

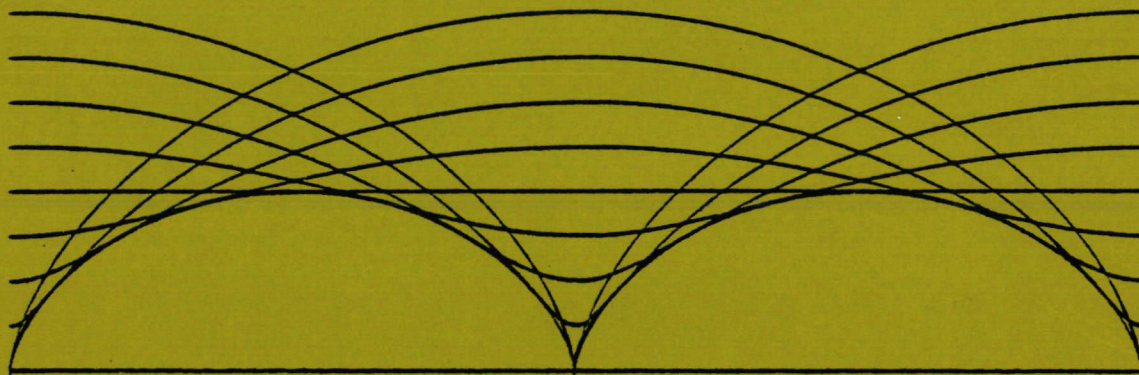


Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII



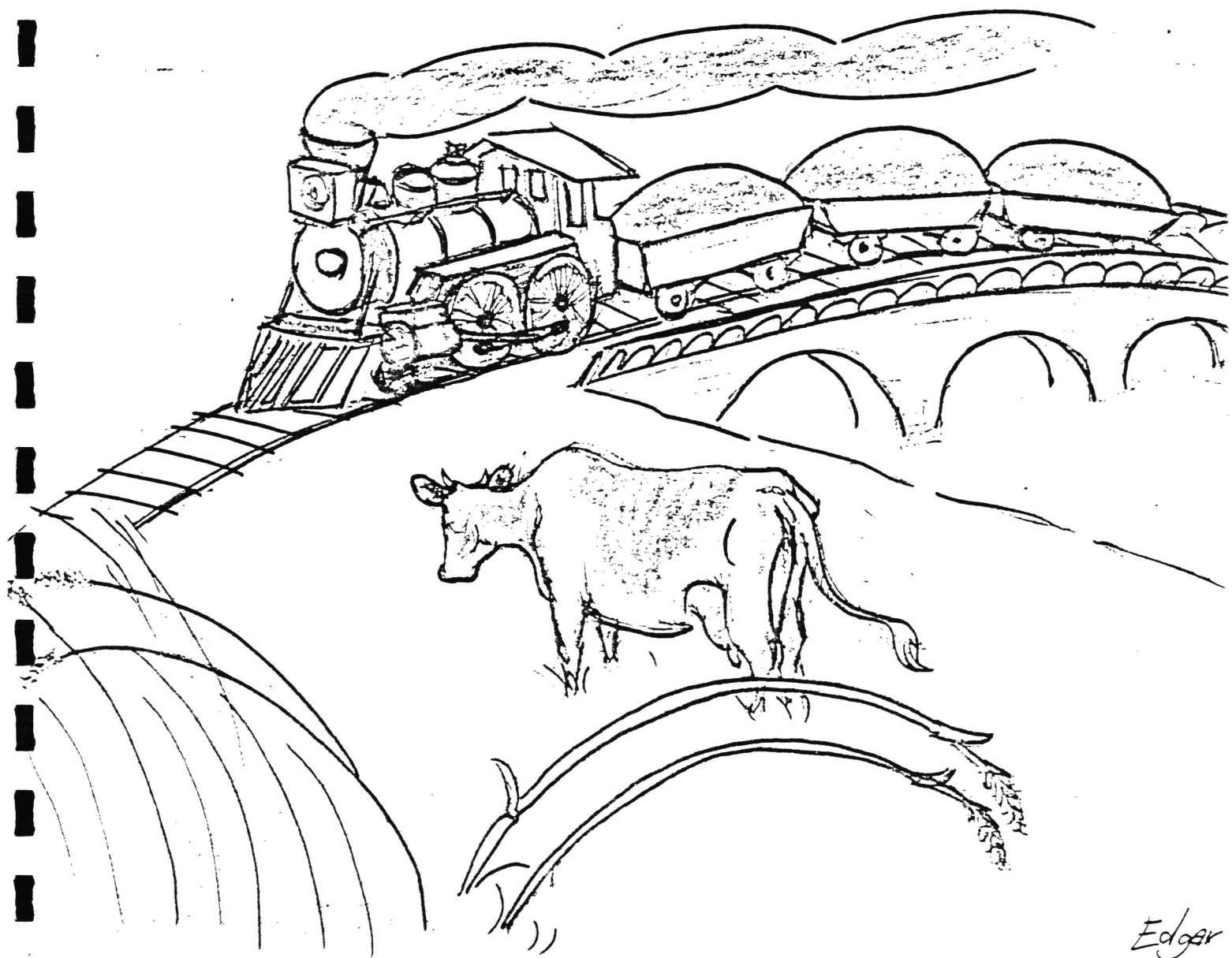
janvier 1982

TRAINS EPICYCLOÏDAUX



par le groupe I.R.E.M interdisciplinaire MATH./TECHNOLOGIE

<u>NIVEAU</u>	Classes de techniciens supérieurs
<u>PUBLIC</u>	Professeurs / Elèves
<u>SUJET</u>	Autour du mot " cycloïdal "
<u>OBJECTIF</u>	Appréhender / Géométriser / Interpréter



PAR LE GROUPE INTERDISCIPLINAIRE I.R.E.M :

Patrick BARRIANT
Christiane BRETIN
Michel GAGNARD
Michèle ROQUES

Dessins P. BARRIANT
Illustrations originales EDGAR
Courbes : traceur de courbes HP
(2872 A) de l'I.R.E.M Paris Sud.



SOMMAIRE

Introduction :	Page 1
Chapitre 0 :	
Présentation succincte des trains épicycloïdaux	Page 5
Chapitre 1 :	
Mouvement plan sur plan	Page 9
I) Centre instantané de rotation. Exemples	Page 11
II) Etude géométrique du mouvement	Page 21
III) Etude des accélérations	Page 24
IV) Composition des mouvements plan sur plan	Page 27
Annexe I : Courbes	Page 41
Chapitre 2 :	
Etude cinématique des trains épicycloïdaux simples	Page 49
Chapitre 3 :	
Dentures d'engrenage	Page 55
I) Notion de profil	Page 56
II) Génération des profils de denture	Page 57
III) Engrenage cylindrique à profil en développante de cercles	Page 59
IV) Engrenage cylindrique à profil cycloïdal	Page 72
Conclusion :	Page 87
Annexe II : Courbes	Page 89



- 1 -

I N T R O D U C T I O N

Pour répondre à une demande de Professeurs Techniques, Professeurs Techniques Adjoints et Chefs de Travaux des Lycées Techniques, l'I.R.E.M. de Paris-Sud a mené pendant plusieurs années une véritable politique de formation continue à leur égard, en leur proposant des stages annuels de formation mathématique à raison de deux heures par semaine.

Si, au départ, il s'est d'abord agi de compléter et d'approfondir les connaissances mathématiques des enseignants des ateliers, très vite la nécessité de mener une réflexion et une recherche communes Mathématiques - Technologie s'est imposée, et ceci à partir de problèmes concrets rencontrés dans leurs enseignements. Les animateurs de l'I.R.E.M. ont donc eu ainsi une formation technologique sur le tas !

Un sujet avait l'air particulièrement "effrayant" pour certains professeurs d'atelier. Il s'agissait des "trains épicycloïdaux". Si les deux mots sont relativement compréhensibles pris séparément, leur union paraissait bien obscure aux animateurs de mathématiques. Dans quel engrenage allaient-ils se faire prendre !

L'étude qui est faite ici voudrait répondre à deux préoccupations principales :

- permettre une meilleure compréhension théorique d'un mécanisme à l'aide d'outils mathématiques ,
- apporter des illustrations pratiques à une étude mathématique.

Elle se voudrait un outil de réflexion, et aurait atteint son plein objectif si elle pouvait être à l'origine d'autres études similaires ou complémentaires. Et maintenant : "Bon voyage et bonne moisson cycloïdale !".

Le travail de notre groupe s'est organisé de la manière suivante :

- présentation du mécanisme dit "train épicycloïdal"
- de là, deux axes de recherche :
 - a) mouvement plan sur plan, puisqu'on peut schématiser le fonctionnement d'un train épicycloïdal par le mouvement de plusieurs plans l'un sur l'autre. Nous avons alors été amené à utiliser la notion d'enveloppes.
 - b) courbes cycloïdales, puisque nous avons rencontré des trajectoires qui en sont.
- chacun de ces axes de recherche a trouvé une application dans l'étude de deux types d'engrenages :
 - a) à denture en développante de cercle
 - b) à denture cycloïdale.

La présentation qui est faite ici de cette recherche s'est limitée, volontairement, et au maximum, à l'aspect géométrique, et suppose connus plus particulièrement :

- le double produit vectoriel et la propriété :
- le théorème de composition des vitesses en mécanique :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W})\vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V})\vec{W}$$

Soit un point M appartenant à un solide S_γ en mouvement par rapport à deux solides S_α et S_β .
En notant $\vec{V}_{Mi/j}$ la vitesse du point M de S_i dans son mouvement par rapport à S_j , on a :

$$\vec{V}_{M\gamma/\alpha} = \vec{V}_{M\gamma/\beta} + \vec{V}_{M\beta/\alpha}$$

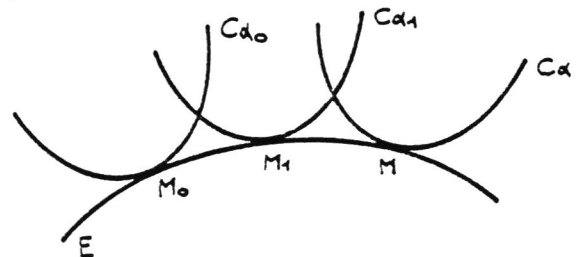
où $\vec{V}_{M\gamma/\alpha}$ est parfois appelée "vitesse absolue" de M
 $\vec{V}_{M\gamma/\beta}$ est parfois appelée "vitesse relative" de M
 et $\vec{V}_{M\beta/\alpha}$ est parfois appelée "vitesse d'entraînement" de M.

- la notion d'enveloppe en mathématiques :

Soit C l'ensemble des courbes C_α d'équation $f(x, y, \alpha) = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, α étant un paramètre réel.

A chaque valeur de α correspond une courbe C_α de C . On dit que la courbe E est l'enveloppe de C :

- si, lorsque α varie, les courbes C_α sont tangentes à la courbe E ,
- et si, par tout point M de E passe au moins une courbe C_α tangente à E en ce point M .



Remarques :

- a) L'enveloppe D des normales à une courbe T s'appelle développée de T .
- b) D étant la développée de T , T est une développante de D .

- la définition des courbes cycloïdes :

Une courbe cycloïde γ est une courbe décrite par un point M d'un cercle R qui roule sans glisser sur une courbe fixe B .

- Si B est une droite, la courbe décrite γ est une cycloïde droite, appelée plus simplement cycloïde.
- Si B est un cercle
 - . lorsque R est tangent extérieurement à B , la courbe décrite γ est une épicycloïde
 - . lorsque R est tangent intérieurement à B , la courbe décrite γ est une hypocycloïde.

- 5 -

C H A P I T R E 0

Présentation succincte des
trains, épicycloïdaux



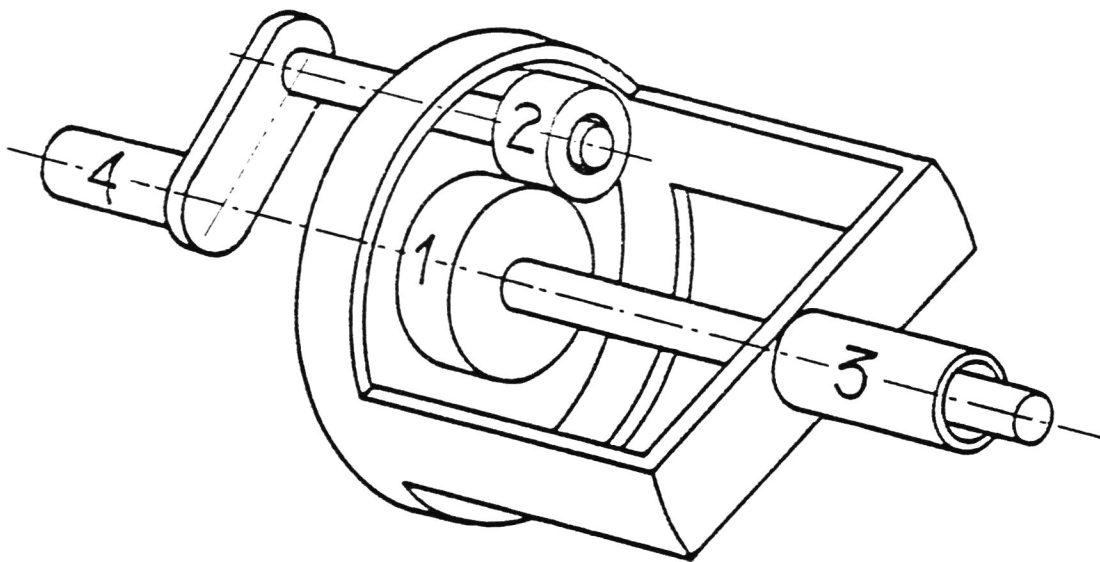


Fig. 1

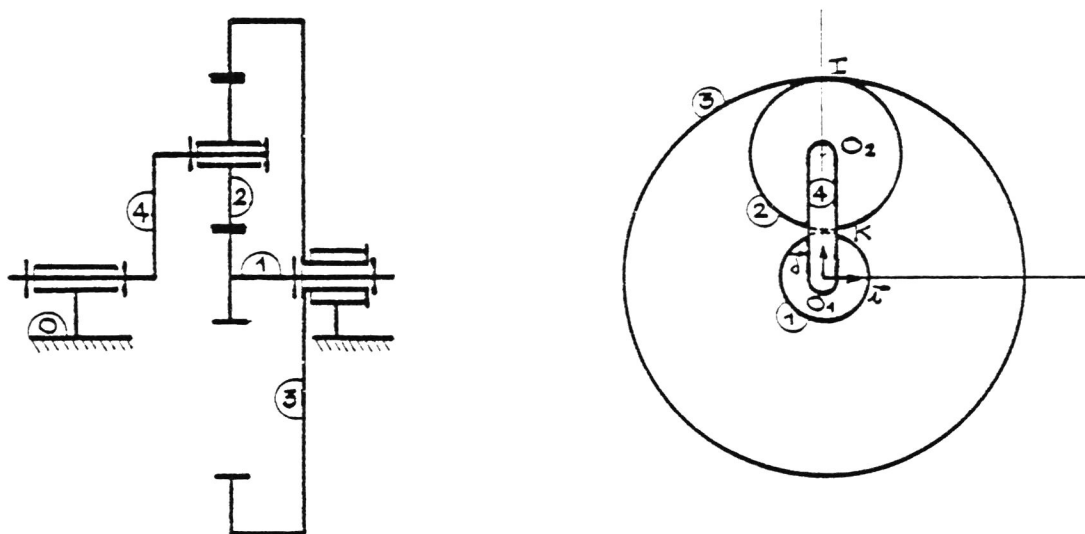


Fig. 2

Un train épicycloïdal, qu'on peut représenter (fig.1) et schématiser (fig.2) de la manière ci-contre, est une combinaison de trois roues 1, 2 et 3 dans laquelle une roue 2 est montée sur un bras 4 mobile en rotation autour d'un axe fixe par rapport au bâti 0.

Cette roue 2 est donc animée d'un mouvement relatif de rotation autour de son axe et d'un mouvement d'entraînement de rotation autour de l'axe du bras 4. Elle est en contact avec une roue 1 et une couronne 3 dont les axes de rotation coïncident avec l'axe fixe de 4.

Un train épicycloïdal est donc un mécanisme dit "à trois entrées" : 1, 3 et 4. 1 et 3 sont appelés les planétaires, 2 le satellite et 4 le porte-satellite.

Remarques

- 1) Un point M lié au cercle 2 décrit dans son mouvement par rapport à 1 une épicycloïde, et bien que dans son mouvement par rapport à 3 il décrive une hypocycloïde, le système n'en est pas moins appelé train épicycloïdal.
- 2) Il existe des trains épicycloïdaux où les trajectoires d'un point M lié au cercle 2 sont :
 - a) des épicycloïdes à la fois dans le mouvement de 2 par rapport à 3 et dans le mouvement de 2 par rapport à 1 (fig.3)
 - b) des hypocycloïdes à la fois dans le mouvement de 2 par rapport à 3 et dans le mouvement de 2 par rapport à 1 (fig.4).

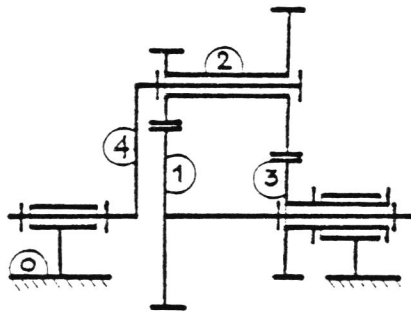


Fig. 3

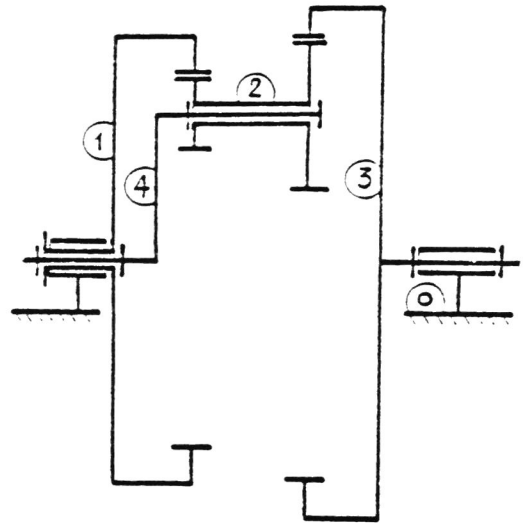


Fig. 4

- 9 -

C H A P I T R E 1

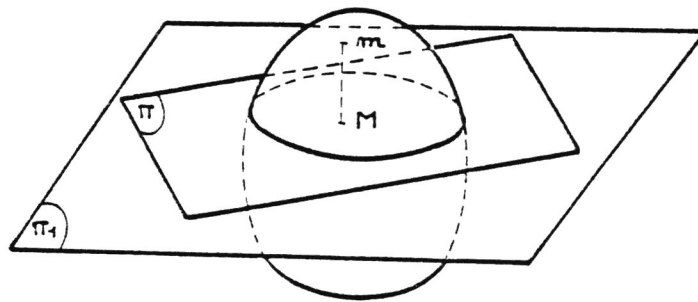
Mouvement plan sur plan



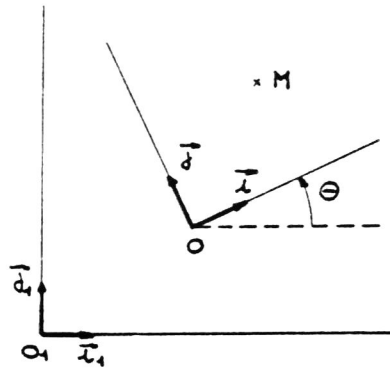
Dans l'espace affine euclidien E de dimension 3 associé à l'espace vectoriel euclidien orienté V , on considère deux repères orthonormés :

- $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ invariablement lié à un solide S de E
- et $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$

tels que les plans π de repère $r = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et π_1 de repère $r_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ restent confondus au cours du mouvement de S par rapport à R_1 .



Tout point m de S , auquel on associe sa projection orthogonale M sur π , se déplace dans un plan P_1 de même direction que π_1 . Le vecteur $\vec{Mm}$ restant colinéaire à $\vec{k}$, et la distance Mm étant constante, les mouvements de m dans P_1 et de M dans π_1 sont les mêmes. Par conséquent, pour connaître le mouvement de tout point m de S , il suffit de connaître le mouvement de M de π par rapport à π_1 .



Le point O admet comme coordonnées (x_0, y_0) dans r_1 ; le point M admet comme coordonnées (x, y) dans r et (x_1, y_1) dans r_1 . Soit $\theta = \theta(t)$ une mesure de l'angle représenté par $(\vec{i}_1, \vec{i})$ où t est la variable. On définit le vecteur $\vec{\Omega}$ par $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$ avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; c'est le vecteur rotation instantanée de π par rapport à π_1 .

I - Centre instantané de rotation

Dans le mouvement de π par rapport à π_1 , tout point M de π admet pour vecteur vitesse $\vec{V}_M$ (appelé plus simplement vitesse $\vec{V}_M$) :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

et on se propose de déterminer, pour toute valeur de la variable t , les points I de π tels que $\vec{V}_I = \vec{0}$

1) Recherche de I

Les points I cherchés sont tels que

$$\vec{V}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{OI} \wedge \vec{\Omega} = \vec{V}_O$$

Multiplions vectoriellement à gauche par $\vec{k}$

$$\vec{k} \wedge (\vec{OI} \wedge \vec{\Omega}) = \vec{k} \wedge \vec{V}_0$$

D'après les propriétés du double produit vectoriel, nous obtenons :

$$(\vec{k} \cdot \vec{\Omega}) \vec{OI} - (\vec{k} \cdot \vec{OI}) \vec{\Omega} = \vec{k} \wedge \vec{V}_0$$

Or $\vec{k} \cdot \vec{\Omega} = \vec{k} \cdot \omega \vec{k} = \omega$ et $\vec{k} \cdot \vec{OI} = 0$ (puisque $\vec{k} \perp \vec{OI}$)

Donc
$$\omega \vec{OI} = \vec{k} \wedge \vec{V}_0$$

- Si, pour une valeur de t_1 , $\omega \neq 0$ (le mouvement de π par rapport à π_1 est dit tangent à une rotation de vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$)

$$\vec{OI} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{V}_0}{\omega}$$

On obtient donc un point unique I de π dont la vitesse est nulle par rapport à π_1 . C'est le centre instantané de rotation dans le mouvement de π par rapport à π_1 .

- Si, pour une valeur de t , $\omega = 0$

. ou $\vec{V}_0 = \vec{0}$

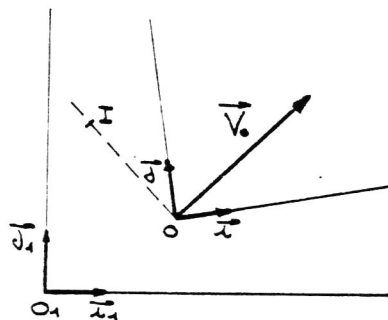
Tout point de π a une vitesse nulle par rapport à π_1 .
 π est immobile par rapport à π_1 .

- . ou $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$ (et le mouvement de π par rapport à π_1 est tangent à une translation)

Il n'y a aucun point de π qui ait une vitesse nulle par rapport à π_1 puisque $\vec{k} \wedge \vec{V}_0 \neq \vec{0}$

Remarques :

a) Dans le cas où $\omega \neq 0$, on a $\vec{OI} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{V}_0}{\omega}$. Donc $\vec{OI} \perp \vec{V}_0$



Alors la vitesse d'un point quelconque M de π par rapport à π_1 , donnée par $\vec{V}_M = \vec{V}_I + \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$, s'écrit

$$\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$$

b) Lorsque ω est au voisinage de 0

- le vecteur $\vec{OI}$ reste perpendiculaire à $\vec{V}_0$
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|\vec{OI}\| = +\infty$

Donc, lorsque le mouvement de π par rapport à π_1 est tangent à une translation ($\omega = 0$, $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$), on se permettra de dire que le centre instantané de rotation est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à $\vec{V}_0$.

2) Coordonnées de I

Puisque O a pour coordonnées (x_0, y_0) dans R_1 ,
 $\vec{V}_0$ a pour coordonnées $(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt})$ dans R_1 . D'où les
 coordonnées de $(\vec{k} \wedge \vec{V}_0)$ dans R_1 $(-\frac{dy_0}{dt}, \frac{dx_0}{dt}, 0)$ et
 donc de $\vec{O_1 I}$ dans R_1 .

$$\vec{O_1 I} \left(-\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \cdot \frac{dy_0}{dt} + x_0 ; \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \cdot \frac{dx_0}{dt} + y_0 ; 0 \right)$$

3) Propriétés du centre instantané de rotation

a) I est indépendant de la variable t :

Soit $t = \varphi(u)$, où u est une nouvelle variable, et
 où φ est une fonction bijective, continue et dérivable
 en tout point où elle existe. Dans le mouvement de π
 par rapport à π_1 , les coordonnées du centre instantané
 de rotation I' sont, dans R_1 :

$$\left(-\frac{dy_0}{du} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{du}} + x_0 ; \frac{dx_0}{du} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{du}} + y_0 ; 0 \right)$$

$$\text{Or } \frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \varphi'(u)$$

$$\frac{dy_0}{du} = \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dy_0}{dt} \cdot \varphi'(u)$$

$$\frac{dx_0}{du} = \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dx_0}{dt} \cdot \varphi'(u)$$

Donc les coordonnées de I' dans R_1 sont

$$\begin{cases} x_0 - \frac{dy_0}{dt} \cdot \varphi'(u) \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt} \varphi'(u)} = x_0 - \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \\ y_0 + \frac{dx_0}{dt} \cdot \varphi'(u) \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt} \varphi'(u)} = y_0 + \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \\ 0 \end{cases}$$

qui sont justement celles de I.

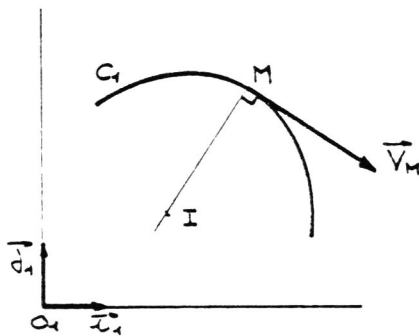
Donc le centre instantané de rotation est indépendant de la variable utilisée. Par exemple, on choisira dans la suite le temps t comme variable.

b) Trajectoire dans π_1 d'un point M de π :

Un point M de π décrit dans π_1 une courbe C_1 , appelée parfois "roulette" de M . A chaque instant t , la vitesse de M de π par rapport à π_1 est : $\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$, vecteur tangent à C_1 en M . Donc $\vec{V}_M$ est perpendiculaire à $\vec{IM}$, et I appartient à la normale à C_1 en M .

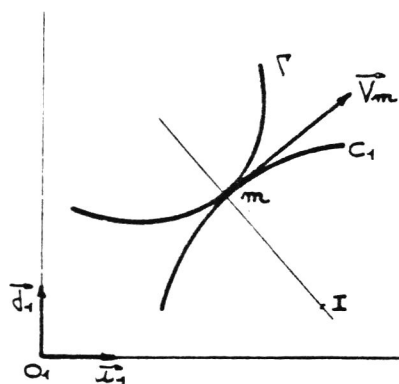
D'où le résultat :

A chaque instant t , la normale en tout point M de π à sa trajectoire C_1 dans π_1 passe par le centre instantané de rotation.



c) Enveloppe C_1 dans π_1 des positions d'une courbe C de π :

Soit Γ la position dans π_1 de la courbe C de π à l'instant t . Γ et C_1 sont tangentes en m (point caractéristique).



Le point m se déplace en général sur Γ et sur C_1 , et on a :

$$\overrightarrow{V_{m/\pi_1}} = \overrightarrow{V_{m/\pi}} + \overrightarrow{V_{m \in \pi/\pi_1}}$$

C'est-à-dire, d'après nos notations :

$$\overrightarrow{V_{m/\pi_1}} = \overrightarrow{V_{m/\pi}} + \overrightarrow{V_m}$$

$\overrightarrow{V_{m/\pi_1}}$ est tangent à C_1 en m

$\overrightarrow{V_{m/\pi}}$ est tangent à Γ en m

Ces deux vecteurs sont donc colinéaires. $\overrightarrow{V_m}$ leur est aussi colinéaire, et par définition, la vitesse $\overrightarrow{V_m}$ est appelée vitesse de glissement de C sur C_1 . Or

$$\overrightarrow{V_m} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{Im}$$

I appartient donc à la normale commune à C et C_1 en m . D'où le résultat :

A l'instant t , la normale commune à une courbe C de π et à son enveloppe C_1 dans π_1 , passe par le centre instantané de rotation I .

Remarques :

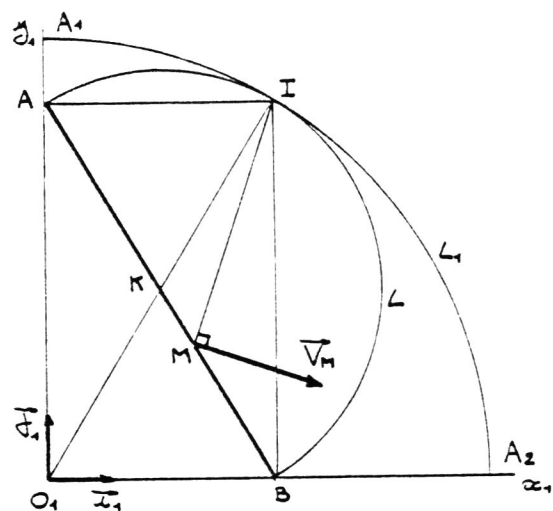
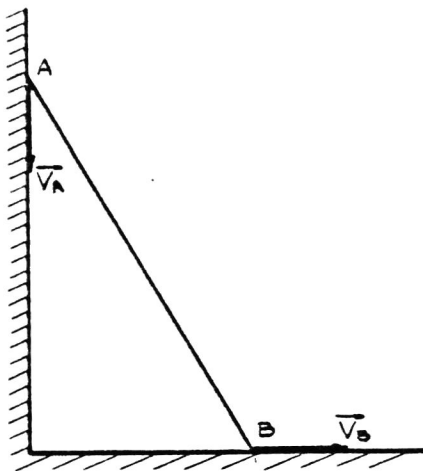
- . Si C se réduit à un point, C_1 est la trajectoire dans π_1 de ce point. On retrouve la propriété b)
- . Si C_1 se réduit à un point B_1 , la courbe C passe par le point fixe B_1 . I est sur la normale à C en B_1 .

Exemples de recherche du centre instantané de rotation.

Exemple 1 :

On suppose qu'une échelle $[AB]$ de longueur l , tombe, en glissant en A sur le mur vertical et en B sur le sol horizontal.

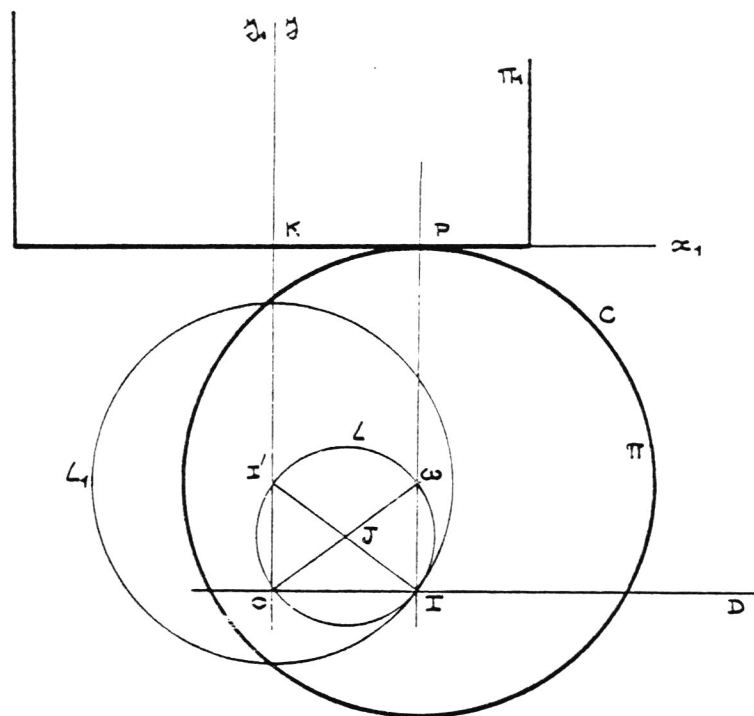
Soit π_1 le plan fixe $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et π un plan mobile invariablement lié à $[AB]$. Dans le mouvement de π par rapport à π_1 , $O_1 y_1$ est la trajectoire de A dans π_1 . Donc le centre instantané de rotation est sur la perpendiculaire à $O_1 y_1$ en A. $O_1 x_1$ est la trajectoire de B dans π_1 . Donc le centre instantané de rotation est sur la perpendiculaire à $O_1 x_1$ en B. D'où le centre instantané de rotation I. Si M est un point de l'échelle $[AB]$, on est sûr que son vecteur vitesse par rapport à π_1 est colinéaire à la perpendiculaire en M à (IM) .



Exemple 2 :

Soit une commande de pompe à essence réalisée par un poussoir π_1 actionné par un excentrique π . O est un point fixe du bâti autour duquel tourne π , de centre ω et de rayon R . L'axe Ky_1 du poussoir a pour support la droite Oy appartenant au bâti. La rotation continue de π autour de O imprime à π_1 un mouvement alternatif de translation rectiligne de direction Oy .

Le cercle C , de centre ω et de rayon R , du plan π enveloppe la droite Kx_1 du plan π_1 . Donc le centre instantané de rotation est sur la normale commune $(P\omega)$ à C et à Kx_1 , P étant le point de contact.

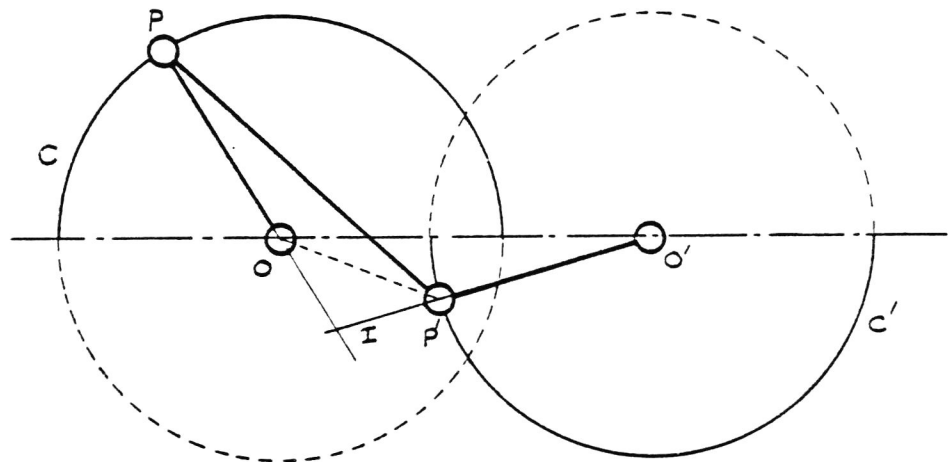


La droite Ky_1 de π_1 passe par le point O fixe dans π . Donc le centre instantané de rotation est sur la droite D perpendiculaire à Oy en O , donc à l'intersection de $(P\omega)$ et de D .

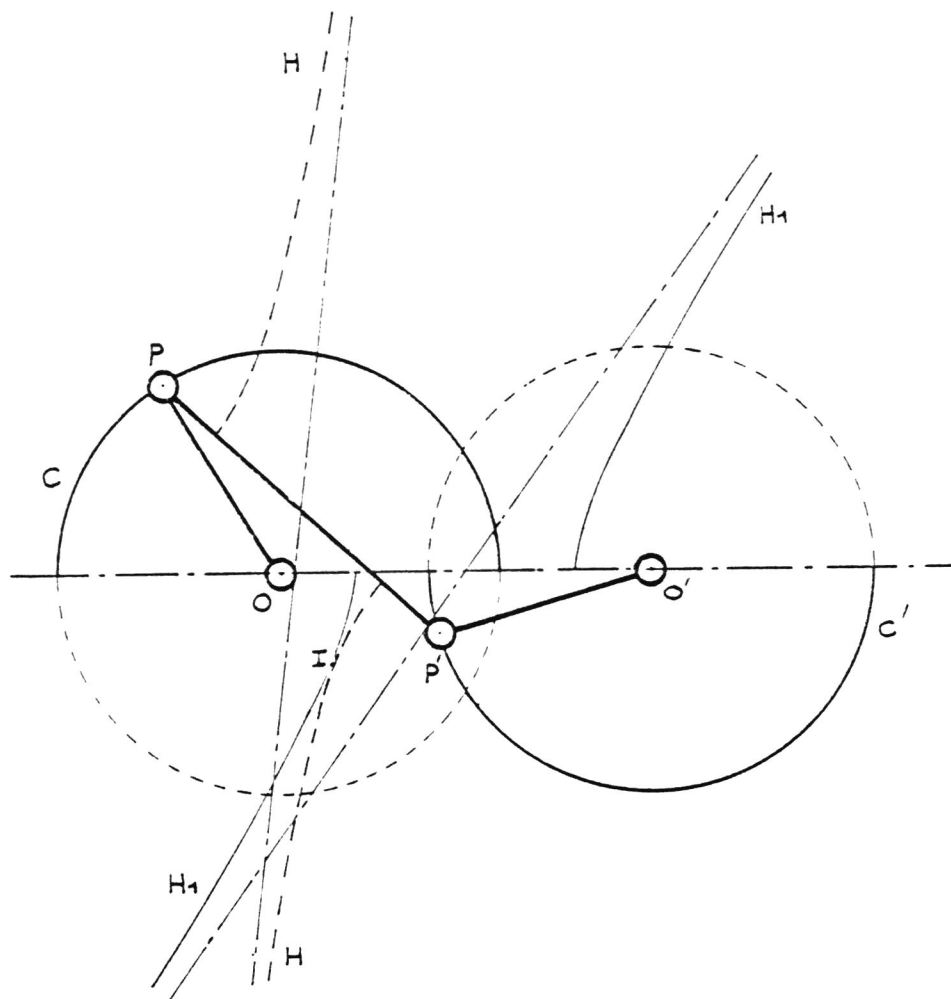
Exemple 3 :

On considère deux roues de même rayon R , situées dans un même plan, d'axes fixes par rapport au bâti, et représentées par les deux cercles C et C' d'un même plan π_1 , centrés respectivement en O et O' .

Les extrémités P et P' d'une barre de transmission rigide de longueur $l = OO'$ sont fixées chacune sur une roue, de telle sorte que P décrive le demi-cercle C et P' le demi-cercle C' .

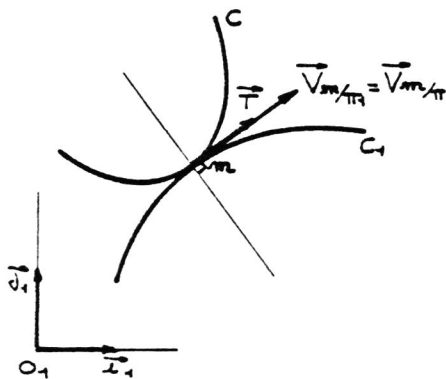


Soit π le plan invariablement lié à $[PP']$ et constamment confondu avec π_1 . Dans le mouvement de π par rapport à π_1 , C est la trajectoire de P dans π_1 et C' celle de P' . (OP) étant la normale à C en P et $(O'P')$, la normale à C' en P' , le centre instantané de rotation I dans le mouvement de π par rapport à π_1 est le point d'intersection de (OP) et de $(O'P')$.



II - Définition géométrique du mouvement

- 1) Mouvement sans glissement d'une courbe de π sur une courbe de π_1



On dira que la courbe C de π roule sans glisser sur la courbe C_1 de π_1 si la vitesse de glissement du point de contact m $\vec{V}_m = \vec{V}_{m \in \pi / \pi_1}$ est nulle.

Conséquence 1

On a donc, si le centre instantané de rotation I dans le mouvement de π par rapport à π_1 existe ($\omega \neq 0$),

$$\vec{V}_m = \vec{\Omega} \wedge \vec{Im} = \vec{0}$$

$$\vec{Im} = \vec{0} \text{ et } I \text{ est en } m$$

Conséquence 2

Puisque $\vec{V}_m = \vec{0}$, on a $\vec{V}_{m/\pi_1} = \vec{V}_{m/\pi}$

Si $\vec{T}$ est un vecteur unitaire de la tangente commune à C et C_1 , $\frac{ds_1}{dq} \vec{T} = \frac{ds}{dq} \vec{T}$, q étant un paramètre quelconque définissant les abscisses curvilignes s_1 et s prises respectivement sur C_1 et C .
Donc, $s_1 = s + \text{constante}$.

2) Base et roulante

Soit I le centre instantané de rotation dans le mouvement de π par rapport à π_1 . I décrit une courbe L_1 dans π_1 et une courbe L dans π . Puisque I est centre instantané de rotation, $\overrightarrow{V_{I \in \pi/\pi_1}} = \overrightarrow{V_I} = \overrightarrow{0}$.
 $\overrightarrow{V_{I/\pi_1}} = \overrightarrow{V_{I/\pi}}$. L_1 et L sont tangentes, et la vitesse de glissement de L_1 sur L est nulle. Donc L_1 roule sans glisser sur L .

L_1 est appelée base du mouvement de π par rapport à π_1 ; L en est la roulante.

Reprenons les exemples de recherche des centres instantanés de rotation :

Exemple 1 :

Dans le mouvement de π par rapport à π_1 , $O_1 I = AB = 1$. La base du mouvement est donc le cercle de centre O_1 et de rayon 1. Si K est milieu de (A,B) , $KI = \frac{1}{2}$. La roulante est donc le cercle de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$. Remarquons que dans ce cas, les deux cercles sont limités, la base au quart de cercle $\widehat{A_1 A_2}$, la roulante au demi-cercle $\widehat{AIB}$.

Exemple 2 :

Désignons par J le milieu de (O,ω) , par e la longueur $O\omega$ et par I' le symétrique de I par rapport à J .

I' est fixe dans π_1 puisque $KI' = P\omega = R$;
 $I'I = O\omega = e$: la base du mouvement de π par rapport à π_1 est le cercle de centre I' et de rayon e .

O et ω sont fixes dans π . (OI) et $(I\omega)$ sont perpendiculaires. La roulante est donc le cercle de centre J et de rayon $\frac{e}{2}$.

Exemple 3 :

Dans le mouvement de π par rapport à π_1 , les triangles OPP' et $OO'P'$ restent constamment isométriques ($OP = O'P' = R$; $OO' = PP' = 1$; OP' commun).

Donc :

$$1. \quad |IO - IO'| = OP = R$$

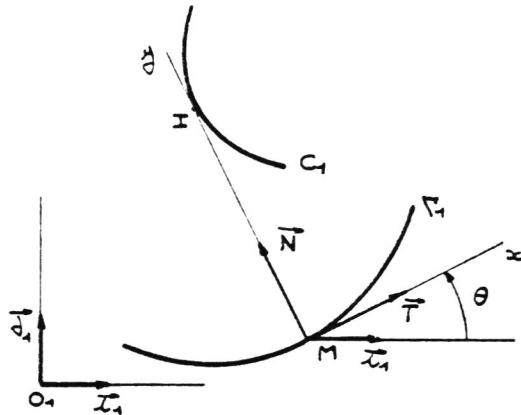
O et O' étant fixes par rapport à π_1 , I décrit donc dans π_1 la portion d'hyperbole H_1 de foyers O et O' et de grand axe R . H_1 est la base du mouvement de π par rapport à π_1 .

$$2. \quad |IP - IP'| = O'P' = R$$

P et P' étant fixes par rapport à π , I décrit donc dans π la portion d'hyperbole H isométrique à H_1 de foyers P et P' et de grand axe R .
 H est la roulante du mouvement de π par rapport à π_1 .

3) Cas particulier

Considérons un point M décrivant la courbe Γ_1 de π_1 . Appelons π le plan Mxy de base $(\vec{T}, \vec{N})$, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ étant respectivement les vecteurs unitaires choisis sur la tangente et la normale en M à Γ_1 .



Mx enveloppe Γ_1 . Donc le centre instantané de rotation I dans le mouvement de π par rapport à π_1 , est sur My de π . My est donc la roulante, et roule sans glisser sur la base C_1 , ensemble des positions de I dans π_1 .

Montrons que C_1 est la développée de Γ_1 .

Dans le plan π , $\vec{MI} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{V}_M}{\omega}$ puisque I est centre instantané de rotation. Si Θ est l'angle polaire de Mx dans un repère r_1 de π_1 , et si s est l'abscisse curviligne définie par t sur Γ_1 , on a

$$\vec{MI} = \frac{\vec{k}}{\frac{d\Theta}{dt}} \wedge \frac{ds}{dt} \vec{T} = \frac{ds}{dt} \times \frac{dt}{d\Theta} (\vec{k} \wedge \vec{T}) = \frac{ds}{d\Theta} \vec{n}$$

Donc

$\vec{MI} = R \vec{n}$ où $R = \frac{ds}{d\Theta}$ est le rayon de courbure de Γ_1 en M , ce qui signifie que I est le centre de courbure de Γ_1 en M et que C_1 est la développée de Γ_1 . Ainsi :

La normale à une courbe roule sans glisser sur sa développée.

III - Etude des accélérations

1) Détermination du vecteur accélération

Dans le mouvement du plan π , de repère r , par

rapport au plan π_1 , de repère r_1 , la roulante L de π roule sans glisser sur la base L_1 de π_1 , le centre instantané de rotation étant leur point de contact.

Pour tout point M de L_2

$$\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM} = \omega \vec{k} \wedge \vec{IM}$$

Le vecteur accélération de M est

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_M &= \frac{d\omega}{dt} \vec{k} \wedge \vec{IM} + \omega \vec{k} \wedge \frac{d\vec{IM}}{dt} \\ &= \frac{d\omega}{dt} \vec{k} \wedge \vec{IM} + \omega \vec{k} \wedge \left(\frac{d\vec{O_1 M}}{dt} - \frac{d\vec{O_1 I}}{dt} \right) \end{aligned}$$

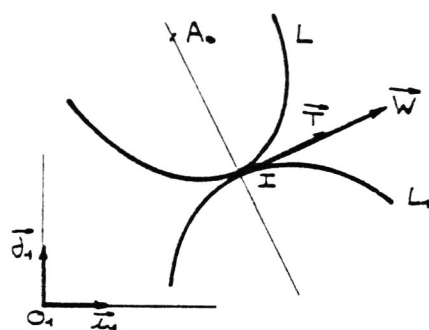
Mais $\frac{d\vec{O_1 M}}{dt}$ est la vitesse d'un point M de π par rapport à π_1 . C'est donc $\vec{V}_M$.

$$\vec{\Gamma}_M = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} \wedge \vec{IM} + [\omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge \vec{IM})] - \omega \vec{k} \wedge \frac{d\vec{O_1 I}}{dt}$$

D'après les propriétés du double produit vectoriel, et en désignant $\frac{d\omega}{dt}$ par ω' :

$$\vec{\Gamma}_M = \omega' \vec{k} \wedge \vec{IM} - \omega^2 \vec{IM} - \omega \vec{k} \wedge \frac{d\vec{O_1 I}}{dt}$$

$\frac{d\vec{O_1 I}}{dt}$ est le vecteur vitesse de I sur L_1 ou sur L , et peut donc s'écrire $\vec{W} = w \vec{T}$, $\vec{T}$ étant un vecteur unitaire de la tangente commune à L_1 et L .



Considérons alors le point A_0 de π tel que

$$\vec{IA_0} = -\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{W}$$

(A_0 appartient donc à la normale commune en I à L_1 et à L).

On obtient

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_M &= \omega' \vec{k} \wedge \vec{IM} - \omega^2 \vec{IM} + \omega^2 \vec{IA_0} \\ &= \omega' \vec{k} \wedge \vec{IM} - \omega^2 \vec{A_0 M} \end{aligned}$$

Remarques

a) La vitesse du point A_0 de π par rapport à π_1 est

$$\begin{aligned}\vec{V}_{A_0} &= \omega \vec{k} \wedge \vec{IA_0} = \omega \vec{k} \wedge \left(-\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge w \vec{T}\right) \\ &= (\vec{k} \cdot \vec{k}) w \vec{T} - (\vec{k} \cdot w \vec{T}) \vec{k} \\ &= w \vec{T} = \vec{W} = \frac{dO_1 I}{dt}\end{aligned}$$

b) $\vec{\Gamma}_{A_0} = \omega' \vec{k} \wedge \vec{IA_0}$

Donc $\vec{\Gamma}_{A_0}$ et $\vec{V}_{A_0}$ sont colinéaires

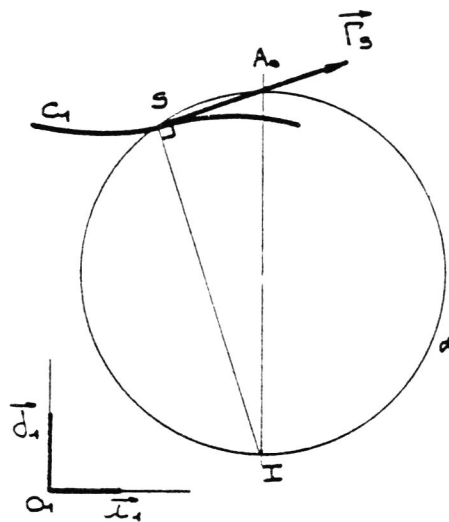
c) A_0 est en I uniquement si la vitesse $\vec{W}$ de I par rapport à L_1 et à L_2 est nulle.

d) Si M est en I, $\vec{\Gamma}_I = -\omega^2 \vec{A_0 I} = \omega^2 \vec{IA_0}$. Puisque $\vec{V}_I$ est nul, c'est que la trajectoire dans π_1 du point du plan π coïncidant avec le centre instantané de rotation I admet en général un point de rebroussement en I, la normale commune (IA_0) à L_1 et L_2 étant la tangente de rebroussement.

A_0 est appelé "centre géométrique des accélérations".

2) Cercle des inflexions

Existe-t-il des points S du plan π qui coïncident avec un point d'inflexion de leur trajectoire dans π_1 ?



Supposons que la trajectoire dans π_1 d'un point S de π admette un point d'inflexion en S_1 . Lorsque S coïncide avec S_1 , $\overrightarrow{\Gamma_S} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{\Gamma_S}$ et $\overrightarrow{V_S}$ sont colinéaires. Or I étant le centre instantané de rotation dans le mouvement de π par rapport à π_1 ,

$$\overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{VS} = 0 \text{ et donc } \overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{\Gamma_S} = 0$$

Mais

$$\vec{\Gamma}_S = \omega' \vec{k} \wedge \vec{IS} - \omega^2 A_0 \vec{S}$$

Donc

$$\vec{IS} \cdot (\omega' \vec{k} \wedge \vec{IS} - \omega^2 \vec{A}_0 S) = 0$$

$\overrightarrow{IS} \cdot (\omega' \vec{k} \wedge \overrightarrow{IS})$ est un produit mixte nul. S est donc caractérisé par $\overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{A_0 S} = 0$ si $\omega \neq 0$.

L'ensemble des points S est le cercle de diamètre $[IA_0]$. C'est le cercle des inflexions.

IV - Composition de mouvements plan sur plan

Notations :

Le mouvement plan sur plan du plan π_α par rapport au plan π_β se désigne par α/β .

Le centre instantané de rotation correspondant est le point de π_α , noté $I_{\alpha\beta}$, dont la vitesse par rapport à π_β est nulle.

Le vecteur rotation instantané de π_α par rapport à π_β est $(\omega_{\alpha\beta} \vec{k})$.

On désigne par $V_M^{\alpha/\beta}$ la vitesse du point M de π_α par rapport à π_β .

Remarque :

Le mouvement β/α est le mouvement inverse de α/β .

On sait alors que $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$

Or, $\overrightarrow{V_{I_{\alpha\beta}}^{\alpha/\beta}} = \vec{0}$ par définition du centre instantané de rotation $I_{\alpha\beta}$ dans le mouvement α/β .

Donc $\overrightarrow{V_{I_{\alpha\beta}}^{\beta/\alpha}} = \vec{0}$.

$I_{\alpha\beta}$ est donc aussi le centre instantané de rotation dans le mouvement β/α . On peut écrire $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$

- 1) Mouvement simultané de trois plans $\pi_\alpha, \pi_\beta, \pi_\gamma$ l'un sur l'autre.

Mouvement	Centre instantané de rotation	Vecteur rotation instantanée
α/β	$I_{\alpha\beta}$	$\omega_{\alpha\beta} \vec{k}$
β/γ	$I_{\beta\gamma}$	$\omega_{\beta\gamma} \vec{k}$
γ/α	$I_{\gamma\alpha}$	$\omega_{\gamma\alpha} \vec{k}$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{I_{\alpha\beta} \alpha/\gamma}} + \overrightarrow{V_{I_{\alpha\beta} \gamma/\beta}} &= \overrightarrow{V_{I_{\alpha\beta} \alpha/\beta}} \\ \omega_{\alpha\gamma} \vec{k} \wedge \overrightarrow{I_{\alpha\gamma} I_{\alpha\beta}} + \omega_{\gamma\beta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{I_{\gamma\beta} I_{\alpha\beta}} &= \vec{0} \\ \vec{k} \wedge (\omega_{\alpha\gamma} \overrightarrow{I_{\alpha\gamma} I_{\alpha\beta}} + \omega_{\gamma\beta} \overrightarrow{I_{\gamma\beta} I_{\alpha\beta}}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Et, puisque $\vec{k}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{I_{\alpha\gamma} I_{\alpha\beta}}$ et $\overrightarrow{I_{\gamma\beta} I_{\alpha\beta}}$,

$$\omega_{\alpha\gamma} \overrightarrow{I_{\alpha\gamma} I_{\alpha\beta}} + \omega_{\gamma\beta} \overrightarrow{I_{\gamma\beta} I_{\alpha\beta}} = \vec{0}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{I_{\alpha\gamma} I_{\alpha\beta}}$ et $\overrightarrow{I_{\gamma\beta} I_{\alpha\beta}}$ sont colinéaires et les points $I_{\alpha\gamma}$, $I_{\alpha\beta}$, et $I_{\gamma\beta}$ sont alignés.

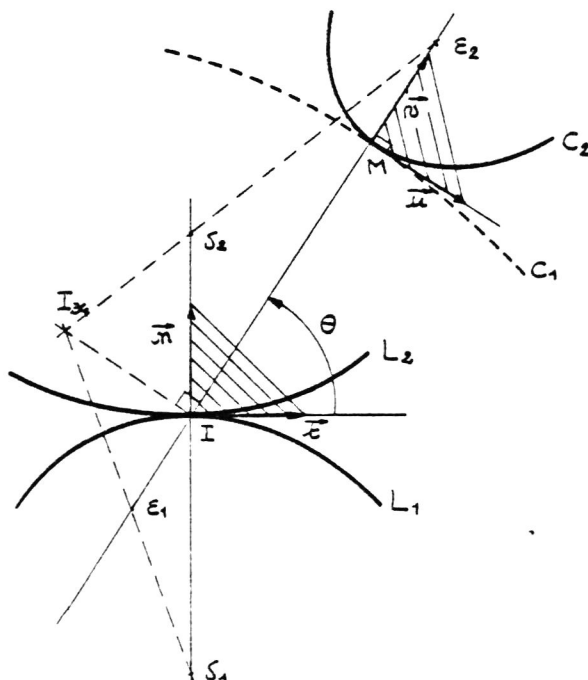
2) Applications :

A) Construction du centre de courbure $\mathcal{E}_1$ de l'enveloppe C_1 dans Π_1 d'une courbe C_2 de Π_2 connaissant la base L_1 de Π_1 et la roulante L_2 de Π_2 du mouvement de Π_2 par rapport à Π_1 .

$\mathcal{S}_1$: centre de courbure de la base L_1

$\mathcal{S}_2$: centre de courbure de la roulante L_2

$\mathcal{E}_2$: centre de courbure de C_2



$\vec{t}$: vecteur unitaire de la tangente commune à L_1 et L_2 en I .

$\vec{n}$: vecteur unitaire de la normale commune à L_1 et L_2 en I .

$\vec{u}$: vecteur unitaire de la tangente commune à C_1 et C_2 en leur point de contact M .

$\vec{v}$: vecteur unitaire de la normale commune à C_1 et C_2 en M .

- 30 -

Considérons les mouvements simultanés

- des plans $\pi_3 = (I, \vec{t}, \vec{n})$, $\pi_4 = (H, \vec{u}, \vec{v})$ et π_2

Mouvement	Centre instantané de rotation
3/4	I_{34}
3/2	$I_{32} = \mathcal{S}_2$
2/4	$I_{24} = \mathcal{E}_2$

Donc, I_{34} est aligné avec $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{S}_2$.

De plus, la droite $(I, \vec{v})$ invariablement liée au plan π_4 passe par I fixe dans le plan π_3 .

I_{34} est donc sur la perpendiculaire en I à $(I, \vec{v})$

D'où la construction de I_{34} .

- des plans π_3 , π_4 et π_1

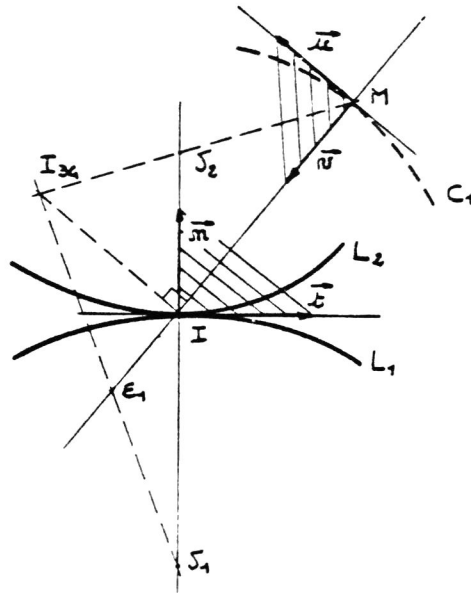
Mouvement	Centre instantané de rotation
3/4	I_{34}
3/1	$I_{31} = \mathcal{S}_1$
1/4	$I_{14} = \mathcal{E}_1$

Donc $\mathcal{E}_1$ est aligné avec $\mathcal{S}_1$ et I_{34} .

De plus, $\mathcal{E}_1$ est sur la normale commune à C_1 et C_2 .

D'où la construction de $\mathcal{E}_1$.

Cas particulier où C_2 se réduit au point M

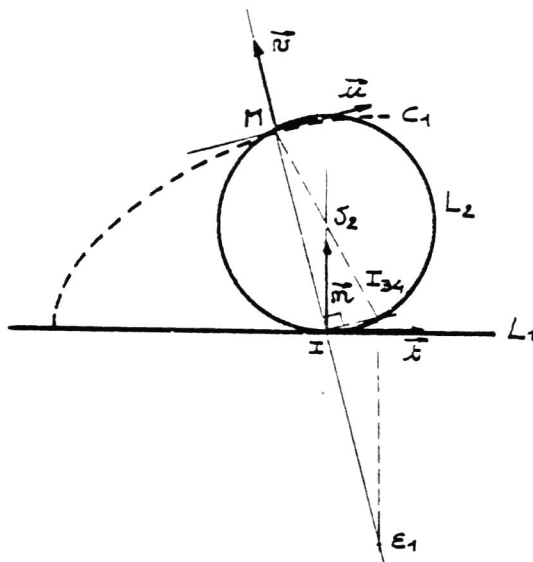


C_1 est alors la trajectoire
du point M de π_2 dans π_1 .

E_2 est en M . I_{34} appartient à la perpendiculaire en I à la droite (MI) et il est aligné avec M et J_2 . D'où I_{34} .

E_1 , I_{34} et $\mathcal{S}_1$ sont alignés, et E_1 appartient à la droite (IM). D'où E_1 , centre de courbure de C_1 en M.

Exemple 1 : Construire le centre de courbure d'une cycloïde droite en un de ses points.



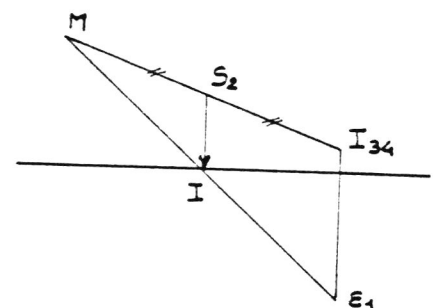
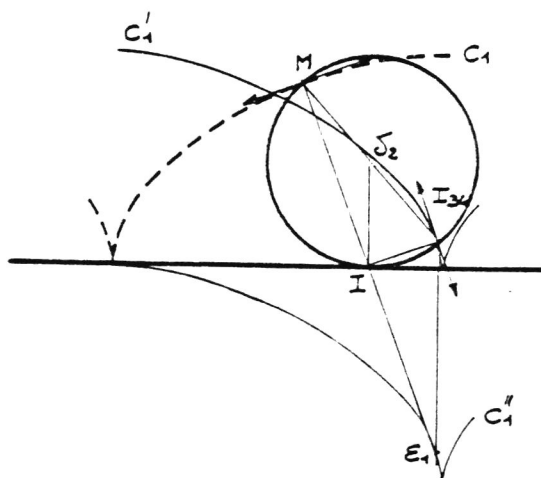
Le cercle L_2 du plan π_2 roule sans glisser sur la droite L_1 du plan π_1 . L_2 est donc la roulante et L_1 la base du mouvement 2/1. Tout point M de L_2 a pour roulette une cycloïde droite C_1 .

Le centre instantané de rotation I_{21} est appelé I.

• La tangente à la cycloïde en M est la perpendiculaire en M à (IM) .

. Le centre de courbure ε_1 de la cycloïde C_1 en M est sur (IM) .

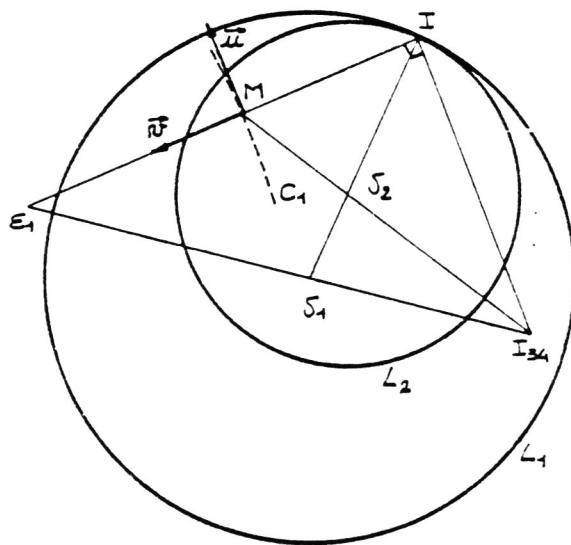
- . Si π_3 est le plan $(I, \vec{t}, \vec{n})$ et si π_4 est le plan $(M, \vec{u}, \vec{v})$, I_{34} appartient à la droite $(M\delta_2)$ (δ_2 étant le centre de L_2) et à la perpendiculaire en I à (IM) . I_{34} est donc diamétralement opposé à M sur le cercle L_2 .
- . I_{34} , ε_1 et le centre de courbure δ_1 de L_1 en I sont alignés. Or δ_1 est rejeté à l'infini dans la direction $\vec{n}$. ε_1 est à l'intersection de (IM) et de $(I_{34}, \vec{n})$.
- . Développée de C_1 :



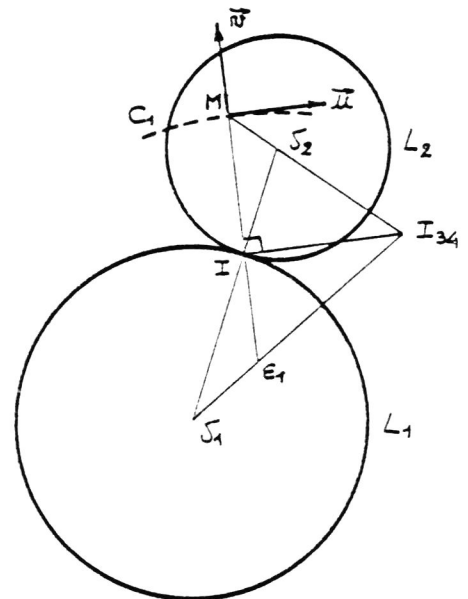
$\overrightarrow{I_{34}\varepsilon_1} = 2 \overrightarrow{\delta_2 I}$ par construction de ε_1 . Ainsi l'ensemble des points I_{34} a pour image l'ensemble C'_1 des points ε_1 dans la translation de vecteur $2 \overrightarrow{\delta_2 I}$. I_{34} étant le point de π_2 diamétralement opposé à M sur L_2 , décrit dans π_1 une cycloïde C'_1 isométrique à C_1 . Et donc la développée C''_1 de la cycloïde C_1 est une cycloïde isométrique à C_1 .

Exemples 2 et 3 : Construire en un de ses points le centre de courbure $\mathcal{E}_1$ de la trajectoire C_1 dans Π_1 d'un point M lié au cercle L_2 de rayon r roulant sans glisser en I sur le cercle L_1 de rayon R .

INTERIEUREMENT



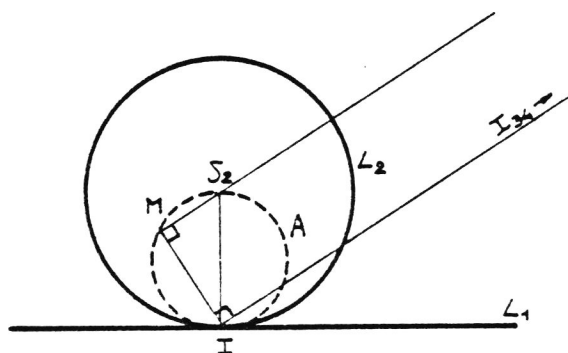
EXTERIEUREMENT



La perpendiculaire en I à (IM) coupe (MS_2) en I_{34} .
 $(I_{34}S_1)$ coupe (IM) en $\mathcal{E}_1$.

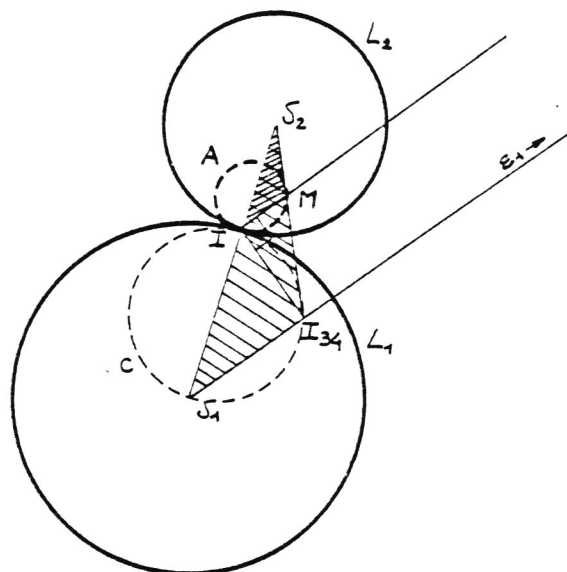
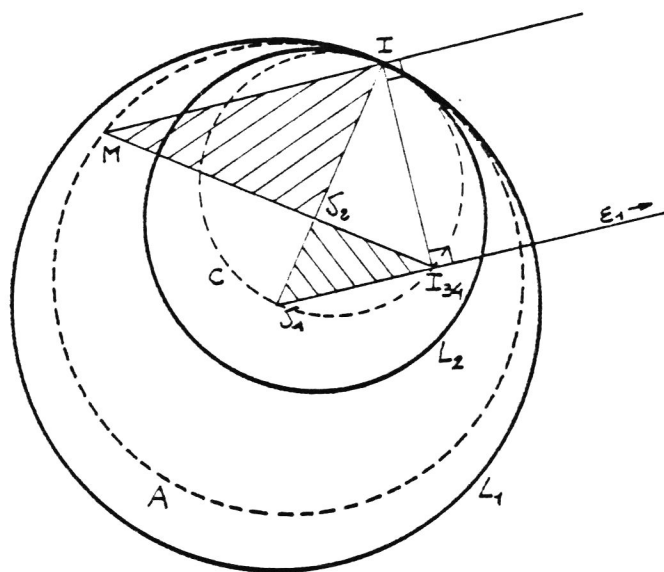
B) Détermination du cercle des inflexions A dans le mouvement d'un cercle L_2 de rayon r roulant sans glisser en I

- sur une droite L_1 :



Il y a un point d'inflexion en M si E_1 est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si I_{34} est aussi rejeté à l'infini. Donc il faut que (IM) et (MS_2) soient perpendiculaires. Le cercle des inflexions A est le cercle de diamètre $[IS_2]$.

- sur un cercle L_1 de rayon R :



Il y a point d'inflexion en M si ε_1 est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si (IM) et $(S_1 I_{34})$ sont parallèles, donc si $(I I_{34})$ est perpendiculaire à $(S_1 I_{34})$. I_{34} appartient alors au cercle C de diamètre $[I S_1]$.

Les triangles $S_2 IM$ et $S_2 S_1 I_{34}$ sont alors homothétiques dans l'homothétie H de centre S_2 et de rapport $\frac{\overline{S_2 I}}{\overline{S_2 S_1}}$. Le cercle des inflexions A est donc le cercle homothétique du cercle C dans l'homothétie H.

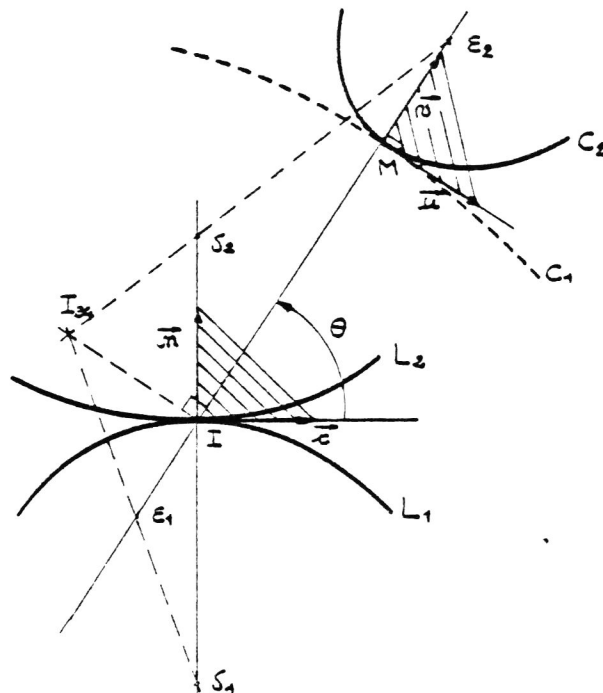
Si L_2 roule intérieurement sur L_1 ,

$$\frac{\overline{S_2 I}}{\overline{S_2 S_1}} = - \frac{r}{R-r}$$

Si L_2 roule extérieurement sur L_1 ,

$$\frac{\overline{S_2 I}}{\overline{S_2 S_1}} = \frac{r}{R+r}$$

3) Formule d'Euler-Savary :



Désignons par θ une mesure de l'angle représenté par $(\vec{t}, \vec{v})$

1. $I_{34}, \mathcal{S}_1, \mathcal{E}_1$ sont alignés. Donc

$$\overrightarrow{I_{34}\mathcal{S}_1} \wedge \overrightarrow{I_{34}\mathcal{E}_1} = \vec{0}$$

$$\text{soit } (\overrightarrow{I\mathcal{S}_1} - \overrightarrow{II_{34}}) \wedge (\overrightarrow{I\mathcal{E}_1} - \overrightarrow{II_{34}}) = \vec{0}$$

Or $\overrightarrow{I\mathcal{S}_1} = R_1 \vec{n}$, si R_1 est le rayon de courbure en I de la base L_1 . Il existe deux nombres réels ρ_1 et λ tels que : $\overrightarrow{I\mathcal{E}_1} = \rho_1 \vec{v}$ et $\overrightarrow{II_{34}} = \lambda \vec{u}$.

$$\text{Donc } (R_1 \vec{n} - \lambda \vec{u}) \wedge (\rho_1 \vec{v} - \lambda \vec{u}) = \vec{0}$$

$$\text{Or } \widehat{(\vec{n}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{n}, \vec{t})} + \widehat{(\vec{t}, \vec{v})} = -\frac{\pi}{2} + \theta$$

$$\text{et } \widehat{(\vec{n}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{n}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\pi}{2} = \theta - \pi$$

On a donc :

$$R_1 \vec{n} \wedge \rho_1 \vec{v} - R_1 \vec{n} \wedge \lambda \vec{u} - \lambda \vec{u} \wedge \rho_1 \vec{v} = \vec{0}$$

$$\left[R_1 \rho_1 \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \lambda R_1 \sin(\theta - \pi) - \lambda \rho_1 \right] \vec{k} = \vec{0}$$

$$- R_1 \rho_1 \cos \theta + \lambda R_1 \sin \theta - \lambda \rho_1 = 0$$

D'où

$$\lambda = \frac{R_1 \rho_1 \cos \theta}{R_1 \sin \theta - \rho_1}$$

2. $I_{34}, \mathcal{S}_2, \mathcal{E}_2$ sont alignés. Donc

$$\overrightarrow{I_{34}\mathcal{S}_2} \wedge \overrightarrow{I_{34}\mathcal{E}_2} = \vec{0} \quad \text{soit}$$

$$(\overrightarrow{I\mathcal{S}_2} - \overrightarrow{II_{34}}) \wedge (\overrightarrow{I\mathcal{E}_2} - \overrightarrow{II_{34}}) = \vec{0}$$

Or $\overrightarrow{I\mathcal{S}_2} = R_2 \vec{n}$, si R_2 est le rayon de courbure en I de la roulante L_2 .

Il existe un nombre réel ρ_2 tel que : $\overrightarrow{I\mathcal{E}_2} = \rho_2 \vec{v}$

$$\text{Donc } (R_2 \vec{n} - \lambda \vec{u}) \wedge (\rho_2 \vec{v} - \lambda \vec{u}) = \vec{0}$$

$$\left[R_2 \rho_2 \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) - R_2 \lambda \sin(\theta - \pi) - \lambda \rho_2 \right] \vec{k} = \vec{0}$$

$$- R_2 \rho_2 \cos \theta + \lambda R_2 \sin \theta - \lambda \rho_2 = 0$$

$$\text{D'où} \quad \lambda = \frac{R_2 \rho_2 \cos \theta}{\rho_2 \sin \theta - \rho_2}$$

$$\text{On a} \quad \frac{R_1 \rho_1 \cos \theta}{R_1 \sin \theta - \rho_1} = \frac{R_2 \rho_2 \cos \theta}{R_2 \sin \theta - \rho_2}$$

$$\text{soit} \quad R_1 \rho_1 (R_2 \sin \theta - \rho_2) = R_2 \rho_2 (R_1 \sin \theta - \rho_1)$$

et, en divisant les deux membres par $R_1 R_2 \rho_1 \rho_2$:

$$\frac{\sin \theta}{\rho_2} - \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{\rho_1} - \frac{1}{R_1}$$

soit finalement

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \sin \theta \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

Applications :

- a) Ensemble A des points du plan Π_2 qui, à un instant donné, coïncident avec un point d'inflexion de leur trajectoire C_1 dans Π_1 :

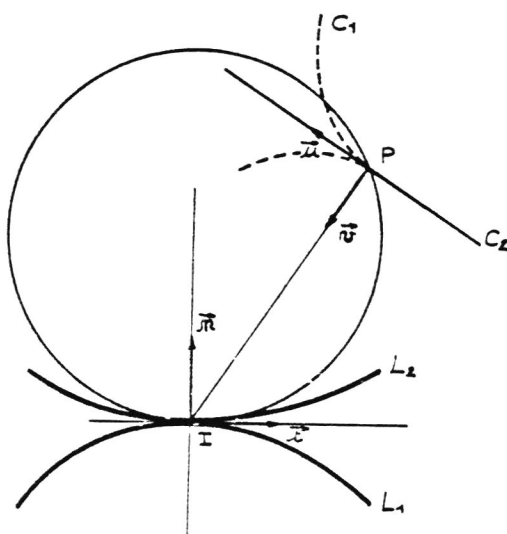
Dire que M de Π_2 est en un point d'inflexion de C_1 , c'est dire que ε_1 est rejeté à l'infini. La relation d'Euler-Savary donne alors :

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{\sin \theta}{\rho_2} \quad \text{soit} \quad \rho_2 = \frac{R_1 R_2 \sin \theta}{R_1 - R_2}$$

Puisque M a C_1 pour enveloppe, ε_2 est en M et $\overrightarrow{IM} = \rho_2 \vec{v}$. L'ensemble des points M cherchés est donc un cercle centré sur la droite $(I, \vec{n})$ dont le diamètre $[IA_0]$

mesure $\left| \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \right|$. On retrouve le cercle des inflexions.

- b) Ensemble B des points du plan π_2 qui, à un instant donné, coïncident avec un point de rebroussement des enveloppes C_1 des droites C_2 du plan π_2 :



Si un point P de π_2 est en un point de rebroussement P_1 de C_1 , c'est que le centre de courbure E_1 de C_1 est en P_1 . Donc $\overrightarrow{IP} = \rho_1 \overrightarrow{v}$.

De plus, C_2 étant une droite, E_2 est rejeté à l'infini dans la direction de la droite (IP), et la relation d'Euler-Savary donne alors :

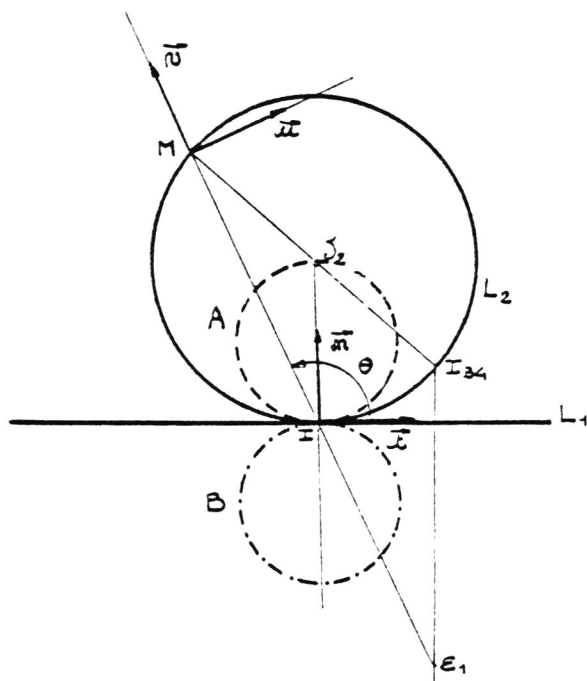
$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = - \frac{\sin \theta}{\rho_1}$$

soit

$$\rho_1 = \frac{R_2 R_1 \sin \theta}{R_2 - R_1}$$

L'ensemble des points P cherchés est donc le cercle symétrique du cercle des inflexions par rapport à I. C'est le cercle des rebroussements.

Exemple de la cycloïde



Dans ce cas particulier :

$$I\mathcal{J}_2 = R_2 = a = \text{constante}$$

R_1 est infini puisque L_1 est une droite. Donc

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \sin \theta$$

1. Le cercle des inflexions est déterminé par le fait que ρ_1 est infini : $\frac{\sin \theta}{\rho_2} = \frac{1}{a}$

$$\text{soit } \rho_2 = a \sin \theta$$

On retrouve que le cercle des inflexions est le cercle de diamètre $[I\mathcal{J}_2]$

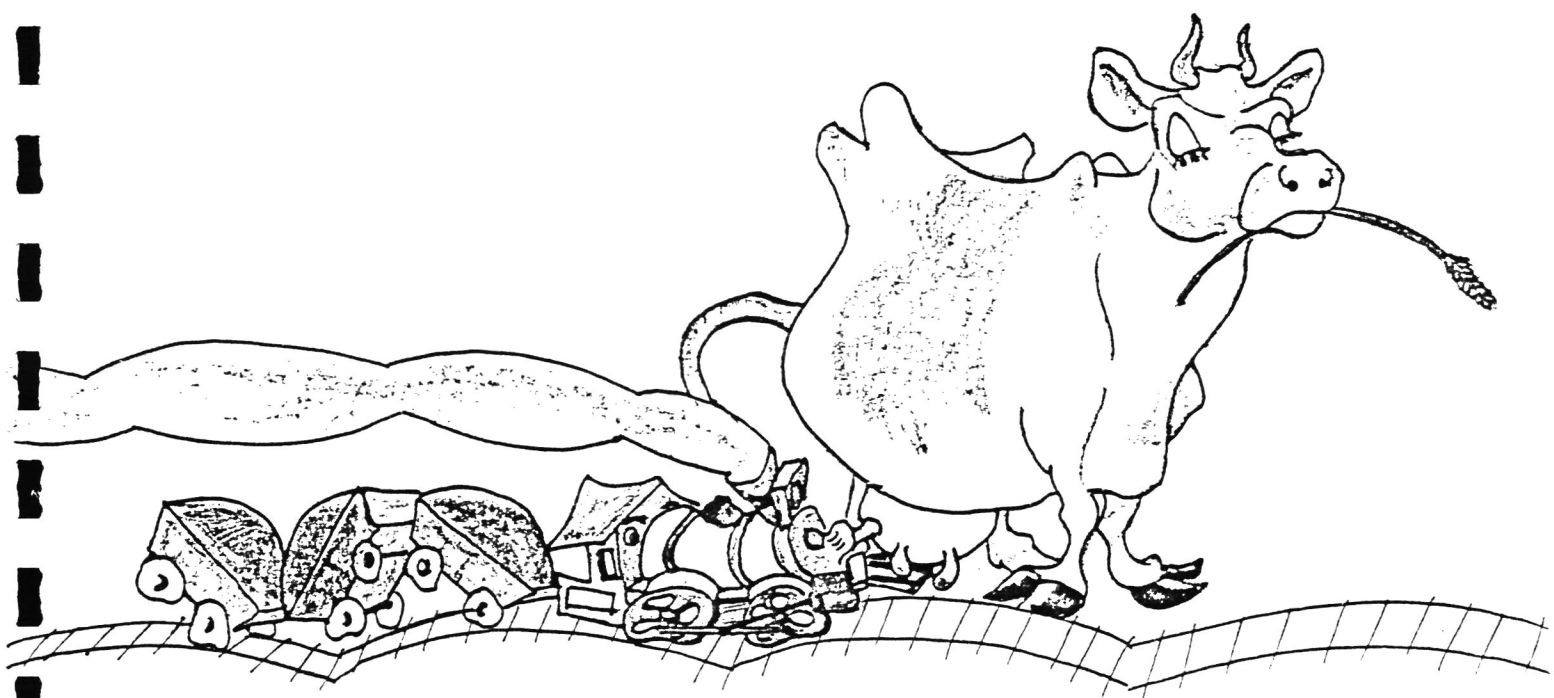
- 39 -

2. Retrouvons le cercle des rebroussements symétrique du cercle des inflexions A par rapport à I.

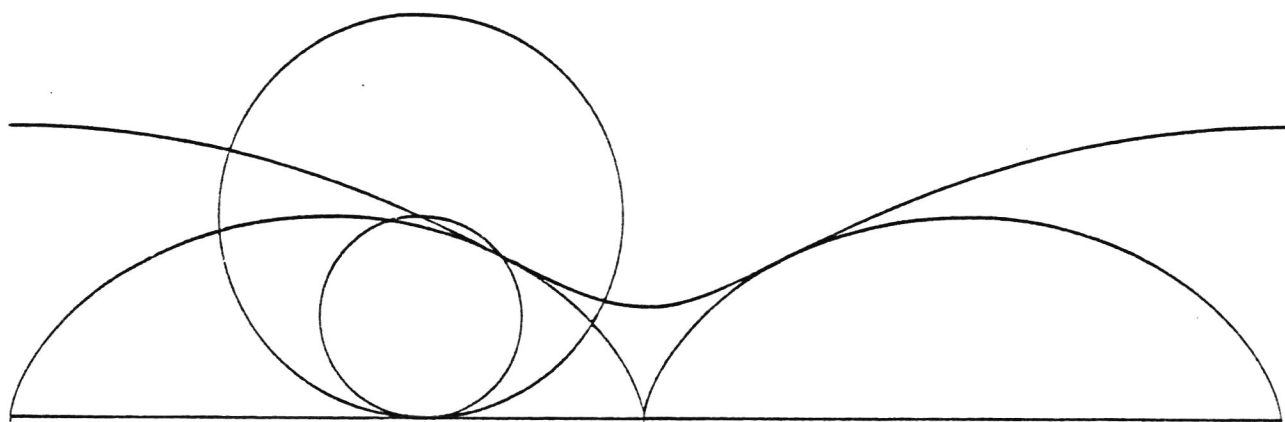
ρ_2 est infini. Donc

$$\frac{1}{a} = \frac{-\sin \theta}{\rho_1}$$

$$\rho_1 = -a \sin \theta$$



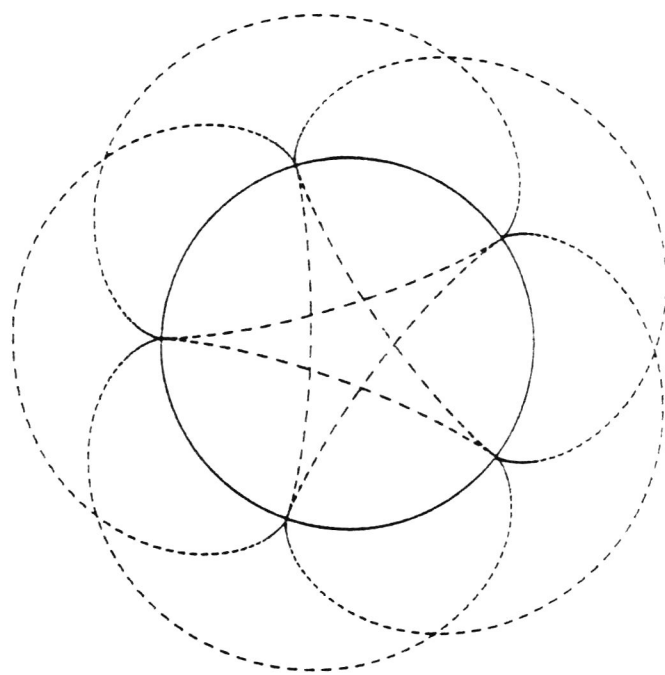
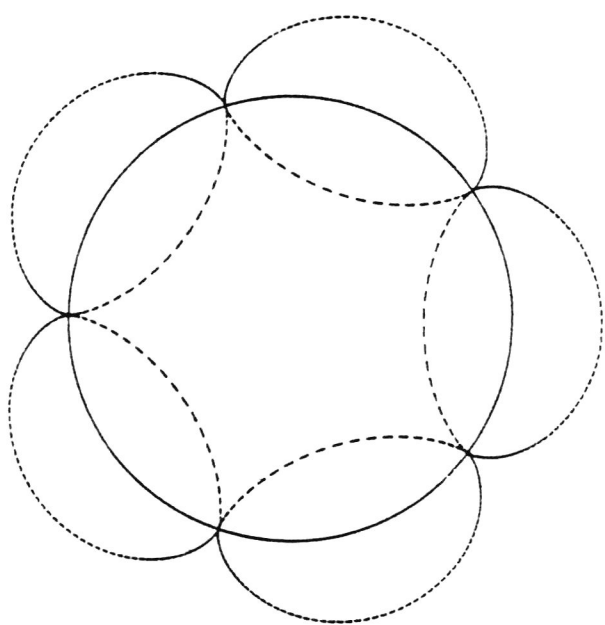
Edgar



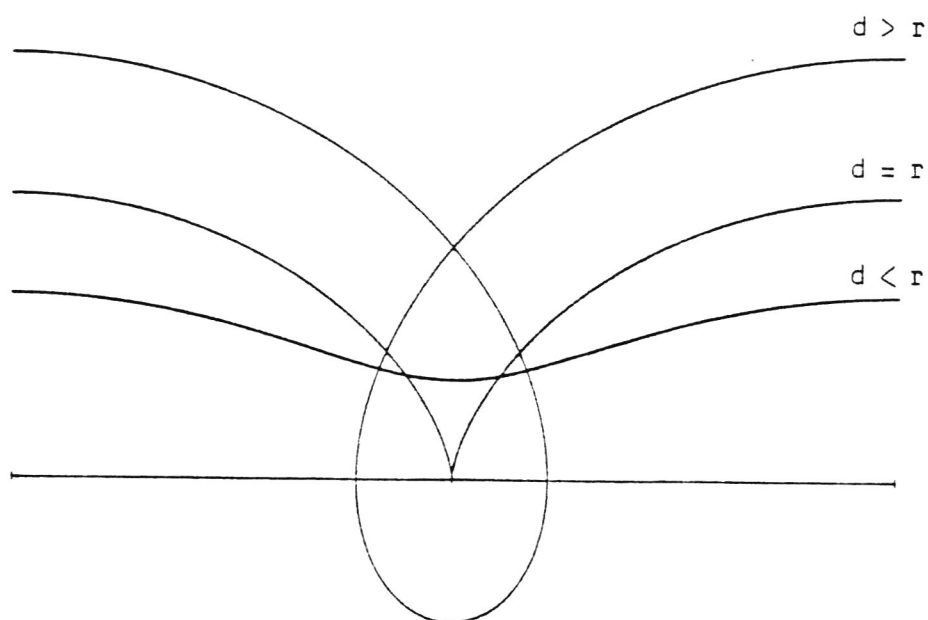
- 41 -

A N N E X E I

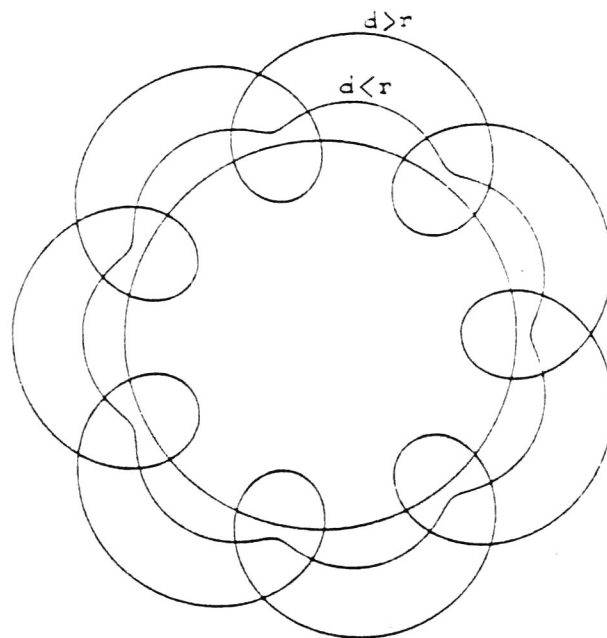
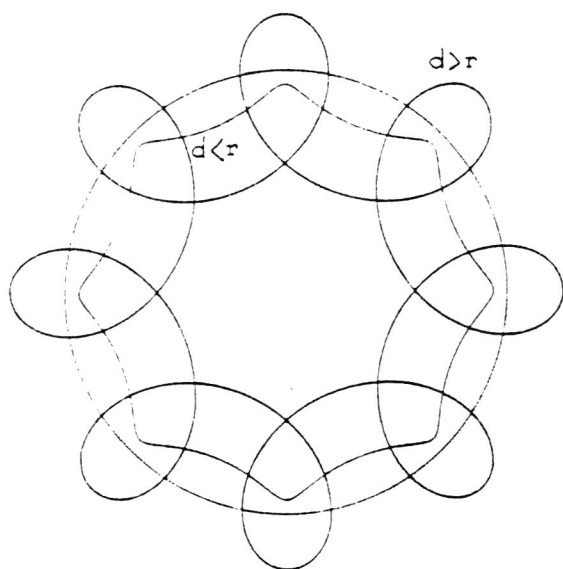




Epicycloïdes et Hypocycloïdes



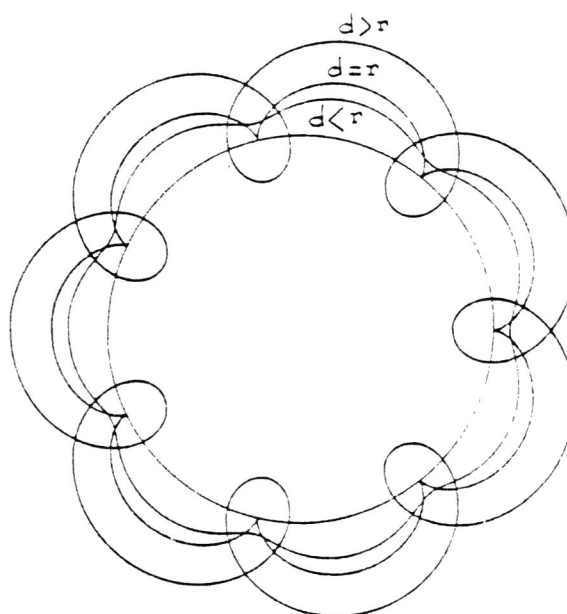
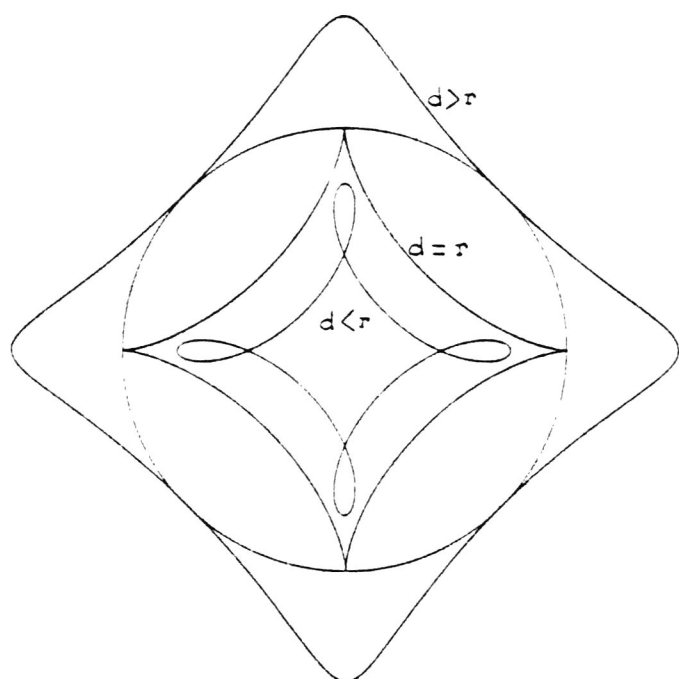
Trajectoires de points M du plan lié à un cercle de rayon r roulant sans glisser sur une droite (d : distance de M au centre du cercle)



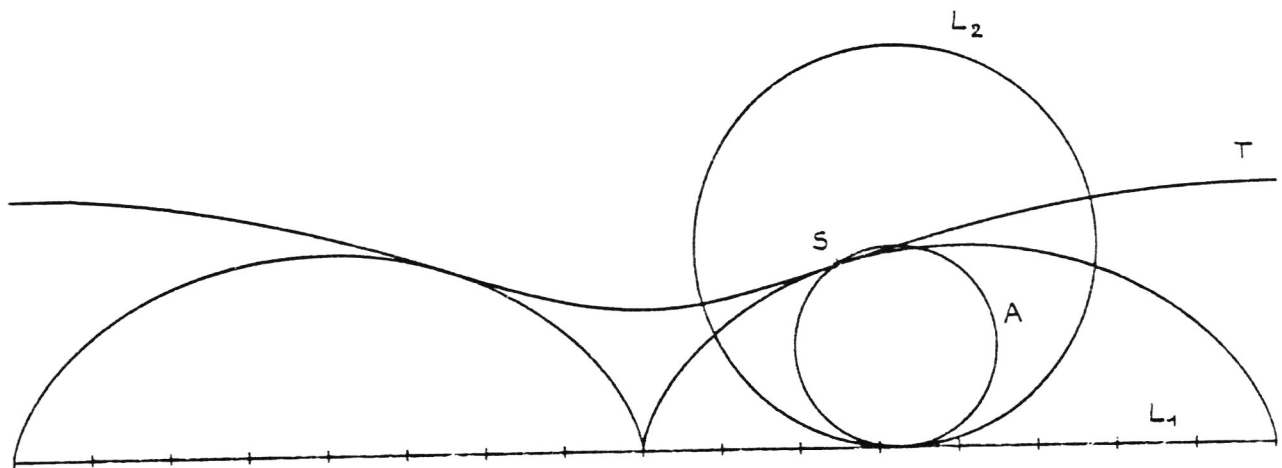
Trajectoires de points M du plan lié à un cercle
de rayon r roulant sans glisser sur un cercle.
(d : distance de M au centre du cercle)

INTERIEUREMENT

EXTERIEUREMENT

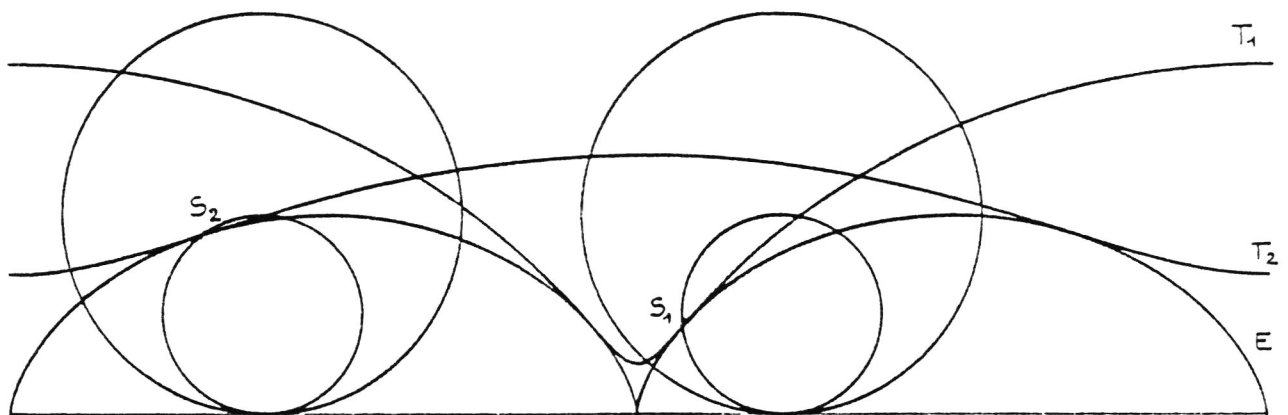


- 44 -

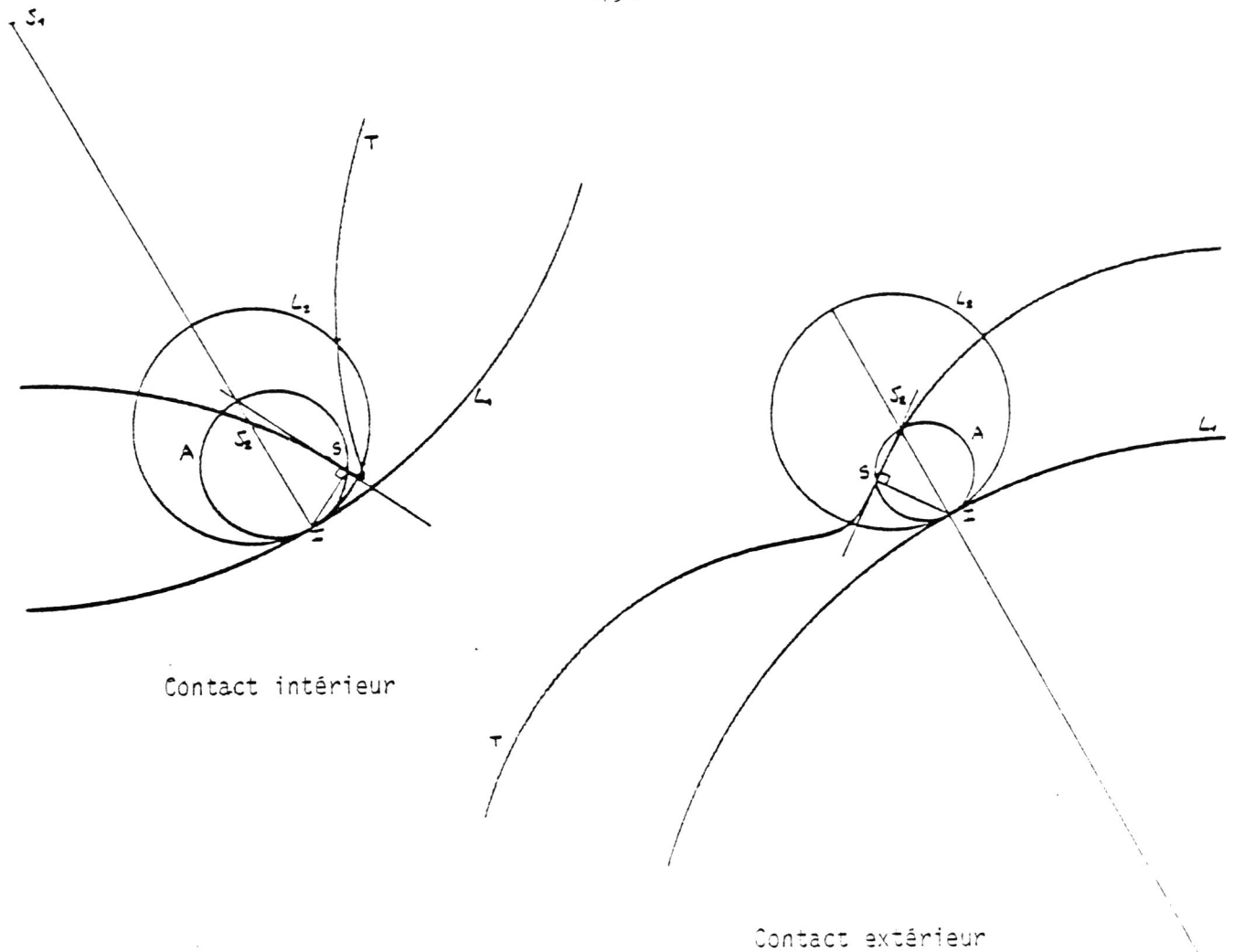


- M : point intérieur à la roulante L_2
- T : trajectoire de M lié à L_2 dans son mouvement par rapport à la base L_1
- A : cercle des inflexions
- S : point d'inflexion de T

Position de L_2 et de A lorsque M coïncide avec S



- E : enveloppe des trajectoires T
- Le point d'inflexion S de T est aussi point de contact de T avec E



Position de L_2 et de A lorsque M coïncide avec S

I : Point de contact du cercle L_2 de centre S_2 avec le cercle L_1 de centre S_1 .

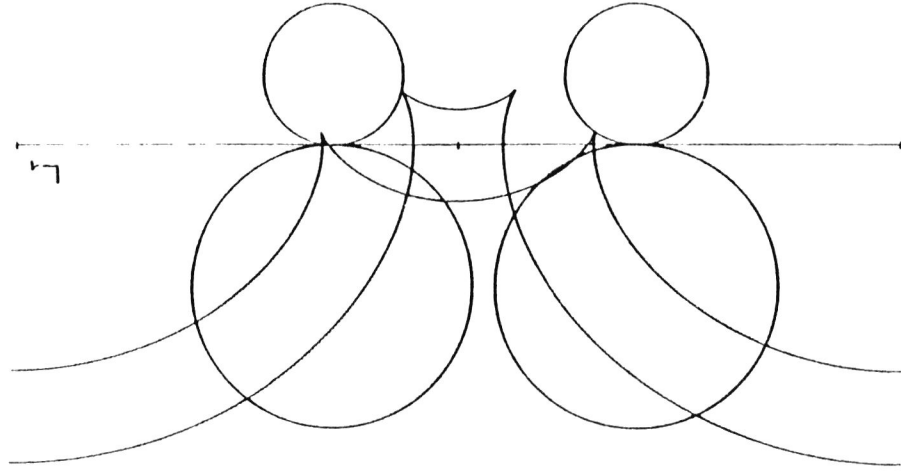
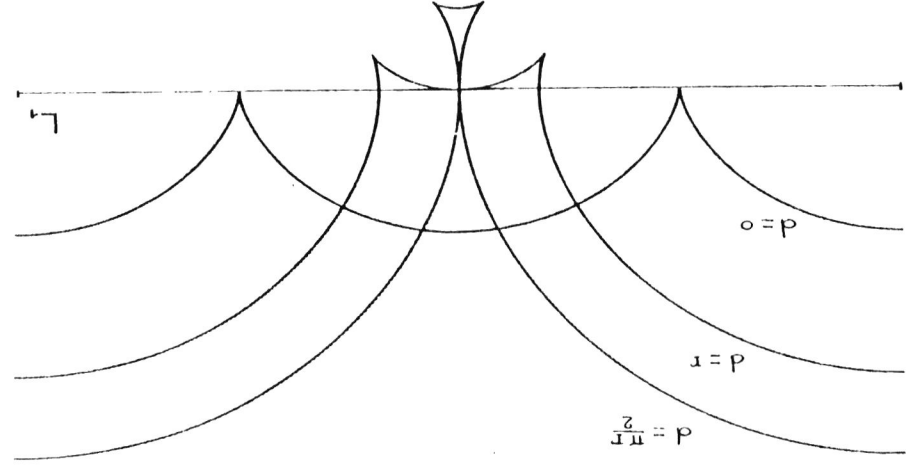
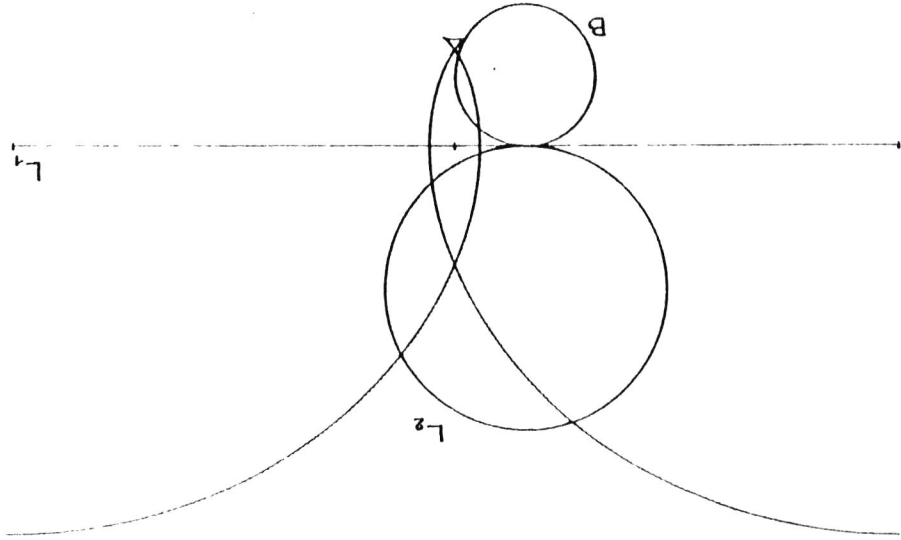
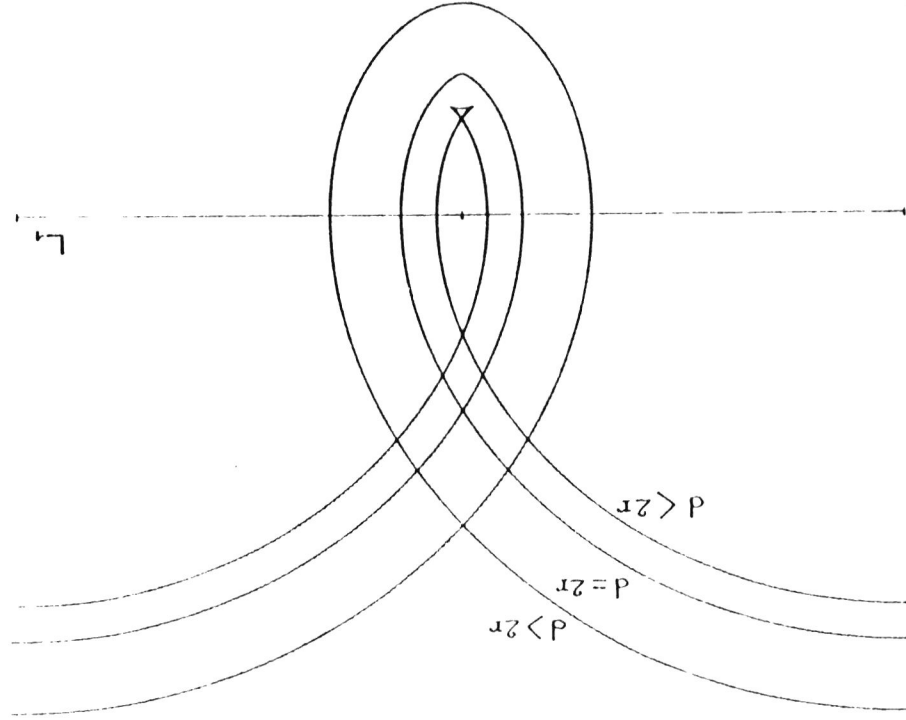
M : Point intérieur à L_2

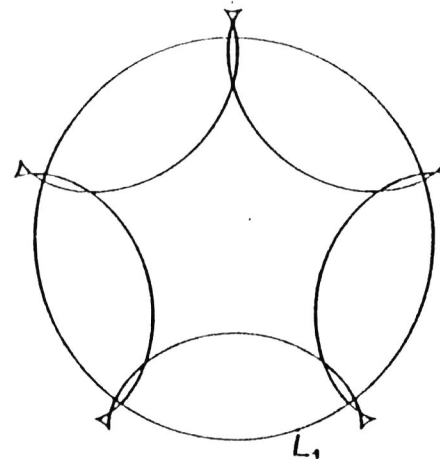
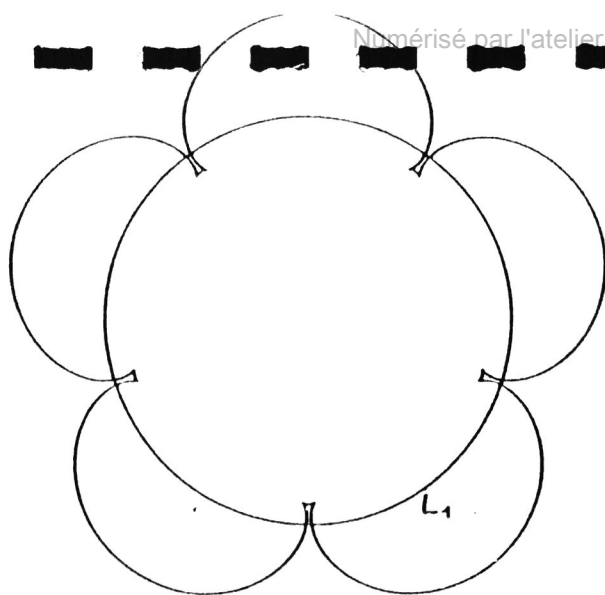
T : Trajectoire de M dans le mouvement de la roulante L_2 par rapport à la base L_1

A : Cercle des inflexions

S : Point d'inflexion de T

Enveloppes de droites liées au cercle L_2 de rayon r roulant sans glisser sur la droite l_1 (d : distance de la droite au centre de L_2 ; B : cercle des rebroussements)

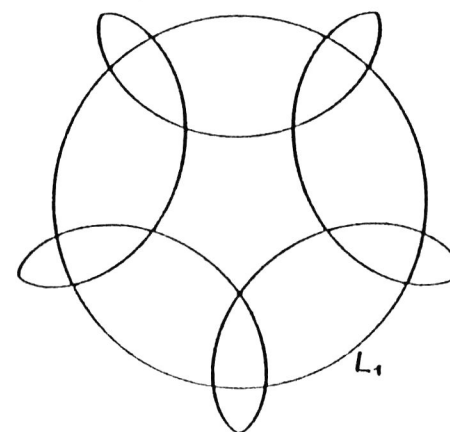
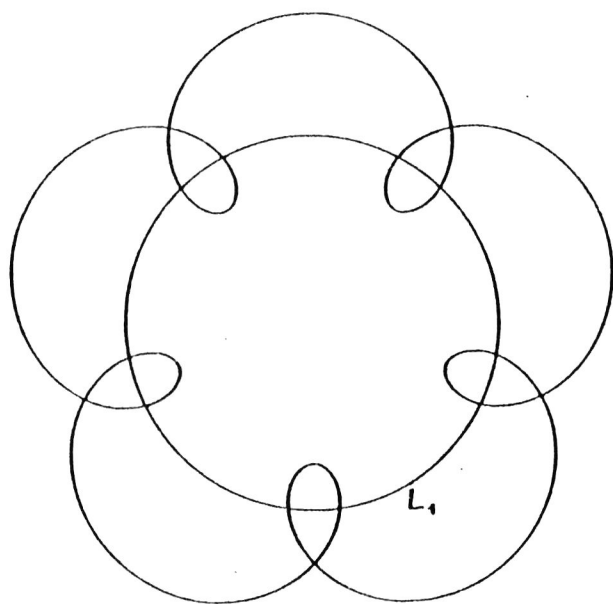


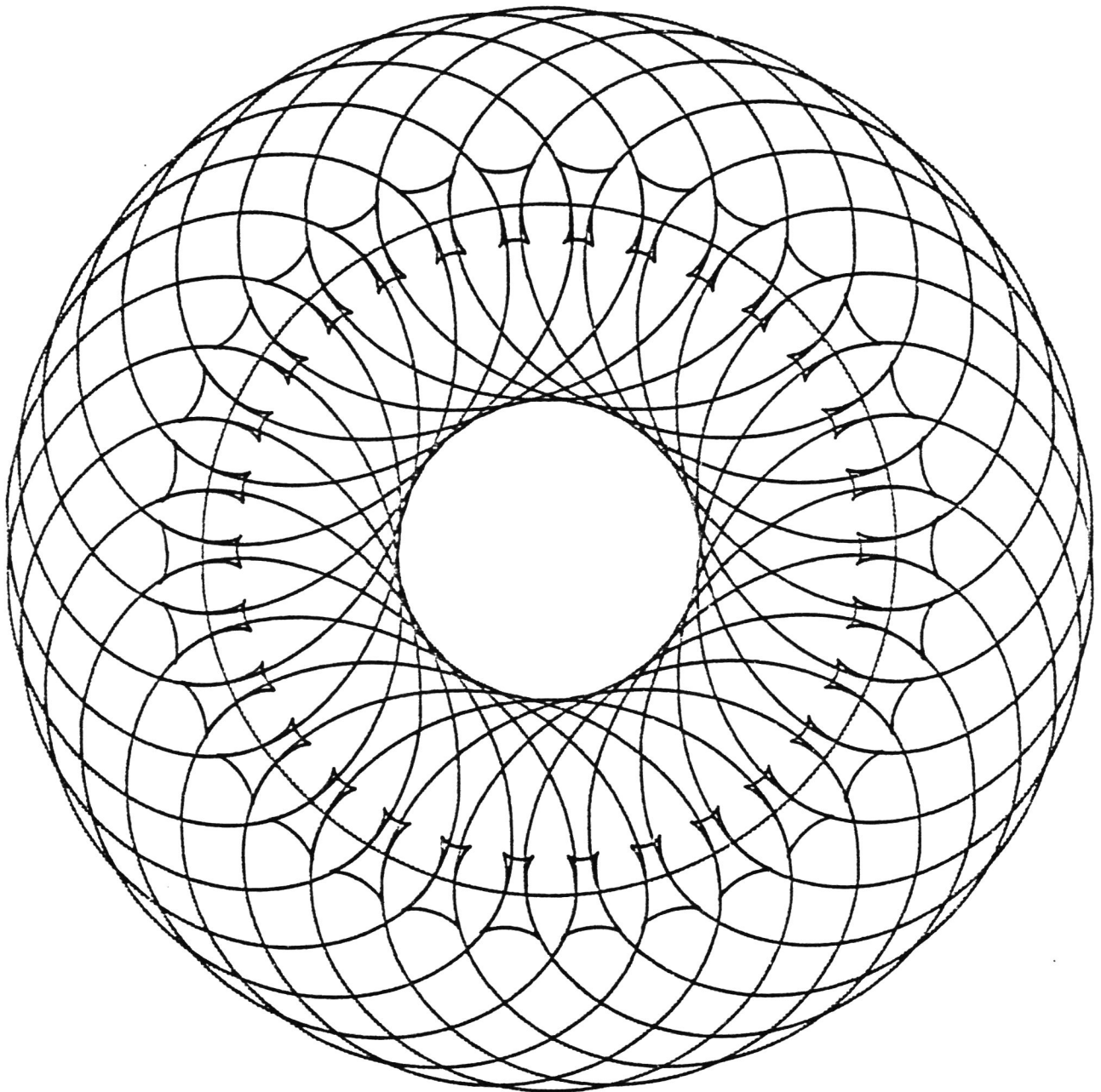


Enveloppes de droites liées au cercle L_2 roulant sans glisser sur le cercle L_1

EXTERIEUREMENT

INTERIEUREMENT







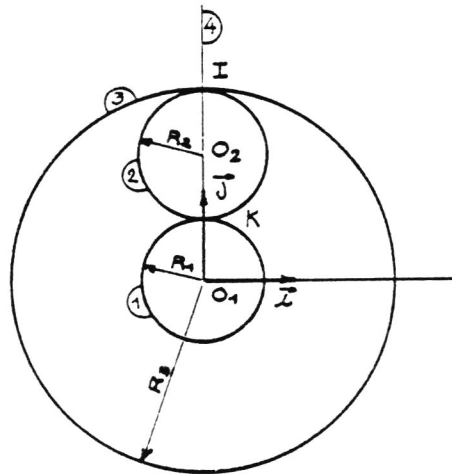
C H A P I T R E 2

Etude cinématique des trains
épicycloïdaux "simples"



I - Train épicycloïdal simple : Formule de Willis

On a vu qu'un train épicycloïdal simple peut se schématiser de la façon suivante (figures 1 et 2 ; Chapitre 0) :



Les trois roues 1, 2 et 3 de rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 roulent sans glisser les unes sur les autres.

Soit $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct lié à 4 et soient $\omega_{1/0} \vec{k}$, $\omega_{2/0} \vec{k}$, $\omega_{3/0} \vec{k}$ et $\omega_{4/0} \vec{k}$ les vecteurs rotation instantanée des solides 1, 2, 3 et 4 par rapport au bâti 0.

On se propose de trouver une relation entre les vitesses angulaires $\omega_{1/0}$, $\omega_{3/0}$ et $\omega_{4/0}$ des trois "entrées" de ce train.

Les roues 3 et 2 roulent sans glisser en I. Donc

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I\ 3/2} &= \vec{0} = \vec{V}_{I\ 3/0} - \vec{V}_{I\ 2/0} \\ &= \omega_{3/0} \vec{k} \wedge \vec{O_1 I} - (\vec{V}_{O_2\ 2/0} + \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 I}) \end{aligned}$$

Mais O_2 est le centre instantané de rotation de 2 par rapport à 4 :

$$\vec{V}_{O_2\ 2/4} = \vec{0} \text{ et donc } \vec{V}_{O_2\ 2/0} = \vec{V}_{O_2\ 4/0} = \omega_{4/0} \vec{k} \wedge \vec{O_1 O_2}$$

Donc

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \omega_{3/0} \vec{k} \wedge R_3 \vec{j} - \omega_{4/0} \vec{k} \wedge (R_1 + R_2) \vec{j} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 I} \\ \vec{0} &= -\omega_{3/0} R_3 \vec{i} + \omega_{4/0} (R_1 + R_2) \vec{i} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 I} \quad \textcircled{a}\end{aligned}$$

Les roues 2 et 1 roulent sans glisser en K. Donc

$$\begin{aligned}\vec{V}_{K 1/2} = \vec{0} &= \vec{V}_{K 1/0} - \vec{V}_{K 2/0} \\ &= \omega_{1/0} \vec{k} \wedge \vec{O_1 K} - (\vec{V}_{O_2 4/0} + \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 K}) \\ &= -\omega_{1/0} R_1 \vec{i} + \omega_{4/0} (R_3 - R_2) \vec{i} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 K} \quad \textcircled{b}\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les égalités $\textcircled{a}$ et $\textcircled{b}$:

$$-\omega_{1/0} R_1 \vec{i} + \omega_{4/0} (R_3 - R_2) \vec{i} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 K} - \omega_{3/0} R_3 \vec{i} + \omega_{4/0} (R_1 + R_2) \vec{i} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \vec{O_2 I} = \vec{0}$$

et multiplions scalairement par $\vec{i}$ les deux membres de l'égalité obtenue. Il reste :

$$R_1 (\omega_{4/0} - \omega_{1/0}) + R_3 (\omega_{4/0} - \omega_{3/0}) = 0$$

soit encore

$$\frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} = - \frac{R_3}{R_1}$$

Si on désigne par ρ le rapport $(- \frac{R_3}{R_1})$, appelé "raison" de ce train épicycloïdal, on peut écrire ce résultat sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} &= \rho \quad (\text{formule de Willis}) \text{ ou encore} \\ \omega_{1/0} - \rho \omega_{3/0} + (\rho - 1) \omega_{4/0} &= 0\end{aligned}$$

Remarque :

Exemple d'utilisation du train épicycloïdal : une "entrée" est bloquée par rapport au bâti.

Il existe donc trois possibilités d'utilisation. Notons en effet [1 3 4] un train épicycloïdal dont 1

est 1 "entrée", 3 la "sortie" et 4 l'élément bloqué.
Si on applique à ce train la formule de Willis, on obtient $\omega_{1/o} - \rho \omega_{3/o} + (\rho - 1)\omega_{4/o} = 0$ et puisque $\omega_{4/o} = 0$, $\omega_{1/o} - \rho \omega_{3/o} = 0$.

Le rapport $\frac{\omega_{1/o}}{\omega_{3/o}}$, appelé rapport de réduction, vaut ρ dans ce cas.

D'une manière semblable :

$$\text{Pour } [3 \ 4 \ 1], \omega_{3/o} + \frac{1-\rho}{\rho} \omega_{4/o} - \frac{1}{\rho} \omega_{1/o} = 0$$

$$\text{Rapport de réduction } \frac{\omega_{3/o}}{\omega_{4/o}} = \frac{\rho - 1}{\rho}$$

$$\text{Pour } [4 \ 1 \ 3], \omega_{4/o} + \frac{1}{\rho - 1} \omega_{1/o} - \frac{\rho}{\rho - 1} \omega_{3/o} = 0$$

$$\text{Rapport de réduction } \frac{\omega_{4/o}}{\omega_{1/o}} = - \frac{1}{\rho - 1}$$

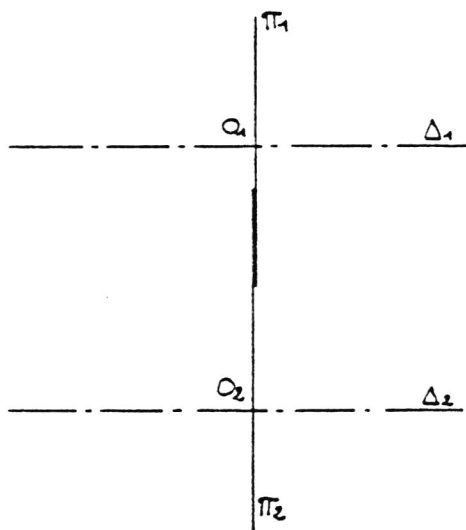
Si la raison d'un train épicycloïdal est un rapport intrinsèque au train considéré (il dépend de ses dimensions), le rapport de réduction dépend de l'utilisation qu'on fait du train. On aura égalité de ces deux rapports seulement lorsqu'on bloque le porte-satellite 4, ce qui ramène le mécanisme à un train de roues à axes fixes.

Pour que les roues du train épicycloïdal roulent effectivement sans glisser les unes sur les autres, on réalise en pratique une transmission des mouvements par obstacle utilisant des roues dentées. Ce système constitue un train d'engrenages.

II - Définition d'un engrenage à axes parallèles

Un tel engrenage se compose de trois éléments

- un bâti, ou référence fixe 0
- deux solides 1 et 2 (roues dentées d'axes parallèles) faisant avec 0 l'objet de liaisons pivots (liaisons qui ne permettent à 1 et 2 qu'un mouvement de rotation autour de leur axe).



Soit π_0 un plan lié au bâti 0 et perpendiculaire aux axes de rotation Δ_1 et Δ_2 des roues 1 et 2. Le mouvement de 1 par rapport à 2 peut être considéré comme le mouvement plan sur plan de π_1 par rapport à π_2 , π_1 et π_2 étant deux plans confondus avec π_0 et liés respectivement à 1 et 2.

Les mouvements de 1 et 2 sont tels que $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \lambda$ où λ est une constante appelée "rapport de réduction" de l'engrenage.

Cherchons alors la base et la roulante du mouvement de π_1 par rapport à π_2 .

Soit I le centre instantané de rotation de 1/2

O_1 est centre instantané de rotation 1/0, O_2 est celui de 2/0. Donc I est sur la droite $(O_1 O_2)$.

$$\vec{V}_{I \ 1/2} = \vec{0}, \text{ soit } \vec{V}_{I \ 1/0} - \vec{V}_{I \ 2/0} = \vec{0}, \text{ ou encore}$$

$$\omega_{1/0} \vec{k} \wedge \overrightarrow{O_1 I} - \omega_{2/0} \vec{k} \wedge \overrightarrow{O_2 I} = \vec{0}$$

Multiplions vectoriellement à gauche les deux membres de l'égalité par $\vec{k}$. On obtient

$$-\omega_{1/o} \overrightarrow{O_1 I} + \omega_{2/o} \overrightarrow{O_2 I} = \vec{0}$$

De plus

$$\frac{\omega_{2/o}}{\omega_{1/o}} = \lambda = \text{constante}$$

Donc le point I cherché est le point de la droite $(O_1 O_2)$ qui partage le segment $[O_1 O_2]$ dans le rapport constant λ . I est donc fixe.

Alors,

a) $O_1 I = \text{constante}$, et la roulante du mouvement est le cercle de centre O_1 et de rayon $R_1 = O_1 I$

b) $O_2 I = \text{constante}$, et la base du mouvement est le cercle de centre O_2 et de rayon $R_2 = O_2 I$

Ces deux cercles sont appelés cercles primitifs de l'engrenage.

Le rapport de réduction de l'engrenage λ est tel que

$$|\lambda| = \left| \frac{\omega_{2/o}}{\omega_{1/o}} \right| = \frac{R_1}{R_2}$$



- 55 -

C H A P I T R E 3

Dentures d'engrenages



I - Notion de profil

A) Profil :

Considérons une roue dentée. Un profil est la courbe intersection de la "surface active" d'une de ses dents avec un plan π dont $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

B) Profils conjugués

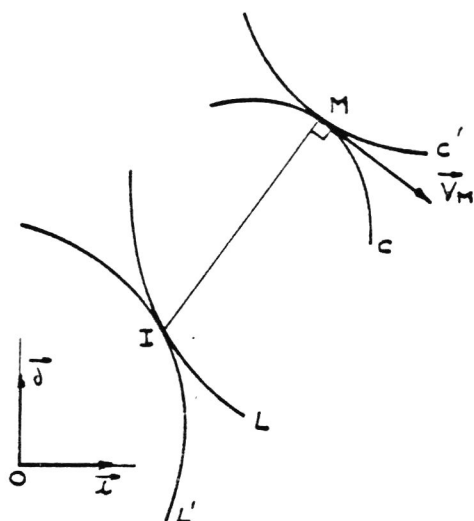
Soient deux plans π et π' confondus dont le mouvement peut être défini à chaque instant par le roulement sans glissement de la roulante L sur la base L' , et soit C un profil de π .

Dans le mouvement de π par rapport à π' , C admet un profil enveloppe C' . C et C' sont dits profils conjugués.

Nous savons que :

- Le centre instantané de rotation I appartient à la normale commune aux profils conjugués en leur point caractéristique M
- Le profil C roule et glisse sur le profil C' . La vitesse de glissement en M est

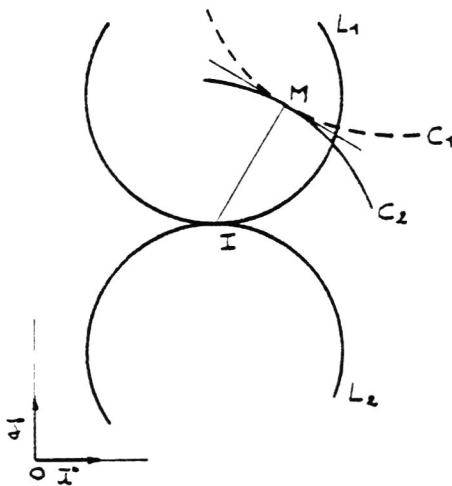
$$\vec{V}_M = \vec{V}_M \pi/\pi' = \omega \pi/\pi' \vec{k} \wedge \vec{IM}, \vec{k} \text{ étant tel que } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ soit une base orthonormée directe.}$$



II - Génération des profils de denture

Soit un engrenage à axes parallèles constitué de deux roues dentées 1 et 2. Le mouvement de 1 par rapport à 2 peut être représenté par le mouvement plan sur plan d'un plan π_1 invariablement lié à 1 par rapport au plan π_2 invariablement lié à 2, I étant le centre instantané de rotation, L_1 et L_2 étant les cercles primitifs.

A) Méthode des enveloppes :



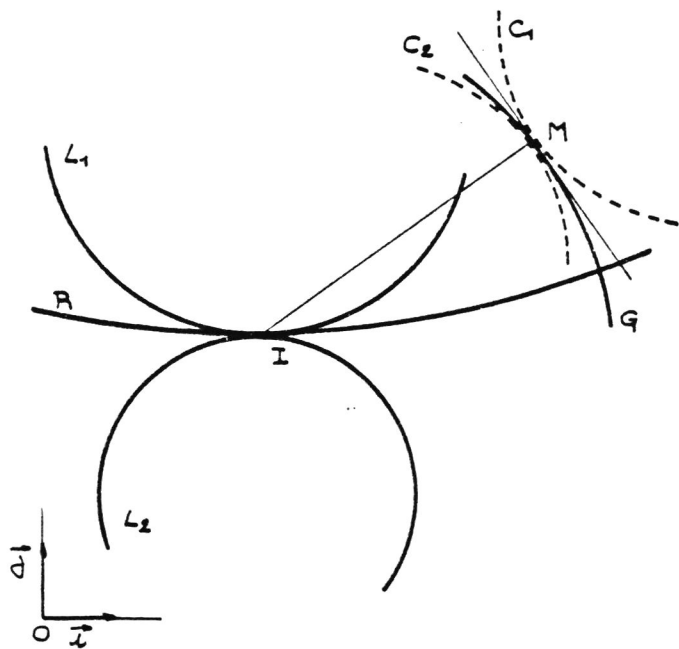
On choisit arbitrairement une courbe C_2 liée au plan π_2 . Dans le mouvement du plan π_2 par rapport au plan π_1 , C_2 admet une enveloppe C_1 dans π_1 . C_1 et C_2 sont deux profils conjugués.

L'utilisation pratique de cette méthode pour le taillage (usinage) des dentures d'engrenage consiste à choisir la courbe C_2 réalisable par un procédé d'usinage ordinaire (tournage par exemple). On utilise ensuite une machine qui réalise le mouvement

de π_2 par rapport à π_1 et sur laquelle on a monté un outil admettant C_2 pour profil.

B) Méthode dite des "roulettes" :

Soit une courbe R d'un plan π_3 confondu avec π_1 et π_2 qui roule sans glisser en I sur les cercles primitifs L_1 et L_2 de l'engrenage, et soit G une courbe du plan π_3 .



Dans le mouvement de π_3 par rapport à π_1 , G admet une enveloppe C_1 dans π_1 . La normale commune à C_1 et G au point caractéristique M passe par I, centre instantané de rotation de π_3 par rapport à π_1 .

Désignons par C_2 la trajectoire dans π_2 du point M de π_3 . On a :

$$\overrightarrow{V_M \pi_3 / \pi_2} = \omega_{3/2} \vec{k} \wedge \overrightarrow{IM}$$

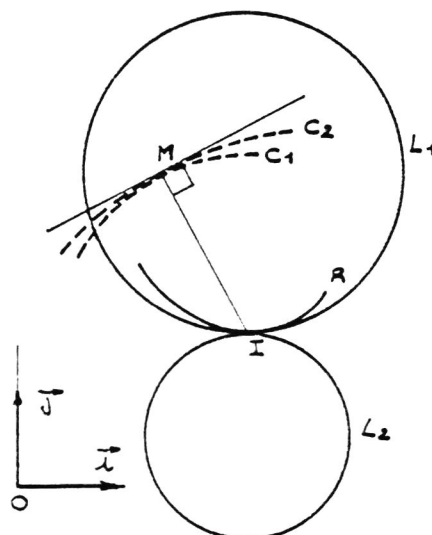
Par conséquent, (IM) est aussi la normale à C_2 en M.

C_1 et C_2 sont tangents en M et sont donc des profils conjugués. R est appelée "roulette" et G est appelé "profil générateur".

Du point de vue du taillage, on réalise d'abord un outil constitué de R et de G d'obtention simple. On applique deux fois la méthode des enveloppes avec cet outil pour obtenir séparément C_1 et C_2 .

Cas particulier :

Supposons que la courbe G soit réduite à un point M



Dans le mouvement de π_3 par rapport à π_1 , la trajectoire dans π_1 du point M de π_3 est une courbe C_1 . La droite (IM) est la normale en M à C_1 . Dans le mouvement de π_3 par rapport à π_2 , la trajectoire dans π_2 du point M de π_3 est une courbe C_2 . (IM) est la normale en M à C_2 .

C_1 et C_2 sont donc deux profils conjugués.

Cette méthode théorique n'est pas utilisée pour le taillage des engrenages.

III - Engrenage cylindrique à profil en développante de cercle

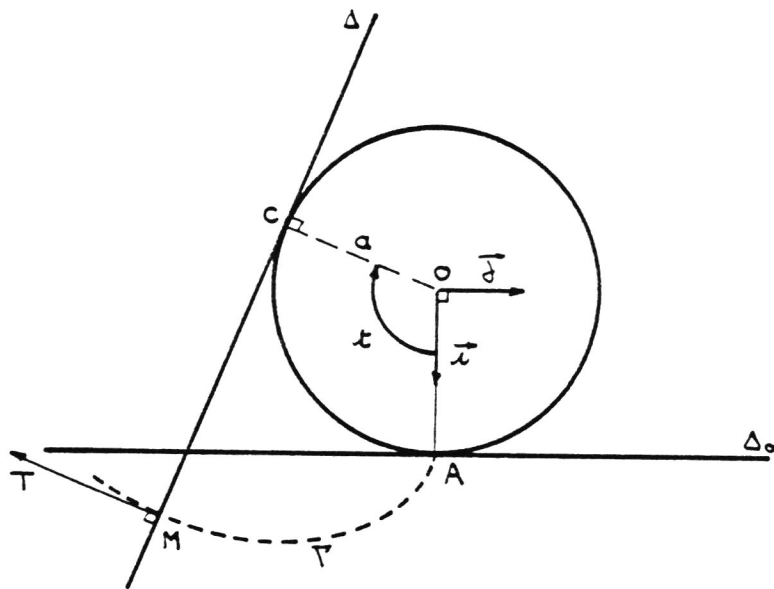
A) Développante de cercle

1. Génération :

Dans un plan π , on considère un cercle (O) de centre O, de rayon a, et une droite Δ qui roule sans glisser en C sur le cercle (O).

Considérons un point M de Δ et étudions la courbe Γ décrite par M dans le mouvement de Δ par rapport au cercle (O).

Δ_0 , position de la droite Δ quand M est au point de contact A de Δ avec le cercle (O), est choisie pour position initiale de Δ . Désignons par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan π tel que $\vec{OA} = a\vec{i}$ et associé à un trièdre orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct de l'espace. Désignons par t une mesure en radians de l'angle représenté par $(\vec{i}, \vec{OC})$.



Δ roulant sans glisser sur le cercle, on a

$$\widehat{AC} = CM = -at$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \text{ a pour coordonnées :}$$

$$x = a \cos t - at \cos \left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = a \sin t - at \sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

soit

$$x = a (\cos t + t \sin t)$$

$$y = a (\sin t - t \cos t)$$

Γ a donc en M un vecteur tangent de coordonnées

$$x' = at \cos t$$

$$y' = at \sin t$$

D'où la pente de la tangente (MT) : $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$

Par conséquent, la tangente en M à Γ est parallèle à (OC), donc perpendiculaire à (CM); ainsi (MC) est la normale en M à Γ . Le cercle (O) est l'enveloppe des

normales à Γ , donc la développée de Γ . Γ est par conséquent une développante de (O) et s'appelle une développante de cercle.

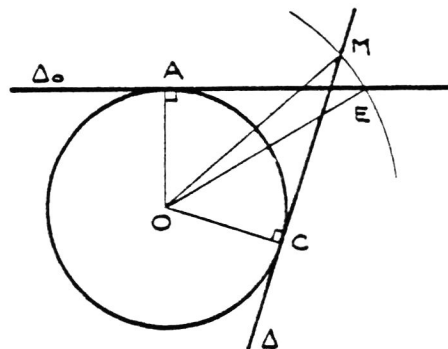
D'où : "La courbe décrite par un point quelconque d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle est une développante de cercle".

Remarques

- Si π_1 est un plan confondu avec π et lié au cercle (O) , et π_2 un plan confondu avec π et lié à la droite Δ , Γ est la trajectoire de M dans le mouvement de π_2 par rapport à π_1 . La base du mouvement est le cercle (O) et la roulante la droite Δ .
- Si $t = 0$, $x' = y' = 0$. A est un point de rebroussement pour Γ .

2. Tracé de Γ :

Considérons Δ tangente en C à (O) . Cherchons à construire le point M de Δ qui engendre la courbe Γ .



- Supposons le problème résolu. Traçons alors le cercle de centre O et de rayon OM , qui coupe Δ_0 en E .

La médiatrice de $[AC]$ est axe de symétrie de la figure.
Donc $AE = CM$ et puisque $CM = \widehat{CA}$, on a $AE = \widehat{CA}$.

M appartient au cercle de centre O et de rayon OE ,
 E étant le point de Δ_0 tel que $AE = \widehat{CA}$.

- D'où la construction :

On choisit un point A du cercle (O) comme point de contact de la position initiale Δ_0 de Δ avec le cercle (O) . Soit $[AB]$ le segment de Δ_0 tel que $AB = 2\pi a$.
On partage le cercle (O) et le segment $[AB]$ en n parties isométriques.

Le cercle de centre O et de rayon OP_i coupe la tangente en M_i au cercle (O) en un point G_i qui appartient à Γ .

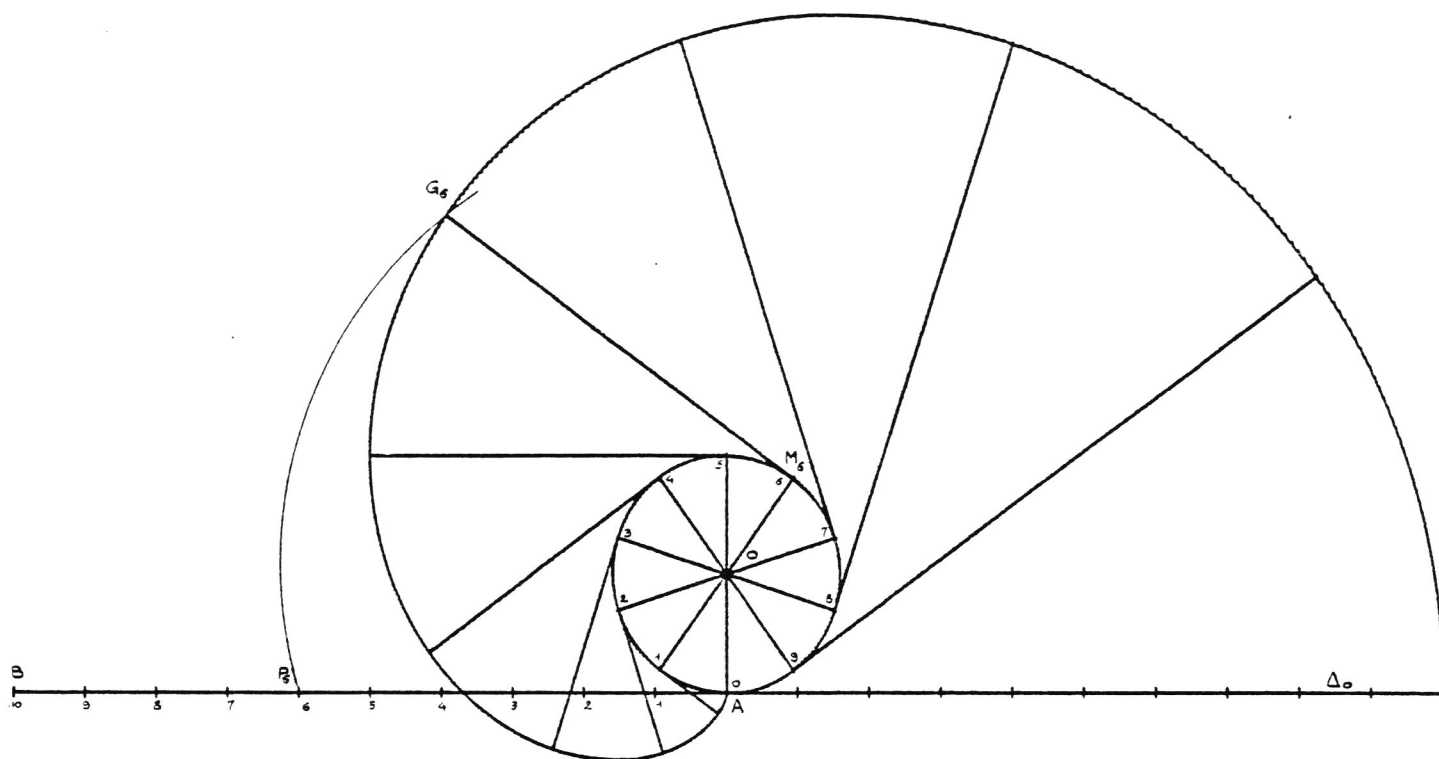
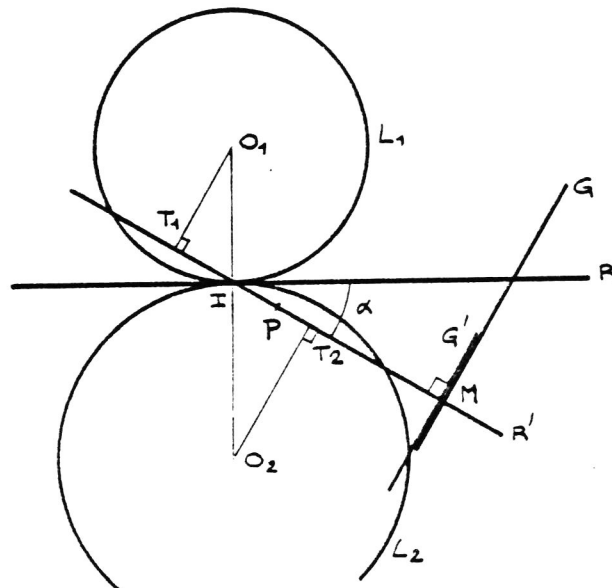


Fig. 5

B) Génération des profils (méthode des "roulettes") :



Soit π_0 le plan lié au bâti et contenant les deux cercles primitifs L_1 et L_2 . On choisit comme roulette la droite R mobile dans π_0 roulant sans glisser en I sur L_1 et L_2 , et comme profil générateur la droite G mobile dans π_1 invariablement liée à R .

Soit R' la perpendiculaire à G passant par I . On choisit pour mesure de l'angle représenté par (R, R') le nombre α de $[0, \frac{\pi}{2}]$. Soit G' la droite invariablement liée à R' qui coïncide avec G à chaque instant.

Dans le mouvement de R par rapport à π_1 , G entraîne G' et donc R' qui glisse sur elle-même.

Appelons π_3 le plan déterminé par G et R et π_4 le plan déterminé par G' et R'. Considérons les mouvements simultanés

1. des plans π_1 , π_3 et π_4 :

- le centre instantané de rotation I_{13} est en I
- le centre instantané de rotation I_{34} est rejeté à l'infini dans la direction de R'. (On a un mouvement de translation parallèle à G de π_3 par rapport à π_4)
- donc le centre instantané de rotation I_{41} est sur R'

2. des plans π_0 , π_1 et π_4 :

- le centre instantané de rotation I_{01} est O_1
- le centre instantané de rotation I_{04} est rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire à celle de R' (On a un mouvement de translation parallèle à R' de π_4 par rapport à π_0).
- donc le centre instantané de rotation I_{41} est sur la perpendiculaire à R' passant par O_1 .

Finalement I_{41} est en T_1 .

$O_1 T_1 = R_1 \cos \alpha = \text{constante}$. Donc T_1 décrit le cercle B_1 de centre O_1 et de rayon $r_1 = R_1 \cos \alpha$ dans le plan π_1 . Ce cercle est la base du mouvement de π_4 par rapport à π_1 .

T_1 appartient à la droite R' du plan π_4 . R' est la roulante du mouvement de π_4 par rapport à π_1 .

On montrerait de même que R' roule sans glisser en T_2 sur le cercle B_2 de centre O_2 et de rayon $r_2 = O_2 T_2 = R_2 \cos \alpha$ dans le mouvement de π_4 par rapport à π_2 .

Le point d'intersection M de $(T_1 T_2)$ avec G' décrit dans π_1 et dans π_2 des développantes D_1 et D_2 des cercles B_1 et B_2 . D_1 et D_2 sont deux profils conjugués.

R' , ensemble des points de contact entre ces deux profils est appelée "droite d'engrènement".

B_1 et B_2 sont les cercles de base de l'engrenage.

Remarques :

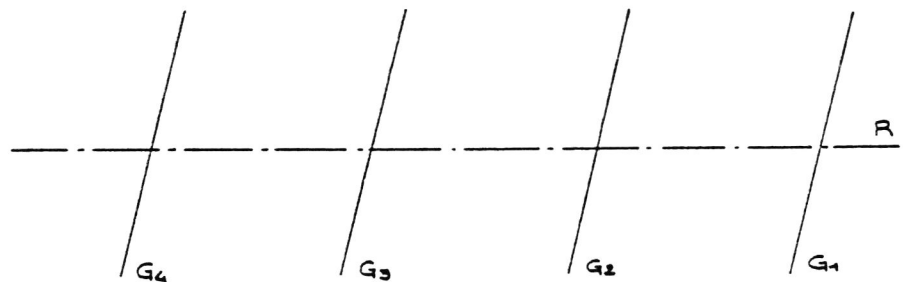
1. Tout point P de (T_1, T_2) décrit de même dans π_1 et π_2 des développantes de cercle.

2. Une réalisation pratique :

La droite génératrice G nous permet d'obtenir pour la roue 1 un profil de développante de cercle de B_1 .

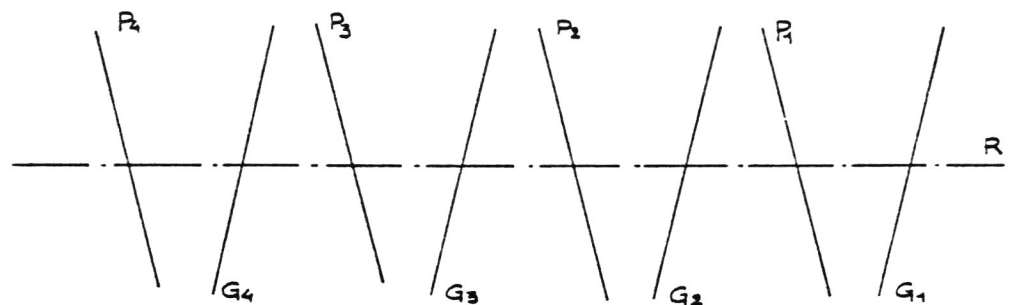
En pratique, nous avons besoin :

- d'une continuité d'engrènement entre les roues 1 et 2, ce qui nécessite plusieurs profils régulièrement espacés, et donc plusieurs profils générateurs G



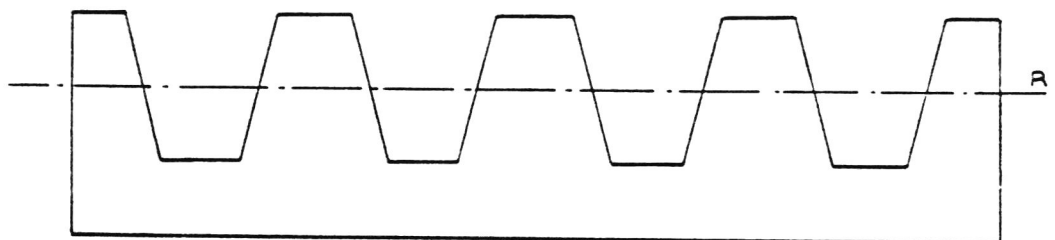
- d'une utilisation possible de l'engrenage dans les deux sens de rotation. Il faut donc des profils générateurs P symétriques des profils G par rapport

à une perpendiculaire à R

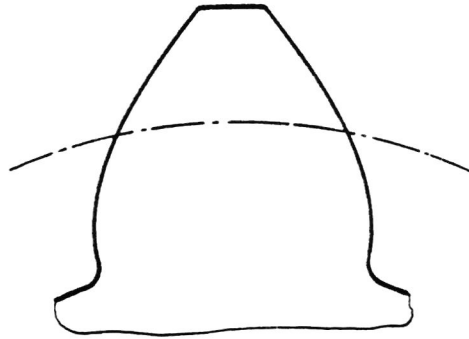


Ces conditions sont réalisées en particulier par un "outil crémaillère" dont R est appelée ligne de référence.

(R peut aussi être considéré comme un cercle primitif de rayon infini)



Cette crémaillère est un outil facile à obtenir. Elle est à l'origine d'une méthode d'usinage des dentures. Les dents obtenues ont la forme suivante :



C) Propriété : variation de la distance $O_1 O_2$ ou entraxe :

La figure 6 représente l'engrenage après augmentation de l'entraxe $O_1 O_2$.

Dans cette position, on fixe la roue 2 et on amène le profil P_1 en contact en M avec le profil P_2 par rotation de la roue 1 autour de O_1 . P_1 et P_2 étant tangents, leurs normales en M sont confondues. Comme ces profils sont des développantes de cercle, ces normales sont tangentes aux cercles de base B_1 et B_2 respectivement en T_1 et T_2 : T_1 , T_2 et M sont alignés.

On continue de faire tourner la roue 1 .

Soit M' un nouveau point de contact dont la position initiale sur le profil P_1 est M'_1 . La normale en M'_1 à P_1 est tangente en T'_1 au cercle de base B_1 . Ainsi $M'_1 T'_1 = M' T_1$. Désignons par $d\alpha_1$ une mesure de l'angle représenté par $(M'_1 T'_1, M' T_1)$. (C'est aussi une mesure de l'angle représenté par $(O_1 T'_1, O_1 T_1)$ dont a tourné la roue 1).

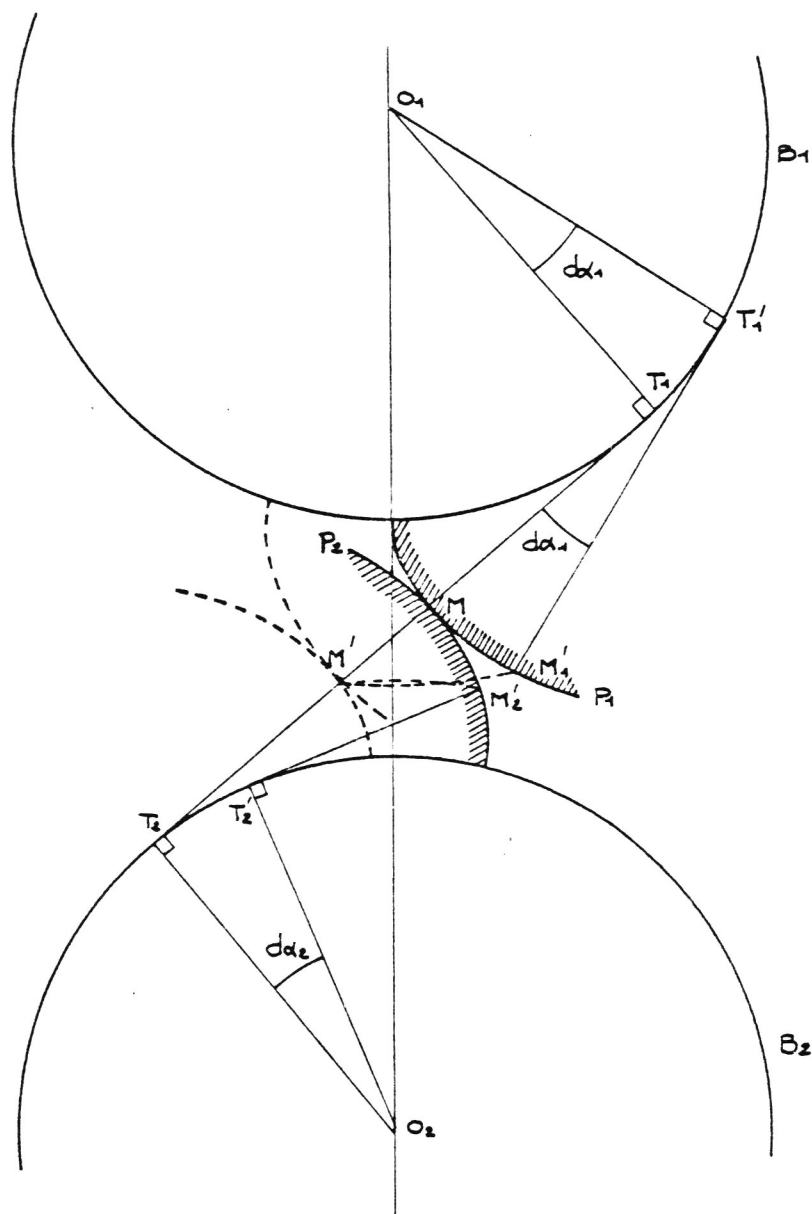


Fig. 6

Soit θ_1 le point de contact de B_1 et de la tangente à B_1 passant par M' . La perpendiculaire en M' à cette droite est la tangente de contact aux deux profils. $(M' \theta_1)$ est aussi la normale au profil P_2 en M' . Elle est donc tangente à B_2 en θ_2 . $(\theta_1 \theta_2)$ est donc une tangente commune aux deux cercles de base. θ_1 et θ_2 sont les points T_1 et T_2 .

r_1 étant le rayon de B_1 , on a

$$M'M = M'T_1 - MT_1 = M'_1 T'_1 - MT_1 = \widehat{T_1 T'_1} = r_1 |d\alpha_1|$$

Si M'_2 est la position initiale de M' sur P_2 , la tangente $M'_2 T'_2$ au cercle de base B_2 est la normale au profil P_2 en ce point.

r_2 étant le rayon de B_2 , on a

$$MM' = MT_2 - M'T_2 = MT_2 - M'_2 T'_2 = \widehat{T_2 T'_2} = r_2 |d\alpha_2|$$

où $d\alpha_2$ est une mesure de l'angle représenté par $(O_2 T_2, O_2 T'_2)$ (C'est aussi une mesure de l'angle représenté par $(O_2 T_2, O_2 T'_2)$ dont a tourné la roue 2 autour de O_2).

$$\text{Donc } r_1 |d\alpha_1| = r_2 |d\alpha_2| \quad \text{soit } \left| \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \text{constante}$$

(Dans le cas de cette figure, $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ sont de signes opposés).

Le rapport de réduction de l'engrenage n'est pas modifié par une variation d'entraxe. Ainsi le rapport des vitesses angulaires des deux roues est inchangé.

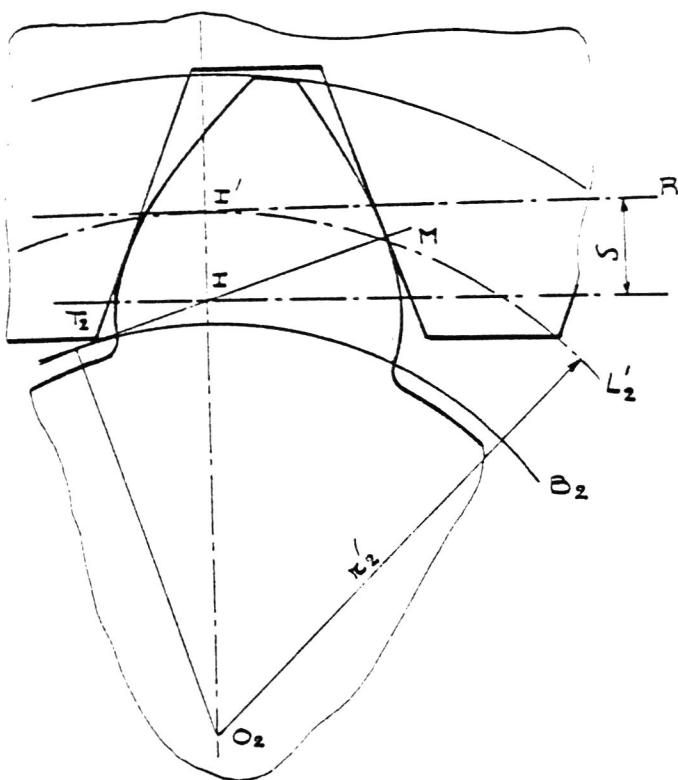
Remarque :

On montrerait de la même façon que cette propriété est conservée si cette variation de l'entraxe s'effectuait par un rapprochement de O_1 et de O_2 .

Fig. 7

Pendant, ce mouvement (fig. 7), on obtient d'abord l'arc de développante Q_3Q_2 . T_2 est alors le dernier point de contact possible entre le profil générateur de la crémaillère et le profil en développante du cercle S_2 .

Si le mouvement de pénétration se poursuit jusqu'à ce que R roule sans glisser sur L_2 , le profil actif de la crémaillère pénètre le cercle de base B_2 au-delà de T_2 . La trajectoire dans Π_2 du point M' de l'arête tranchante est telle que la dent usinée est considérablement creusée à la base. Cette dent est affaiblie et risque de ne pas résister à l'effort de transmission pour lequel elle a été calculée.



Un remède consiste à arrêter la pénétration alors que R se trouve à la distance ζ de sa position initiale.

Dans l'utilisation de la roue 2 avec une autre roue dentée, tout se passe comme si le cercle L'_2 de centre O_2 et de rayon $r'_2 = r_2 + \delta$ était le cercle primitif de la roue 2. L'_2 est appelé "cercle primitif de fonctionnement".

La valeur de δ est choisie pour que la pénétration de M' s'arrête avant Q_1 , dernier point du profil générateur à engendrer une développante de B_1 .

La dent obtenue alors est trapue et de ce fait plus résistante que la précédente.

Remarque :

On peut de cette façon usiner avec la même crémaillère une autre roue dentée 1 de rayon primitif r'_1

On constitue un engrenage avec les roues 1 et 2 dont l'entraxe de fonctionnement est $(r'_1 + r'_2)$. On sait que le rapport de réduction est conservé.

IV - Engrenage cylindrique à profil cycloïdal

A) Courbes cycloïdales

1. Génération

Nous avons défini une courbe cycloïde comme étant une courbe γ décrite par un point M d'un cercle R qui roule sans glisser en C sur une courbe fixe B.

Si π_1 est un plan invariablement lié à B et π_2 un plan invariablement lié à R, R est la roulante et B la base du mouvement de π_2 par rapport à π_1 . Les courbes cycloïdes sont les trajectoires des différents points de R dans π_1 .

Si la base est une droite, les trajectoires des points de R sont des cycloïdes droites (ou cycloïdes) (fig. 8a)

Si la base est un cercle,
- et si R est tangent extérieurement à B, les trajectoires des points de R sont des épicycloïdes.
(fig. 8b et 8d)

- et si R est tangent intérieurement à B , les trajectoires des points de R sont des hypocycloïdes (fig. 8c)

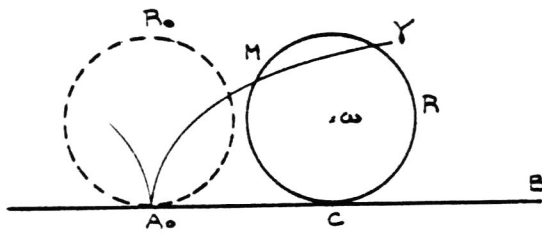


Fig. 8 a

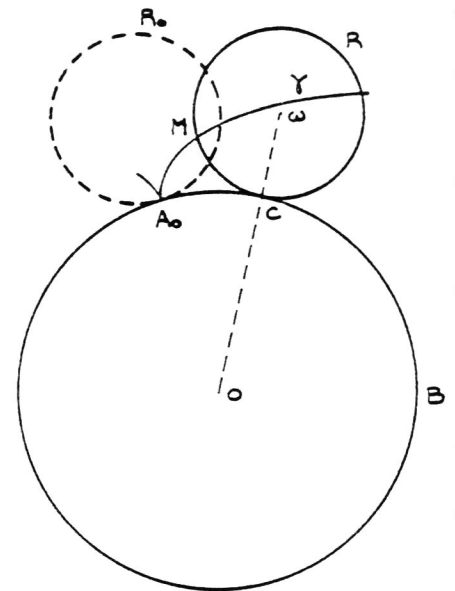


Fig. 8 b

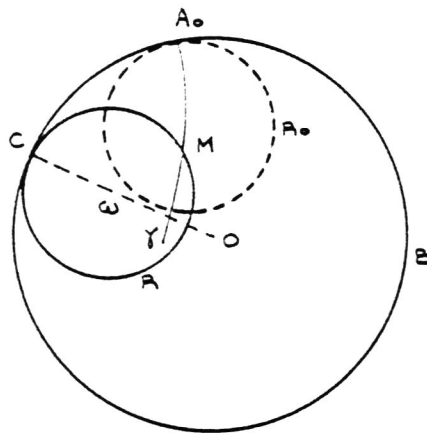


Fig. 8 c

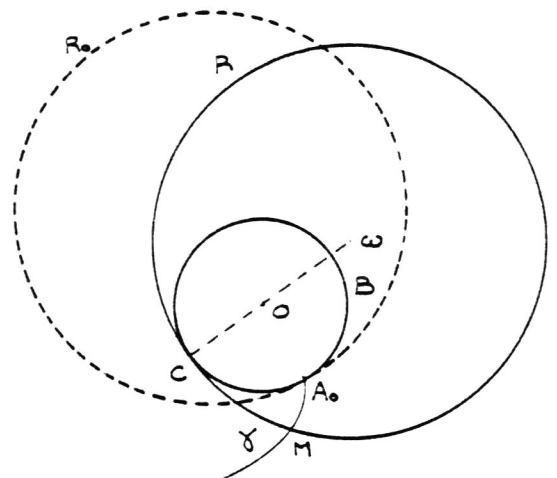


Fig. 8 d

Soit A_0 un point de B et considérons le cercle R_0 de rayon r tangent en A_0 à B , qu'on prendra pour position initiale de R . Soit M le point de R coïncidant avec A_0 .

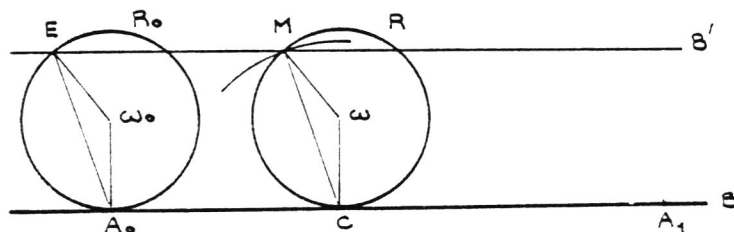
Au cours du roulement sans glissement de R sur B, M décrit une courbe cycloïde γ .

Si C est le point de contact de R avec B, on a

- pour la cycloïde $\widehat{CM} = CA_0$
- pour les épicycloïdes et les hypocycloïdes $\widehat{CM} = \widehat{CA_0}$

2. Tracé

a) de la cycloïde



Quand R effectue un tour complet, le point M qui était en A_0 vient de nouveau sur B en A_1 . ($A_0A_1 = 2\pi r$). M décrit ainsi une arche de la cycloïde γ .

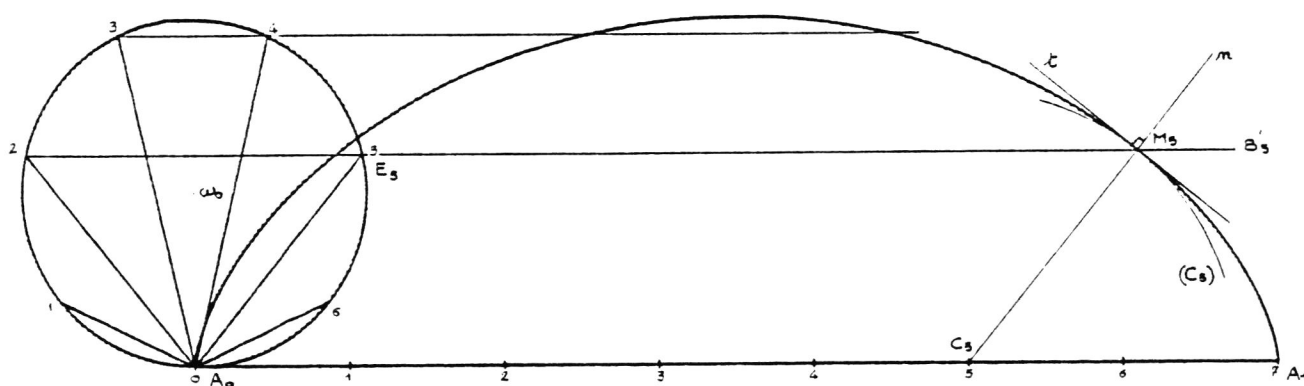
Cherchons à déterminer les points M de γ .

- Supposons le problème résolu. Soit E le point de R_0 tel que la droite (A_0E) soit parallèle à la droite (CM) . R_0 se déduit de R par la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{CA_0}$ et puisque $(A_0E) \parallel (CM)$, E est l'image de M par cette translation. Donc (ME) est la droite B' parallèle à B passant par E, et $A_0E = CM$.

Ainsi M est un des points d'intersection de la droite B' et du cercle (C) ayant pour centre le point C de B tel que $A_0C = \widehat{A_0E}$ et pour rayon A_0E .

- D'où la construction :

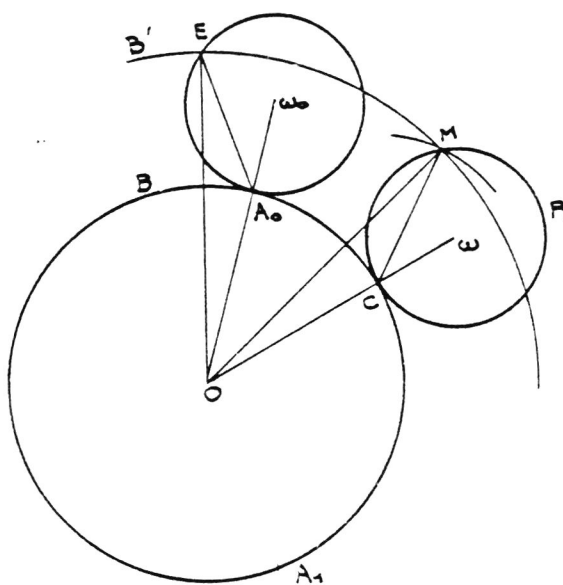
On partage $[A_0A_1]$ en n parties isométriques $[C_jC_{j+1}]$ et R_0 en n arcs de cercle isométriques $\widehat{E_jE_{j+1}}$. Par E_j on trace la droite B'_j parallèle à B . On trace le cercle (C_j) de centre C_j et de rayon A_0E_j qui coupe B'_j . Le point d'intersection M_j de B'_j et de (C_j) tel que (C_jM_j) soit parallèle à (A_0E_j) est le point correspondant de la cycloïde γ .



Remarque :

C_j étant le centre instantané de rotation de π_2 par rapport à π_1 correspondant à M_j , (C_jM_j) est la normale à la courbe γ en M_j . La tangente (M_jT) à γ en M_j est aussi tangente au cercle de construction (C_j) en M_j .

b) de l'épicycloïde



Quand R effectue un tour complet, le point M qui était en A_0 vient de nouveau sur B en A_1 . ($A_0A_1 = 2\pi r$) M décrit ainsi une arche d'épicycloïde.

Cherchons à déterminer les points M de γ .

- Supposons le problème résolu :

Soit E le point de R_0 tel que $\widehat{A_0E}$ soit isométrique à $\widehat{CM}$, donc tel que $A_0E = CM$. Les triangles OA_0E et OCM sont isométriques par construction, et donc $OE = OM$. Ainsi M est un des points d'intersection

1. du cercle de centre O, de rayon OE
2. du cercle de centre C, de rayon A_0E .

- D'où la construction : (fig.9)

On partage l'arc de cercle $\widehat{A_0A_1}$ en n parties isométriques ainsi que le cercle R_0 à partir de A_0 .
On trace le cercle B'_j de centre O et de rayon OE_j .
Puis on trace le cercle (C_j) de centre C_j et de rayon A_0E_j . M_j est un des points d'intersection des deux cercles, ou le point d'intersection quand il n'y en a qu'un (point de tangence).

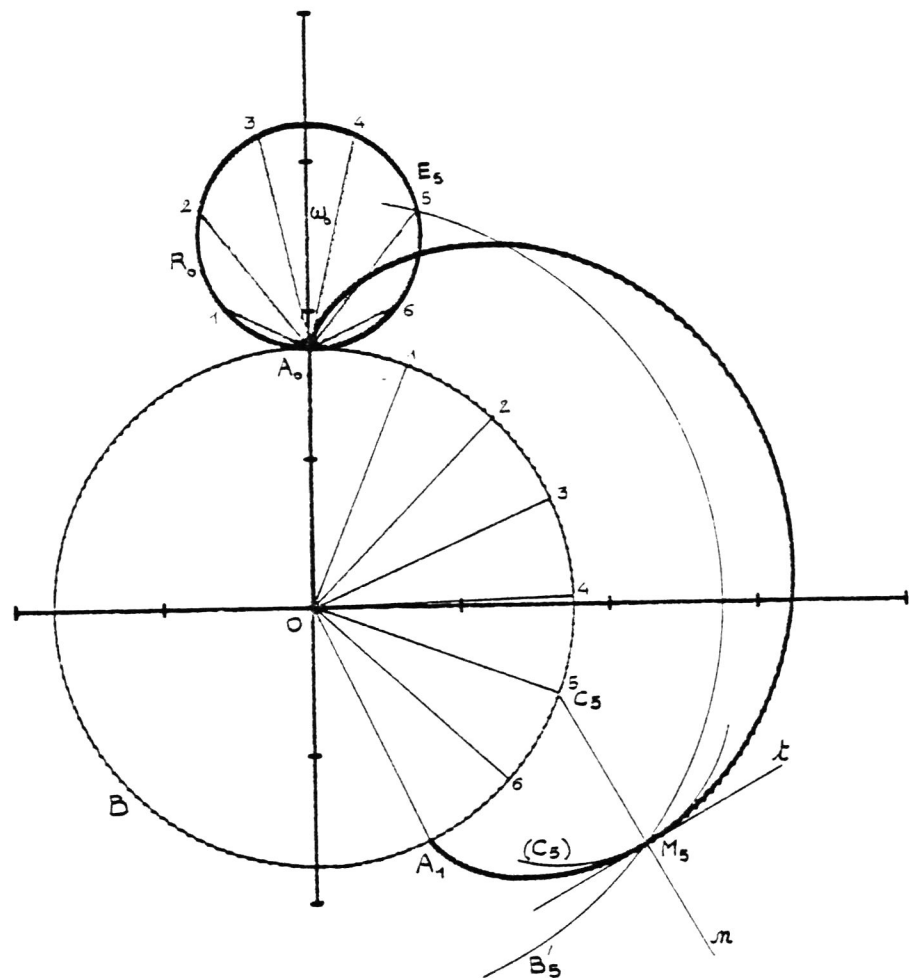


Fig. 9

Remarque :

Cj étant le centre instantané de rotation correspondant à M_j , la droite $(C_j M_j)$ est la normale à γ en M_j . La tangente à γ en M_j est aussi tangente au cercle (C_j) en M_j .

c) de l'hypocycloïde

Quand R effectue un tour complet, le point M qui était en A_0 vient de nouveau sur B en A_1 . ($A_0 A_1 = 2\pi r$) M décrit ainsi une arche d'hypocycloïde.

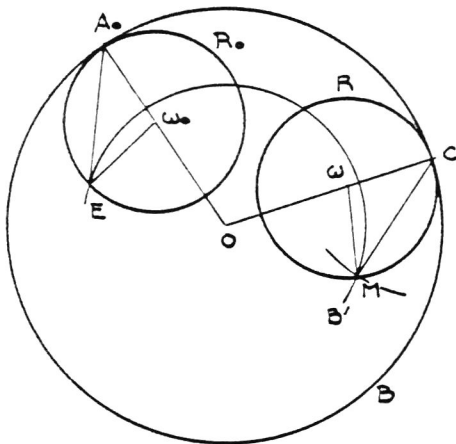
Cherchons à déterminer les points M de $\mathcal{Y}$.

- Supposons le problème résolu :

Soit E le point de R_0 tel que $\widehat{A_0E}$ soit isométrique à $\widehat{MC}$, et donc tel que $A_0E = MC$. Les triangles $OE\omega_0$ et $OM\omega$ sont isométriques par construction. Donc $OM = OE$.

Ainsi M est l'un des points d'intersection

1. du cercle de centre O , de rayon OE
2. du cercle de centre C , de rayon A_0E



- D'où la construction : (fig.10)

On partage l'arc de cercle $\widehat{A_0 A_1}$ en n parties isométriques, ainsi que le cercle R_0 à partir de A_0 .

On trace le cercle $(B'j)$ de centre O , de rayon OE_j .
Puis on trace le cercle (Cj) de centre C_j et de
rayon A_0E_j . M_j est un des points d'intersection de
ces deux cercles, ou le point d'intersection quand
il n'y en a qu'un (point de tangence).

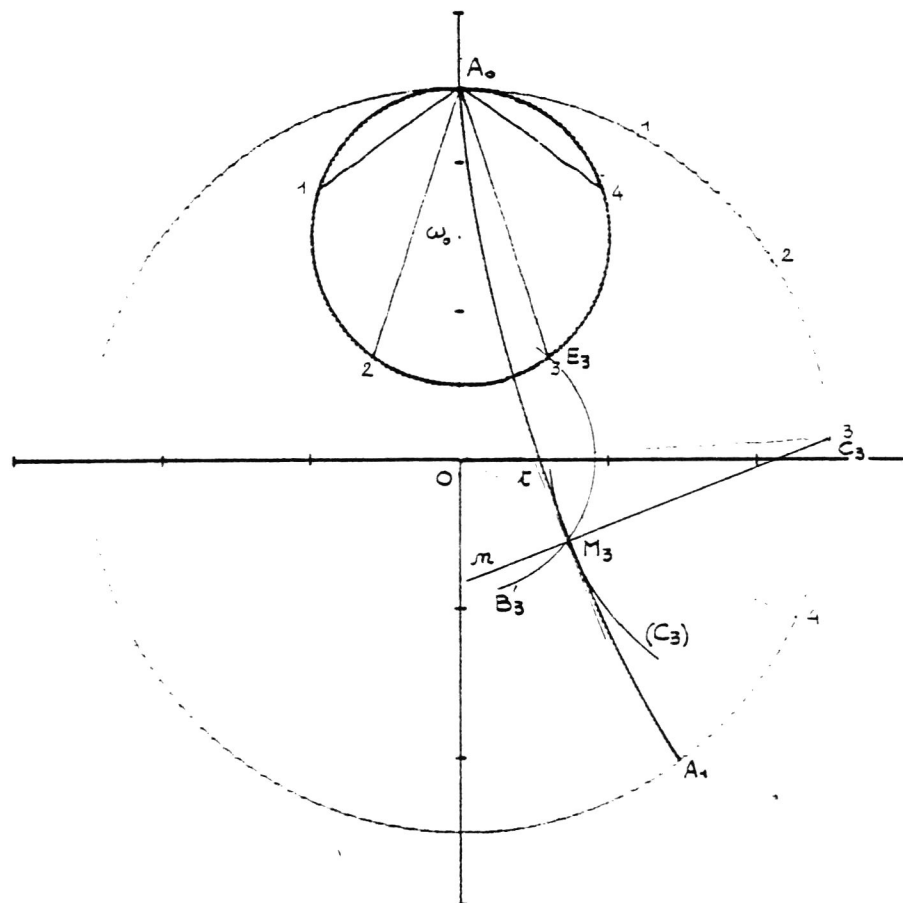


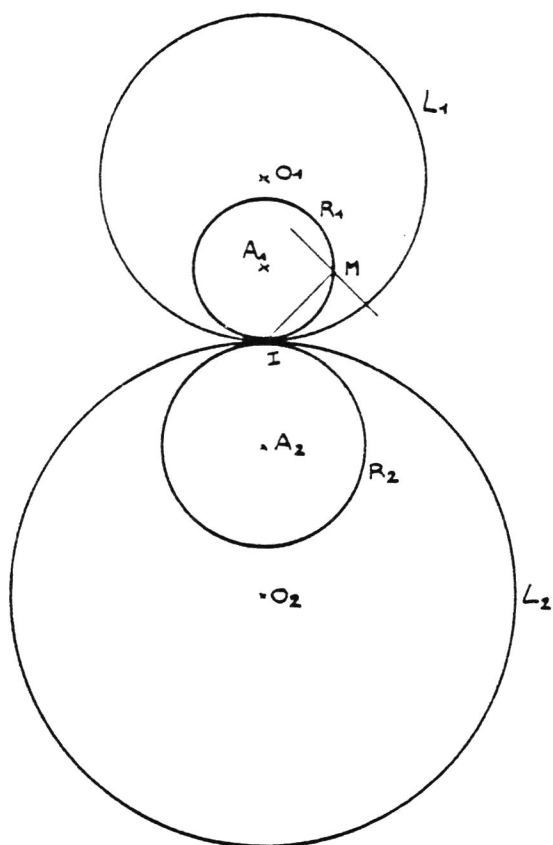
Fig. 10

Remarque :

La tangente à γ en M_j est aussi tangente au cercle (C_j) en M_j pour la même raison que pour l'épicycloïde.

B) Génération des profils : méthode des "roulettes"

On se donne pour cercles primitifs L_1 de centre O_1 et de rayon l_1 , et L_2 de centre O_2 et de rayon l_2 qui roulent sans glisser l'un sur l'autre en I . On choisit pour roulette R l'ensemble constitué des deux cercles R_1 de centre A_1 et de rayon a_1 , avec $2a_1 < l_1$, et R_2 de centre A_2 et de rayon a_2 avec $2a_2 < l_2$ qui roulent sans glisser l'un sur l'autre en I .



1. Considérons le mouvement de roulement sans glissement de R_1 sur L_1 et L_2

- R_1 roulant sans glisser sur L_1 , le point M de R_1 décrit dans π_1 un arc d'hypocycloïde H_1 . La normale en M à cet arc passe par I .
- R_1 roulant sans glisser sur L_2 , M décrit dans π_2 un arc d'épicycloïde E_2 . La normale en M à cet arc passe par I .

Ces deux arcs H_1 et E_2 ont même tangente en M : ils sont conjugués.

2. Considérons le mouvement de roulement sans glissement de R_2 sur L_1 et L_2 .

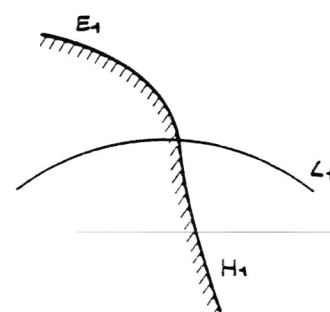
- R_2 roulant sans glisser sur L_1 , M décrit dans π_1 un arc d'épicycloïde E_1 . La normale en M à cet arc passe par I .

- R_2 roulant sans glisser sur L_2 , M décrit dans π_2 un arc d'hypocycloïde H_2 . La normale en M à cet arc passe par I .

Ces deux arcs E_1 et H_2 ont même tangente en M : ils sont conjugués.

Le profil d'une dent de la roue 1 est donc formé

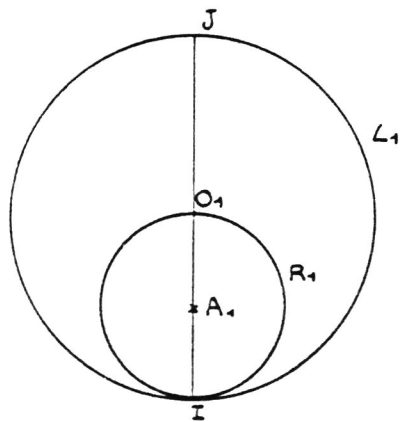
- d'un arc d'épicycloïde E_1
ou "flanc de tête"
- d'un arc d'hypocycloïde H_1
ou "flanc de pied"



Le profil d'une dent de la roue 2 est formé d'une manière semblable.

Remarques :

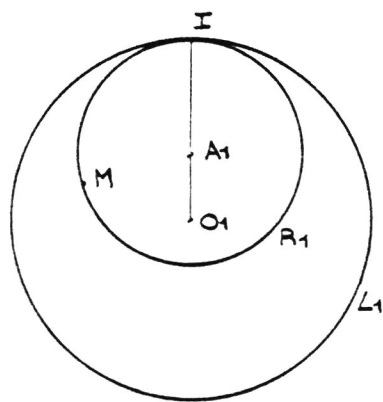
1. On choisit en général un même rayon $a = a_1 = a_2$ pour les cercles R_1 et R_2 .
2. Nous avons supposé que les diamètres $2a_1$ et $2a_2$ de R_1 et R_2 étaient inférieurs respectivement aux rayons l_1 de L_1 et l_2 de L_2 . Dans ce cas, la matière constituant la dent est située dans la convexité de l'arc d'hypocycloïde formant le "flanc de pied" de la dent (en pointillé fig.11, et fig.12-b)
3. Si on suppose que le diamètre du cercle R_1 est égal au rayon du cercle primitif L_1 ($2a_1 = l_1$), l'hypocycloïde que décrit M dans π_1 se réduit à un diamètre



4.

[IJ] du cercle primitif L_1 .

Le "flanc de pied" de la dent est donc le segment [IJ].



Si on suppose que le diamètre du cercle R_1 est supérieur au rayon du cercle primitif L_1 ($2a_1 > l_1$), alors la matière constituant la dent est située dans la concavité de l'arc d'hypocycloïde formant le "flanc de pied" de la dent. La dent ainsi obtenue est affaiblie à la base.

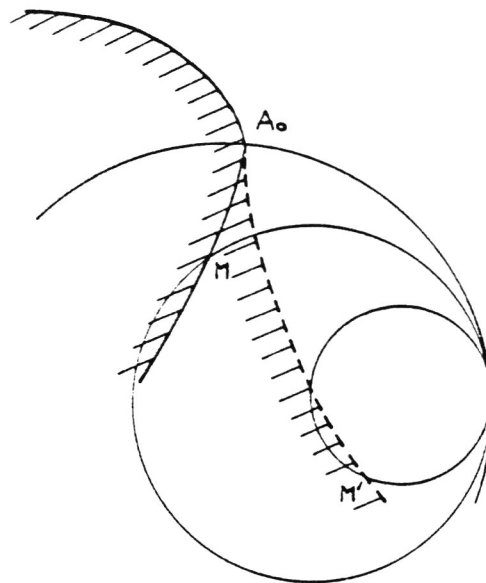


Fig. 11

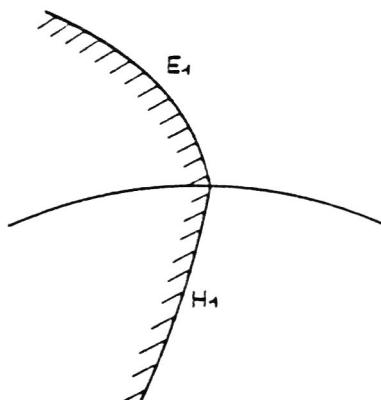


Fig. 12 a

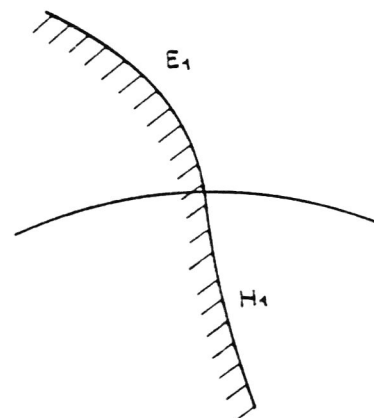


Fig. 12 b

5. Variation d'entraxe :

La figure 13 représente un engrenage épicycloïdal. Lorsque l'entraxe de fonctionnement utilisé est l'entraxe $[O_1 O_2]$ de la génération, on constate sur la figure que les points de contact successifs M_0 (position P_{10} , P_{20}) et M'_0 (position P'_{10} , P'_{20}) entre les deux profils sont tels que les normales en M_0 et M'_0 aux deux profils passent par I, centre instantané de rotation de π_1 par rapport à π_2 , ceci garantissant la conservation du rapport de réduction de l'engrenage.

En revanche, lors d'une variation d'entraxe consistant par exemple (fig.13) à déplacer O_{10} en O_1 , on constate que les normales aux nouveaux points de contact M (position P_1 , P_{20}) et M' (position P'_1 , P'_{20}) des deux profils définissent sur $(O_1 O_2)$ des centres instantanés de rotation de π_1 par rapport à π_2 différents à chaque contact. De ce fait, le rapport de réduction de l'engrenage varie en fonction du temps.

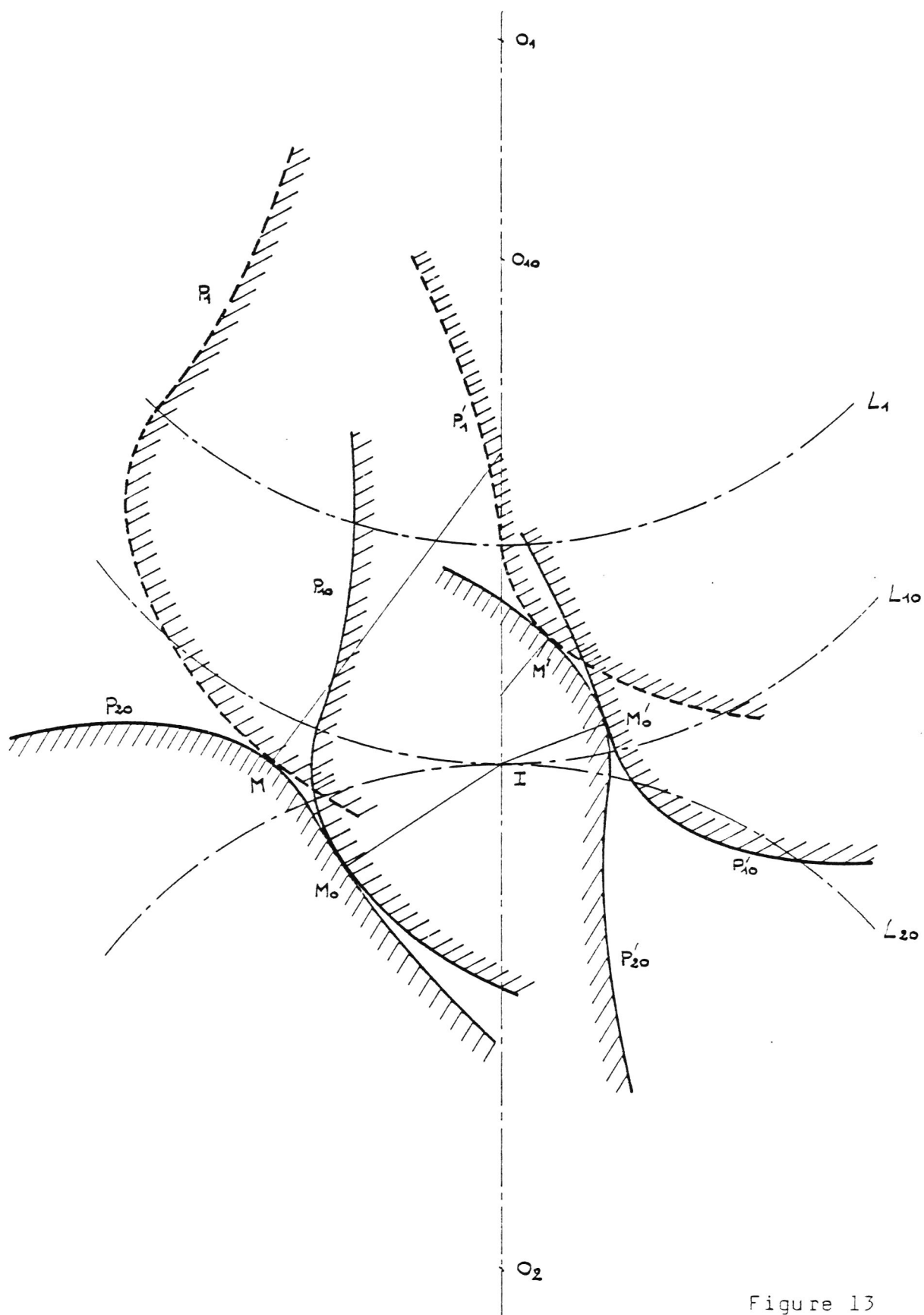
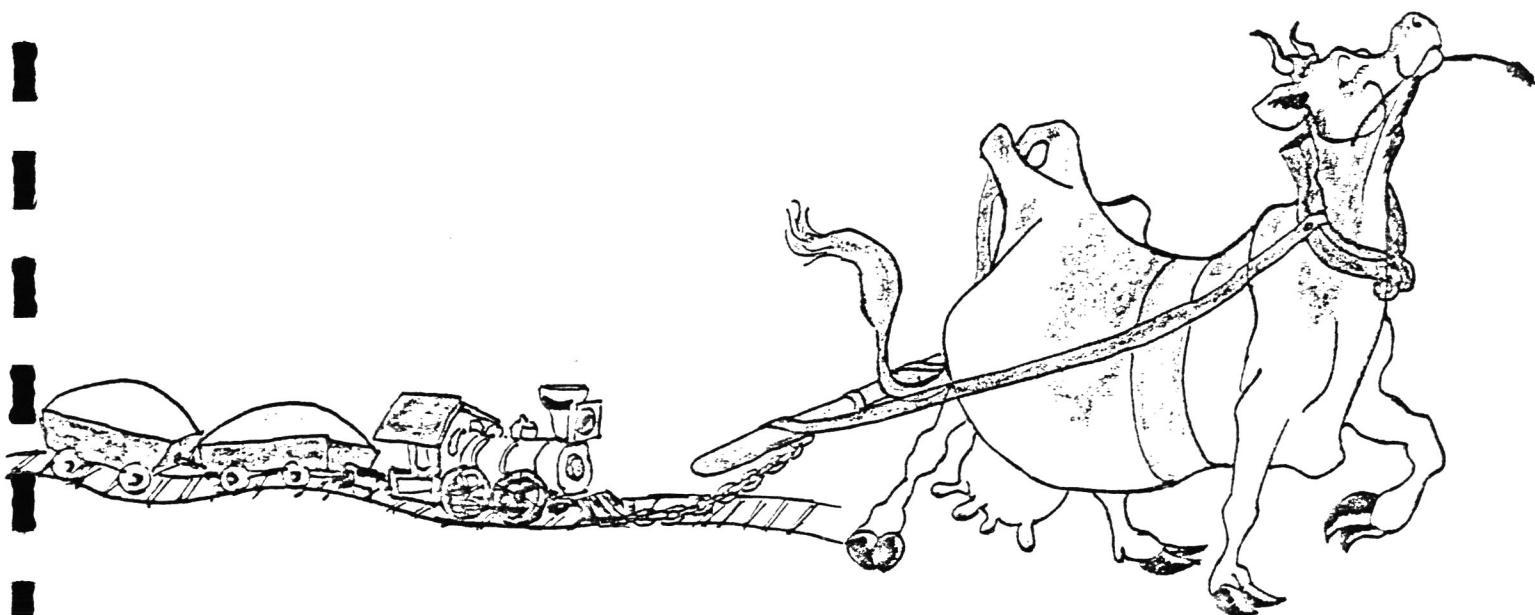
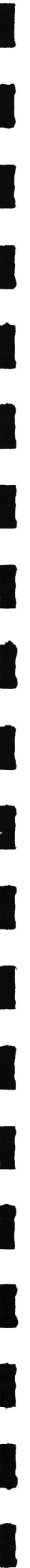


Figure 13

6. Les dentures à profils épicycloïdaux ne sont quasiment plus employées. On leur substitue, dans le but d'améliorer le rendement d'une part et la facilité d'obtention d'autre part, des profils formés d'arcs de cercles et de segments de droite. Ces derniers sont principalement utilisés dans l'industrie horlogère.



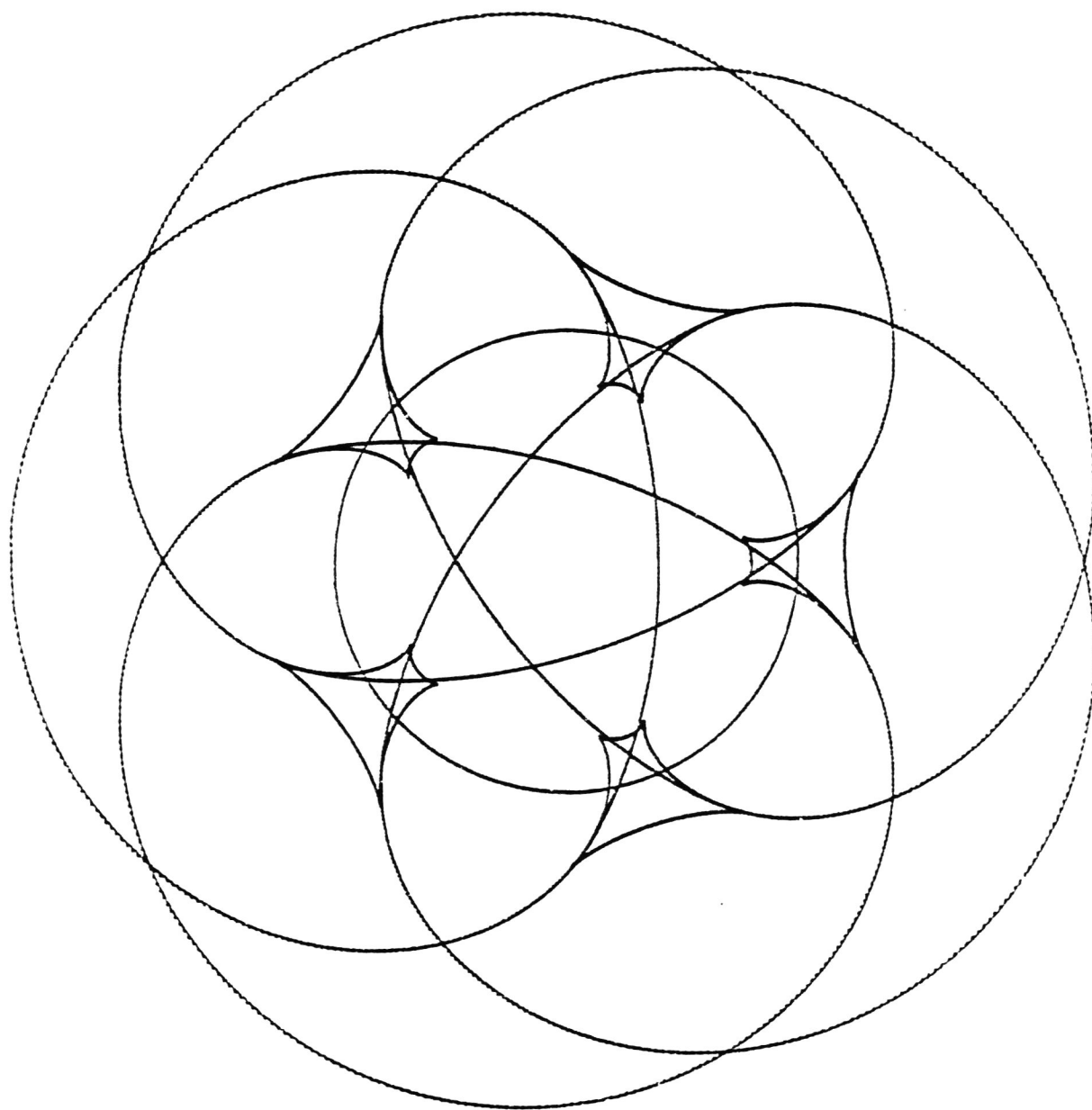
Edgar



C O N C L U S I O N

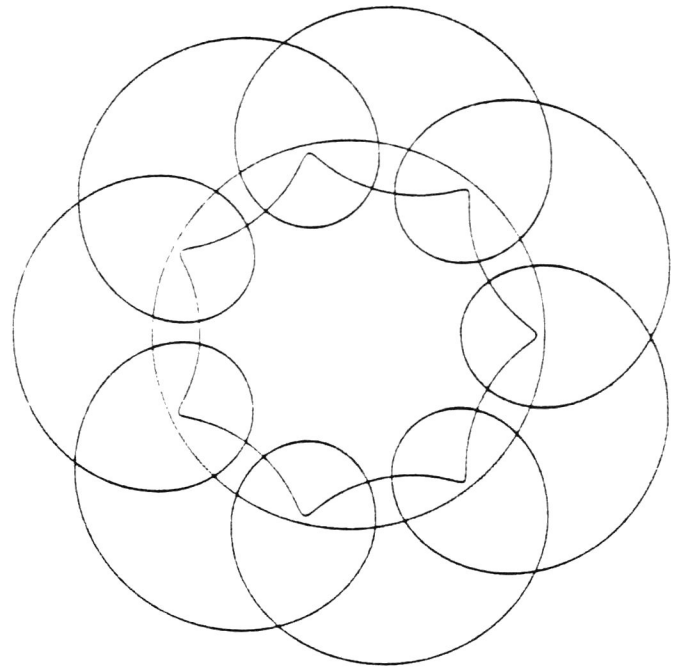
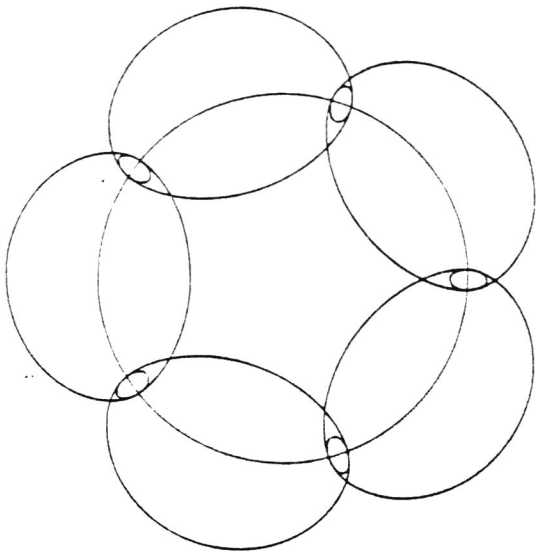
Après ce voyage mouvementé au pays des cycloïdes (dans les plaines arides de la recherche et aussi parmi les oasis de la compréhension) que nous espérons vous avoir fait accomplir sans trop de peine, il est temps de conclure.

Nous sommes conscients des limites de cette étude. De nombreux problèmes ont été évoqués. Tous n'ont pas été résolus; ils peuvent offrir un vaste champ d'investigation à ceux que cette étude n'aura pas rebutés.

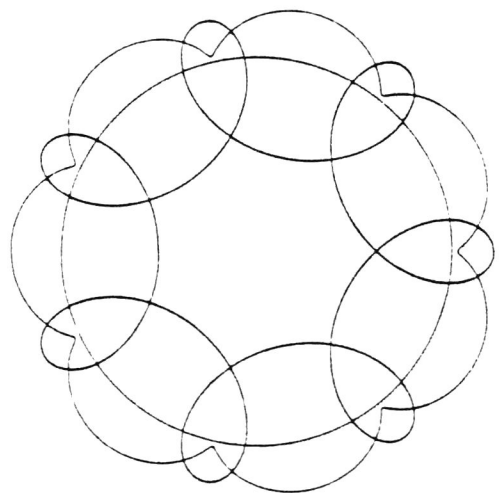
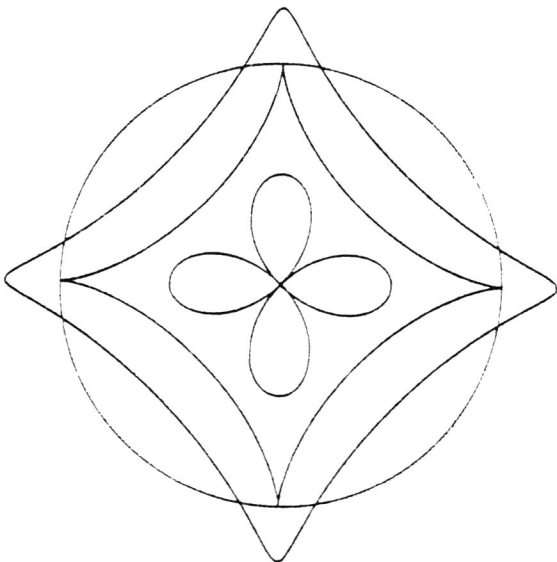


A N N E X E I I

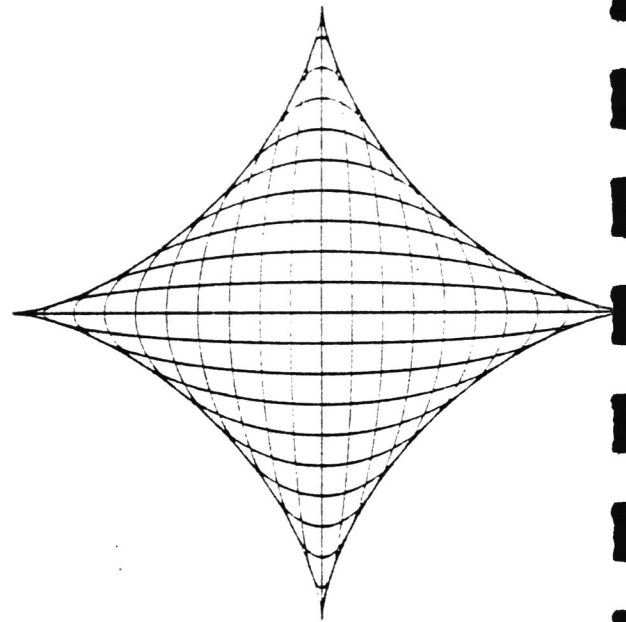
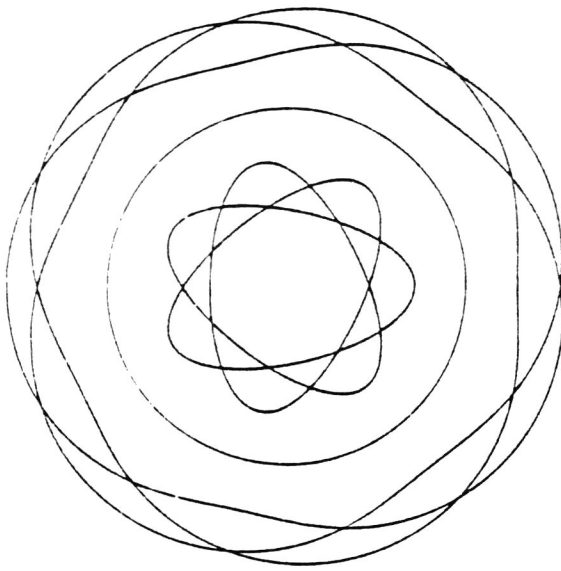




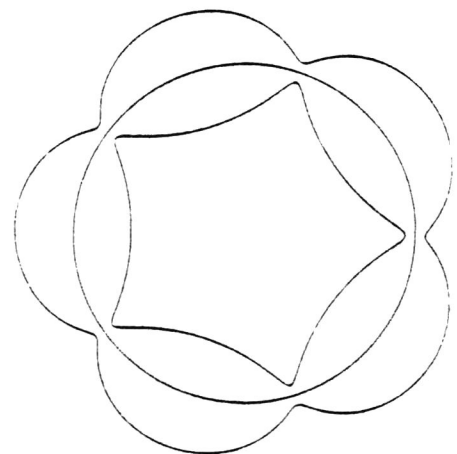
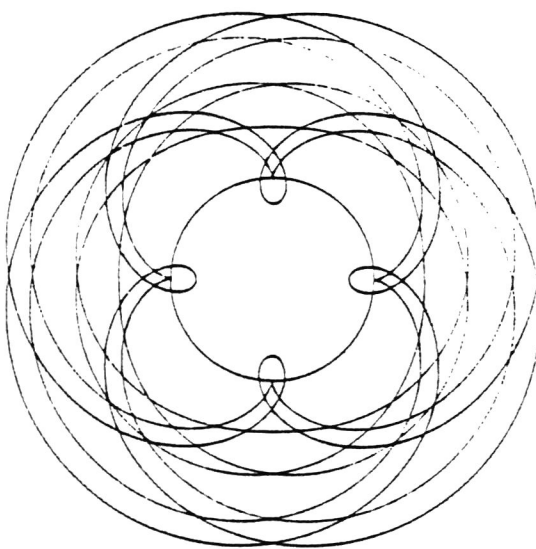
Trajectoires de points liés au cercle
roulant sans glisser sur un cercle

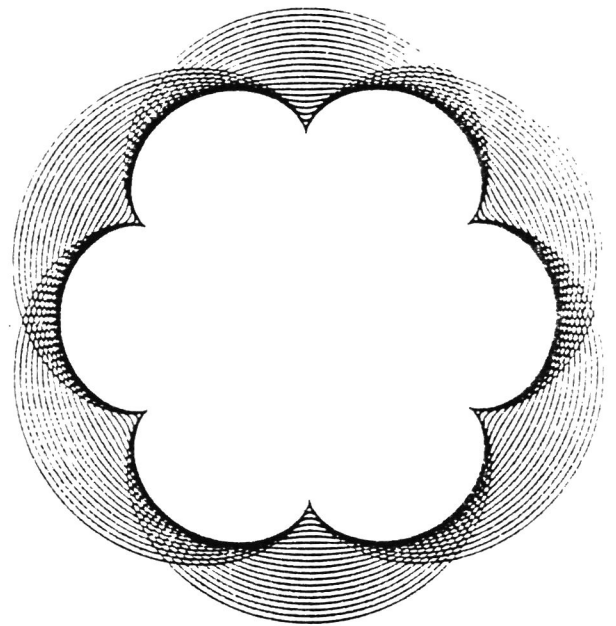
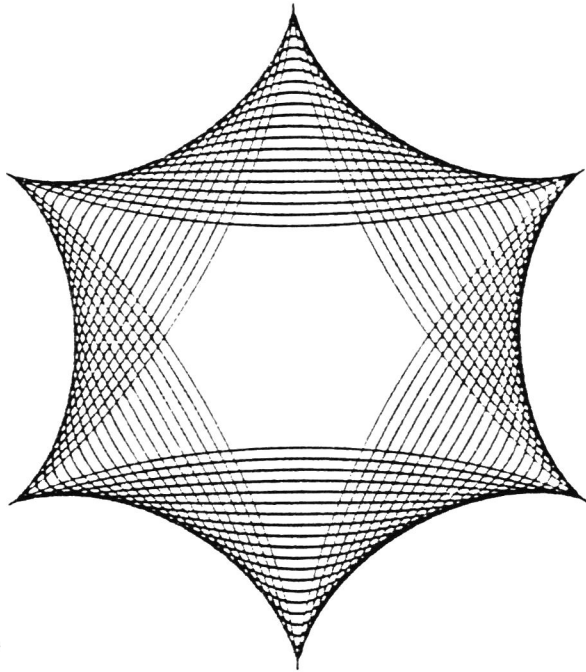


- 91 -

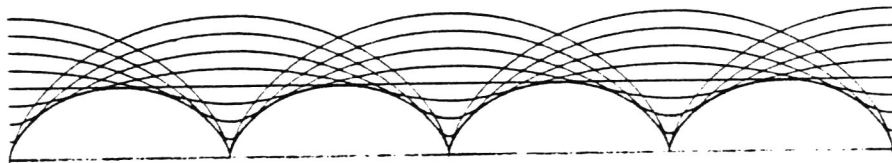


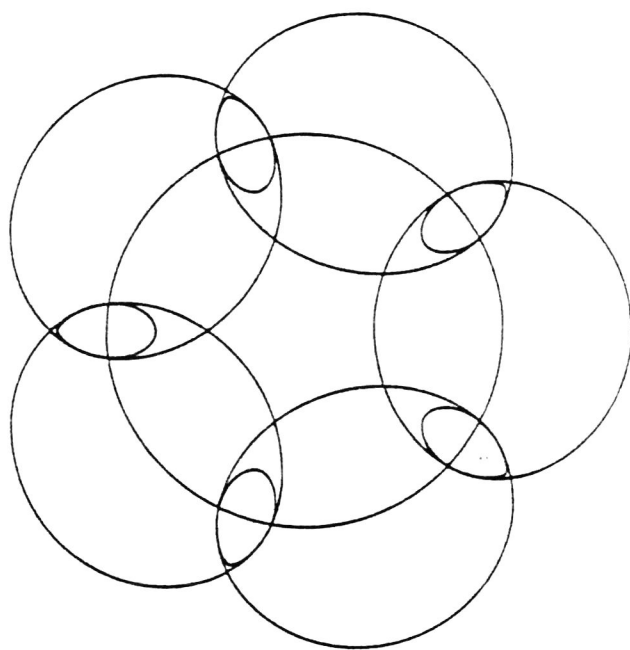
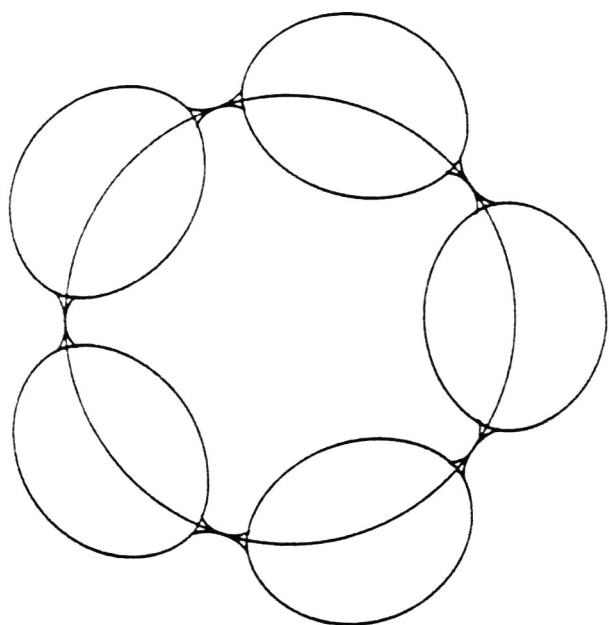
Trajectoires de points liés au cercle
roulant sans glisser sur un cercle



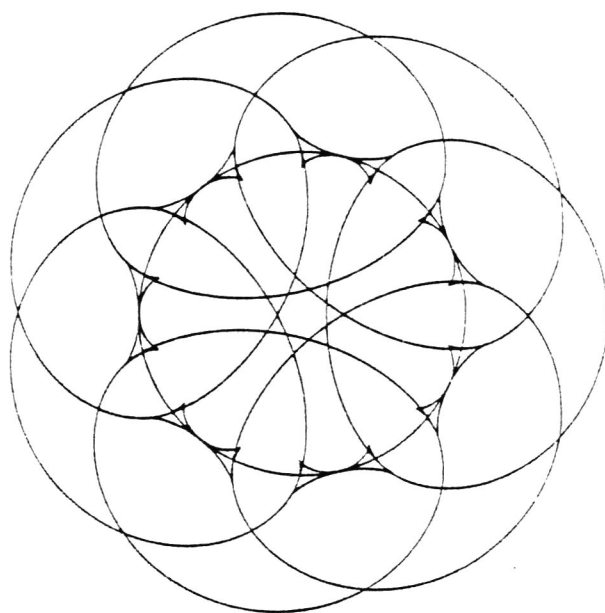
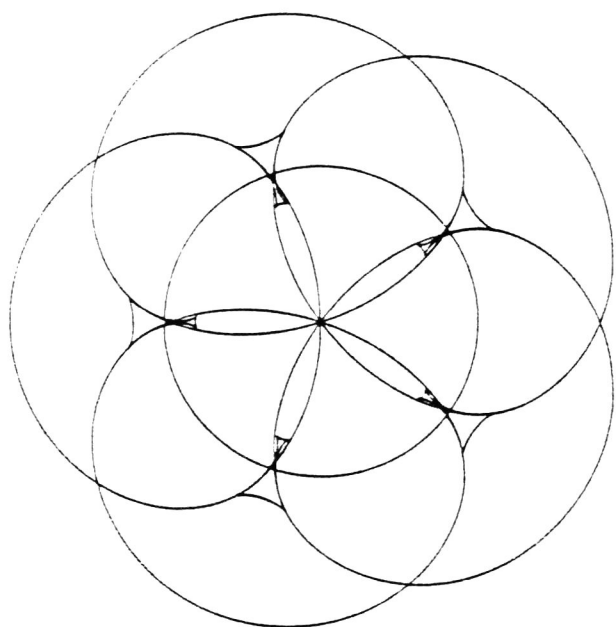


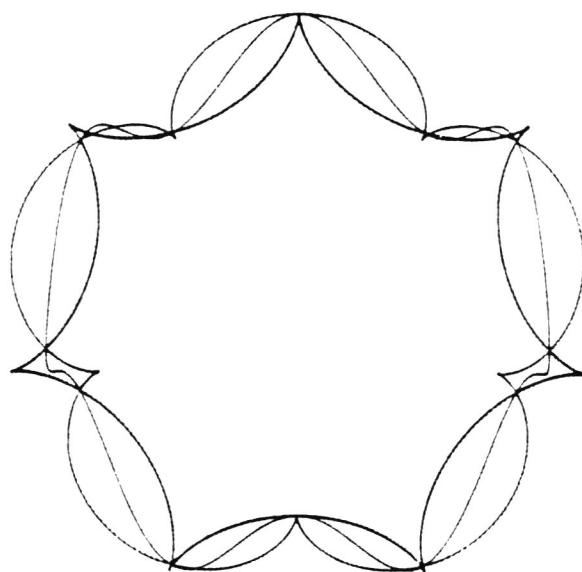
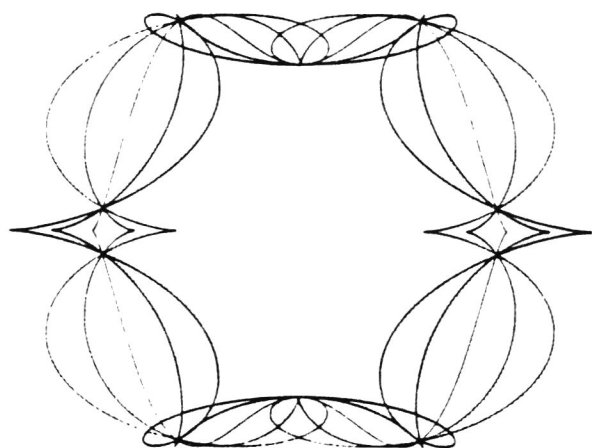
Enveloppes des trajectoires des points d'un
diamètre d'un cercle roulant sans glisser
sur un cercle (intérieurement ou extérieurement)
ou sur une droite



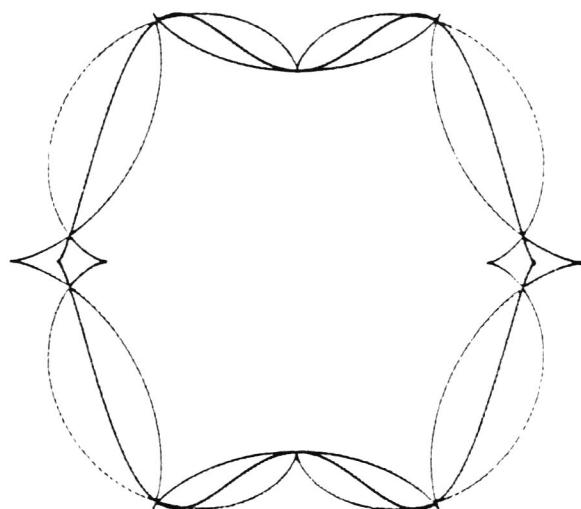
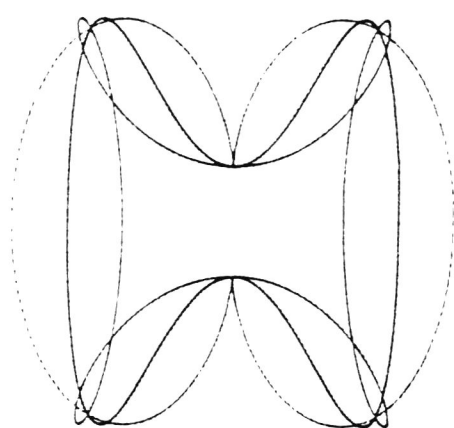


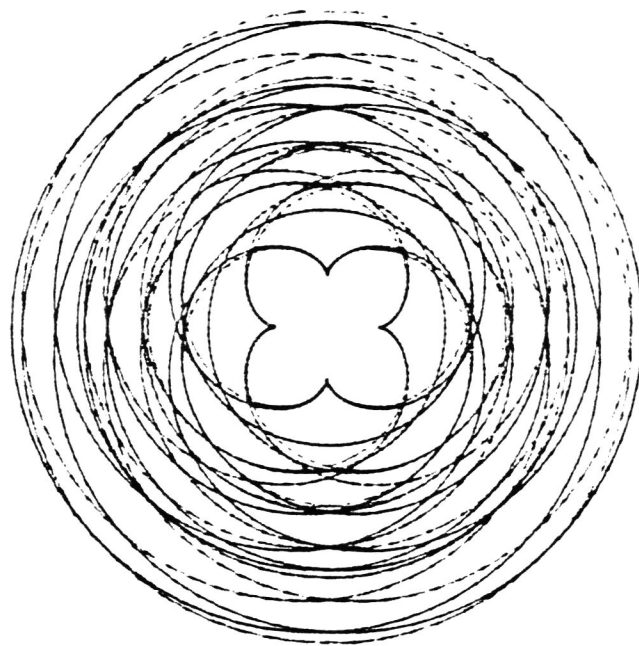
Enveloppes de droites liées au cercle
roulant sans glisser sur un cercle



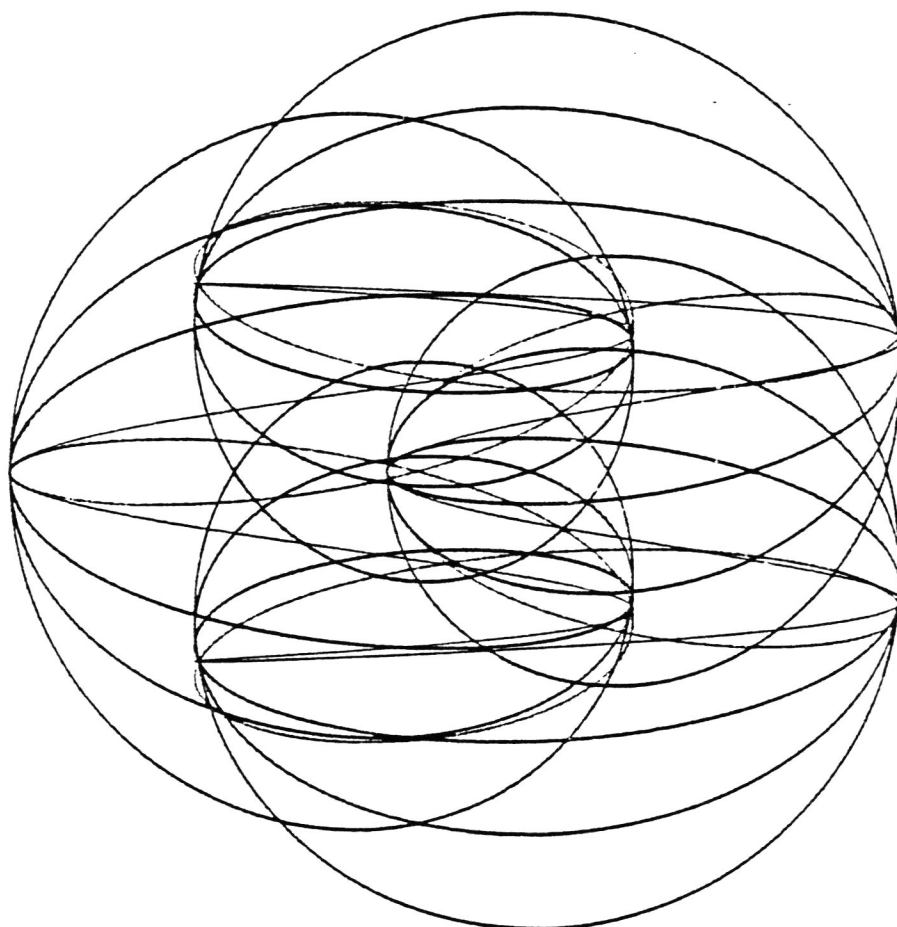


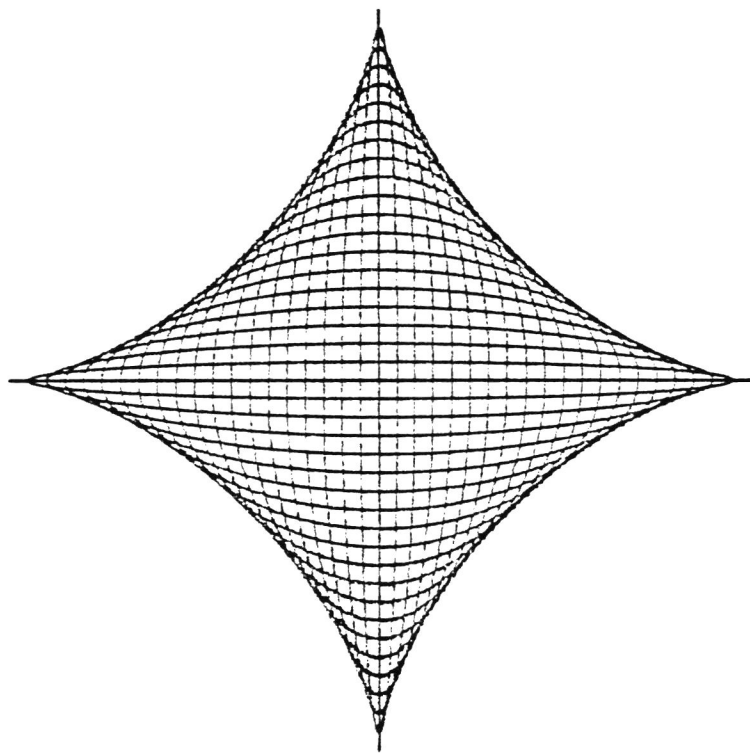
Courbes "paracycloïdales"





Autres courbes !







PUBLICATIONS DE L'IREM DE PARIS VII

- 3 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 4 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 1
- 7 - PAVAGES ET COLORIAGES
- 9 - DES CHIFFRES ET DES NOTES (3/80)
- 10 - CALCUL MENTAL (3/80)
- 11 - CALCUL 1
- 12 - CALCUL 2 (3/80)
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 2
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERS
- 17 - COLORIAGES GEOMETRIQUES
- 19 - COCOTTES, DRAPEAUX ET GEOMETRIE
- 20 - QUI COURT ?
- 21 - ALMANACH
- 22 - FRISES
- 23 - RECURRENCE
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - LES FORCES EN STATIQUE
- 26 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 27 - LE NOMBRE D'OR
- 28 - ROTATIONS ANGLES EN SECONDE
- 29 - LA VITESSE
- 30 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 31 - FONCTIONS ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 32 - LES ANGLES
- 33 - L'INFORMATIQUE/L'ENSEIGNEMENT
- 34 - METROLOGIE
- 35 - ESPACE (1er cycle)
- 36 - AU PAYS DES CYCLOIDES
- 37 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES
- GAZETTE INFORMATIQUE N° 4

Reproduction de textes anciens

- I - DISME (1585)
- II - GEOMETRIE ELEMENTAIRE F. KLEIN (1896)

Editeur : I.R.E.M.

Directeur/Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage : 300 ex.

Dépôt légal : 2-86612-005-1 janv.82

I.R.E.M. PARIS VII - Tour 55/56 - 3ème Etage - 2 Place Jussieu 75005 PARIS.