

Lorſque dans la ſolution d'un Probleme en nombres, que l'on veut rendre rationnelle, on a une Puissance à égaler au quarré, ou à quelqu'autre Puissance plus élevée, cela se nomme *Simple Egalité* : & quand on a deux Puissances à égaler chacune au quarré, cela s'apelle *Double Egalité*; & quand on a trois Puissances à égaler chacune au quarré, cela s'apelle *Triple Egalité*. *Diophante* nous a donné une methode pour les Doubles Egalitez, & le *P. De Billy* nous en a donné une tres-belle pour les Triples Egalitez. Voyez son *Dioph. Rediv.*

Pour vous mieux faire comprendre l'usage des Simples, des Doubles, & des Triples Egalitez, nous ajoûterons icy les trois Problemes suivans.

PROBLEME I.

Trouver trois nombres quarrez, tels que la somme de deux quelconques soit un nombre quarré.

FOrmez de ax & de by ce triangle rectangle $2abxy$, $aaxx - bbyy$; $aaxx + bbyy$: & reciproquement de ax & de by ce triangle rectangle $2abxy$, $aayy - bbxx$, $aayy + bbxx$, & mettez la hauteur commune $2abxy$, & les deux bases $aaxx - bbyy$, $aayy - bbxx$, pour les côtez des trois quarrez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$4aabbxxyy.$$
$$a^4x^4 - 2aabbxxyy + b^4y^4.$$
$$a^4y^4 - 2aabbxxyy + b^4x^4.$$

car ainsi le premier sera avec chacun des deux autres un nombre quarré, par la nature du triangle rectangle, & il ne reste plus qu'à égaler au quarré la somme des deux derniers, $a^4x^4 + b^4x^4 - 4aabbxxyy + a^4y^4 + b^4y^4$. Pour cette fin supposez $x \propto z - \frac{ay}{b}$, & vous aurez en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^8y^4 - 2a^4b^4y^4 + b^8y^4 + 4a^3b^5zy^3 - 4ba^7zy^3 + 6a^6bbyyzz + 2aab^6yyzz - 4a^5b^3z^3y - 4ab^7z^3y + a^4b^4z^4 + b^8z^4$, pour le côté duquel prenant $a^4yy - b^4yy - 2a^3bzy + \frac{a^6bbzz + aab^6zz}{a^4 - b^4}$, on trouvera $y \propto b^9 - 2a^4b^5 - 3a^8b$, & $z \propto 4ab^8 - 4a^9$, & consequemment $x \propto 3ab^8 + 2a^5b^4 - a^9$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche seront tels,

$$6aab^{18} - 8a^6b^{14} - 28a^{10}b^{10} - 8a^{14}b^6 + 6bba^{18}.$$
$$a^{20} - 13a^{16}b^4 - 14a^{12}b^8 + 14a^8b^{12} + 13a^4b^{16} - b^{20}.$$
$$8a^{18}bb + 16a^{14}b^6 - 16a^6b^{14} - 8aab^{18}.$$

Si l'on suppose $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les trois quarrez qu'on cherche, seront tels, 1995529167424, 20464733025, 5561295897600, dont les côtez sont 1412632, 143055, 2358240.

PROBLEME II.

Trouver trois nombres, tels que la somme & la difference de deux quelconques soit un nombre quarré.

AYant formé deux triangles rectangles comme dans le Probleme precedent, mettez la hauteur commune $2abxy$, & les deux hypotenuses $aaxx + bbyy$, $bbxx + aayy$, pour les trois nombres qu'on cherche, car ainsi le premier étant ôté & ajoûté à chacun des deux autres, on aura quatre nombres quatrez, par la nature du triangle rectangle. Il ne reste donc plus qu'à rendre quarrée la somme & la difference des deux derniers. Ainsi nous aurons cette Double Egalité.

$$aaxx + bbxx + aayy + bbyy.$$
$$aaxx - bbxx - aayy + bbyy.$$

Supposez $x \propto z - \frac{ay}{b}$, pour avoir en entiers cette autre Double Egalité,

$$aabbzz + b^4zz - 2ab^3yz - 2a^3byz + a^4yy + 2aabbyy + b^4yy.$$
$$aabbzz - b^4zz + 2ab^3yz - 2a^3byz + a^4yy - 2aabbyy + b^4yy.$$

Multipliez la premiere Puissance par le quarré $a^4 - 2aabb + b^4$, & la deuxiéme par le quarré $a^4 + 2aabb + b^4$, pour avoir ces deux dernieres Puissances à égaler au quarré,

$$\left.\begin{matrix} + a^6bb \\ - aab^6 \\ - a^4b^4 \\ + b^8 \end{matrix}\right\} zz \qquad \left.\begin{matrix} + 2a^5b^3 \\ + 2a^3b^5 \\ - 2ab^7 \\ - 2a^7b \end{matrix}\right\} yz \qquad \left.\begin{matrix} + a^8 \\ - 2a^4b^4 \\ + b^8 \end{matrix}\right\} yy.$$

$$\left.\begin{matrix} + a^6bb \\ - aab^6 \\ + a^4b^4 \\ - b^8 \end{matrix}\right\} zz \qquad \left.\begin{matrix} - 2a^5b^3 \\ - 2a^3b^5 \\ + 2ab^7 \\ - 2a^7b \end{matrix}\right\} yz \qquad \left.\begin{matrix} + a^8 \\ - 2a^4b^4 \\ + b^8 \end{matrix}\right\} yy.$$

Leur difference est $2a^4b^4zz - 2a^5b^3yz + 4ab^7yz$, en prenant la seconde pour la plus grande, & les deux nombres produisans sont $-2ab^3z$, $\frac{b^5z}{a} - a^3bz + 2a^4y - 2b^4y$. La moitié de leur somme est $\frac{b^5z}{2a} - \frac{a^3bz}{2} + a^4y - b^4y - ab^3z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance, on trouvera $y \propto b^9 - 3a^8b + 6a^4b^5$, & $z \propto 4ab^8 - 4a^9$, & par consequent $x \propto 3ab^8 - a^9 - 6a^5b^4$, & les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$6aab^{18} + 24a^6b^{14} - 92a^{10}b^{10} + 24a^{14}b^6 + 6a^{18}bb,$$
$$a^{20} + 21a^{16}b^4 - 6a^{12}b^8 - 6a^8b^{12} + 21a^4b^{16} + b^{20}.$$
$$10aab^{18} - 24a^6b^{14} + 60a^{10}b^{10} - 24a^{14}b^6 + 10a^{18}bb.$$

Si l'on suppose $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les trois nombres qu'on cherche, seront 2873435, 2399057, 2288168.

PROBLEME III.

Trouver trois nombres proportionnels, en sorte que si à leur produit solide on ajoûte le Plan de deux quelconques, il vienne trois nombres quarrez.

Mettez a^4x, $aabbx$, b^4x, pour les trois nombres qu'on cherche, afin qu'ils soient proportionnels, & selon la condition de la Question on aura en moindres termes cette Triple égalité,

$$b^4x + 1.$$
$$aabbx + 1.$$
$$a^4x + 1.$$

Le produit solide de ces trois Puissances est $a^6b^6x^3 + a^6bbxx + aab^6xx + a^4b^4xx + a^4x + b^4x + aabbx + 1$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $1 + \frac{1}{2}a^4x + \frac{1}{2}b^4x + \frac{1}{2}aabbx$, on trouvera $x \propto \frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4a^6b^6}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4aab^6}.$$

$$\frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4a^4b^4}.$$

$$\frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4bba^6}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{105}{256}$, $\frac{105}{64}$, $\frac{105}{16}$, ou $\frac{105,\ 420,\ 1680}{256}$.

L'*Equation conſtitutive d'un Probleme* eſt celle qui a été trouvée par la Zetetique, & que par l'Exegetique on réſout en nombres ou en lignes pour la ſolution du Probleme.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Dictionnaire Mathématiques
Fascicule I
Arithmétique et Algèbre

AUTEUR :

OZANAM M

RESUME :

Dans le Dictionnaire Mathématique ou idée générale des mathématiques de Monsieur Ozanam on trouve, outre les termes de cette science, plusieurs termes des arts et des autres sciences ; avec des raisonnements qui conduisent peu à peu l'esprit à une connaissance universelle des Mathématiques . Paris 1691.

MOTS CLES :

Encyclopédie
Arithmétique
Algèbre
Histoire
Raisonnement mathématique

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1982
ISBN : 2-86612-008-6