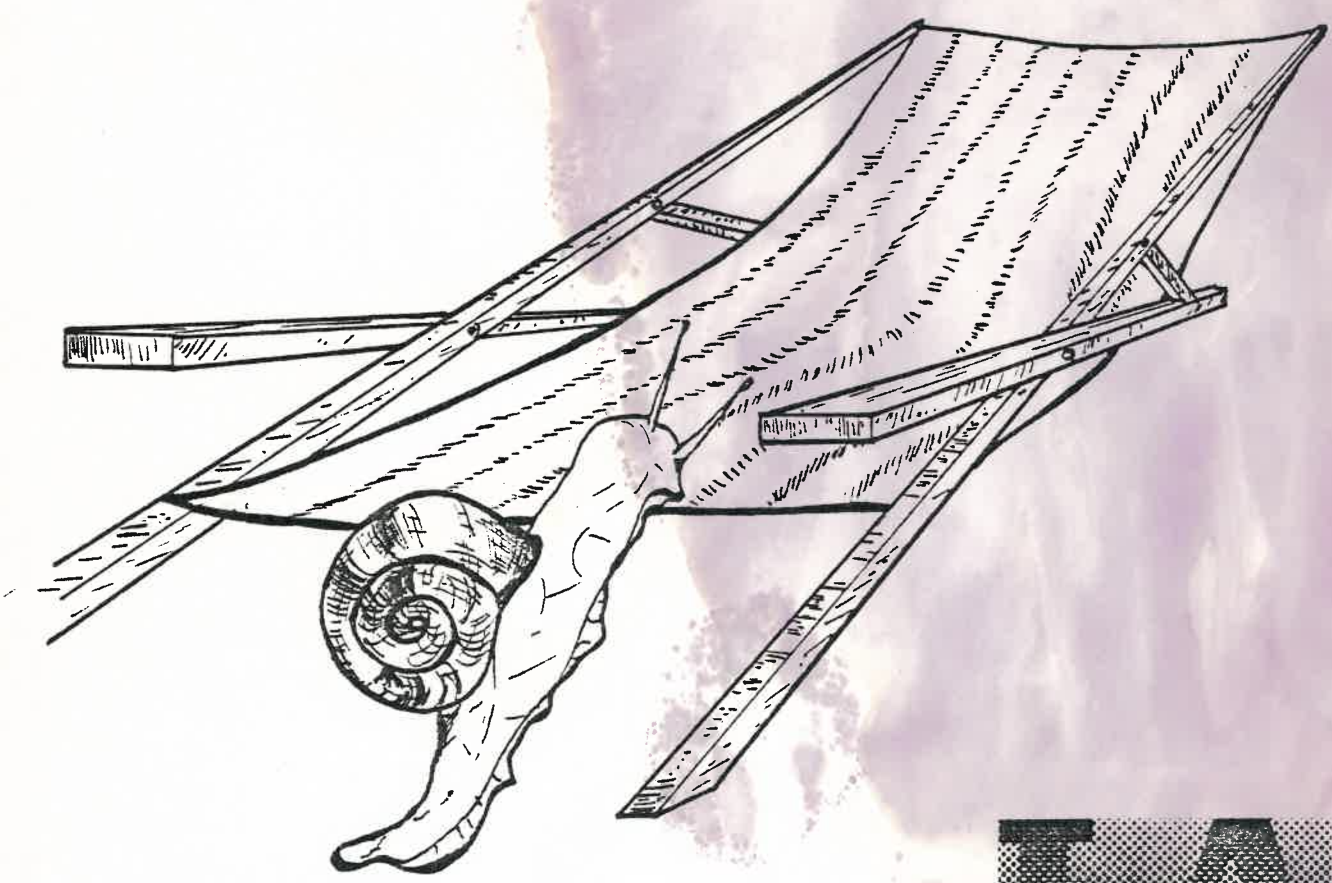


LA VITESSE

I.R.E.M. de PARIS-SUD

Mai 1981

COMPTE-RENDU DU TRAVAIL DU GROUPE DE LIAISON

M A T H - P H Y S I Q U E

G. Aussel

I. Bloch-Poupard

Cl. Boisserie

J. Lafontaine

J.-M. Lazerges

J. Pichaud

A. Revuz

L A V I T E S S E

Etude en 2de, 1ère, Term :

- EXPERIENCES d'INTRODUCTION en T.P. de PHYSIQUE
- RAPPELS des NOTIONS PREREQUISES en MATHEMATIQUE
- UTILISATION des EXPERIENCES pour l'INTRODUCTION de la NOTION de DERIVABILITE des FONCTIONS NUMERIQUES et des FONCTIONS VECTORIELLES
- EXERCICES TYPES de MATHEMATIQUE APPLIQUEE et COMMENTAIRES

SOMMAIRE

.../...

PREAMBULE

QUELQUES COMMENTAIRES GENERAUX QU'IL NE FAUT CONSIDERER NI COMME TRES INQUIETANTS, NI COMME TRES RASSURANTS

Les notions qu'il s'agit de dégager à partir des expériences décrites ci-dessous sont souvent considérées comme très élémentaires : il convient peut-être de rappeler qu'elles mettent en jeu, sous une apparence innocente, des aspects subtils de principe de géométrie et de mécanique.

Deux attitudes peuvent être envisagées à ce propos :
a) ne soulever aucune difficulté, espérer que les élèves n'en soulèveront pas, et admettre comme bien évident ce qui ne l'est, en réalité, pas tellement.
b) faire sentir la relativité des notions introduites, ce qui est certainement beaucoup plus formateur, mais exige une vision épistémologique claire, et peut sembler entraîner assez loin du niveau "élémentaire".

Examinons, par exemple, la notion de mouvement uniforme.

Dans la présentation qui suit, l'expérimentateur n'utilise qu'une horloge. Que se passerait-il s'il changeait d'horloge ? Le mouvement demeurerait-il uniforme ?

Ceci soulève immédiatement plusieurs questions : qu'est-ce qu'une horloge ? A quelles conditions doivent satisfaire deux horloges pour lesquelles les mêmes mouvements sont uniformes, et que nous appellerons horloges compatibles ? Quelle est l'horloge de référence utilisée en Mécanique et qui donne l'heure officielle ? Comment a-t-elle été choisie ?

1) Mouvements uniformes. Horloges compatibles

a) Le principe de toute horloge est d'utiliser le mouvement d'un mobile et de repérer les dates par les positions de ce mobile (et s'il s'agit d'un mouvement périodique de tenir compte du nombre de passages par une position donnée) et l'on peut dans tous les cas schématiser l'horloge au moyen d'une graduation géométrique à pas constant sur une droite décrite par un mobile (réel ou fictif), les durées étant proportionnelles aux longueurs parcourues par le mobile. Cela revient à dire que le fonctionnement d'une horloge repose sur la donnée d'un mouvement uniforme, ou encore que l'on a décrété que le mouvement en question était uniforme, à moins que l'on ait constaté son uniformité en utilisant une autre horloge, mais alors la même question se pose pour cette nouvelle horloge.

b) Pour que deux horloges H et H' soient compatibles, la condition, si t et t' sont les mesures d'une même durée par les deux horloges, est que l'on ait une relation du type $t' = at + b$ avec a réel strictement positif et b réel quelconque.

L'analogie avec les différentes graduations dont on peut munir une même droite "affine" est évidente.

c) Il résulte de a et b, que le fonctionnement d'une horloge H' compatible avec H repose sur un mouvement uniforme par rapport à H, et qu'inversement tout mouvement uniforme par rapport à H fournit une horloge compatible avec H.

La notion de mouvement uniforme est donc relative à une classe d'horloges compatibles entre elles. Une horloge qui utiliserait la chute libre d'une masse devant une graduation verticale régulière ne fournirait pas les mêmes mouvements uniformes que les horloges usuelles.

d) Quelles sont les horloges utilisées en Mécanique ?

L'horloge de référence a été d'abord fournie par le mouvement de rotation de la terre sur elle-même par rapport aux étoiles (ou ce qui revient au même, au mouvement de rotation de l'ensemble des étoiles par rapport à un observateur terrestre).

Les lois de la Mécanique céleste ont été établies relativement à cette horloge. Mais il y a quelques décennies la précision accrue des mesures du temps (où apparurent à la fois des irrégularités et une accélération de tous les mouvements) a posé le dilemme : changer les lois de la Mécanique ou changer d'horloge. C'est cette seconde solution qui fut adoptée : la nouvelle horloge fut fournie d'abord par le mouvement de la terre sur sa trajectoire autour du soleil, avant d'être elle-même relayée par des horloges atomiques.

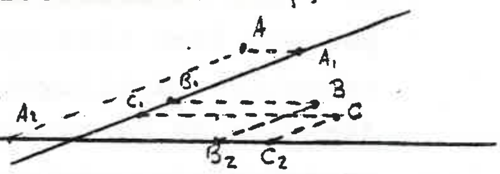
2) <u>Mouvements rectilignes</u>

Des considérations très analogues aux précédentes peuvent être développées à propos de la vérification du caractère rectiligne du graphe espace/temps ou de la trajectoire de certains mouvements qui est effectuée dans certaines des expériences décrites ci-dessous.

Accepter qu'un mouvement réel soit uniforme ou qu'une courbe réelle soit rectiligne suppose <u>à la fois</u> une théorie (géométrie ou mécanique) et la satisfaction de conditions expérimentales d'autant plus difficile à réaliser qu'on exige plus de précision. C'est ainsi que la Mécanique Newtonienne enseigne que par rapport à des axes (galiléens) ayant pour origine le centre d'inertie du système solaire et passant par des étoiles données, le centre d'inertie d'un corps qui n'est soumis à aucune force (extérieure) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Cela donnerait des droites et une horloge absolues (pour la Mécanique Newtonienne !), mais l'expérience est-elle réalisable ? En outre, saurait-on que le mouvement est rectiligne uniforme parce qu'aucune force ne s'exerce sur le corps, ou qu'aucune force ne s'exerce sur le corps parce que le mouvement est rectiligne uniforme, ou encore définira-t-on le centre d'inertie comme le point animé d'un mouvement rectiligne uniforme, lorsqu'aucune force ne s'exerce sur le corps ? C'est ce dernier point de vue qui est adopté dans la suite, et qui plus est, en prenant des axes liés à la terre. Est-ce illégitime ? En toute rigueur, aux yeux de la Mécanique Newtonienne, oui ! car cela revient à négliger l'accélération de Coriolis, due au mouvement de la terre par rapport aux axes galiléens.

Cette vérification du caractère rectiligne d'un ensemble de points repose sur celle de la constance des taux d'accroissement de certaines fonctions et utilise une réciproque du théorème de Thalès. Le schéma est le suivant : on dispose de deux droites D_1 et D_2 et des directions des droites parallèles à D_1 et D_2. Un ensemble de points est reconnu comme formant une droite si, pour trois positions quelconques A, B, C du point, leurs projections A_1, B_1, C_1 sur D_1 parallèlement à D_2, et leurs projections A_2, B_2, C_2 sur D_2 parallèlement à D_1, vérifient

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{B_1 C_1}} = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{B_2 C_2}}$$



Le caractère de droite ayant été attribué à D_1 et D_2, et à leurs parallèles, on a donc par cette réciproque de la propriété de Thalès le moyen de déterminer les autres courbes du plan qui sont aussi des droites. Il y a encore là une relativité : on obtient les droites du plan en supposant initialement que D_1 et D_2 sont des droites (une modification de D_1 et D_2 et de leurs parallèles, comme on peut en imaginer une en faisant un dessin sur une feuille de caoutchouc, puis en soumettant cette feuille à des tensions qui la déforment, modifiera aussi ce que l'on obtiendra comme droites dans le plan).

De même que pour décider qu'un mouvement est uniforme, il faut une horloge de référence, il faut, pour décider du caractère rectiligne d'une courbe, avoir des droites de référence.

Cependant le calcul montre que pour un point se déplaçant dans un plan horizontal à la latitude de Paris, et dont la pesanteur aura été compensée par un dispositif quelconque (table à coussin d'air en l'espèce), le mouvement n'est pas rectiligne uniforme mais circulaire uniforme, le rayon du cercle ayant pour mesure environ 10^4 fois celle de la vitesse (l'unité de temps étant la seconde), c'est-à-dire que pour un point animé d'une vitesse de 1 cm/sec, le cercle aura un rayon de 100 m, et dans les conditions de l'expérience, ne pourra être distingué d'une droite ; et il en sera a fortiori de même pour une vitesse moins faible.

D'autre part, le point de vue adopté revient à donner du centre d'inertie une définition "dynamique" et non sa définition comme barycentre. Y a-t-il ici encore à se poser une question de légitimité ? La seule réponse raisonnable c'est que, quelle que soit la définition dont on parte, il faudra, tôt ou tard, montrer qu'elle définit le même point que l'autre.

Pour en revenir à la recherche de "droites absolues" on pourrait penser qu'elles sont fournies par les "rayons lumineux", et c'est bien ce qui correspond à de nombreuses pratiques (lignes de visée, menuisier qui regarde une planche par le bout, ...). Cependant une science plus exigeante considérera que c'est dans le vide (ou dans un milieu homogène), et loin de toute masse importante que les rayons lumineux sont rectilignes. Mais ici encore, dispose-t-on de milieux homogènes de grande dimension et saura-t-on conclure que tel rayon est rectiligne parce que le milieu qu'il traverse est homogène, ou que le milieu est homogène parce que les rayons qui le traversent sont rectilignes ? Qui voudrait dans de telles situations atteindre des certitudes absolues se heurterait à d'inévitables cercles vicieux, mais celui qui n'oublie pas qu'il travaille non dans l'absolu, mais avec des modèles dont la plausibilité peut, dans les bons cas, équivaloir à une certitude pratique, échappe à ces cercles vicieux et est toujours en mesure d'améliorer ses modèles. La science se construit pas à pas. La réflexion sur l'expérience (locale et très fragmentaire au début) conduit à l'édification de théories (partielles et très restreintes au début). L'expérimentation a un triple rapport avec les théories :

a) elle s'appuie sur les théories, en ce sens que ce sont les théories (élaborées, ou en cours d'élaboration et n'ayant que le statut d'hypothèses) qui permettent d'organiser l'expérimentation.

b) L'expérimentation matérialise des concepts de la théorie que celle-ci a forgée par réflexion sur les observations, mais elle le fait avec une approximation qui n'est jamais réductible à l'identité.

c) L'expérimentation teste les théories, avec l'approximation qu'elle est capable d'assurer.

La multiplication des points de vue et des expérimentations rend de plus en plus plausible la bonne adéquation des téhories à la réalité, sans jamais pouvoir permettre d'affirmer que la théorie donne une image absolument fidèle de la réalité.

La Science ne demande pas la foi simpliste et absolue du charbonnier, mais la plausibilité croissante de ses résultats et l'efficacité croissante de ses modèles ne doit pas être l'objet du scepticisme auquel peut conduire la ruine inéluctable de la foi du charbonnier.

o

o o

O - AVERTISSEMENT ET OBJECTIFS

Les élèves de seconde ont sur la vitesse des idées assez vagues : ils semblent familiers avec le calcul de la vitesse moyenne d'un mobile en déplacement rectiligne entre deux points, mais ils confondent volontiers le concept de vitesse avec la cause du mouvement.

Ils ne connaissent pas le principe de l'inertie, et ils ne possèdent pas la notion de limite d'une fonction numérique en un point, mais ils acceptent facilement l'idée de "vitesse instantanée" ou de vitesse à l'instant t donnée par les compteurs de vitesse portés par les véhicules : il serait intéressant de leur demander s'ils peuvent concevoir un appareil de mesure de la vitesse de passage d'un véhicule en un point donné...

L'objectif des expériences et de l'exposé qui les accompagne est de donner aux élèves de seconde le concept de mouvement, uniforme ou non, puis de les conduire au concept de vitesse instantanée (à la date t, en un point d'abscisse x) et enfin de leur faire appréhender l'idée de passage à la limite, sans toutefois l'opérer du point de vue mathématique. Celui-ci sera introduit en classe de première avec la reprise des expériences de physique de seconde par le professeur de mathématique comme introduction à la dérivabilité des fonctions numériques. Quant à la notion de vitesse comme grandeur vectorielle, une première approche est faite en seconde (voir troisième expérience) et est reprise en terminale ou le cours de cinématique fait par les professeurs de mathématique et physique vient seulement donner une modélisation d'un phénomène connu. Le professeur de physique de terminale utilise alors ce modèle pour décrire les phénomènes qu'il expose, et il vérifie expérimentalement sa cohérence.

o

o o

I - EXPERIENCES ET T.P. DE PHYSIQUE EN SECONDE

I.A. - Ière SERIE D'EXPERIENCES - VITESSE INSTANTANEE MOUVEMENT RECTILIGNE

1. Introduction :

En ce qui concerne la notion de mouvement uniforme (rectiligne) telle qu'elle est présentée aux élèves de seconde ci-dessous, on remarquera que cette présentation suppose que l'expérimentateur n'utilise qu'une seule horloge, et que par conséquent l'uniformité constatée pour le mouvement étudié est entièrement relative à cette horloge. Il conviendrait donc de bien faire remarquer aux élèves que, en réalité, le mouvement uniforme est un phénomène intrinsèque. En effet en seconde on pourrait envisager plusieurs horloges pour mesurer les durées ce qui ne serait pas une preuve absolue, mais permettrait de donner quelques inquiétudes et de suggérer quelques attitudes sur la relativité... (voir commentaires généraux p.3)

Seule la caractérisation dynamique d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire l'énoncé du principe de l'inertie, donne une formulation intrinsèque du concept de mouvement rectiligne uniforme : c'est le mouvement d'un point matériel qui est soumis à un système de forces nulles. Mais cet aspect de la question ne sera pas abordé ici.

Du point de vue mathématique, la seule chose que les élèves doivent posséder en seconde pour aborder avec profit les expériences proposées est la réciproque du théorème sur la constance du taux d'accroissement d'une fonction affine, ceci afin de formuler des hypothèses convenables avant d'écrire éventuellement l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme ou de tracer le graphe complet espace/temps.

Enfin il est remarquable que la relativité de la détermination de l'uniformité d'un mouvement rappelle la relativité de la notion de droite en géométrie (voir commentaires généraux p.3) c'est en effet la même démarche qui est faite par le physicien et par le mathématicien. Le physicien suppose l'existence d'une horloge animée d'un mouvement uniforme capable de fournir des mesures de durées égales, et il en déduit l'uniformité d'un autre mouvement. En effet, dire que tel mouvement pour lequel on mesure des vitesses moyennes égales entre elles quelle soit la durée ou le déplacement considéré est uniforme, équivaut à dire que le mouvement est uniforme par rapport à l'horloge, ou que ce mouvement peut lui-même être utilisé comme horloge.

I.A.2. Prérequis de mathématique :

Avant d'aborder le T.P. de physique qui suit, l'élève doit être capable de :

1) représenter des couples du graphe d'une fonction numérique par des points dans un repère cartésion quelconque ;
2) écrire la définition du taux d'accroissement d'une fonction numérique entre deux points et faire les calculs justes de ces taux ;
3) écrire la définition d'une fonction affine réelle ($x \longmapsto ax + b$) ;
4) démontrer le théorème de caractérisation des fonctions affines :
   (i) f affine (sur I) $\Longrightarrow \tau_f$ constant (sur I)
   (ii) τ_f constant (sur I) $\Longrightarrow$ f affine sur I
5) rappeler le théorème de Thalès ;
6) montrer que d'après Thalès et (i) les points du graphe d'une fonction affine sont alignés ;
7) montrer que réciproquement d'après Thalès et (ii) si les points du graphe d'une fonction sont alignés alors cette fonction est affine ;
8) utiliser les propriétés précédentes pour écrire l'équation horaire du mouvement ou tracer la droite du diagramme espace/temps en formulant les hypothèses convenables d'extrapolation des résultats de l'expérience (taux d'accroissement sensiblement constant, ou points du graphe sensiblement alignés).

R e m a r q u e :

a) le théorème de Thalès peut s'exprimer en disant que étant donnée une graduation affine sur une droite, la projection de cette graduation sur une autre droite parallèlement à une troisième droite est une graduation affine.

Il pourra être intéressant de rapprocher ce fait de la définition d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à une horloge : une horloge pouvant être considérée comme un appareil fournissant une graduation affine du temps ; le mouvement d'un point matériel est par définition uniforme si et seulement si il fournit une autre graduation affine du temps.

Par conséquent on peut définir l'analogie suivante : une droite est à l'ensemble des courbes du plan ce que le mouvement uniforme est à l'ensemble des mouvements, à savoir une entité caractérisée par la constance des rapports de "projection", projections dans l'espace ou projection dans le temps...

b) On peut aussi faire observer que du point de vue mathématique le théorème de Thalès (éventuellement pris comme axiome) est équivalent à l'affirmation selon laquelle dans un repère cartésien quelconque les points représentatifs des couples du graphe d'une fonction affine sont alignés.

c) <u>En pratique</u>, on pourra surtout faire retenir aux élèves que dans l'expérience :

- un mouvement est <u>dit</u> uniforme s'il répond à l'un des deux critères équivalents suivants :
  - .1. Constater l'alignement approximatif des points du diagramme espace/temps
  - .2. Constater la constance approximative des taux d'accroissement

N.B. Dans les deux cas il faut admettre que l'on peut étendre la propriété à un intervalle I de R pour pouvoir en déduire que la position du mobile est une fonction affine du temps sur l'intervalle I. La même remarque sera faite au II.2 lors de la définition de la dérivabilité des fonctions numériques.

I.A.3. Copie de la feuille de T.P. distribuée aux élèves

Physique T.P. n°1 - Notion de vitesse

Vitesse : mot d'usage courant qui est employé dans des sens différents ; consultez à ce sujet plusieurs dictionnaires. On se propose au cours de cette manipulation de préciser le sens de ce mot.

1ère EXPERIENCE

Un mobile est lancé sur l'aérobanc horizontal. On note les dates de passage du mobile par des positions successives distantes les unes des autres de 10 cm.

a) Faire un schéma de l'aérobanc (échelle 1/10ème) et décrire l'expérience.

b) Dresser le tableau : position du mobile/date du passage par cette position.

c) Calculez pour différents couples de mesures les rapports de la forme $\dfrac{x_j - x_i}{t_j - t_i}$. Que concluez-vous ?

Au cours d'une séance de travail Math-Physique, ce travail peut être complété par :

d) Représenter sur une feuille de papier millimétré le graphe de la fonction $t_i \longmapsto x_i$. Choisir des échelles convenables pour la lecture sur les deux axes. Que remarquez-vous ?

2ème EXPERIENCE

Un mobile est mis en mouvement sur l'aérobanc par la chute ralentie d'une masse marquée reliée au mobile par un fil passant sur une poulie. La position de départ est choisie de telle sorte que la date $t = 0s$ corresponde à l'instant du départ. L'expérience se déroule en trois temps.

(1) La masse est arrêtée après 30 cm de chute, le mobile continue son mouvement sur sa lancée.

(2) La masse est arrêtée après 60 cm de chute, le mobile continue son mouvement sur sa lancée.

(3) La masse est arrêtée après 90 cm de chute, le mobile continue son mouvement sur sa lancée.

a) Comparer les trois enregistrements :

Qu'est-ce qui est commun aux trois enregistrements ?

Qu'est-ce qui est commun aux deux derniers enregistrements ?

Qu'est-ce qui est commun à chacun de ces enregistrements et à celui de la première expérience ?

b) Pouvez-vous dire quelle est la vitesse du mobile à 30 cm du point de départ dans chacun des trois cas ? si oui, donner sa valeur.

c) Pouvez-vous dire quelle est la vitesse du mobile à 60 cm du point de départ dans chacun des trois cas ? si oui, donner sa valeur.

d) Pourrait-on déterminer la vitesse du mobile à 30 cm du point de départ et à 60 cm du point de départ si on ne disposait que du troisième enregistrement ? oui ou non et pourquoi ?

Au cours d'une séance de travail Math-Physique ce travail peut être complété par :

e) Représenter le graphe des fonctions $t_i \longmapsto x_i$ dans un même repère pour chacune des trois expériences. Que remarquez-vous ?

f) D'après cette expérience, pouvez-vous définir la vitesse de passage du mobile en un point quelconque de sa trajectoire ? Oui ou non ? Pourquoi ? Comment ?

I.A.4. Commentaire sur les objectifs des deux expériences

La première expérience a pour but de faire découvrir aux élèves un mouvement rectiligne uniforme. Le mouvement rectiligne cache l'aspect vectoriel de la vitesse qui apparaît ici comme le quotient d'une distance exprimée en mètre (unité de longueur) par une durée exprimée en unité de temps (la seconde). L'utilisation d'une calculatrice de poche supprime l'obstacle de la division.!!!

Le principe de l'inertie est constamment sous-jacent, mais comme il n'est pas objet de cette étude nous n'en parlons pas à cette occasion (d'autres expériences permettront de le définir).

La deuxième expérience a pour but de faire découvrir aux élèves la notion de vitesse instantanée. Pendant une première phase du mouvement la vitesse augmente de la même façon dans les trois expériences, puis reste constante comme dans la première étude. On cherche à déterminer la vitesse du mobile à l'instant de son passage par une position déterminée alors que le mouvement change de nature. La vitesse qui était une fonction croissante du temps devient à cet instant constante.

Les mesures et le calcul conduisent à des variations des rapports (déplacement/durée), les élèves ont du mal à admettre qu'il y a égalité : les chiffres n'étant pas exactement les mêmes mais oscillant autour d'une valeur moyenne de façon aléatoire. On peut pallier cette difficulté en faisant constater aux élèves la régularité des créneaux sur le ruban horloge ; en effet cette régularité graphique approximative ne soulève pas, elle, de difficulté dans l'esprit des élèves...

Donc pour évaluer, avec le maximum de précision, la durée de chaque intervalle, on peut proposer aux élèves de diviser la durée totale du parcours correspondant à la partie régulière de l'enregistrement par le nombre de créneaux, plutôt que de chercher une valeur moyenne des mesures effectuées.

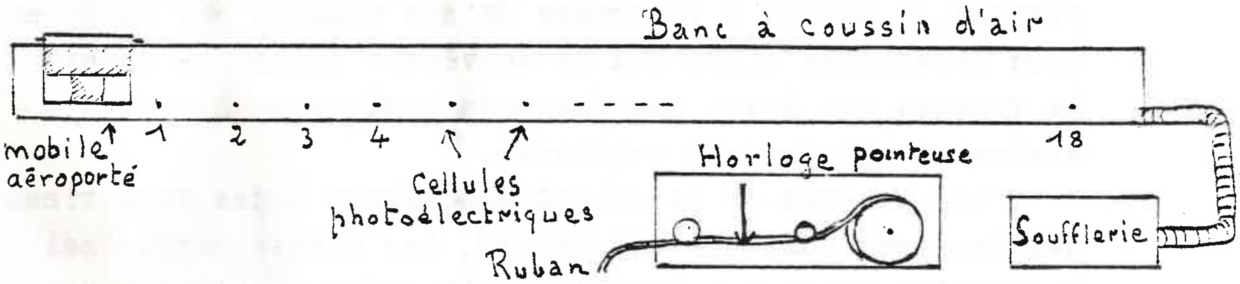
I.A.5. Compte-rendu type de ces deux expériences

I.A.5.a) Première expérience

Définitions "vulgaires" de la vitesse trouvées dans les dictionnaires...

- Le fait de pouvoir ou de parcourir un grand espace en peu de temps.
- Le fait d'accomplir une action en peu de temps, sans délai.
- Le fait d'aller plus ou moins vite, de parcourir une distance plus ou moins grande par unité de temps.
- Le fait de s'accomplir en un temps donné pour un phénomène quelconque le plus vite possible.
- Régime (nombre de tours que fait un organe moteur par unité de temps).
- Quotient d'une distance infiniment petite par le temps infiniment petit mis à la parcourir.
- Quantité exprimée par le rapport d'une distance au temps mis à la parcourir.

Schéma. Description de l'expérience

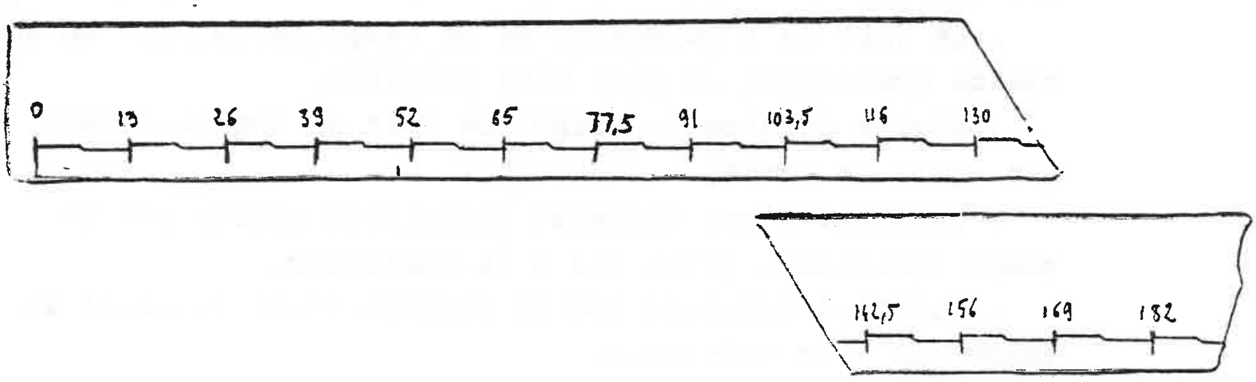


Le mobile est projeté sur l'aérobanc horizontal par la détente d'un ressort, une fois libéré il glisse sur un coussin d'air, la poussée des jets d'air compense l'action de la pesanteur, tout se passe comme s'il n'était plus soumis à aucune action extérieure. Tous les 10 cm sur son passage il occulte une photodiode ce qui provoque l'enregistrement d'un créneau sur un ruban de papier sur lequel 1 mm représente 0, 02 s. On admet que la coupure du faisceau lumineux est instantanée et ne modifie pas le mouvement. Nous comptons $t = 0$ instant du passage par la première cellule de mesure.

Tableau des mesures :

t_i en s.	0	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,55	1,82	2,07	2,32	2,60	2,85	3,12	3,38	3,62
x_i en cm.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Ruban horloge :
date = (abscisse en mm x 0,02) date exprimée en s.



Calcul des rapports de la forme $\dfrac{x_j - x_i}{t_j - t_i}$

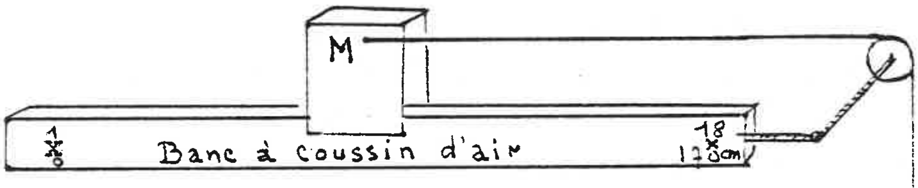
$\dfrac{80 - 10}{2,07 - 0,26} = 38,67 \text{ cm.s}^{-1}$ $\qquad$ $\dfrac{110 - 60}{2,85 - 1,55} = 38,46 \text{ cm.s}^{-1}$

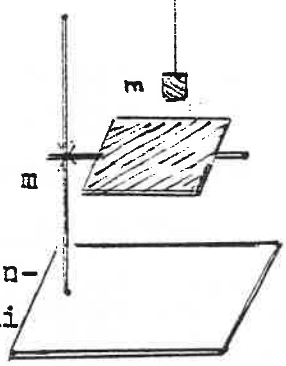
$\dfrac{}{0,78 - 0,26} = 38,46 \text{ cm.s}^{-1}$ $\qquad$ $\dfrac{130 - 40}{3,38 - 1,04} = 38,46 \text{ cm.s}^{-1}$

On remarque que ces rapports sont sensiblement constants, le mobile se déplace sur l'aérobanc horizontal avec une vitesse constante. Un tel mouvement est dit rectiligne uniforme.

I.A.5.b) Deuxième expérience

Description





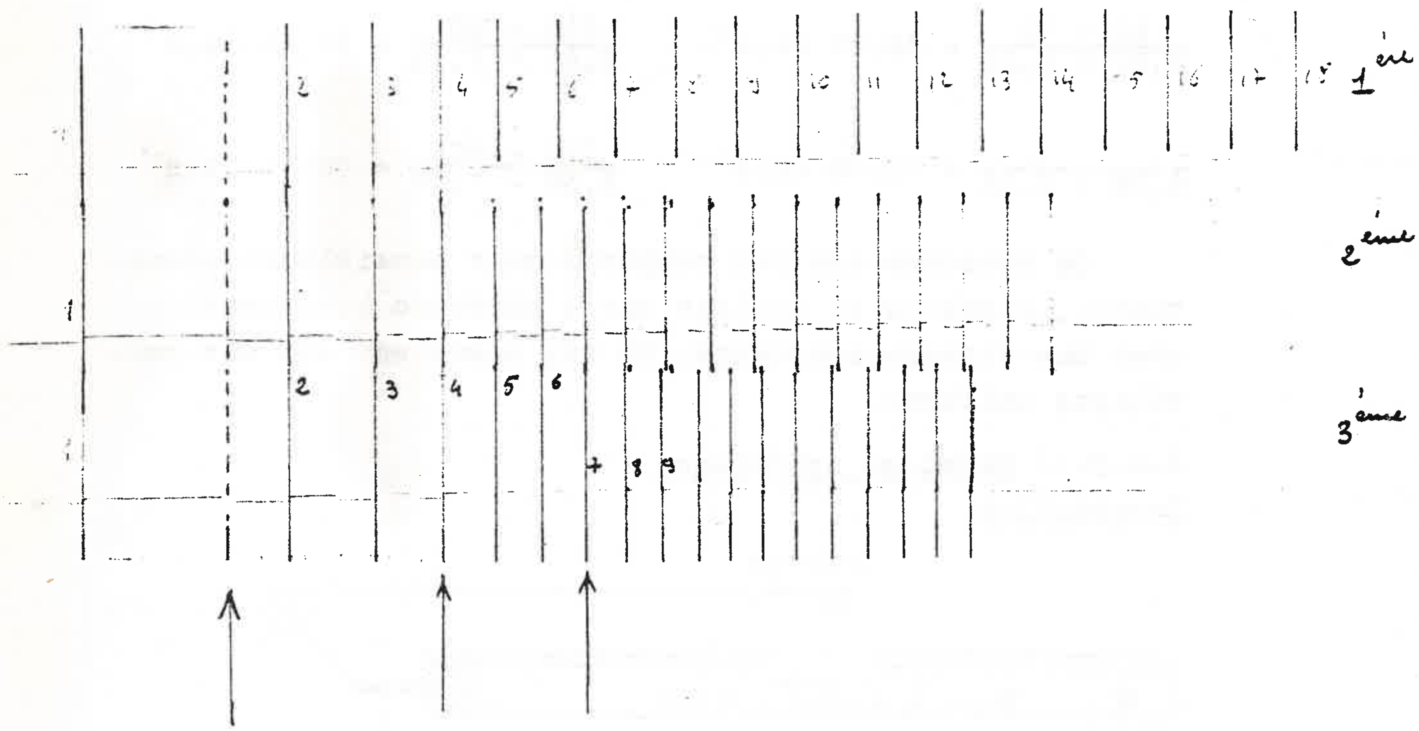
Le mobile M est mis en mouvement sur l'aérobanc par la chute ralentie d'une masse m. Après un parcours h la masse m est arrêtée par un obstacle, le fil se détend et la masse M continue sur sa lancée. On se retrouve alors dans les conditions de l'expérience 1.

(a) Le mobile met 2,35 s pour parcourir 1,40 m soit une vitesse de 59,6 cm.s^{-1}

(b) Le mobile met 1,28 s pour parcourir 1,10 m soit une vitesse de 86 cm.s^{-1}

(c) Le mobile met 0,74 s pour parcourir 80 cm soit une vitesse de 108 cm.s^{-1}

Résultats expérimentaux



Le pointillé correspond à la fin du passage devant la 1ère cellule de mesure et sert à mettre en coïncidence les trois enregistrements.

Position des créneaux en cm :

(a)	0	2,8	4	4,9	5,7	6,6	7,4	8,2	9,1	.....
(b)	0	2,8	4	4,9	5,65	6,3	6,9	7,5	8	.....
(c)	0	2,8	4	4,9	5,65	6,3	6,9	7,45	7,9	.....

(a) Le mouvement devient rectiligne uniforme au delà de 30 cm. Deux créneaux sont distants en moyenne de 0,84 cm ce qui correspond à 0,168 s. On mesure soit 0,8 cm soit 0,9 cm.

(b) Le mouvement devient rectiligne uniforme au-delà de 60 cm. Deux créneaux consécutifs sont distants en moyenne de 0,58 cm. On mesure tantôt 0,5 cm tantôt 0,6 cm. L'intervalle de temps entre deux cellules consécutives est 0,116 s.

(c) Le mouvement devient rectiligne uniforme au-delà de 90 cm ; deux créneaux consécutifs sont distants en moyenne de 0,46 cm. On mesure tantôt 0,5 tantôt 0,45 cm. L'intervalle de temps entre deux cellules consécutives est 0,092 s.

Comparaison des trois enregistrements :

Les dates de passage par les trois premières cellules d'abscisses 0 cm, 10 cm, 20 cm, 30 cm sont les mêmes dans les trois mouvements.

Les dates de passage par les sept premières cellules sont communes aux deux derniers enregistrements.

Une fois le fil de traction détendu, les trois mouvements deviennent rectilignes uniformes comme dans l'expérience 1.

Vitesse du mobile à 30 cm du point de départ.

Sur les 30 premiers centimètres les trois mouvements sont identiques. Le mobile passe donc par ce point avec la même vitesse dans les trois cas. Cette vitesse doit être celle que conserve alors le mobile dans la première expérience quand le mouvement est devenu rectiligne uniforme, soit $V = 59{,}6\ cm.s^{-1}$ au point d'abscisse 30 cm à la date $t = 0{,}99$ s.

Vitesse du mobile à 60 cm du point de départ.

Dans la première expérience en ce point le mouvement est rectiligne uniforme. La vitesse du mobile est donc celle atteinte à 30 cm du point de départ au moment où le fil de traction se détend. $V = 59{,}6\ cm.\ s^{-1}$.

Dans les deux autres mouvements, la vitesse à 60 cm du point de départ est celle que conserve le mobile dans la seconde expérience, puisque à cet instant le fil cesse de tirer sur le mobile : donc la vitesse n'augmente plus. Cette vitesse, déterminée dans la partie uniforme du mouvement, est $V = 86\ cm.s^{-1}$. Elle reste constante dans la seconde expérience alors qu'elle continue d'augmenter dans la troisième jusqu'au passage par la position d'abscisse 90 cm. C'est une vitesse déterminée à un instant donné.

Calcul de ces vitesses si on ne dispose que du troisième enregistrement.

La vitesse du mobile augmente entre les positions d'abscisse 0 et 90 cm. Quand le mobile passe par la position d'abscisse 30 cm, sa vitesse n'est pas constante. Si on considère un déplacement de 10 cm avant la position $x = 30$ cm, on mesure une vitesse moyenne

$V = \dfrac{30 - 20}{0,99 - 0,80} = 52,6 \text{ cm.s}^{-1}$ inférieure à la vitesse réelle $V = 59,6 \text{ cm.s}^{-1}$.

Si on considère un déplacement de 10 cm postérieur à la position $x = 30$ cm, on mesure une vitesse moyenne

$V = \dfrac{40 - 20}{1,13 - 0,99} = 71,43 \text{ cm.s}^{-1}$.

supérieure à la vitesse de passage par la position $x = 30$ cm.

Si nous considérons un déplacement qui encadre la position $x = 30$ cm, on mesure une vitesse moyenne

$V = \dfrac{40 - 20}{1,13 - 0,80} = 60,6 \text{ cm.s}^{-1}$.

Ce n'est toujours pas la vitesse exacte déterminée précédemment, mais l'erreur est minimisée. Pour faire une mesure plus précise, il faudrait réduire le déplacement considéré. La vitesse "instantanée"("à un instant donné") apparaît donc comme une limite puisque, si le déplacement devient de plus en plus petit, la durée qui lui correspond devient elle aussi de plus en plus petite. Nous ne disposons donc pas dans ces conditions d'un moyen matériel de déterminer cette vitesse à cause de l'imprécision des mesures des déplacements et des durées.

Le problème est le même au point d'abscisse $x = 60$ cm entre les positions $x = 50$ cm et $x = 60$ cm la vitesse moyenne est $V = \dfrac{60 - 50}{1,38 - 1,26} = 83,3 \text{ cm.s}^{-1}$, inférieure à la vitesse 86 cm.s^{-1},

entre les positions 60 cm et 70 cm

$V = \dfrac{70 - 60}{1,49 - 1,38} = 90,9 \text{ cm.s}^{-1}$, supérieure à la vitesse 86 cm.s .

Pour un déplacement qui encadre la position $X = 60$ cm on minimise l'erreur mais on n'obtient pas une valeur exacte de la vitesse instantanée

$V = \dfrac{70 - 50}{1,49 - 1,26} = 87 \text{ cm.s}^{-1}$.

I.A.6. Conclusion de la 1ère série d'expériences

Les deux expériences que l'on vient de décrire ont permis successivement de définir un mouvement rectiligne uniforme et la notion de vitesse de passage à la date t (ou à la position x) en posant par définition que c'est celle qu'aurait le mobile si à cet instant il poursuivait sa course sans être soumis à la force qui a créé le mouvement.

De plus, en comparant cette dernière avec les mesures faites sur des intervalles aussi petits que possible (minimum 20 cm) encadrant la position considérée, on a constaté une coïncidence expérimentale suffisante pour introduire une nouvelle définition de la vitesse de passage à la date t_i, à la position x_i, comme une limite des vitesses moyennes prises à partir de t_i sur des intervalles $(t_i ; t_j)$ de plus en plus petits.

Cette deuxième définition va être plus précisément mise en évidence par la deuxième série d'expériences (v.§ I.B.p. 26 ci-après).

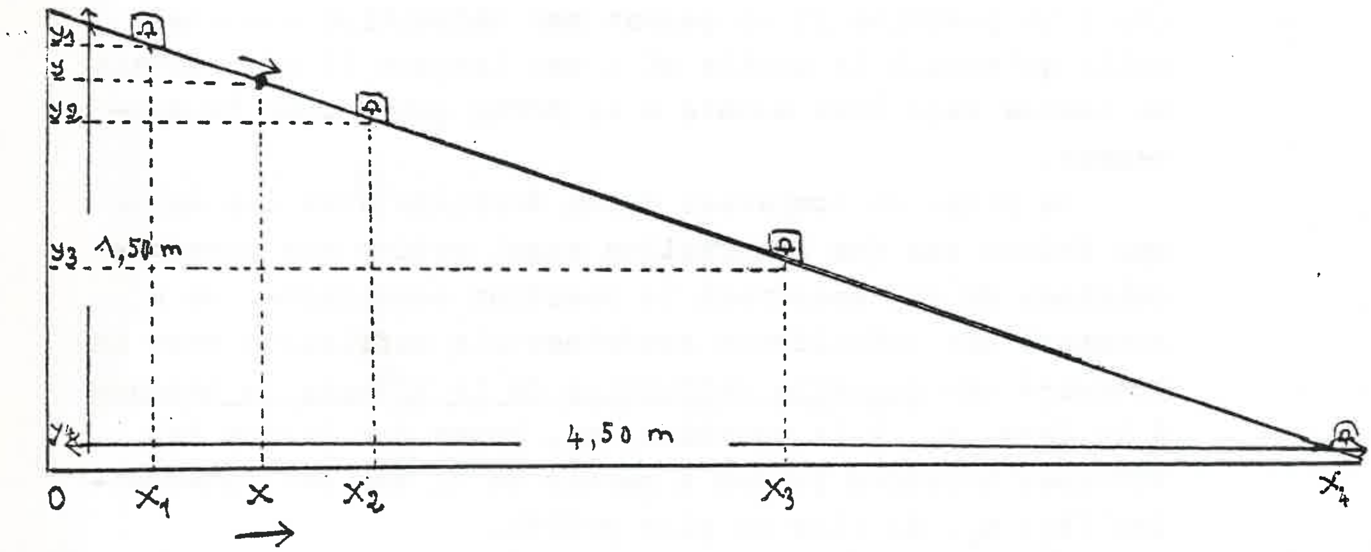
I.A.7. Exercices types de mathématique appliquée

I.A.7.1 - Problème de Galilée :

Au musée des Sciences de Florence (Italie) on peut remarquer une rampe inclinée ayant servi à Galileo Galilei pour observer les lois de la chute des corps. Cette rampe se présente sous la forme d'un triangle rectangle en bois des îles, dont l'hypoténuse est creusée d'une gorge permettant d'y faire rouler une bille d'acier. Cette gorge est surmontée de quatre arceaux portant chacun une clochette que la bille fait tinter à son passage.

RAMPE DE GALILEE

Photo à l'instant t



$X_1 = 0,27$ m
$X_2 = 1,10$ m
$X_3 = 2,49$ m
$X_4 = 4,43$ m

1. Calculer la hauteur des clochettes y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4 .
2. Galilée ayant disposé les clochettes de telle sorte que la bille les fasse tinter à intervalle régulier de une demi-seconde à partir du sommet où est lâchée la bille, représenter dans un repère orthogonal les points particuliers du graphe de la fonction f : $t \mapsto x$ donnés par le tableau

t	0	1/2	1	3/2	2	(secondes)
x	0	0,27	1,10	2,49	4,43	(mètres)

(choisir convenablement les unités graphiques)

3. Calculer la vitesse moyenne de la projection x de la bille entre le départ et chacune des clochettes (on appellera Vm_1 , Vm_2, Vm_3 , Vm_4 ces vitesses).
Que constatez-vous ?
Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

4. Soit g la fonction $t \mapsto V_m$ (vitesse moyenne entre 0 et t), Calculer le taux d'accroissement de g entre les dates suivantes : $(0 ; t_1)$; $(0 ; t_2)$; $(0 ; t_3)$; $0 ; t_4)$; $(t_2 ; t_4)$.
Que constatez-vous ? Représenter le graphe de la fonction g dans le repère précédent. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir le tracer en entier ?

5. Galilée ayant constaté que cette propriété de la vitesse était indépendante de l'inclinaison de la rampe et de la nature de la bille formula une loi : quel énoncé pouvez-vous en donner d'après l'expérience précédente ?
Consultez une encyclopédie .

Commentaire (sur le problème de Galilée) :

Cet exercice est destiné à des élèves de seconde ayant étudié en classe de mathématique le théorème sur le taux d'accroissement des fonctions affines (voir § I.A.2. p.11 ci-dessus) et ayant fait l'expérience décrite ci-dessus pp. 16 et 17. Il permet d'évaluer la compréhension des élèves sur les liens entre taux d'accroissement constant et fonction affine d'une part, entre taux d'accroissement constant et alignement des points d'autre part, et enfin entre taux d'accroissement constant et mouvement uniforme, ou variation uniforme.

On remarquera à ce propos que :

a) il ne s'agit pas de différentielles mais de différences finies, or dans le cas particulier d'un mouvement uniformément varié on sait que les conditions sur les variations finies et les équations différentielles sont équivalentes :

$$x = \frac{1}{2}\gamma . t^2 \qquad x' = \gamma . t \qquad x'' = \gamma$$

$$\frac{x_j - x_i}{t_j - t_i} = \frac{1}{2}\gamma (t_i + t_j) = \gamma \frac{t_i + t_j}{2} = \gamma \theta_i$$

la vitesse moyenne est donc proportionnelle à la durée moyenne θ_i du parcours depuis le départ ; la vitesse instantanée aussi.

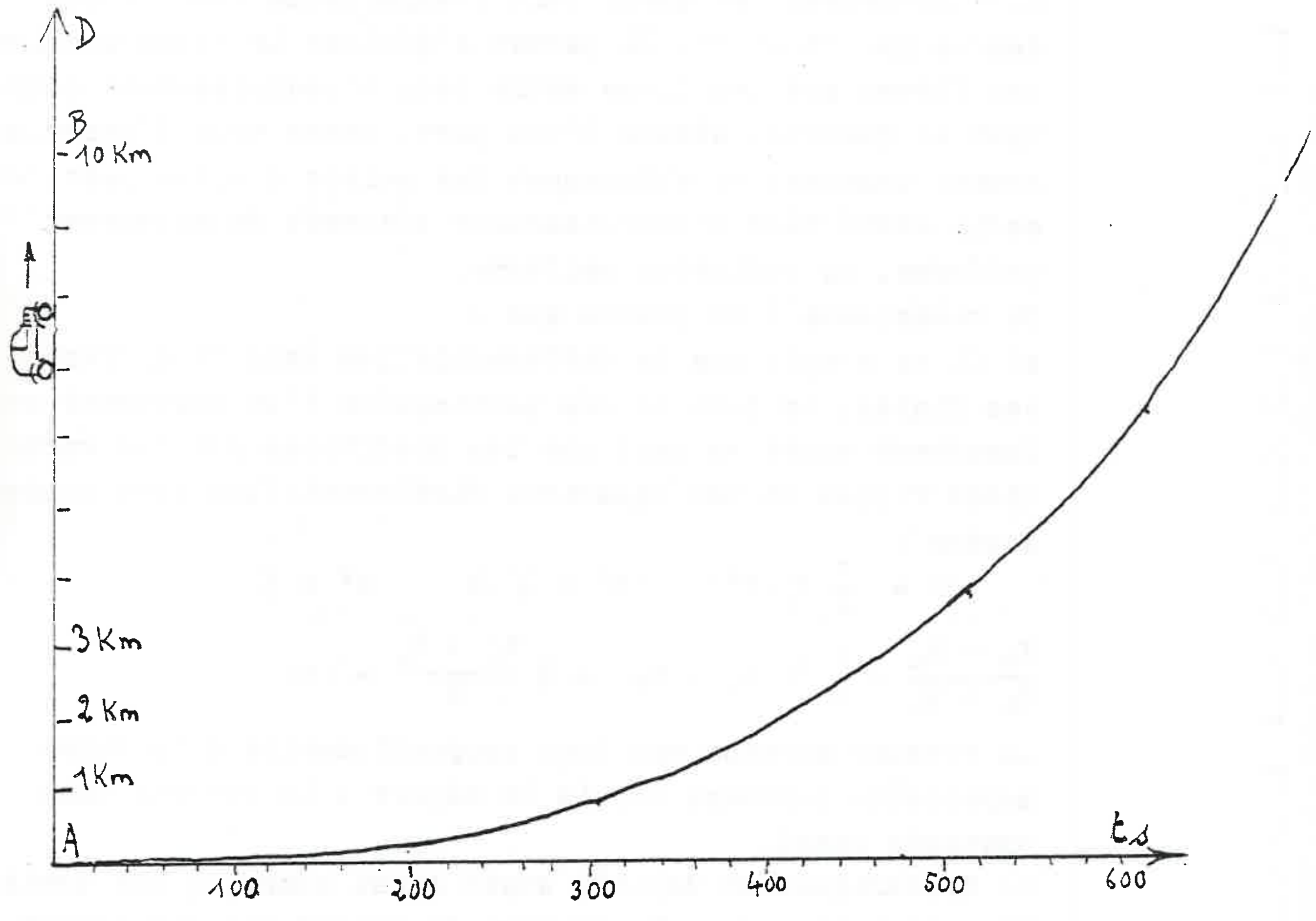
b) Historiquement Galilée avait ainsi accompli une véritable révolution dans la manière de penser des physiciens de l'époque en faisant intervenir le temps (la durée) comme grandeur physique du mouvement, alors que Descartes par exemple comparait la vitesse moyenne à la distance parcourue et non à la durée, et obtenait la relation (fausse !) selon laquelle la vitesse serait proportionnelle à la distance parcourue.

I.A.7.2 - Problème de croisement de véhicules

Deux villages A et B sont reliés par une route rectiligne horizontale. La distance les séparant est de 10 km.

Une voiture part de A ; à l'instant du départ t = 0 on met en marche un enregistreur couplé à l'indicateur de vitesse, qui donne la distance parcourue par le véhicule en fonction du temps.

L'enregistrement est reproduit ci-dessous :



a) Faire un schéma de la trajectoire du mobile.
Placer sur cette trajectoire les points A et B, et préciser les dates de passage du mobile en A et B.
b) Indiquer sur cette trajectoire la position du véhicule aux dates t = 5 mn et t' = 8 mn 20 s.
Expliquez comment vous utilisez l'enregistrement graphique ci-dessus pour répondre à cette question.
c) Quelle est la valeur de la vitesse à la date t = 600 s?
(on admettra que sur un intervalle de temps [t+20s ; t-20s] la portion de courbe correspondant à l'équation horaire est assimilable à une droite).
d) Quelle est la vitesse moyenne du véhicule entre les dates t + 0 et t = 600 s ?
e) A l'instant où la voiture part de A un autre véhicule part de B dans la direction de A. Le mouvement de ce second véhicule est rectiligne uniforme. Les deux voitures se croisent en C à la date t = 400 s à 1866 m de A.
Quelle est la vitesse de ce mobile ?
A quel instant arrive-t-il en A ?

Commentaire (de l'exercice sur le croisement de deux véhicules) :

Cet exercice est destiné à évaluer les connaissances des élèves de seconde qui ont suivi le cours sur le taux d'accroissement des fonctions affines en classe de mathématique, et les expériences de définition de la vitesse en TP de physique (cf. pp. 17, 18, 19 et 20 ci-dessus). Il a pour objectif de leur faire lire et d'utiliser un graphique pour en tirer des conclusions sur un phénomène physique et des relations mathématiques ; en l'occurence, il s'agit de leur faire observer la différence entre un mouvement uniforme et un mouvement quelconque.

I.B. 2ème SERIE d'EXPERIENCES
INTRODUCTION A LA NOTION DE VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

La première série d'expériences introduisait la notion de "vitesse" sur l'étude d'un cas particulier (mouvement rectiligne uniforme) : vitesse moyenne et vitesse instantanée.

Cependant ces expériences ne donnaient pas de détermination satisfaisante de la vitesse instantanée, vu la précision des mesures des durées. Ceci met en évidence les problèmes posés par la détermination d'une grandeur physique qui se trouve être une limite : on peut se demander si un dispositif donnant des dates plus rapprochées, avec une meilleure précision, ne fournirait pas des résultats et des calculs assez convaincants pour que l'on puisse parler de la limite.

C'est pourquoi la deuxième série d'expériences a été réalisée sur table à coussin d'air, avec une durée $t_{i+1} - t_i = 0,02$ s, et permet de définir la vitesse à l'instant de date t_i comme la limite des vitesses moyennes prises à partir de t_i sur des intervalles $[t_i , t_j]$ de plus en plus petits, et d'introduire le vecteur vitesse à l'instant de date t_i.

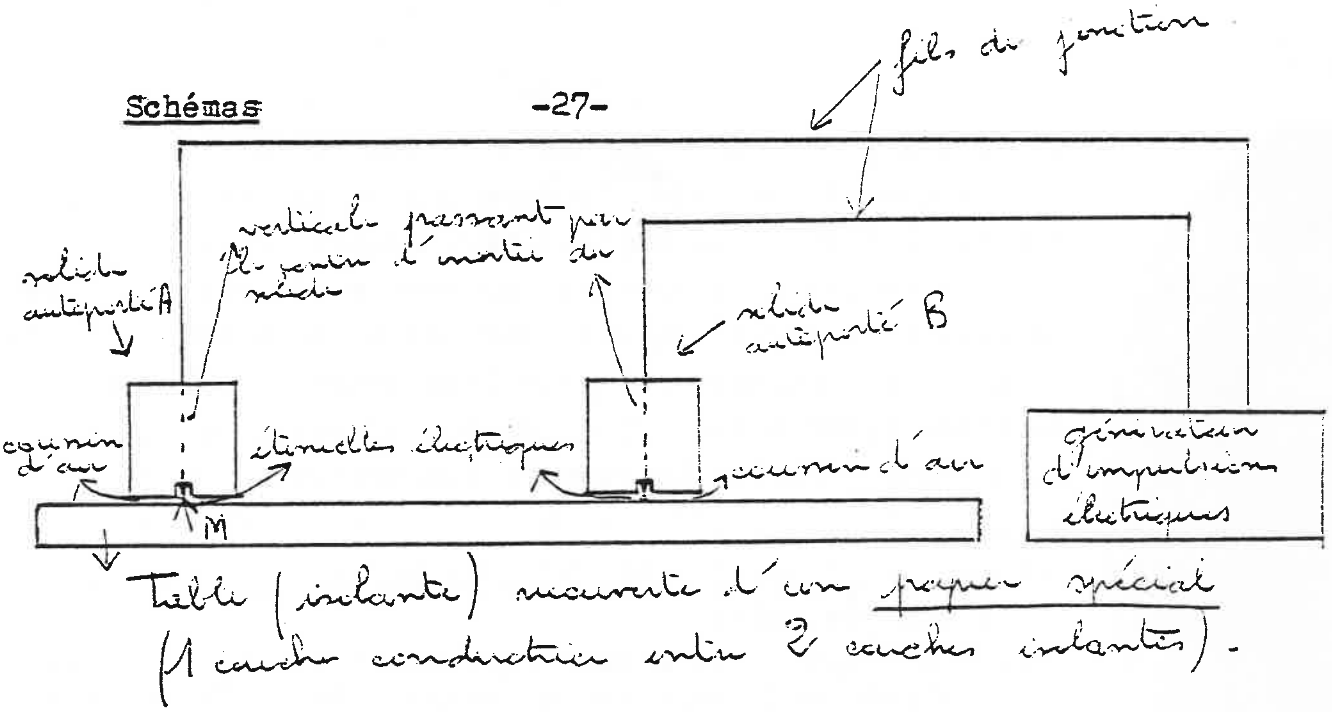
Transition : reprise de la conclusion du I.A. (p.21)

I.B.1. 1ère EXPERIENCE :
Etude d'un mouvement curviligne

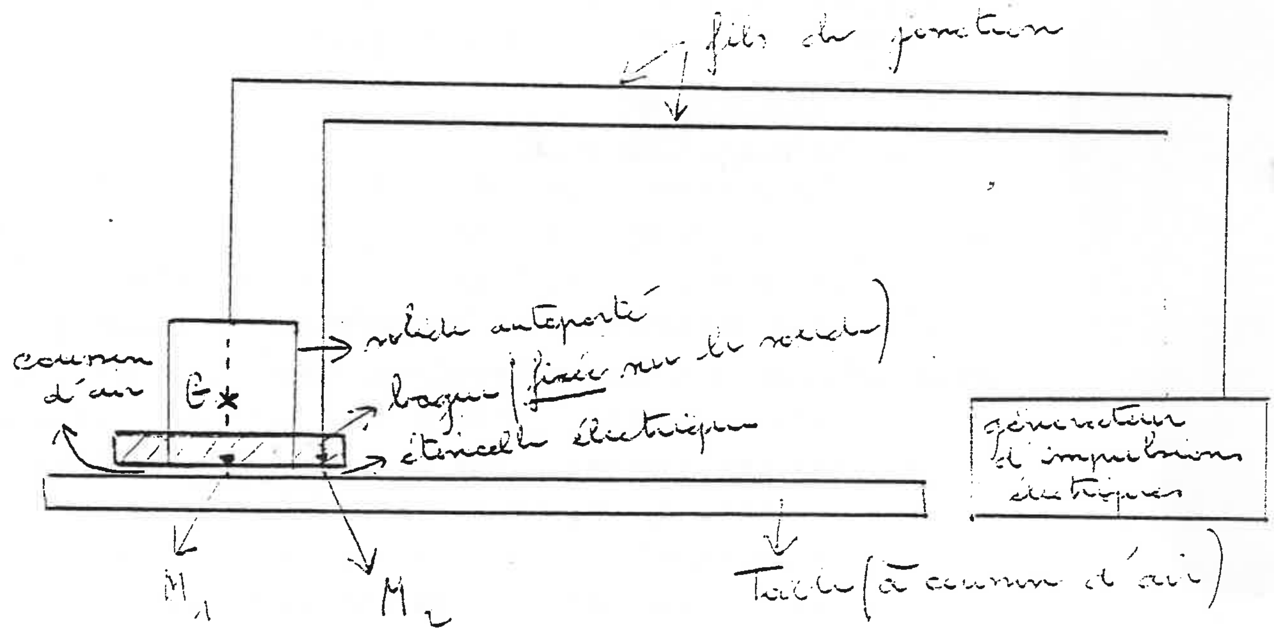
a) Dispositif expérimental :

L'appareil utilisé par le professeur et quelques élèves est une table à coussin d'air munie de ses deux mobiles autoportés (modèle Jeulin).

Schémas



La trajectoire enregistrée est celle du point M situé au centre de la base du cylindre .



P r i n c i p e du système d'enregistrement :

A chaque impulsion fournie par le générateur, une étincelle jaillit au bas des deux solides autoportés sous le stylet inscripteur. Ces étincelles ont pour effet de brûler le papier spécial dont on a recouvert la table (une couche conductrice entre deux couches isolantes). Dans les expériences qui suivent, le second mobile sert uniquement à fermer le circuit électrique.

R e m a r q u e s :

(i) il est possible d'incliner légèrement la table à l'aide de cales.

(ii) pour toutes les expériences qui suivent, la durée séparant deux impulsions consécutives sera égale à $\theta = 0{,}02$ s (c'est la plus petite valeur permise par le dispositif).

(iii) Avantage de ce dispositif : l'enregistrement du mouvement d'un mobile autoporté est obtenu en grandeur réelle.

I.B.1.b) <u>Expérience</u> :

Après avoir légèrement incliné la table à coussin d'air (3 cales), un élève lance obliquement (vers le haut,(mais suivant une direction qui n'est pas celle de la plus grande pente) l'un des mobiles autoportés.
Le document n°1, qui avait été préparé à l'avance, est alors distribué aux élèves. (cf. p. 33)

I.B.1.c) <u>Définitions</u> :

(1) <u>Trajectoire d'un point</u> :

La trajectoire d'un point M est l'ensemble des positions successives du point M. On remarque que si θ devient de plus en plus petit, les points sont de plus en plus rapprochés. La trajectoire "réelle" du point M est une courbe continue, dont le dispositif expérimental ne retient qu'un nombre fini de positions.

(2) <u>Vecteur déplacement entre deux instants de date t_1 et t_2</u> soit $t_2 > t_1 > 0$.

Le déplacement du point M entre les instants de date t_1 et t_2 est caractérisé par le bipoint (M_1, M_2).

A ce bipoint est associé le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ que nous appellerons vecteur déplacement du point M entre les instants t_1 et t_2.

Il a pour (*)
- direction : celle de la droite (M_1M_2)
- sens : de M_1 vers M_2 car $t_2 - t_1 > 0$
- norme : $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ que nous noterons M_1M_2 et que nous mesurerons en mètres (m)

(3) <u>Vecteur taux d'accroissement</u> entre les instants de t_1 et t_2

par définition $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$ est le vecteur taux d'accroissement entre les instants de dates t_1 et t_2.

Il a pour (*)
- direction : celle de la droite (M_1M_2)
- sens : de M_1 vers M_2 car $t_2 - t_1 > 0$
- norme : $\dfrac{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}{t_2 - t_1}$ en mètres par seconde (m/s)

I.B.1.d) <u>Etude du document n°1</u> (p. 33 ci-après)

(1) <u>Résultats expérimentaux</u> (voir document)

n	M_3M_n (en m)	$t_n - t_3$ (en s)	$\dfrac{M_3M_n}{t_n - t_3}$ (en m/s)
15	0,072	0,26	0,277
14	0,064	0,24	0,268
13	0,056	0,22	0,257
12	0,050	0,20	0,240
11	0,043	0,18	0,232
10	0,037	0,16	0,225
9	0,032	0,14	0,215
8	0,025	0,12	0,208
7	0,020	0,10	0,200
6	0,016	0,0C	0,200
5	0,0C8	0,04	0,20
4	0,004	0,02	0,20

---

* en mathématique on disait simplement que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est (par définition) le vecteur associé au <u>bipoint</u> $(M_1;M_2)$. Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$ est alors un vecteur <u>colinéaire</u> à $\overrightarrow{M_1M_2}$

(2) Conclusions :

A partir de n = 5, la mesure du rapport $\dfrac{M_3 M_1}{t_n - t_3}$ reste voisine d'une valeur fixe (env.0,2) : on dira que "quand t_n tend vers t_3, $\dfrac{M_3 M_n}{t_n - t_3}$ tend vers une limite."

Cette limite s'appelle vitesse du point M à l'instant de date t_3 , soit V_3 :

$$V_3 = \lim_{t_n \to t_3} \frac{M_3 M_n}{t_n - t_3}$$

La droite $M_3 M_n$ a une position limite qui est par définition la tangente à la trajectoire en M .

Définition du vecteur vitesse à l'instant de date t : $\overrightarrow{V_3}$

$\overrightarrow{V_3}$ a pour (*) $\begin{cases} \text{direction : la tangente à la trajectoire en } M_3 \\ \text{sens : le sens du mouvement} \\ \text{norme : } V_3 \end{cases}$

Si on choisit une unité de longueur, une unité de temps, et une échelle pour représenter les m/s, on convient de représenter $\overrightarrow{V_3}$ par un bipoint d'origine M_3 et de longueur V_3 m/s (voir document n°1 ci-après).

I.B.2. 2ème EXPERIENCE (d'introduction du Vecteur Vitesse en 2de)

Etude d'un mouvement rectiligne

Exemple : mouvement d'un point M d'un solide autoporté en mouvement rectiligne sur un plan incliné. Le mobile est lâché sans vitesse initiale.

a) Expérience :

Un élève réalise un enregistrement, puis le document n°2 (v. ~~ci-après~~ p.34) est distribué.

b) Etude du document n°2

(1) Résultats expérimentaux :

n	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
$\dfrac{M_3 M_n}{t_n - t_3}$	0,36	0,35	0,34	0,327	0,318	0,307	0,295	0,29	0,275	0,266	0,25	0,25

(*) En mathématique on dirait simplement que $\vec{V_3}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe trajectoire du mobile à la position M_3, et que si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire directeur de cette même tangente alors $\vec{V_3} = V_3 \cdot \vec{u}$ ($\vec{u}$ choisi dans le sens du mouvement)

(2) Conclusions :

On observe que la trajectoire est une droite (D)

Pour tout t_n la direction M_3M_n est constante et confondue avec celle de (D), donc en particulier pour t_n voisin de t_3 la direction M_3M_n est celle de (D). Elle a donc une position limite qui est D.

On a comme précédemment :

$$V = \lim_{t_n \to t_3} \frac{M_3M_n}{t_n - t_3}$$

et on définit le vecteur vitesse $\vec{V_3}$ à l'instant de date t_3 *comme suit* :

$\vec{V_3}$ a pour direction : celle de la trajectoire

sens : le sens du mouvement

norme : V_3 en m/s donc $V_3 = 0{,}25$ m/s

→ Parce que le mouvement est rectiligne, le vecteur taux d'accroissement entre les instants de dates t_3 et t_n est aussi le vecteur vitesse moyenne entre ces instants.

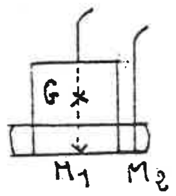
Nous écrirons $\vec{V}_{(3,n)} = \dfrac{\overrightarrow{M_3M_n}}{t_n - t_3}$

R e m a r q u e : Si les points sont équidistants sur le document n°2, le vecteur vitesse est constant. On dit que le mouvement est rectiligne uniforme.

I.B.3. 3ème EXPERIENCE Centre d'inertie

Il semble intéressant d'introduire la notion de centre d'inertie immédiatement après avoir étudié un mouvement curviligne et un mouvement rectiligne. Pour cela, la table à coussin d'air étant horizontale, un élève lance (en le faisant tourner) un solide autoporté muni d'une "bague".

Il enregistre le mouvement de M_1 et celui de M_2. Le document n°3 (voir p. 35) est alors distribué.



Les élèves constatent que :

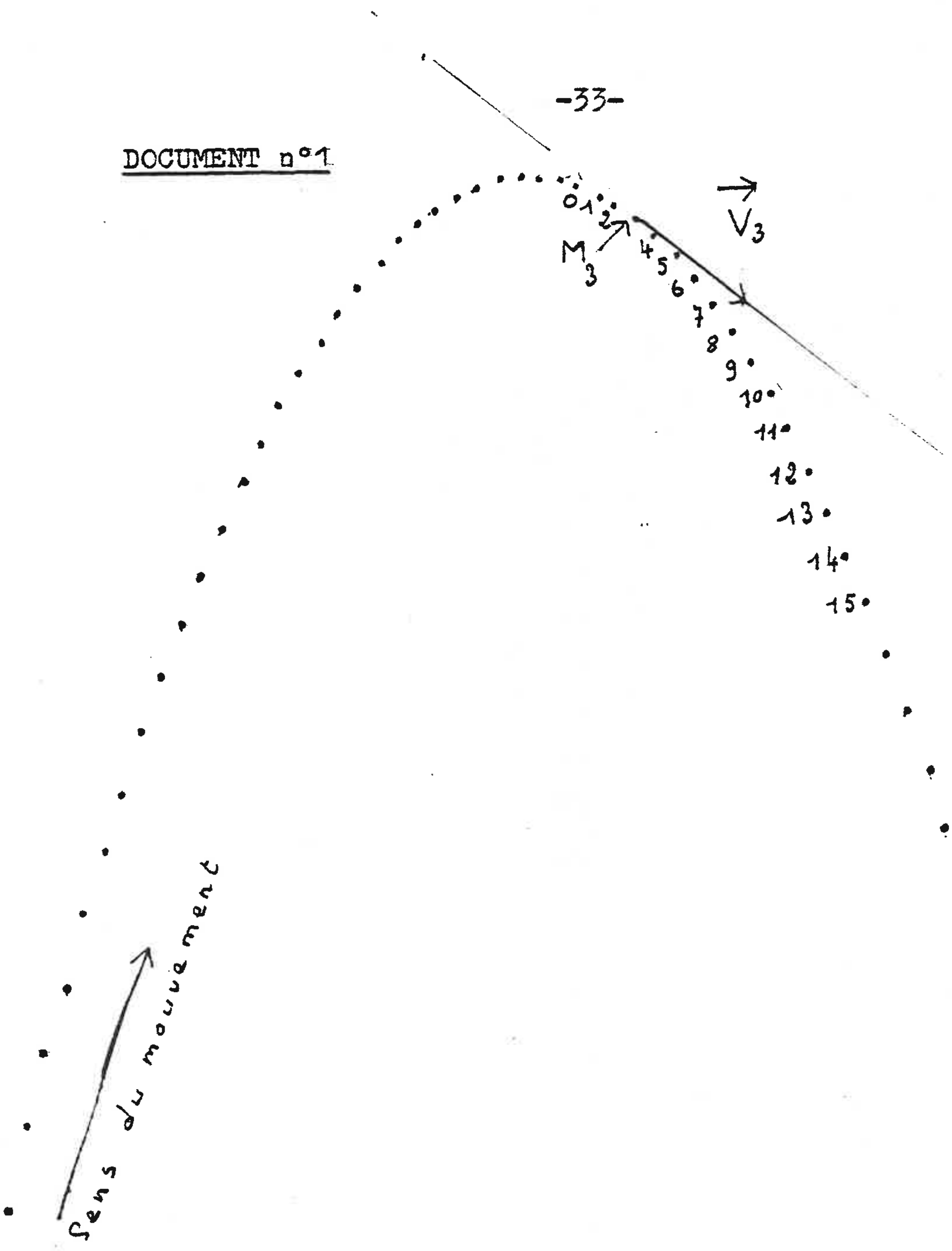
- le point M_2 et les points situés sur la verticale passant par M_2 ont un mouvement curviligne.
- le point M_1 et les points situés sur la verticale passant par M_1 ont un mouvement rectiligne et uniforme.

Par définition le centre d'inertie G d'un solide est le point du solide qui possède un mouvement rectiligne uniforme dans un repère terrestre quand le solide est lancé d'une façon quelconque sur une table à coussin d'air horizontale.

L'expérience nous permet seulement de dire que le point G est sur la verticale passant par M_1.

Voir documents 1, 2 et 3
pages suivantes 33, 34, 35.

DOCUMENT n°1

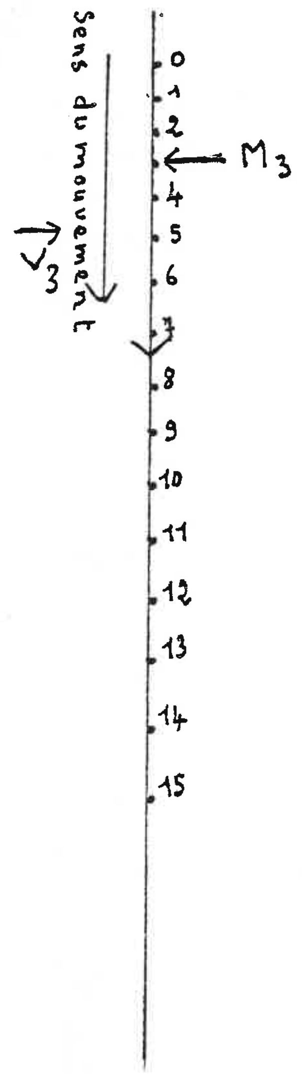


Etude d'un mouvement curviligne :

Mouvement d'un point M d'un solide autoporté en mouvement sur un plan incliné.

Echelle pour le vecteur vitesse : 1 cm représente 0,1 m/s.

DOCUMENT n°2

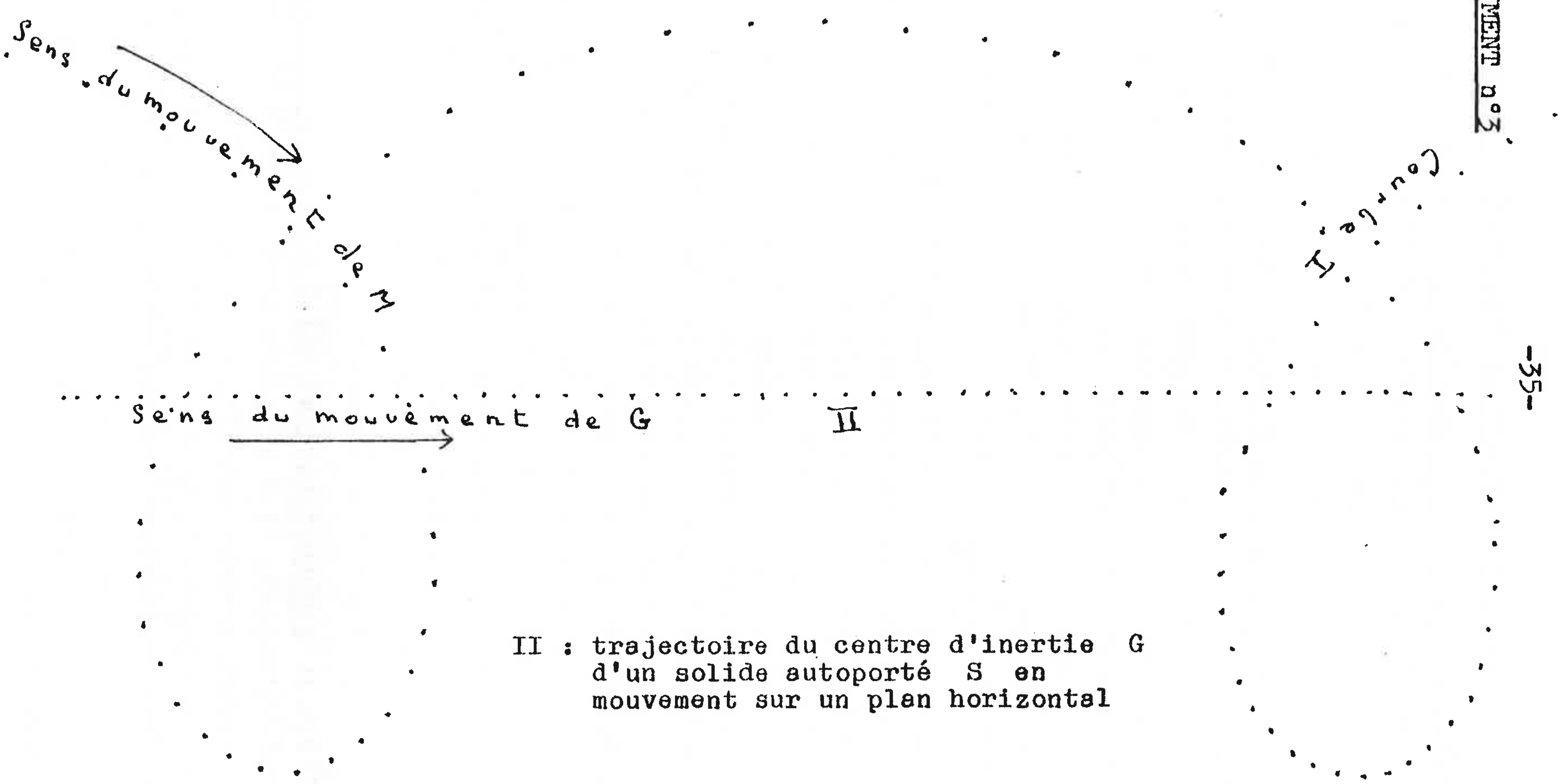


Etude d'un mouvement rectiligne :
Mouvement d'un point M d'un solide autoporté en mouvement sur un plan incliné.

Echelle pour le vecteur vitesse : 1 cm représente 0,1 m/s.

DOCUMENT n°3

I : trajectoire d'un point quelconque M d'un solide autoporté S en mouvement sur un plan horizontal



II : trajectoire du centre d'inertie G d'un solide autoporté S en mouvement sur un plan horizontal

I.B.4. COMMENTAIRES sur la 2ème SERIE D'EXPERIENCES

I.B.4.a) Dispositif expérimental : Il s'agit de la table à coussin d'air (ici modèle Jeulin) dont tous les lycées possèdent un exemplaire. Les élèves disposent, ce jour-là, pour les calculs d'une calculatrice de poche.

I.B.4.b) Les notions étudiées (trajectoire, vecteur vitesse, etc.) sont nouvelles pour les élèves ; apparemment ils appliquent facilement à la situation donnée leur expérience dans des domaines variés : vie courante, connaissances mathématiques...

Ainsi le mot "trajectoire" est prononcé par les élèves ; de même que le mot "taux d'accroissement" pour le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$ lorsque le cours sur les fonctions numériques a été vu en math, et le mot "vitesse moyenne" pour la norme de ce même vecteur. Ils ont aussi trouvé parfaitement naturel de devoir choisir des unités avant de "représenter" le vecteur vitesse par un bipoint.

I.B.4.c) La notion de limite n'étant pas connue des élèves de seconde, le professeur est amené à faire constater empiriquement sur la suite des résultats du calcul, ce qu'il appellera une limite (en précisant aux élèves que l'étude mathématique sera faite en première).

Le professeur fait constater que pour le mouvement curviligne le rapport $U_n = \dfrac{M_3 M_n}{t_n - t_3}$ approche la valeur 0,2 m/s et fait calculer aux élèves $U_n - 0,2$ pour les différentes valeurs de n.
Comme cette différence est de plus en plus petite on dira que 0,20 m/s est la limite.

I.B.4.d) Inconvénients du point de vue des limites : dans l'exposé, on a toujours pris t_n plus grand que t_3; pourquoi prendre une limite à droite ? Comme la courbe est une parabole, il faut éviter de ne prendre que des points symétriques par rapport au point choisi ; d'autre part certaines reproductions de la parabole pouvant être plus ou moins bonnes, tous les points ne "marchent" pas aussi bien.

La durée choisie séparant deux impulsions consécutives est de 0,02 s ; on a remarqué que si on choisit une durée plus grande, par exemple 0,06 s , t_n n'est pas suffisamment voisin de t_3 , et l'expérience ne met pas de limite en évidence ; d'où des réflexions intéressantes sur ce que serait ici une durée "petite" : une durée que l'on veut faire "tendre vers zéro" : 0,02 s donne des résultats et des calculs assez convaincants pour que l'on puisse parler de limite.

I.B.4.e) Dans le but d'éviter des confusions ultérieures, le professeur signale aux élèves que la définition du centre d'inertie d'un solide est valable en toute rigueur dans un repère "galiléen", mais qu'un repère terrestre peut être considéré comme "galiléen" si l'on étudie le mouvement du solide pendant une durée "relativement" courte, ce que nous ferons toujours en seconde.

Le mouvement d'un point par rapport à un repère non galiléen sera étudié en terminale.

°

° °

II - DERIVABILITE DES FONCTIONS NUMERIQUES

II.A. PREAMBULE

On peut introduire la dérivabilité en classe de première en utilisant les expériences de seconde décrites ci-dessus ; il est alors nécessaire de rappeler rapidement le cours de physique de seconde sur le vecteur vitesse d'un point d'un solide en mouvement rectiligne. Ce rappel a été bref (les élèves de première ont utilisé abondamment les enregistrements obtenus à partir de la table à coussin d'air) et on a enchaîné très vite sur la théorie mathématique.

Le souci de partir toujours d'expériences qui ne soient pas formelles pour motiver les élèves nous a conduit à réaliser la première séance en cours commun math-physique, puis les mathématiques ont pris le relais avec du travail par petits groupes, de 4 ou 5 élèves, travaillant sur les fiches que l'on trouvera plus loin.

Nous ne pensons pas que le travail par groupes soit la seule méthode valable et qu'elle doive être adoptée par tous ; elle présente l'avantage de sortir l'élève de son rôle passif et de le faire participer à l'élaboration du savoir à acquérir. L'élève peut questionner facilement ses camarades ou le professeur ; il est amené à prendre des initiatives, à réfléchir avant d'énoncer une définition, à résoudre "à la main" les difficultés.

Le rôle du professeur est plus difficile : il doit s'efforcer de mettre les élèves sur la voie sans donner la réponse ; stimuler les groupes défaillants, prévoir où il devra intervenir pour tous afin de faire le point, etc. Par contre l'observation des élèves au travail lui permet de mieux apprécier les niveaux où se situent les difficultés.

Les élèves ont réagi en général de façon positive, intéressés, quoique parfois méfiants au début, voire effrayés du rôle actif qu'on leur demandait d'assumer. les notions acquises à cette occasion se sont révélées solides et durables. Les cours communs maths-physique se déroulant dans une ambiance très détendue ont eu un grand succès. Les élèves ont trouvé instructif (et amusant !) de voir le professeur de maths et le professeur de physique se reprendre mutuellement ou se poser des questions, et cela les aidait à intervenir eux-mêmes.

II.B. FICHES DE TRAVAIL

Tous les résultats trouvés doivent être énoncés et rédigés en (bon) français. (cet impératif est diversement accepté par les élèves ; il s'avère que c'est une condition INDISPENSABLE à un travail fructueux).

II.B.1. Utilisation et interprétation des expériences

Dans l'expérience I.B.2 (p.30) : mouvement rectiligne du centre (d'inertie) d'un solide sur la table à coussin d'air inclinée, on admet que l'on peut définir une fonction :

$$f : [0;\ 20 \times 0{,}02] \longrightarrow \mathbb{R}$$

La distance parcourue à partir de M_0, en mètres, est une fonction de la date t, en secondes.

$t_0 = 0$ $\quad f(0) = 0$

$t_3 = 0{,}06$ $\quad f(0{,}06) = M_0M_3$

$t_4 = 0{,}08$ $\quad f(0{,}08) = M_0M_4 = M_0M_3 + M_3M_n$

(a) Pourquoi dit-on : "on admet" ?

(b) Calculer alors la vitesse moyenne entre M_3 et M_n, soit $V_{M_3M_n}$, et l'exprimer en fonction de f et des valeurs de t.

(c) Que représente l'expression trouvée ?
Ecrire la suite des résultats trouvés pour $V_{M_3M_n}$.
Que remarque-t-on ?

(d) Comment pourrait-on définir une "vitesse instantanée en M" et l'écrire à l'aide de f ?

D é f i n i t i o n : on dira que la vitesse instantanée en M_3 est le NOMBRE DERIVE de f en t et on le note $Df_t = \lim_{t \to t_3} \dfrac{f(t) - f(t_3)}{t - t_3}$

Il s'agit d'appliquer cette notion aux fonctions connues, lorsque c'est possible.

II.B.2. Nombre dérivé de f en a

Soit f une fonction numérique de variable réelle ; on souhaite définir le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

(a) Comment doit être définie la fonction f pour qu'on puisse poser le problème de sa dérivabilité en a ?

(b) A cette condition, donner la définition de $f'(a)$ s'il existe, et la définition d'une fonction dérivable en a.

(c) A votre avis, $f'(a)$ existe-t-il toujours ?

Plus précisément,

soit $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

on remarque que $\lim_{x \to a} (x - a) = 0$

En déduire une condition nécessaire pour que $f'(a)$ existe.

(d) Comment s'exprime ce résultat, à l'aide d'une notion récemment étudiée ?

(e) En déduire : le théorème suivant : "toute fonction dérivable en a est continue en a"

: des exemples de fonctions non dérivables en a.

(f) la condition trouvée est-elle suffisante ?

Dessiner une fonction continue non dérivable puis considérer par exemple : $x \to |x|$

$x \to \sqrt{|x|}$ en des points bien choisis

R e m a r q u e s :

(1) $f'(a)$ est la limite de $g(x)$ quand x tend vers a, il est important de noter que cette limite est bien sûr finie, sans quoi ce qui est dit plus haut n'a plus de sens.

(2) Posons $x = a + h$. Question facile : h peut-il être négatif ? Donner une expression équivalente de $f'(a)$ en remplaçant x par $a + h$.

EXERCICES : I - Considérez les fonctions usuelles que vous connaissez et examinez si elles sont dérivables en a.

II - Qu'appellerait-on un nombre dérivé à droite de f en a ? Nombre dérivé à gauche ? Une fonction dérivable à droite et à gauche en a est-elle dérivable en a ?

II.B.3. Opérations sur les nombres dérivés

II.B.3.a) Si une fonction h est la somme de deux fonctions f et g, toutes deux définies sur un intervalle ouvert contenant a, sous quelles hypothèses peut-on affirmer que h est dérivable en a ? Quel est alors $f'(a)$?

II.B.3.b) Même question si h est un produit $h = fg$ (on écrira

$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)$

II.B.3.c) Etudier le cas où g est une fonction constante : $h = mf$ où m est un réel

II.B.3.d) Etudier de même la dérivabilité de $\frac{1}{g}$, de $\frac{f}{g}$

II.B.3.e) A p p l i c a t i o n : Etudier la dérivabilité des fonctions polynômes, et, sur des exemples, des fonctions rationnelles.

II.B.4. Interprétation géométrique du nombre dérivé

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de f dans un intervalle contenant a.

soit M_0 le point de coordonnées $(a, f(a))$

et mM un point de coordonnées $(x, f(x))$

II.B.4.a) Calculer la pente de la droite M_0M Que représente ce nombre ? Ecrire l'équation de cette droite.

II.B.3.b) Décrire ce qui se passe lorsque M se rapproche de M_0 et écrire l'équation de la droite obtenue.

Cette droite est appelée tangente à la courbe en M_0

On en déduit que, si f admet un nombre dérivé en a, la courbe admet une tangente en M_0

Théorème (à admettre) : lorsque $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

est égal à $+\infty$ ou $-\infty$, la tangente à la courbe au point M_0 existe et est parallèle à l'axe Oy.

II.B.5. Fonction différentiable en a

Exemple : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$. On se propose de calculer une valeur approchée de $f(1{,}017)$ sans calculer $1{,}017^3$ ni $1{,}017^2$. Poser $x = 1 + h$ et calculer $f(1 + h)$.

En déduire, lorsque h est "petit", une valeur approchée de $f(1 + h)$. Donner une valeur approchée de $f(1{,}017)$.

Si $x = 1 + h$, on peut donc écrire :

$$f(1 + h) = f(1) + 5h + h\,(4h + h\ )$$

Poser $r(h) = 4h$ et h et déterminer $\lim\limits_{h \to 0} r(h)$

On remarque d'autre part que $h \longmapsto 5h$ est une fonction linéaire.

Calculer le nombre dérivé Df_1. Que remarque-t-on ?

Définition : Soit f une fonction numérique de variable réelle.

On dit que f est différentiable en a s'il existe :

- une application linéaire $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longrightarrow \ell h \end{array}\right.$

- une fonction $r : h \longmapsto r(h)$, définie sur un intervalle de centre $(0,\ J,)$ telle que : $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$

et : $(\forall h \in J)\quad f(a+h) = f(a) + \ell h + h r(h)$

L'application $h \longrightarrow \ell h$ est appelée <u>fonction linéaire tangente</u> à f en a, ou encore <u>différentielle de f en a</u>, et on la note : $df_a : h \longmapsto \ell h$

Remarque : il résulte de la définition qu'une fonction différentiable en a est définie sur un intervalle ouvert non vide de centre a.

Dans l'exemple ci-dessus, écrire la différentielle de f en 1, soit df_1.

Reprendre quelques unes des fonctions usuelles étudiées au paragraphe précédent et étudier leur différentiabilité en a.

DIFFERENTIABILITE ET DERIVABILITE

Soit f une fonction différentiable en a.
Calculer, pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Que peut-on en déduire pour f ?
Peut-on démontrer une réciproque ?
Enoncer le théorème ainsi trouvé.
Questions faciles :-si f est différentiable en a, on a donc : $f(a+h) = f(a) + \ell h + h.r(h)$, à quoi est égal ℓ ?
-soit $h \longmapsto f(a) + \ell h$ que représente cette fonction ? Quelle est sa représentation graphique ?

Sur un dessin représentant la courbe d'une fonction f supposée dérivable en a, tracer la représentation graphique de la fonction différentielle df_a en a.

Représenter sur ce graphique l'erreur commise lorsque l'on remplace $f(a+h)$ par $f(a) + df_a(h)$

Différencier une fonction, c'est donc la remplacer localement (au voisinage de a) par une application linéaire, ce qui se traduit sur le graphique par le fait de remplacer la courbe par sa tangente au point M_0 $(a, f(a))$

Exercices :

1) Calculer une valeur approchée de 1,00018.
2) Calculer le nombre dérivé de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 1$.
   Déterminer la différentielle de f en 1.
   Montrer que $f(1+h) = 1 - h + \dfrac{h^2}{1+h}$.

   Calculer $f(1{,}00079)$ par défaut avec une incertitude inférieure à 10^{-6}.
3) Trouver la différentielle de $x \longmapsto x^3$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit un cube de métal dont les arêtes ont pour longueur x_0 à la température de 0 degré et x à la température t degrés.
On appelle coefficient de dilatation linéaire le nombre α tel que : $x = x_0(1 + \alpha t)$.

Si V_0 est le volume du cube à 0 degré, alors V son volume à t degrés est donné par $V = V_0\ (1 + \beta t)$.

Calculer β en fonction de α.

4) Approximation sin et tg pour les petits angles

$$\sin(0 + x) = \sin 0 + 1 \,.\, x + x \,.\, \varepsilon(x)$$

$$\sin x \simeq x$$

$$\operatorname{tg} x \simeq x$$

Quant à l'utilisation en physique, extrêmement riche et variée, de ces approximations, elle sera développée dans un prochain polycopié.

o

o o

II.C. COMMENTAIRES SUR LE TRAVAIL EFFECTUE EN MATHEMATIQUE EN CLASSE DE PREMIERE

Ayant eu en main le polycopié de R. Barra et J.J. Pensec sur la dérivabilité, et ayant expérimenté pendant deux ans le travail en groupes à partir de ce document, nous avons préféré ensuite simplifier les fiches de façon que les notions essentielles et la ligne directrice apparaissent plus clairement. Il nous a semblé que les élèves, peu habitués à ce genre de travail, se perdaient dans le maquis des exemples et contre-exemples ; c'est pourquoi les exercices un peu astucieux ont été réservés pour plus tard, les élèves étant déjà familiarisés avec la notion.

Il est évident que ce travail suppose, D'ABORD, une bonne compréhension de ce qu'est une fonction ; si cette notion n'a pas été convenablement traitée en classe de seconde, il est indispensable de la reprendre à fond en première. Certains élèves, lorsqu'on leur demande de dessiner la représentation graphique d'une fonction, dessinent  ou  .

Tout ce qui concerne l'utilisation des expériences a été très bien traité par les élèves. Les difficultés rencontrées n'ont concerné que les questions purement mathématiques, et surtout un blocage au départ : faute d'habitude, les élèves ne savent pas par quel bout prendre une difficulté mathématique ; ils n'ont pas non plus l'habitude de se poser des questions sur la validité d'une définition ou d'un théorème : les questions, c'est le professeur qui les résoud au tableau.

C'est pourquoi il semble indispensable de demander à l'élève de réfléchir avant une démonstration sur le problème posé et les difficultés qu'il va rencontrer ; et aussi de rédiger avec un grand soin et une grande précision les énoncés et les résultats trouvés.

Il paraît efficace de poser des questions faciles, nécessaires au maintien d'un bon moral, encore que parfois elles déconcertent les élèves. On peut poser des questione difficiles et les laisser volontairement ouvertes (continuité de la fonction dérivée...) ; et aussi présenter des propositions dont il s'agit de dire si elles sont vraies ou fausses, et si elles sont fausses de les rectifier, afin d'inciter l'élève à varier ses méthodes de travail.

En conclusion, afin de ne pas encourager les illusions, nous citerons la remarque d'un élève, particulièrement peu coopératif il est vrai : "Mais enfin, est-ce que vous nous donnerez un VRAI COURS sur la dérivation ?"

Il faut compter 8 h. de travail en groupes. La notion de fonction dérivée a fait, immédiatement après cette étude, l'objet d'un cours classique (la raison en est la "lenteur" du travail en groupes, et l'étendue démesurée du programme de première), et n'a pas posé de problèmes particuliers.

o
o o

III - LA DEFINITION DES FONCTIONS VECTORIELLES EN TERMINALE

Dans cette section il s'agit de montrer :

- Comment est défini le vecteur vitesse en cinématique
- Comment cette définition formelle correspond à la définition physique qui a été introduite dans la section I.
- Comment on peut vérifier expérimentalement que le vecteur vitesse est un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire.
- Quels exercices de Mathématique appliquée on peut proposer.

III.A. LES FONCTIONS VECTORIELLES ET LA CINEMATIQUE (résumé du cours pour une approche Math-Physique)

On considère un espace vectoriel euclidien E et un espace affine euclidien associé $\mathcal{E}$ (en particulier on les prendra de dimension 2 ou 3)

III.A.1.

Fonction vectorielle	Fonction ponctuelle associée (O fixe)
$F \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow E \\ \lambda \longmapsto \overrightarrow{F}(\lambda) \end{cases}$	$\mathcal{F}_0 \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E} \\ \lambda \longmapsto M \end{cases}$ tel

que : (Fonctions coordonnées) (si dim E = 2)

$$\overrightarrow{F}(\lambda) \begin{cases} x = X(\lambda) \\ y = Y(\lambda) \end{cases} \qquad \overrightarrow{OM} \overset{\text{ou}}{=} \overrightarrow{F}(\lambda) \text{ noté aussi } \overrightarrow{OM}(\lambda)$$

III.A.2. On définit ensuite les limites, la continuité et la dérivabilité de F en un point, (et par extension celle de $\mathcal{F}_0$), d'abord d'une manière intrinsèque, puis, en les rapportant à une base (respectiv. à un repère), en considérant les fonctions coordonnées associées.

En particulier $\overrightarrow{F'}(\lambda_0) \begin{cases} X'(\lambda_0) \\ Y'(\lambda_0) \end{cases}$

et on note $(\overrightarrow{OM})'(\lambda_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\lambda}(\lambda_0)$

le vecteur dérivé.

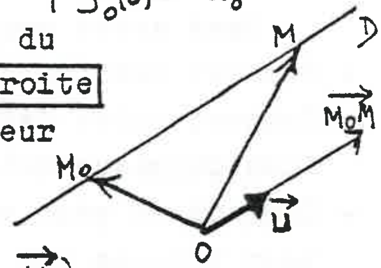
III.A.3. Exemples fondamentaux (dans un plan)

a) $F : \lambda \longmapsto \overrightarrow{U_0} + \lambda . \overrightarrow{U}$

associée à $\mathcal{F}_{M_0} : \lambda \longmapsto M$ tel que $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{M_0M} = \lambda . \overrightarrow{U} \\ \mathcal{F}_0(0) = M_0 \end{array} \right.$

Dans ce cas l'ensemble des points du plan affine ainsi défini est la $\boxed{\text{droite}}$ affine passant par M_0 et de vecteur directeur U.

Le paramètre λ représente alors l'abscisse de M sur l'axe $(M_0 ; \overrightarrow{U})$

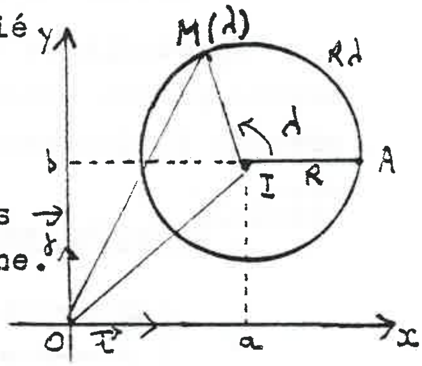


b) . $F : \lambda \longmapsto \overrightarrow{U_0} + R[(\cos\lambda).\overrightarrow{i} + (\sin\lambda).\overrightarrow{j}]$

. $\overrightarrow{OM}(\lambda) = \overrightarrow{F}(\lambda) : \begin{cases} X(\lambda) = a + R\cos\lambda \\ Y(\lambda) = b + R\sin\lambda \end{cases}$

. $\|\overrightarrow{IM_\lambda}\| = R$

Dans ce cas le point $M(\lambda)$ associé est un point du $\boxed{\text{cercle}}$ de centre $I(a ; b)$, et $R\lambda$ représente l'abscisse curviligne du point M sur ce cercle orienté dans le sens usuel, A étant pris comme origine.



III.A.4. Notions de trajectoire

Dans ces deux cas il apparaît alors clairement que si $\lambda = t$ ou $\lambda = u(t)$ où t représente une date et u une fonction numérique, on peut considérer que M représente la position d'un mobile dans le plan à la date t ; la courbe $(\mathcal{C})$ définie par la fonction est alors appelée trajectoire du mobile et est donc l'ensemble des positions du mobile au cours du temps.

Remarque :

Dans les deux cas précédents la fonction u définit la nature du mouvement sur sa trajectoire et il apparaît clairement que celui-ci ne dépend pas a priori de celle-là :

$\lambda = u(t)$ étant proportionnel à l'abscisse curviligne,

- Si $u(t) = at + b$ (f.affine) alors le mouvement est uniforme.

- Si $u(t) = at \; + bt + c$ alors le mouvement est uniformément varié
- Si $u(t) = a \cos(\omega t + \varphi) + b \sin(\omega t + \varphi)$ le mouvement est oscillant.

En effet dans ces deux cas particuliers de trajectoire le nombre

$$u'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0}$$

représente la vitesse du point M à la date t sur sa trajectoire, puisque $u(t)$ représente la distance parcourue par le mobile sur cette trajectoire (à un coefficient près).

III.A.5. Introduction du vecteur vitesse

En appliquant la définition des dérivées des fonctions vectorielles on observe aussi que si l'on pose $G = F \circ u$; $(\lambda = u(t))$; on a $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{F(u(t))}$

et donc $\overrightarrow{G'(t)} = u'(t) \cdot \overrightarrow{F'(u(t))} = u'(t) \cdot \overrightarrow{F'(\lambda)}$

donc en particulier : (cf. § III.A.3 ci dessus)

(a) si $\overrightarrow{F}(\lambda) = \overrightarrow{U_0} + \lambda . \overrightarrow{U}$ on a $\overrightarrow{F'}(\lambda) = \overrightarrow{U}$

d'où $\overrightarrow{G'}(t) = u'(t) . \overrightarrow{U}$

alors le vecteur $\overrightarrow{G'(t)}$ a pour mesure algébrique $u'(t)$ par rapport à $\overrightarrow{U}$, c'est-à-dire la vitesse du mobile sur la droite.

(b) Si $F(\lambda) = \overrightarrow{U_0} + R\left[(\cos\lambda).\vec{i} + (\sin\lambda).\vec{j}\right]$

alors $\overrightarrow{F'}(\lambda) = R\left[(-\sin\lambda).\vec{i} + (\cos\lambda).\vec{j}\right]$

d'où $\overrightarrow{G'(t)} = u'(t) . \overrightarrow{F'}(\lambda)$ avec $\overrightarrow{F'}(\lambda) \begin{cases} -R \sin\lambda \\ R \cos\lambda \end{cases}$

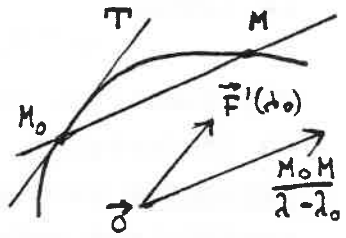
or le vecteur $\overrightarrow{F'}(\lambda)$ est ici orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IM}(\lambda)$, la base $(\vec{i}, \vec{j})$ étant supposée orthonormée.

$\overrightarrow{IM}(\lambda)$ étant le "Rayon-Vecteur" de M, le vecteur $\overrightarrow{F'}(\lambda)$ est "tangent" au cercle au point M et $G'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente en M au cercle trajectoire, de plus $\|\overrightarrow{F'(\lambda)}\| = R$ (constante).

Dans ces deux cas particuliers il est donc naturel de définir le vecteur $\overrightarrow{G'}(t)$ comme le vecteur vitesse du mobile sur sa trajectoire et on observe qu'il est "tangent" à celle-ci en chaque point.

III.A.6. Cas général

Compte tenu des exemples précédents et de l'interprétation graphique de la limite du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\lambda-\lambda_0}$ on pose par définition que la droite affine définie par le point M_0 et le vecteur limite $\overrightarrow{F'(\lambda_0)}$ trouvé est la tangente à la courbe en M_0.



N.B. $\overrightarrow{F'}(\lambda_0) = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \dfrac{\overrightarrow{F(\lambda)} - \overrightarrow{F(\lambda_0)}}{\lambda-\lambda_0}$

$= \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \dfrac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{\lambda-\lambda_0} = \lim\limits_{\lambda_0} \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\lambda-\lambda_0}$

Par définition $\overrightarrow{G'(t)}$ est le vecteur vitesse du mobile au passage en M (t). le nombre $u'(t)$ ne représente pas nécessairement la dérivée de la distance parcourue par le mobile.

III.A.7. Equation Horaire - Diagramme Espace-Temps

Dans les deux exemples fondamentaux précédents la position du mobile sur la droite ou sur le cercle est définie par la fonction $u : t \longrightarrow \lambda$

où λ représente l'abscisse (rectiligne ou curviligne) du point sur sa trajectoire, et t représente la date de passage dans la position M (λ).

On dit que $\lambda = u\ (t)$ est l'équation horaire (ou la LOI HORAIRE) du mouvement ; la courbe représentative de la fonction u (supposée dérivable à l'ordre 2) s'appelle alors diagramme espace/temps du mouvement.

→ N.B. a priori la trajectoire et le diagramme n'ont rien de commun. Dans les exemples fondamentaux ci-dessus, le diagramme est soit une droite, soit une parabole, soit une sinusoïde, alors que la trajectoire est une droite ou un cercle. L'étude du diagramme et de la dérivée de la fonction permet de déterminer les points de la trajectoire où la vitesse est maximale ou nulle, ou change de sens.

III.A.8. Equations de définition des mouvements

Le mouvement d'un point dans le plan (ou l'espace) peut donc être défini par la donnée de sa trajectoire et de son équation horaire sur celle-ci. C'est en général de cette manière que l'on étudie le mouvement d'un mobile en physique.

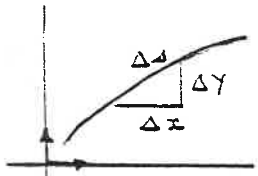
Mais le mouvement est également complètement défini par la donnée des équations paramétriques de sa trajectoire, dans lesquelles le paramètre est la date t et $M(t)$ est donc la position du mobile sur sa trajectoire à la date t.

Dans ce cas, il n'est pas possible en général (en classe terminale du moins) de définir l'abscisse curviligne du point $M(t)$ sur la courbe à partir des coordonnées de $M(t)$. Donc en général on ne connaît pas l'équation horaire du mouvement.

Cependant on peut démontrer que la vitesse de parcours sur la trajectoire peut s'obtenir facilement à partir des coordonnées $X(t)$ $Y(t)$.

En effet si Δs est un "petit morceau" de la trajectoire parcourue par le mobile pendant la durée Δt on peut écrire que $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)(t_0)$
où $v(t_0)$ désigne la vitesse du mobile sur sa trajectoire. Or dans un repère orthonormé on a :

$$\Delta s^2 \simeq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$



d d'où $[v(t_0)]^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2$

soit : $[v(t_0)]^2 = [X'(t_0)^2 + Y'(t_0)^2] = \overrightarrow{G'(t_0)}^2$ d'où $|v(t)| = \|\overrightarrow{G'(t)}\|$
$= |u'(t)| \cdot \|F'(\lambda)\|$

Ainsi lorsque le vecteur $\overrightarrow{F'}(\lambda)$ a pour norme 1, le nombre $u'(t)$ représente-t-il la mesure de la vitesse de passage du mobile sur la courbe à la date t.

Si de plus la fonction trouvée est intégrable et que l'on en connaît une primitive, il suffira de connaître la position du mobile à un instant t sur la courbe par rapport à une origine fixée, pour en déduire l'abscisse curviligne de m sur la courbe :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt + s(t_0)$$

En Physique, on définit habituellement la fonction $V(t)$ par une primitive de l'accélération $\gamma(t)$ du mobile M ; car $\gamma(t)$ est toujours défini par les forces qui provoquent le mouvement. Dans ce cas, on connaît la trajectoire a priori et l'on établit l'équation horaire à l'aide de 2 "quadratures" successives à partir de l'accélération prise sur cette trajectoire.

En Mathématique (dans les problèmes de Bac en particulier), on définit habituellement le mouvement seulement par les équations paramétriques de sa trajectoire avec le temps comme paramètre :
$$\overrightarrow{OM}(t) \quad \begin{cases} X(t) = x \\ Y(t) = y \end{cases}$$

On trace alors cette trajectoire en cherchant, si nécessaire, une équation cartésienne de la forme $y = f(x)$ dont on construit le graphe. On est alors ramené à la situation initiale dès que l'on connaît une expression de la vitesse instantanée, c'est-à-dire :
$$|v(t)| = \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}$$
et que l'on peut intégrer celle-ci.

N.B. Dans la plupart des problèmes posés au baccalauréat, la fonction f fait l'objet d'une étude préalable et on connaît sa courbe représentative ; la question de la détermination de la "trajectoire du mobile dont la position est définie à chaque instant par
$$\overrightarrow{OM}(t) = x.\vec{i} + y.\vec{j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \text{ donnés"}$$
se ramène donc à un problème d'élimination de t entre les équations paramétriques pour obtenir la relation $y = f(x)$ escomptée.

III.A.9. Recherche d'une équation cartésienne explicite de la trajectoire lorsque celle-ci est définie par :
$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$$
on cherche une relation entre x et y de la forme $g(x ; y) = 0$ (cas des coniques par exemple) ou de la forme $y = f(x)$ (ou $x = f(y)$).

Pour que le problème soit possible sous la deuxième forme ($y = f(x)$), il faut et il suffit que la fonction $X : t \mapsto x$ sur l'intervalle I ait une fonction réciproque.

En effet, s'il en est ainsi on pose $h = X^{-1}$ et on en déduit que pour tout $x \in J$ (J image de I par X) on a $t = h^{-1}(x)$ d'où $y = Y(h^{-1}(x))$ c'est-à-dire que $f = Y \circ h^{-1}$, et est définie sur J.

N.B. En pratique X est souvent une fonction polynôme du 1er ou du 2d degré, ou une fonction homographique, ou une exponentielle, ou un logarithme, et l'inversion peut se faire explicitement en tenant compte des conditions initiales.

III.A.10. Equations paramétriques d'une courbe définie par $y = f(x)$

Soit $M(x,y) \in \mathcal{C}(f) \Leftrightarrow y = f(x)$
alors on a $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = x.\vec{i} + f(x).\vec{j}$
par suite on peut poser $x = t$ et $y = f(t)$
c'est-à-dire X = identité et $Y = f$
d'où $\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ définit la $\mathcal{C}(f)$

III.A.11. Cohérence des définitions des tangentes et de la vitesse

Soit $\mathcal{C}$ une courbe du plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $\mathcal{C}$ admet à la fois une représentation cartésienne et une représentation paramétrique :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = f(x) \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \quad \text{avec} \begin{cases} x = X(\lambda) \\ y = Y(\lambda) \end{cases} \end{cases}$$

On peut alors définir la tangente en un point "ordinaire" de la courbe ($\mathcal{C}$) de deux manières différentes :
(a) définition "cartésienne" : la tangente en $M_0(x_0\,;\,y_0)$ à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur $\alpha_0 = f'(x_0)$
Donc le vecteur $\overrightarrow{T_0}$ de coordonnées $(1\,;\alpha_0)$ dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est un vecteur directeur de la droite $D(M_0\,;\,\vec{T}_0)$.

En particulier : si $x = t$ est aussi la date, on sait que le vecteur

$$\vec{V}(t_0) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) : \begin{cases} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{cases}$$

est par définition le vecteur vitesse du mobile dont la position est définie à la date t par $\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$
Par suite avec $x = t$ et $y = f(t)$ on a $\vec{V}(t_0) = \vec{T}_0$
(b) définition "paramétrique" : par définition le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\lambda}(\lambda_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(\lambda_0)$ à $\mathcal{C}$.

On pose $M(\lambda_0) = M_0(X(\lambda_0)\,;\,Y(\lambda_0))$

On a donc $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\lambda}(\lambda_0) \begin{cases} X'(\lambda_0) \\ Y'(\lambda_0) \end{cases}$

Montrons que si $Y = f(x)$ est une équation cartésienne de la <u>même courbe</u> la tangente en M_0 est bien définie par le vecteur $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\lambda}(\lambda_0)$.

En effet X étant inversible et $h = X^{-1}$ on a :

$$[\lambda \in I \,;\, x = X(\lambda) = h^{-1}(\lambda)] \Longleftrightarrow [\lambda = h(x) \text{ et } x \in J]$$

et pour $x \in J$ on a $Y(\lambda_0) = Y[h(x_0)] = f(x_0)$

Par suite $f'(x_0) = Y'(\lambda_0) \times h'(x_0) = Y'(\lambda_0) \cdot (X^{-1})'(x_0)$

d'où $f'(x_0) = \dfrac{Y'(\lambda_0)}{X'(X^{-1}(x_0))} = \dfrac{Y'(\lambda_0)}{X'(\lambda_0)}$

par suite le vecteur $\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \dfrac{Y'(\lambda_0)}{X'(\lambda_0)}\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}X'(\lambda_0)\\ Y'(\lambda_0)\end{pmatrix}$

est <u>colinéaire</u> au vecteur $\overrightarrow{U_0}\,(X'(\lambda_0)\,;\,Y'(\lambda_0))$

Donc $\overrightarrow{U_0}$ est bien également un <u>vecteur directeur</u> de la <u>tangente</u> en M_0 à $\mathcal{C}$. Les deux définitions sont cohérentes.

<u>En particulier</u> - si $\lambda = t$ et $x = X(t) = t$ on est ramené au cas précédent : $\overrightarrow{U_0} = \overrightarrow{T_0}$ est le vecteur vitesse.

- si $\lambda = u(t)$ et $x = X(\lambda) = (X_0 u)(t)$ alors $\overrightarrow{V_0} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = u'(t_0) \cdot \overrightarrow{U_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$ reste "porté" par la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0.
(si $\|\overrightarrow{U_0}\| = 1$ alors $u'(t_0)$ est la mesure algébrique de la vitesse curviligne).

<u>Conséquence</u> : Si l'on connaît les deux fonctions :
$X : t \longmapsto x$ <u>et</u> $Y : t \longmapsto Y$ (<u>lois horaires</u>)
et leur courbe représentative (par rapport au temps), c'est-à-dire le diagramme $(\mathcal{C}_x)$ de l'abscisse / temps et le diagramme $(\mathcal{C}_y)$ de l'ordonnée par rapport au temps alors

- la tangente en $P_0\,(t_0\,;\,x_0)$ à $\mathcal{C}_x$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{H_0}\begin{pmatrix}1\\ X'(t_0)\end{pmatrix}$
- la tangente en $Q_0\,(t_0\,;\,x_0)$ à $\mathcal{C}_y$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{K_0}\begin{pmatrix}1\\ Y'(t_0)\end{pmatrix}$

et on sait que le vecteur $\overrightarrow{U_0}\begin{pmatrix}X'(t_0)\\ Y'(t_0)\end{pmatrix}$ est "tangent" à la trajectoire en $M(t_0)$.

Par suite le vecteur $\overrightarrow{U_o}$ peut être construit à partir des <u>mesures</u> $X'(t_o)$ et de $Y'(t_o)$ faites sur les diagrammes X/t et Y/t, avec les mêmes unités pour le temps et pour les distances.

<u>On peut vérifier expérimentalement qu'il en est bien ainsi</u> :

(a) On trace expérimentalement les diagrammes abscisse/temps et ordonnée/temps (même échelle).

(b) On construit les vecteurs vitesse à

$$t_o : \overrightarrow{H_o}\begin{pmatrix}1\\ V_{X_o}\end{pmatrix} \text{et } \overrightarrow{K_o}\begin{pmatrix}1\\ V_{Y_o}\end{pmatrix}$$

des projections du mobile sur les axes.

(c) On construit le vecteur $\overrightarrow{V_o}\begin{pmatrix}V_{xo}\\ V_{yo}\end{pmatrix}$ avec les mesures relevées sur $\overrightarrow{H_o}$ et $\overrightarrow{K_o}$ et on constate que le vecteur $\overrightarrow{V_o}$ obtenu est bien tangent à la trajectoire en $M(t_o)$.

La manipulation décrite ci-dessous a pour objet cette vérification :

- On <u>postule</u> seulement que pour un mouvement rectiligne la vitesse de passage en un point est définie par la dérivée de l'équation horaire en ce point, donc par le vecteur directeur de la tangente au diagramme en ce point (voir paragraphes I et II plus haut)
- On <u>vérifie</u> que le vecteur qui a pour coordonnées les vitesses mesurées sur les tangentes en t_o aux deux diagrammes, est lui-même tangent en $M(t_o)$ à la trajectoire.

R e m a r q u e :

Dans la manipulation décrite dans la section I.B., on se fixe pour objectif d'introduire la notion de vecteur vitesse comme limite du vecteur taux d'accroissement, mais à ce niveau (2de) la notion de dérivée n'est pas connue des élèves et c'est seulement après avoir fait cette expérience que l'on peut poser "naturellement" $\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et projeter $\vec{V}(t)$ sur les axes en $X'(t)$ et $Y'(t)$.
On peut également évaluer celles-ci directement en partant des conclusions des expériences I.A. qui indiquent que la vitesse instantanée d'un mobile en mouvement rectiligne peut être définie par la vitesse moyenne, constante, du "mouvement tangent".

Il n'y a donc pas redondance entre l'expérience I.B. et celle qui suit.

III.B. VERIFICATION EXPERIMENTALE DE LA DEFINITION DU VECTEUR VITESSE

On se propose au cours de cette manipulation d'étudier le mouvement d'un palet lancé sur l'aérotable inclinée, et de mettre en évidence que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

III.B.1. Description de la manipulation :

L'aérotable est calée horizontalement à l'aide de trois vis calantes. Les empreintes des pieds sont relevées, puis l'un d'eux est soulevé à l'aide d'une cale d'épaisseur 29,0 mm (mesure faite au pied à coulisse au 1/10mm).

L'inclinaison de la table est donnée par la relation

$$\text{tg } \theta = \frac{h}{L} \quad \text{avec} \quad h = 29 \text{ mm et } L = 471 \text{ mm}$$

L'angle étant petit

$$\theta \simeq \text{tg } \theta \simeq \sin \theta \qquad \theta = 0{,}0615 \text{ rad}$$

Deux lampes sont placées sur la table à 30 cm l'une de l'autre ce qui permet de reproduire le document photographique à l'échelle 1.

Le mobile est lancé sur la table avec une vitesse V_o, on observe après rebond sur le bord élastique de l'aérotable la trajectoire de forme parabolique.

Le même mobile est ensuite lâché sans vitesse du bord supérieur de la table. Sa trajectoire matérialise la ligne de plus grande pente.

L'ensemble est chronophotographié à la cadence de 25 images seconde.

On a donc $\Delta t = 0{,}04$ s

Le travail est ensuite effectué sur un document agrandi à l'échelle 1.

III.B.2. Recherche des axes sur lesquels le mouvement est étudié par projection

La forme de la trajectoire laisse supposer qu'il existe un axe de symétrie celui-ci est recherché par pliage après que la courbe ait été tracée car en général il n'y a pas superposition des points. Cet axe est tracé en rouge sur le calque (figure 1).

On remarque qu'il est parallèle à la ligne de plus grande pente de la table repérée par le mouvement du palet qui glisse sous l'action de son poids et du souffle d'air qui le sustente.

On choisit donc deux axes rectangulaires, l'un se confondant avec l'axe de symétrie et les positions du mobile sont reportées sur une feuille de papier millimétré, et projetées sur ces deux axes (figure 2).

III.B.3. Etude des lois horaires $x = f_{(t)}$ et $y = g_{(t)}$

Considérons les repères $(\vec{Ox}, \vec{Ot})$ et $(\vec{Ot}, \vec{Oy})$

L'axe des temps est gradué en $\frac{1}{25}$ s et est commun aux deux repères.

On reporte sur l'axe $\vec{Ox}$ les projections du mobile sur l'axe perpendiculaire à la ligne de plus grande pente de l'aérotable. Les mesures x et t permettent de tracer le graphe de la fonction qui à t fait correspondre x, le graphe de cette fonction est une droite, donc le taux d'accroissement de la fonction f est constant.

Soit $\Delta t = 0{,}2$ s; on mesure $\Delta x = 28$ mm (figure 3). La projection du vecteur vitesse sur l'axe Ox est constante $V_x = 14$ cm.s^{-1}.

On reporte sur l'axe $\vec{Oy}$ les projections du mobile sur l'axe de symétrie de la trajectoire (par souci de simplification on ne considère que l'une des deux moitiés).

Le graphe de la fonction n'est pas une droite. Pour déterminer la composante de la vitesse à un instant t on considère la tangente à la courbe à cet instant et on détermine le taux d'accroissement de la tangente. On a donc en A (cinquième point à partir de l'origine) un accroissement de 14 mm en 0,2 s ; en B (10ème point) le taux d'accroissement est 39 mm en 0,2 s et en C (15ème point) le taux d'accroissement est 64 mm en 0,2 s.

On a donc les vitesses (figure 4) :

$$V_{A(y)} = \frac{14}{0,2} = 70 \text{ mm.s}^{-1}$$

$$V_{B(y)} = \frac{39}{0,2} = 195 \text{ mm.s}^{-1} \qquad \text{(figure 4)}$$

$$V_{C(y)} = \frac{64}{0,2} = 320 \text{ mm.s}^{-1}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont au moment du passage en

A : V_x = 140 mm.s^{-1} V_y = 70 mm.s^{-1}

B : V_x = 140 mm.s^{-1} V_y = 39 mm.s^{-1}

C : V_x = 140 mm.s^{-1} V_y = 64 mm.s^{-1}

III.B.4. Construction des vecteurs vitesse au passage en A, B, C.

Reprenons l'enregistrement du mouvement du mobile, sur la demi-courbe utilisée pour déterminer les projections des points, repérons le 5ème point A, le 10ème point B, le 15ème point C (figure 1).
En A nous portons les mesures effectuées en A sur les diagrammes x/t et y/t (grandissement 2) soit à partir de A, 28 mm parallèlement à Cx et, du point obtenu, 14 mm parallèlement à Cy ce qui permet de tracer $\overrightarrow{V_A}$.
La même construction effectuée en B et C donne $\overrightarrow{V_B}$ et $\overrightarrow{V_C}$. On remarque que ces vecteurs sont tangents à la trajectoire.

III.B.5. Etude de la vitesse

Ces trois vecteurs vitesse ont même composante sur l'axe Ox. C'est la composante sur Oy qui croît au cours du temps.

Construisons $\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_C} - \overrightarrow{V_B}$. Ces vecteurs sont égaux et orientés selon la ligne de plus grande pente du plan sur lequel se déplace le mobile.
L'accélération du mouvement est donc un vecteur constant

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \qquad \text{(figure 1)}$$

Le mouvement étudié se décompose en deux mouvements : un mouvement rectiligne uniforme sur $\overrightarrow{Ox}$ et un mouvement rectiligne uniformément varié sur $\overrightarrow{Oy}$. La trajectoire est une courbe du second degré en x c'est une parabole.

III.B.6. Remarque

Sur le plan incliné, l'accélération est égale à l'accélération produite par la composante sur ce plan du champ de pesanteur ($g = 9,8\ m.s^{-2}$).
L'inclinaison étant faible ($\theta \simeq \frac{h}{L} = 0,0615$ rd)
on a

$$g.\sin\theta = g' = 0,603\ m.s^{-2} \qquad G' = 0,6\ m.s^{-2}.$$

Si on considère le mouvement de glissement sans vitesse initiale le long de la ligne de plus grande pente, on note (figure 1)

$$A" \quad \Delta x_1 = 69\ mm \qquad \Delta t = \frac{4}{25}\ s \qquad V_1 = 431\ mm.s^{-1}$$

$$B" \quad \Delta x_2 = 89\ mm \qquad \Delta t = \frac{4}{25}\ s \qquad V_2 = 556\ mm.s^{-1}$$

l'accélération de ce mouvement est

$$a = \frac{556 - 431}{0,2} = 0,625\ mm.s^{-2} \qquad a = 0,06\ m.s^{-2}$$

Si on considère le mouvement parabolique

$$\Delta V_1 = \frac{25}{0,2}\ mm.s^{-1} \qquad \Delta V = \frac{25}{0,2}\ mm.s^{-1} \text{ pour des } \Delta t = 0,2\ s$$

$$a = \frac{25\ mm}{(0,2\ s)^2} \qquad a = 600\ mm.s^{-2} \text{ soit } 0,6\ m.s^{-2}$$

l'accélération est donc la même dans les trois cas.
Les constructions graphiques sont donc relativement précises.

III.B.7. Remarque

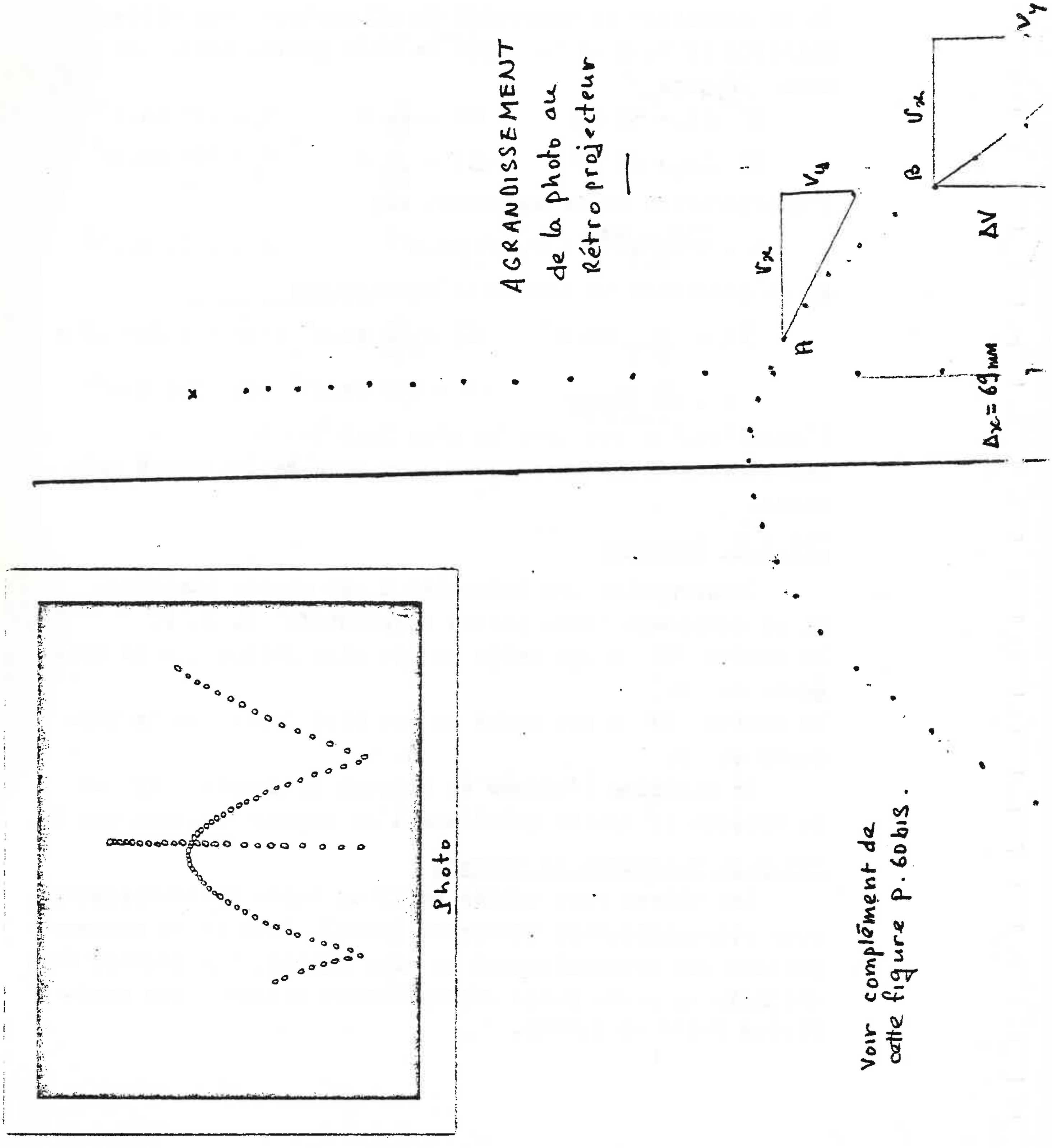
Construction des tangentes à une courbe ponctuée.
Si on considère trois points consécutifs M, N, P,
la droite MN a une pente un peu plus faible que la tangente en N
la droite NP a une pente un peu plus forte que la tangente en N.

On minimise l'erreur en traçant le segment MP et en traçant la droite parallèle à ce segment passant par N.

III.B.8. Technique de travail

Les élèves sont guidés en TP au moyen de transparents pour rétroprojecteur (document joint). Ceux-ci ne correspondent pas nécessairement au même cliché, ils peuvent être utilisés en cours comme dépouillement rapide d'une expérience faite en classe.

Figure 1



Voir complément de
cette figure P. 60 bis.

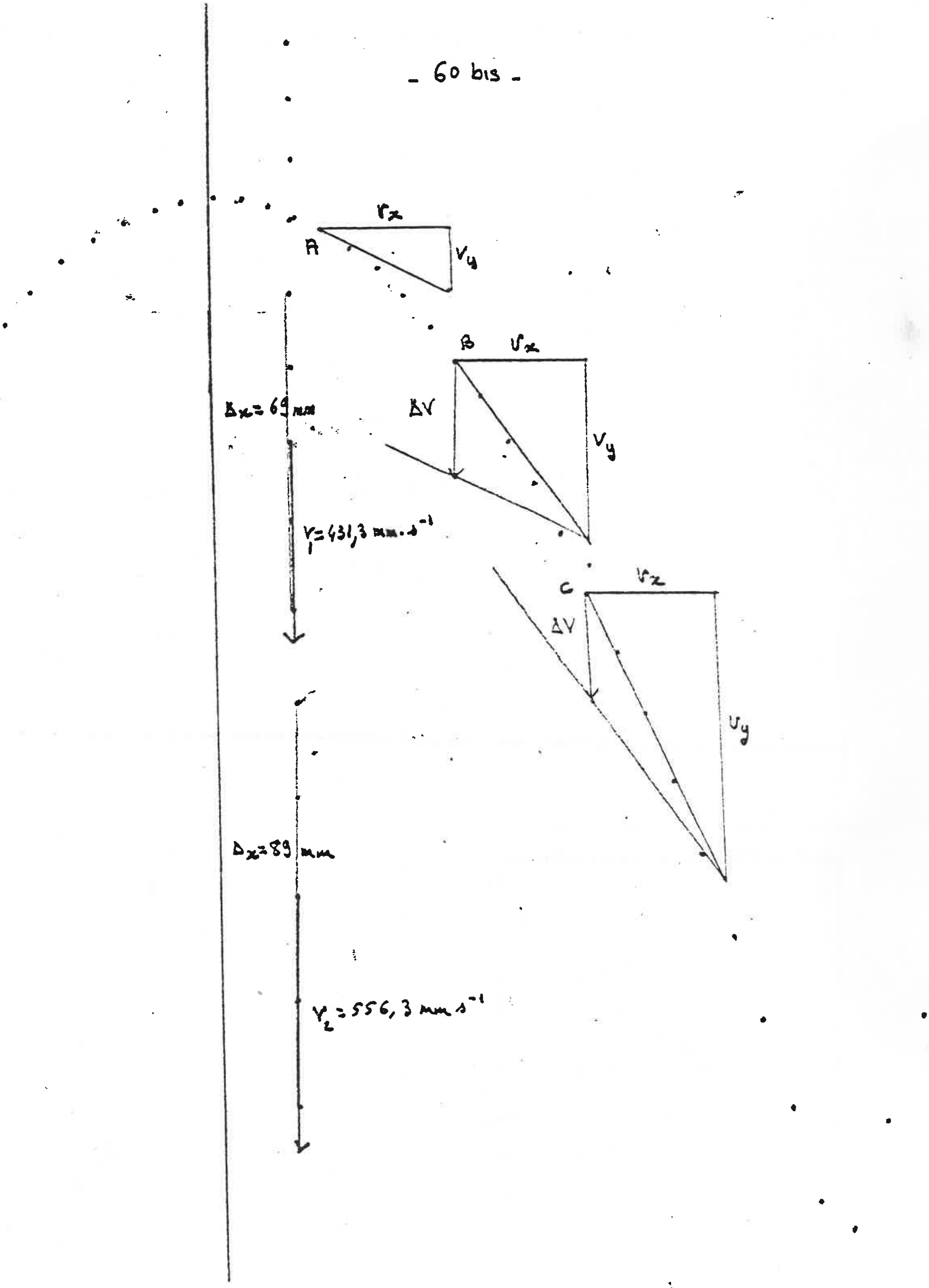
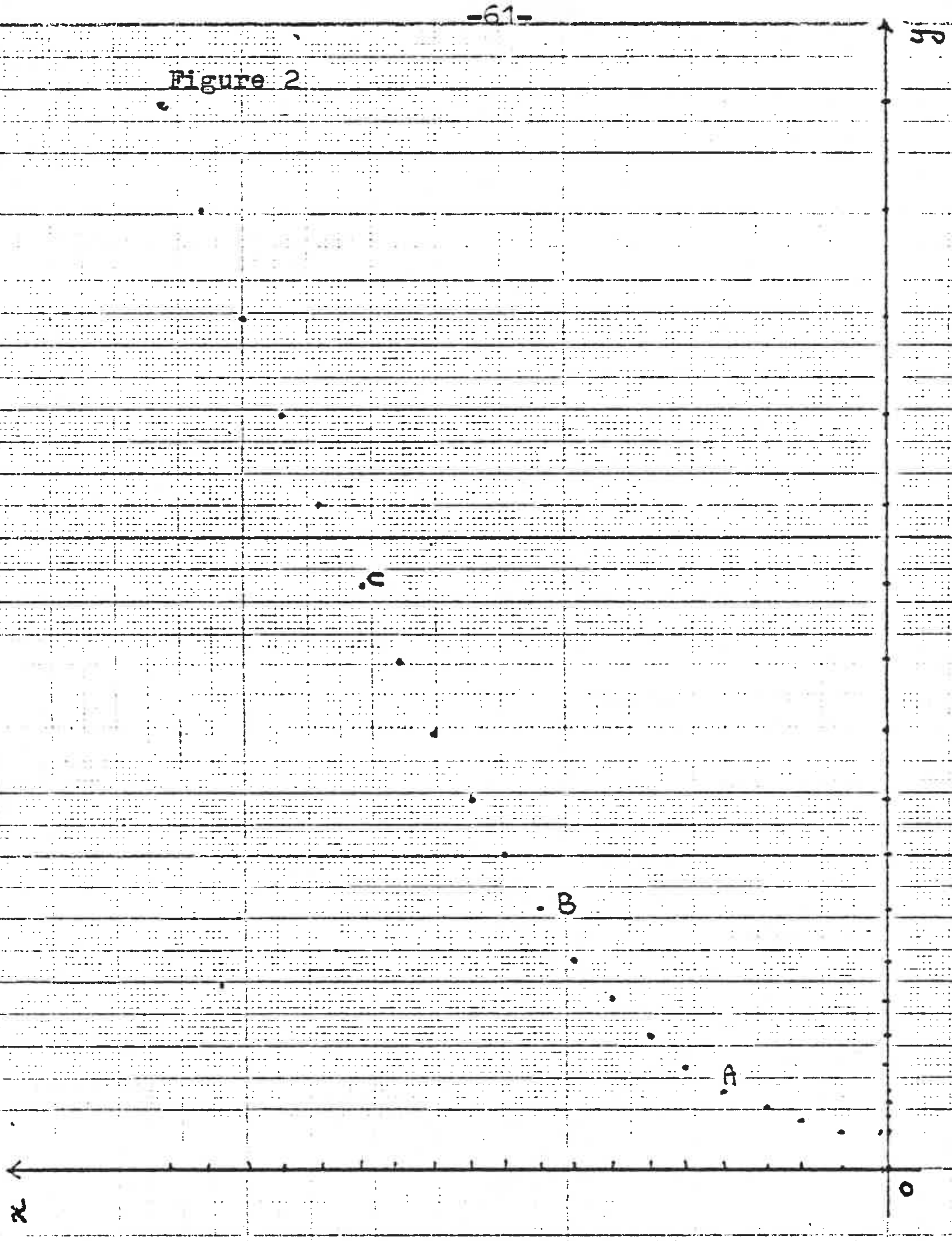
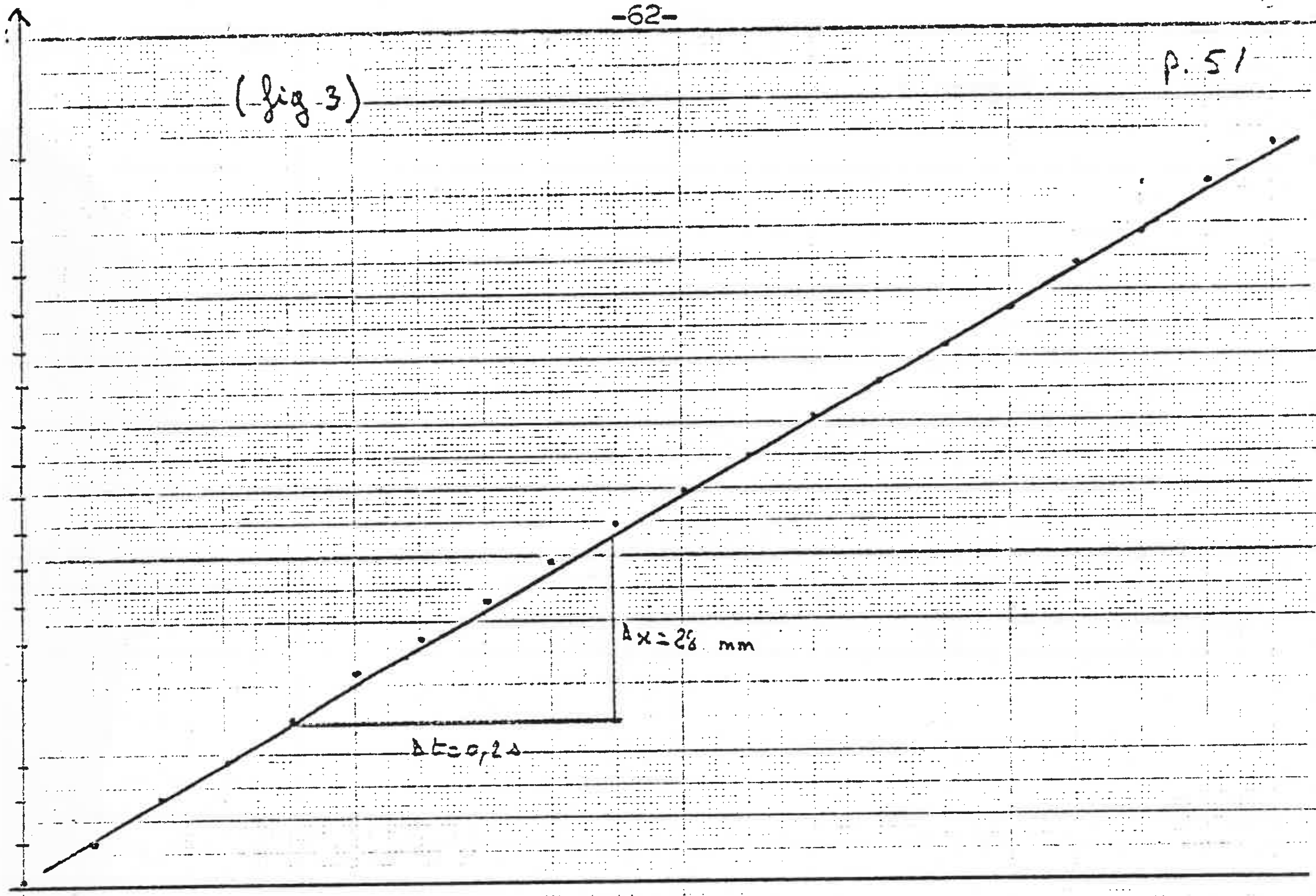

vx
A
vy
B
vx
ΔV
vy
Δx = 69 mm
V1 = 431,3 mm.s-1
C
vx
ΔV
vy
Δx = 89 mm
V2 = 556,3 mm s-1

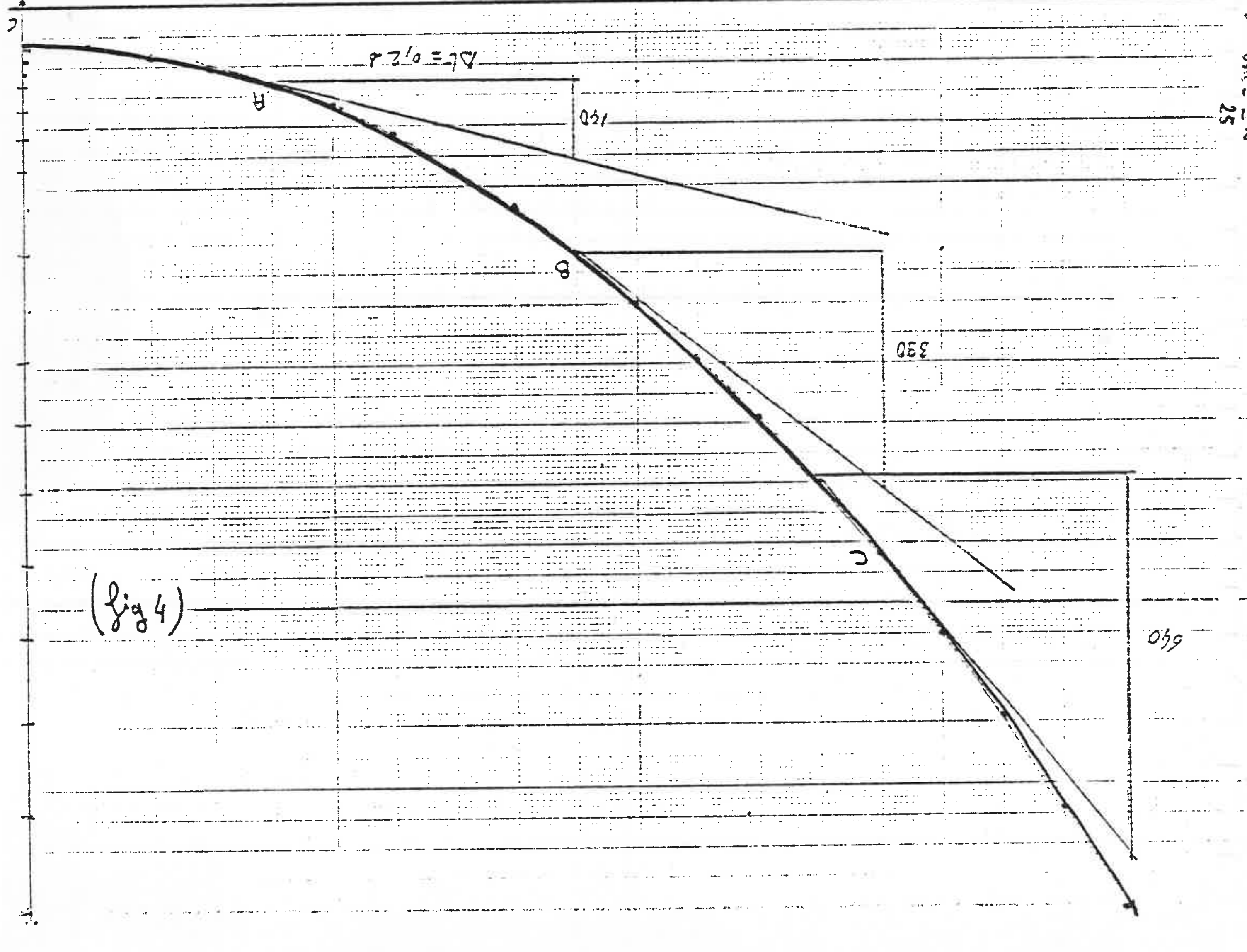
Figure 2



p. 51

(fig 3)





(fig 4)

III.C. PROBLEME TYPE DE CINEMATIQUE

III.C.1. Enoncé de l'exercice de physique (Cinématique)

Un point M a ses coordonnées définies en fonction du temps par les lois horaires $x = 3t^2 + 4$, $y = 5\,t$ (x et y en mètres, t en secondes)

Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile ?

Ecrire les expressions des composantes du vecteur vitesse en fonction du temps.

Calculer la vitesse du mobile aux dates $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s.

Quelles sont les composantes du vecteur accélération ?

Préciser aux dates $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 2$ s et $t = 3$ s la position du mobile, son vecteur vitesse et son vecteur accélération.

Vérifier que le vecteur vitesse à $t = 2$ s est tangent à la trajectoire.

Texte modifié en collaboration avec le professeur de math :

Soit M la position d'un mobile à la date t, repérée par ses coordonnées

$$x = 3\,t^2 + 4 \qquad y = 5\,t \qquad t \geqslant 0$$

dans un repère fixe donné orthonormé

(1) Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile dans ce repère.
Tracer la courbe représentative de la trajectoire.

(2) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse à la date t ; calculer la norme du vecteur vitesse à la date t.

(3) Calculer les coordonnées du vecteur accélération à la date t.

(4) Préciser aux dates $t = 0$ s ; $t = 1$ s,; $t = 2$ s et $t = 3$ s la position du mobile, son vecteur vitesse, et son vecteur accélération sur la trajectoire.

(5) Soit A la position du mobile à la date $t = 2$ s,

comparer le rapport des coordonnées du vecteur vitesse $\frac{V_y}{V_x}$ à la date $t = 2$ s avec la valeur au point A de la dérivée de la fonction f dont le graphe correspond à la trajectoire au voisinage de A.

III.C.2. Solution acceptable en physique

(a) Equation cartésienne de la trajectoire.

On élimine le temps entre les deux équations $\begin{cases} y = 5\,t \\ x = 3t^2 + 4 \end{cases}$

$t = \frac{y}{5}$ $\quad x = 3\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 4$ on trouve donc une

équation d'une parabole d'axe $\overrightarrow{OX}$ de sommet ($y_s = OX_s = 4$)

(b) Composantes du vecteur vitesse

par définition $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ $\quad \vec{V} = X'.\vec{i} + Y'.\vec{j}$

$X'_{(t)} = 6\,t$ $\quad Y'_{(t)} = 5$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{36\,t^2 + 25}$

(c) Calcul de la vitesse du mobile

$\|\vec{V}\| = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$

$t = 0$	$X' = 0$	$Y' = 5$		$V = 5 m.s^{-1}$
$t = 1s$	$X' = 6$	$Y' = 5$	$V = \sqrt{36 + 25}$	$V = 7{,}8 m.s^{-1}$
$t = 2s$	$X' = 12$	$Y' = 5$	$V = \sqrt{144 + 25}$	$V = 13 m.s^{-1}$

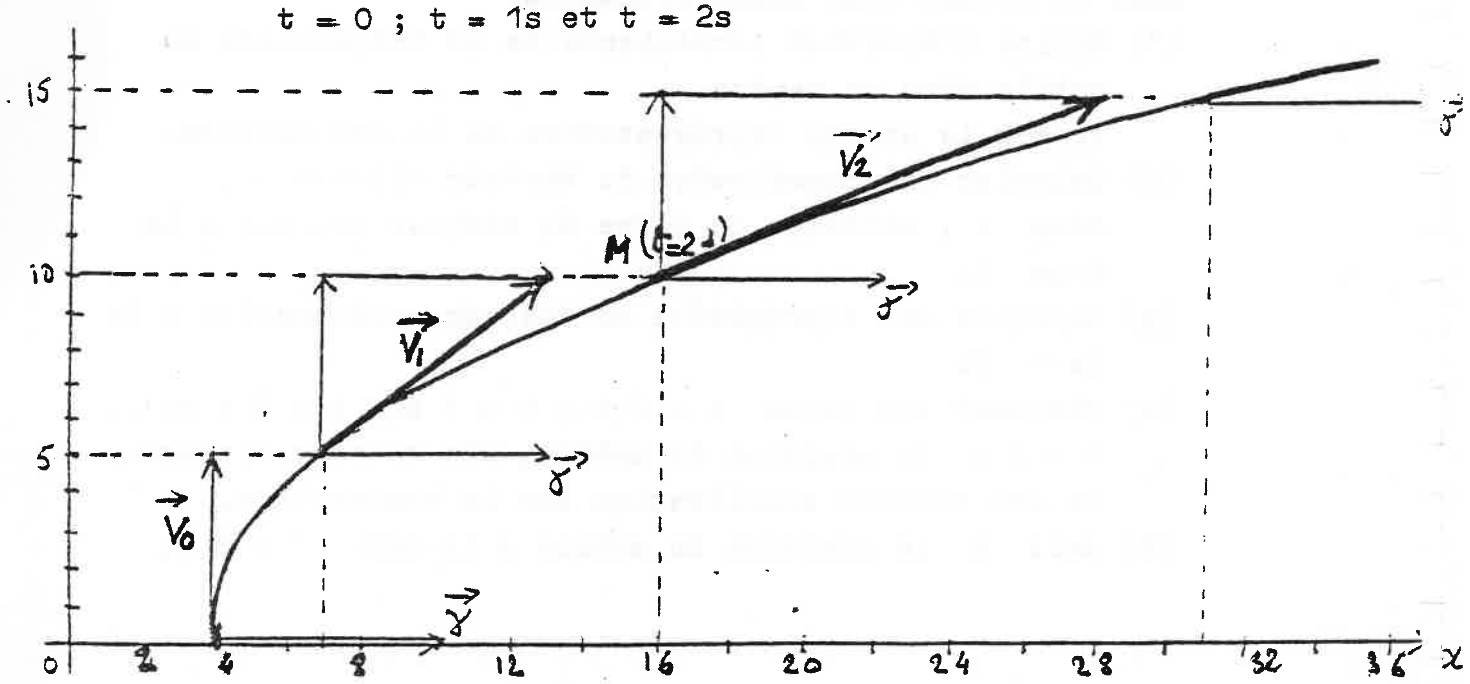
(d) Composantes du vecteur accélération

par définition $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ $\quad \gamma = X'' = 6$ $\quad \vec{\gamma} = 6\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$

le vecteur accélération est porté par l'axe $\overrightarrow{OX}$

(e) Position, vitesse et accélération du mobile aux dates

$t = 0$; $t = 1s$ et $t = 2s$



(f) Vérifier que le vecteur vitesse à la date $t = 2s$ est tangent à la trajectoire à $t = 2$ s le mobile est en M ($x = 16$, $y = 10$)
la dérivée de la fonction qui à y fait correspondre x est $x' = \frac{6y}{25}$
au point $y = 10$ elle prend pour valeur
$x'_{10} = \frac{6.10}{25} = \frac{12}{5}$

les composantes du vecteur vitesse en ce point sont
$V_x = 12 \text{ m.s}^{-1}$ $\quad V_y = 5 \text{ m.s}^{-1}$
on remarque que $\frac{V_x}{V_y} = \frac{12}{5} = x'_{10}$

Les deux rapports définissent en M le même taux d'accroissement, donc $\vec{V}$ est un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en M.

III.C.3. Solution commune Math-Physique

(a) Equation cartésienne de la trajectoire.

Dans un repère orthonormé R $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point M est repéré à la date t par ses coordonnées $x_{(t)}$ et $y_{(t)}$

$\overrightarrow{OM} = x_{(t)}.\vec{i} + y_{(t)}.\vec{j}$ avec $y_{(t)} = 5.t$ et $x_{(t)} = 3.t^2 + 4$
On élimine le temps entre les deux équations $t = \frac{y}{5}$

d'où $\boxed{x = 3.\ (\frac{y}{5})^2 + 4}$

on obtient l'équation d'une demi-parabole d'axe $\overrightarrow{OX}$ et de sommet ($Y_S = 0$; $X_S = 4$) puisque $t \geqslant 0$)

(b) Représentation graphique de la trajectoire

y	0	5	10	15
x	4	7	16	31

(c) Coordonnées du vecteur vitesse. Expression de la vitesse en fonction du temps.

Par définition $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\vec{V} = x'_{(t)}.\vec{i} + y'_{(t)}.\vec{j}$$
$$\vec{V} = 6.t.\vec{i} + 5.\vec{j}$$
$$\|\vec{V}\| = \sqrt{36.t^2 + 25}$$

(d) Calcul de la vitesse du mobile aux dates $t = 0$ s ; $t = 1$ s ; $t = 3$ s.

$t = 0$	$X' = 0$	$Y' = 5$		$V = 5\ m.s^{-1}$
$t = 1$	$X' = 6$	$Y' = 5$	$\|\vec{V}\| = \sqrt{36+25}$	$V = 7{,}8 m.s^{-1}$
$t = 2$	$X' = 12$	$Y' = 5$	$\|\vec{V}\| = \sqrt{144+25}$	$V = 13\ m.s^{-1}$
$t = 3$	$X' = 30$	$Y' = 5$	$\|\vec{V}\| = \sqrt{900+25}$	$V = 30{,}4 m.s^{-1}$

Position du mobile à ces mêmes dates :

$t = 0 \begin{cases} X = 4 \\ Y = 0 \end{cases}$; $t = 1 \begin{cases} X = 7 \\ Y = 5 \end{cases}$; $t = 2 \begin{cases} X = 16 \\ Y = 10 \end{cases}$; $t = 3 \begin{cases} X = 31 \\ Y = 15 \end{cases}$

Accélération du mobile :

$\vec{a} = X''_{(t)}.\vec{i} + Y''_{(t)}.\vec{j}$ $\qquad\qquad$ $\vec{a} = 6.\vec{i} + 0.\vec{j}$

le vecteur accélération est porté par l'axe $\overrightarrow{OX}$ sa norme est $6\ m.s^{-2}$ elle ne dépend pas du temps.

(e) Vérifier que le vecteur vitesse à la date $t = 2$ s est tangent à la trajectoire. A la date $t = 2$ s, le mobile est en $A(x = 16 \quad y = 10)$; $\vec{V}_{(t=2)} = 12.\vec{i} + 5.\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente en A à la trajectoire.

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{5}{12}$$

La trajectoire a pour équation cartésienne

$y = f(x)$ avec $f : x \longmapsto 5\sqrt{\frac{x-4}{3}} = y \iff \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \frac{x-4}{3}$

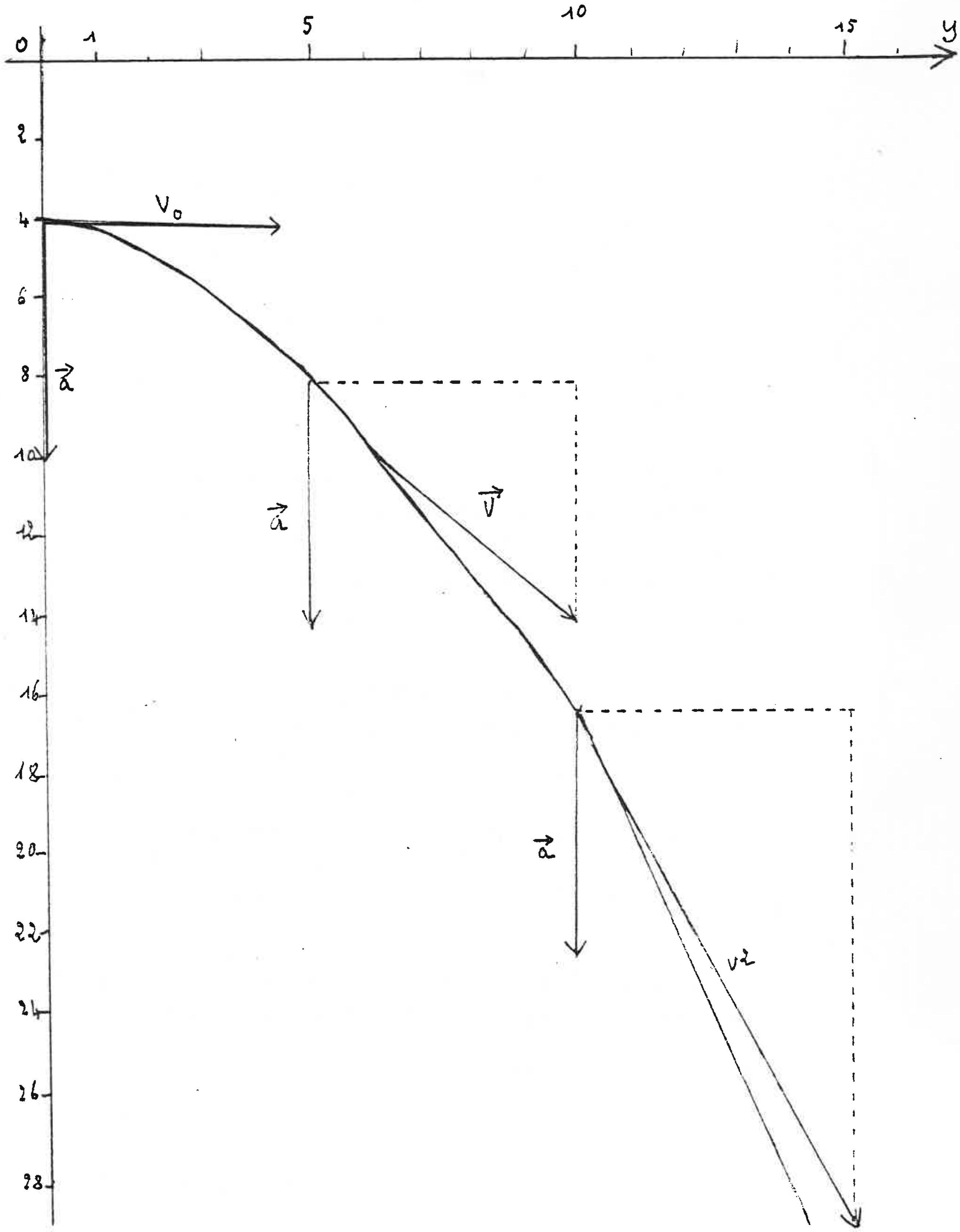
On peut calculer $f'_{(x=16)}$ soit directement, soit en utilisant la fonction inverse :

on calcule alors $(f^{-1})'_{(y=10)}$ $\qquad$ $f^{-1} : y \longmapsto \frac{3.y^2}{25} + 4.$

$f'_{(x=16)} = \frac{1}{(f^{-1})'_{(y=10)}}$ $\qquad$ $(f_y)'_{(y=10)} = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $f'_{(x=16)} = \frac{5}{12}$

le coefficient directeur de la tangente en A est donc bien égal au rapport des composantes $\frac{V_y}{V_x}$ du vecteur vitesse en ce point.

graphique p. 67



ooooooooooo

L E S   V E C T E U R S   E N   M E C A N I Q U E

Un des premiers sujets de discussion qui a occupé les groupes de travail "mathématique - physique" a été la notion de vecteur, les professeurs de mathématiques et de physique ayant souvent l'impression que leurs "vecteurs" n'étaient pas les mêmes.

Le mathématicien connaît moins souvent des "vecteurs" que des espaces vectoriels, le type fondamental d'espace vectoriel qu'il rencontre étant celui des espaces de fonctions à valeurs dans un corps, et leurs sous-espaces.

Le fait qu'il ne qualifie pas systématiquement de vecteurs les éléments d'un espace vectoriel de fonctions ne permet pas de dire qu'il y aurait des vecteurs plus "vecteurs" que les autres. C'est une simple question de terminologie, car dans la pratique les espaces fonctionnels sont bien considérés comme des espaces vectoriels, c'est-à-dire les fonctions comme des vecteurs. Mais l'usage donne prioritairement le nom de vecteur à des éléments d'espaces vectoriels de "nature" géométrique ou mécanique (par exemple vecteur translation, vecteur vitesse vecteur tangent à une surface, etc.).

Ce sont ceux que je voudrais étudier ici, en rendant compte en particulier de ce fait qui m'a troublé lorsque j'ai voulu réfléchir sur ce que l'on m'avait enseigné, que des vecteurs tels que les vitesses, les accélérations, les forces, bien que n'étant pas des vecteurs de l'espace géométrique, avaient comme ceux-ci des directions et des sens qui étaient exactement ceux des vecteurs géométriques, et en revanche, avaient des "intensités" qui ne correspondaient plus à la "longueur", (et il vaut mieux sans doute dire la "norme") des vecteurs géométriques.

I.- MOUVEMENTS. TEMPS. ESPACE.

La description scientifique du mouvement d'un point consiste à attribuer à chaque instant une position du point. Cette idée, qui peut nous sembler extrêmement naturelle, n'est pas si ancienne, et c'est sans doute Galilée qui l'a le premier conçue avec netteté, lorsqu'il a recommandé de "fixer son attention sur l'affinité suprême qui existe entre le mouvement et le temps".[1].

En langage mathématique du XX^{ème} siècle, le mouvement d'un point est donc une application de l'ensemble des instants dans l'ensemble des positions. Mais cela ne permet de progresser que s'il est précisé quelles sont les structures respectives de ces deux ensembles : l'ensemble des instants, qu'on appelle couramment le temps, et l'ensemble des positions, qui est appelé l'espace géométrique et couramment l'espace tout court.

1) Le temps, les instants, les durées.

La première structure que l'on pense devoir donner au temps, comme ensemble des instants, est une structure d'ordre total : le temps s'écoule toujours dans le même sens.

Mais la notion fondamentale est celle de durée. On pense être capable de dire qu'il s'est "écoulé le même temps" entre deux couples d'évènements s'étant produits à des périodes très lointaines les unes des autres : c'est sur cette idée que sont fondées toutes nos évaluations. On pense en outre pouvoir ajouter des durées, multiplier une durée par un nombre quelconque, et enfin, qu'une durée non nulle étant choisie et qualifiée d'unité (de temps), toute autre durée s'obtient en multipliant l'unité par un réel qui sera appelé la mesure de cette durée.

En outre, à tout couple d'un instant et d'une durée, on peut associer l'instant séparé du précédent par la durée donnée, et étant donnés deux instants quelconques, il existe une durée et une seule permettant de passer au premier au second.

---

(1) Galileo Galilée. Opere. Vol. II, p. 261 S 9 et Discorsi et dimostragioni intorno a due nuove Scienze. Opeu. vol. VIII. p. 197.
La citation ci-dessus est reproduite à partir de l'ouvrage de A. KOYRE, études galiléennes. p. 137. Coll. histoire de la pensée. Hermann 1966, dont nous recommandons la lecture à tous ceux qui s'intéressent à la génèse de la science, ce qui devrait comprendre tous les professeurs.

Tout ceci peut être exprimé et précisé (car tout n'a pas été dit dans la présentation précédente) de la manière suivante :

a) L'ensemble Ⓗ des durées a pour son addition et la multiplication par un réel une structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur le corps des réels. Le choix d'une unité permet en faisant correspondre à chaque durée sa mesure d'établir un isomorphisme de Ⓗ sur $\mathbb{R}$ (muni de sa structure d'espace vectoriel sur lui-même).
A chaque unité correspond un isomorphisme particulier : aucun de ces isomorphismes n'est "canonique" (c'est-à-dire fourni par la seule donnée de Ⓗ.), mais l'ensemble de ces isomorhismes l'est : Il faut noter que les isomorphismes que l'on utilise en mécanique sont ceux qui respectent "le sens du temps" , c'est-à-dire ceux pour lesquels une durée s'écoulant d'un instant à un instant postérieur a pour image dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour mesure) un réel positif.

b) Etant donnés un instant t et une durée θ, on peut leur faire correspondre l' instant $t \top \theta$ (instant séparé de t par la durée θ) avec les lois suivantes :

α) Si l'on a $t_2 = t_1 \top \theta_1$ et $t_3 = t_2 \top \theta_2$,

alors $t_3 = t_1 \top (\theta_1 + \theta_2)$

β) Quels que soient les instants t_1 et t_2, il existe une durée θ et une seule telle que $t_2 = t_1 \top \theta$

Ces propriétés sont résumées par l'expression : le groupe de Ⓗ (c'est-à-dire Ⓗ muni de sa seule opération d'addition) opère de façon simplement transitive sur l'ensemble $\mathbb{T}$ des instants. ("opère" se rèfère à l'application $(b, \theta) \longmapsto t \top \theta$ et à la propriété α; la transitivité simple à la propriété β).

La transitivité simple permet, un instant particulier étant choisi et étant alors baptisé origine du temps de déterminer chaque instant par la durée qui le sépare de l'instant origine. On parle alors couramment de l'instant t en prenant pour t la durée qui sépare l'instant de l'origine, et on note alors $t \top \theta$ par $t + \theta$.

Cela n'empêche qu'il parait raisonnable de continuer à distinguer les instants et les durées : les instants ne s'ajoutent pas , tandis que les durées s'ajoutent, et qu'au couple d'un instant t et d'une durée θ on peut faire correspondre un instant noté $t \top \theta$ ou $t + \theta$ (avec une ambiguité commode sur le signe + qui peut être utilisé pour remplacer le signe T de l'opération externe du $\mathbb{T}$, ou pour signifier l'opération interne sur Ⓗ).

Les mots n'ajoutent rien aux idées, mais ils permettent de les rappeler rapidement aux initiés ; les relations décrites ci-dessus entre $\mathbb{T}$ et Ⓗ peuvent être résumées dans la formule : $\mathbb{T}$ est un espace affine sur l'espace vectoriel Ⓗ espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{R}$.

2) L'espace, les translations, les vecteurs géométriques.

La description de l'espace fait appel aux mêmes structures que celles qui interviennent dans la description du temps. On pourrait dire rapidement qu'il s'agit de la même situation, à cela près que l'espace vectoriel est cette fois de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

Aux instants correspondent ici les positions ou les points de l'espace, et aux durées les translations ou vecteurs.

Parler de translations ou parler de vecteurs donne au discours une apparence différente, mais c'est de la même situation qu'il s'agit.

Les translations ont pour propriété fondamentale d'être des bijections de l'espace sur lui-même (ce que la tradition désigne par des transformations ou des transformations géométriques). Leur ensemble a pour la composition des applications une structure de groupe commutatif. Et en outre, étant donné un couple de points de l'espace il existe une translation et une seule qui fasse correspondre le second point du couple au premier.

Si l'on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points et par E celui des translations, on peut donc dire encore que le groupe (E, o) opère de façon simplement transitive sur $\mathcal{E}$. Comme en outre, on peut définir la multiplication d'une translation par un réel, de telle sorte que E ait pour l'opération interne de composition des applications et pour l'opération externe de multiplication par un réel , une structure d'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, on peut encore dire que $\mathcal{E}$ est un espace affine sur l'espace vectoriel E.

On entend, en général, par vecteur géométrique l'ensemble des couples $(M, \vec{C}(M))$ correspondant à une même translation. Autrement dit, à toute translation correspond un vecteur qui est son graphe (partie de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$), et cette correspondance est une bijection de l'ensemble des translations sur l'ensemble des vecteurs. Cette bijection permet de transporter sur l'ensemble des vecteurs la structure d'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble des translations. On sait qu'on peut procéder en sens inverse et définir les vecteurs et la structure vectorielle de leur ensemble en partant des notions de parallélisme, d'équipollence et de la propriété deThalès, puis les translations à partir des vecteurs. Quel que soit le point de vue adopté au départ, l'essentiel est de comprendre et de faire comprendre que translations et vecteurs sont deux langages équivalents pour décrire la même réalité.

Remarques sur les notations.

Je ne pense pas inutile de faire ici une digression sur les notations, dont il faut être le maître et non l'esclave.

La notation la plus commode, bien que la moins usitée dans l'enseignement secondaire est sans doute celle qui consiste si a est un point, et $\vec{v}$ un vecteur (ou une translation) à désigner par $a + \vec{v}$ l'image de a par la translation $\vec{v}$. Cela choque certains qui déclarent que l'on n'a pas le droit d'ajouter des points et des vecteurs, mais qui apparemment ne sont pas gênés de multiplier des scalaires et des vecteurs $((\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda\vec{v})$.

Dans les deux cas, il s'agit d'opérations externes (et la réaction vient sans doute d'un décret inconscient qui limite aux opérations internes commutatives l'usage du signe +). La question de la commodité et de l'opportunité pédagogique d'introduire à un niveau ou à un autre une telle notation, est à discuter et ne peut recevoir de solution définitive, autoritaire et bureaucratique : l'essentiel est de ne pas transformer des considérations de commodité en principes métaphysiques. (Il faut pour être honnête, signaler que dans la notation $a + \vec{v}$, si l'on écrit $a + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, le 2ème signe + représente l'opération interne de l'espace vectoriel si on pense à $a + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ et l'opération externe de l'espace affine si l'on pense à $(a + \vec{v}_1) + \vec{v}_2$; la commodité est donc fondée ici, comme souvent, sur une ambiguité peu dangereuse. Et il faut encore ajouter, que le choix (évidemment arbitraire) d'une origine dans l'espace affine, permet de ne plus considérer que des vecteurs et avec la notation $\vec{Oa}$ qui désigne la translation qui envoie O sur a, d'écrire $\vec{Oa} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, où cette fois, le signe + ne désigne plus que l'opération interne de l'espace vectoriel. Cette dernière méthode a la faveur de nombreux professeurs du second degré, et ce choix est raisonnable. Je ne prolongerai pas la digression en discutant s'il est nuisible d'introduire dans l'espace affine une "origine" qui en détruit l'homogénéité, ou au contraire, très intéressant de l'introduire parce que concrètement, nous observons l'espace à partir d'une "origine" :

notre poste d'observation ; je me contenterai de dire qu'à mon sens, on n'a bien compris la question que si l'on est capable de se placer aux deux points de vue).

Avant dernière remarque qui résume et précise ce qui précède :

Le modèle mathématique de l'espace physique ambiant est un espace affine sur un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels. Mais l'espace vectoriel est, de plus, muni d'un produit scalaire, à partir duquel peuvent se définir l'orthogonalité, une norme (dite euclidienne) sur l'espace vectoriel et une distance (du même nom) sur l'espace affine. Partir du produit scalaire ou partir , par exemple, de l'orthogonalité et de certaines propriétés du rapport de projection orthogonale, est affaire d'opportunité pédagogique et de possibilité de motivation dans un contexte social et scolaire donné, et n'a pas de valeur éternelle.

Dernière remarque : dire qu'un espace vectoriel a 3 pour dimension sur $\mathbb{R}$ signifie que toutes ses bases (et il en a une infinité) ont 3 éléments, et par rapport à chacune de ces bases, tout vecteur est caractérisé par le triplet de ses coordonnées, qui sont des nombres réels. A la donnée d'une base correspond ainsi un isomorphisme de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel ($(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$, $\lambda(x_1,x_2,x_3)=$

$= (\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$. Il n'y a aucune raison intrinsèque de privilégier un de ces isomorphismes : en d'autres termes, il n'y a pasd'isomorphisme canonique d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}^3$.

De même si l'espace est euclidien, il possède une infinité de bases orthonormées, et à chacune de ces bases correspond un isomorphisme d'espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3 y_3.$$

Mais ici encore, pas d'isomorphisme canonique.

3) Les mouvements.

Comme il a été rappelé au début, le mouvement d'un point (qui pourra être baptisé suivant le contexte point matériel, particule, corpuscule,...) sera décrit comme une application de l'espace affine à une dimension $\mathbb{T}$ des instants, dans l'espace affine à 3 dimensions $\mathcal{E}$ des positions ? Quels sont alors les mouvements les plus "simples" ?

3.1. Mouvements rectilignes uniformes.

La bonne notion de "simplicité" à retenir ici est celle qui se réfère aux structures de $\mathbb{T}$ et de $\mathcal{E}$, et conduit à considérer les applications de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ compatibles avec ces structures (ce qu'on appelle des morphismes de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$), c'est-à-dire les applications affines f ainsi définies :

f est une application affine de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$, s'il existe une application linéaire u (qui est alors unique) de H dans E telle que :

pour tout $t \in \mathbb{T}$ et pour tout $\theta \in H$, on ait :

$$f(t + \theta) = f(t) + u(\theta)$$

(les signes + ont indifféremment une des significations indiquées plus haut).

Le mouvement correspondant est un mouvement rectiligne uniforme. (Notons que ce type de mouvement apparait comme conceptuellement simple, mais ce n'est pas le plus familier : il l'est moins que celui de la "chute des corps" dont Galilée ne détermina pas la loi sans peine ; Aristote aurait, pour sa part, donné la prééminence au mouvement circulaire uniforme. Faire de ce type de mouvement la base de la cinématique a pour seule justification incontestable la référence aux structures affines de $\mathbb{T}$ et de $\mathcal{E}$).

L'application f est parfaitement déterminée par la position à un instant donné et par l'application u, linéaire de H dans $\mathbb{E}$.

Mais la notion d'espace vectoriel réintervient ici de façon décisive car l'ensemble $\mathcal{L}(H, E)$ des applications linéaires de H dans E a une structure "naturelle" (ou canonique) d'espace vectoriel. (La somme $u + v$ de deux applications u et v étant définie par $\forall\theta$ $(u + v)(\theta) = u(\theta) + v(\theta)$ le produit $k\,u$ de u par le scalaire k, étant définie par $(ku)(\theta) = ku(\theta)$).

Mais comme (H) est à une dimension, si $\{\theta_0\}$ est une base de (H) u est entièrement déterminé par $u(\theta_0)$ qui est un vecteur, élément de E. Et il est immédiat que l'application de $\mathcal{L}(\Theta, E)$ dans E qui a u fait correspondre $u(\theta_0)$ est isomorphisme.

Cet isomorphisme dépend de θ_0, et aucun de ces isomorphismes ne peut être privilégié pour des raisons intrinsèques (avec un autre langage, il y a une infinité d'isomorphismes de $\mathcal{L}(\Theta, E)$ sur E, aucun n'est canonique). Une unité de temps θ_0 étant désignée, $u(\theta_0)$ est ce qu'on appelle communément <u>le</u> vecteur vitesse du mouvement rectiligne uniforme. Mais l'article défini <u>le</u> est trompeur. Ce qui est intrinsèque ici, c'est l'application u et non $u(\theta_0)$. La direction du mouvement est bien la direction géométrique du vecteur $u(\theta_0)$, le sens celui de $u(\theta_0)$ (si l'on ne considère que des bases de (H) qui soient des durées allant du passé vers l'avenir). L'intensité de la vitesse est la norme de $u(\theta_0)$; or surn E on peut considérer de nombreuses normes euclidiennes, et même en se restreignant à des normes ne différant les unes des autres que par un facteur multiplicatif (qui dépend de l'unité de longueur choisie), il reste à préciser l'unité.

En conclusion, ce qui est intrinsèque c'est l'application u, et à chaque choix d'une unité de temps et d'une norme, correspondra un vecteur vitesse, effectivement vecteur de E, dont la direction a une signification intrinsèque, ainsi que le sens (compte tenu de l'irréversibilité concrète du temps), mais dont la norme n'a pas de signification intrinsèque et dont la valeur est régie par le choix des unités (équations aux dimensions $L\,T^{-1}$, si l'on se restreint, comme c'est l'usage, à des normes proportionnelles).

Autrement dit, ce "vecteur" géométrique bien commode mais non intrinsèque n'est que le représentant de u, modèle intrinsèque de la réalité, et qui est un vecteur en tant qu'élément d'un espace vectoriel d'applications linéaires.

3.2. Mouvements différentiables.

Les mouvements réels ne sont pas tous rectilignes et uniformes, mais à l'échelle macroscopique, ils sont représentables, sauf dans les cas de chocs, par des mouvements différentiables, c'est-à-dire des mouvements qui, localement, peuvent être approximés par des mouvements rectilignes uniformes, c'est-à-dire de façon précise, des mouvements pour lesquels on a :

$$f(t + \theta) = f(t) + u_t(\theta) + \varepsilon(\theta)|\theta|$$

où, comme dans la définition du mouvement rectiligne uniforme u_t est une application linéaire de θ dans E, et où ε est une application de (H) dans E, nulle pour $\theta = 0$, et continue en ce point, et où $\theta \longmapsto |\theta|$ est une norme sur θ (usuellement, si $\theta = \lambda\theta_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est $|\lambda|$ que l'on prend pour $|\theta|$).

L'application u_t est appelée la différentielle de l'application f à l'instant t, (ou encore l'application linéaire tangente à f à l'instant t).

Plusieurs remarques s'imposent ici :

a) Si ε est continue en 0 pour un couple de normes sur (H) et E, elle l'est pour tout autre couple. (Ceci est lié au fait plus général qu'il n'y a sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ qu'une seule topologie qui en rendent les opérations continues).

b) Deux normes sur (H) sont proportionnelles.

c) Il résulte de a) et b) que la différentiabilité de f est indépendante des normes dont on munit (H) et E.

d) Dès que f est différentiable, sa différentielle, c'est-à-dire l'application linéaire u_t est déterminée de manière unique.

e) Le mouvement rectiligne uniforme défini par

$$t + \theta \longmapsto f(t) + u_t(\theta)$$ peut être qualifié de tangent à l'instant t

au mouvement étudié. Les deux mouvements diffèrent par le terme $\varepsilon(\theta)\ |(\theta)|$ qui est non seulement "petit quand θ est petit, mais ce qui est essentiel, "petit par rapport à θ " quand θ est petit.

f) Ce que l'on appelle classiquement la vitesse instantanée à l'instant t du mouvement étudié, est le vecteur $u_t(\theta_o)$ de E et tout ce qui a été dit à son propos dans le cas du mouvement uniforme peut être répété ici. Ce qui est intrinsèque c'est l'application u_t, et non $u_t(\theta_o)$.

3.3. Accélération.

Dans l'étude précédente, pour chaque valeur de t, on obtenait un élément u_t de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(H, E)$. Autrement dit, on avait une application de H dans $\mathcal{L}(H, E)$. Celle-ci peut encore être différentiable (c'est le cas pour la plupart des mouvements étudiés en mécanique).

Ecrivons maintenant $u(t)$ au lieu de u_t, on a alors :

$$u(t + \theta) = u(t) + v_t(\theta) + \eta(\theta) \, |\theta|$$

où v_t est une application linéaire de H dans $\mathcal{L}(H, E)$ et η une application de H dans $\mathcal{L}(H, E)$ nulle pour $\theta = 0$ et continue en ce point.

On peut associer à v_t, l'application v de $H \times H$ dans E définie par $v_t(\theta) = v(t, \theta)$. L'application v est bilinéaire et l'application $v_t \longmapsto v$ de $\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, E))$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(H \times H, E)$ des applications bilinéaires de $H \times H$ dans E est un isomorphisme canonique du 1er espace sur le second(2). On peut donc récrire la formule ci-dessus en faisant intervenir l'application bilinéaire v : $u(t + \theta) = u(t) + v(t, \theta) + \eta(\theta)\, \theta$.

Il faut alors remarquer que l'application bilinéaire v de $H \times H$ dans E est déterminée dès que l'on connait sa valeur pour une base de $H \times H$. Par exemple si l'on connait $v(\theta_o, \theta_o)$. (Ce qui consiste à garder la même unité de temps. Un vicieux qui voudrait changer d'unité de temps lorsqu'il passe de la vitesse à l'accélération ne pourrait se voir opposer aucune raison théorique, mais il se compliquerait l'existence à persister dans cette voie). Or $v(\theta_o, \theta_o)$ est encore un vecteur de E. C'est classiquement le vecteur accélération du mouvement du temps t Je peux développer la même antienne que plus haut : ce qui se passe, c'est que $\mathcal{L}_2(H \times H, E)$ du fait que H est de dimension 1, est isomorphe à E, mais qu'il n'y a pas pour ces deux espaces d'isomorphismes canoniques : ce qui est intrinsèque c'est v , ce n'est pas $v(\theta_o, \theta_o)$, etc ......

---

(2). Démonstration en annexe.

4.- FORCES.

Qui tient les accélérations tient les forces, à condition d'introduire les coefficients d'inertie que sont les masses, c'est-à-dire, si l'on veut, appliquer la formule $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

Il y aurait beaucoup à dire sur cette formule, et je me contenterai des très brèves remarques ci-dessous à son sujet ; mais je peux constater, pour mon propos actuel, que les isomorphismes de l'espace des accélérations sur E, donnent en vertu de cette formule, des isomorphismes sur E de l'espace des forces s'exerçant sur une particule, isomorphismes qui justifient qu'une force ait une direction et un sens (les masses d'inertie sont positives !) mais que son intensité ne puisse être canoniquement interprêtée comme une longueur.

La formule $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$, si elle est considérée comme une définition de la force, semble introduire gratuitement un nouveau concept. Il faut la replacer dans le cadre des principes (ou axiomes !) de la mécanique, dont l'essentiel est que les lois de la mécanique s'expriment par des équations différentielles du second ordre, ce qui a pour conséquence que dans les bons cas, l'accélération d'une particule dans l'espace d'un observateur donné (ou, si l'on préfère, relativement à un repère donné) est une fonction de sa position et de sa vitesse, mais que l'action de l'univers sur 2 particules qui auraient la même position et la même vitesse dépend encore d'un coefficient positif dont est affecté la particule, et qui est sa masse de telle sorte que pour toutes les particules ayant même position et même vitesse, ce qui est donné c'est le produit de leur accélération par leur masse : autrement dit, l'action de l'univers se traduit par la donnée de $m\vec{\Gamma}$.

S'il n'y avait que des actions de gravitation (et si l'on considère qu'il y a égalité de la masse inerte et de la masse gravitationnelle), le concept de force serait inutile. C'est l'existence d'autres champs de forces que celui de la gravitation, et l'interprêtation en langage de forces des "liaisons" qui justifient l'utilisation de ce concept.

5.- CONCLUSIONS

J'ai bien été tenté d'écrire qu'il n'y aurait pas de conclusion. Mais en mettant le mot au pluriel, cela le rend plus modeste et sous-entend qu'elles ne sont que partielles, et que ce papier tend avant tout à éclairer certains des nombreux problèmes que pose l'enseignement de la mécanique.

Le schéma général relatif aux "vecteurs" rencontrés (et qui s'étend aux autres notions : moments, travail, tenseurs,...) est le suivant : la donnée naturelle est celle d'espaces vectoriels qui sont des espaces d'applications dans E, espace vectoriel à 3 dimensions sur R, jouant le rôle de modèle de l'espace pour un observateur donné. Tous ces espaces sont isomorphes à E, aucun ne l'est de manière canonique. Cependant parmi tous les isomorphismes de chacun de ces espaces sur E, il en est une classe remarquable constituée d'isomorphismes déduits les uns des autres par composition avec une homothétie positive (multiplication par un scalaire positif , et si aucun de ces isomorphismes n'est canonique, la classe, elle, l'est.

Ceci justifie que l'on puisse parler pour ces vecteurs de direction et de sens, en considérant que ce sont des directions et des sens dans E.

L'intensité de ces vecteurs est mathématiquement la norme d'une application linéaire (d'un espace normé dans un autre). Cette norme dépend des normes choisies dans les deux espaces , c'est-à-dire, dans les cas qui nous occupent des unités de temps, de longueur et de masse et les changements de normes sont régis par les équations dites aux dimensions.

Le fait que l'on rencontre là, ce qu'on appelle avec un langage trop métaphysique pour mon goût des "grandeurs de natures différentes" s'exprime plus scientifiquement par le fait que l'on rencontre des espaces vectoriels d'application linéaires construits à partir de H et de E, et que la différence de "nature" se réfère tout simplement à des espaces d'applications différents (autre espace de départ ou autre espace d'arrivée).

Les développements précédents montrent l'intérêt, pour une description intrinsèque des phénomènes, de la notion moderne de différentielle, qui ne demande en outre, pour être définie aucun calcul de quotient. On peut diviser un vecteur de E par un nombre réel, qui peut être la mesure d'une durée, mais non par une durée qui n'est pas un nombre. La différentielle permet de calculer avec des durées et des translations avant de faire intervenir les mesures (c'est-à-dire en fait les choix des bases). Calculer une vitesse suppose que H a été identifié à $\mathbb{R}$, et cette identification prématurée et non intrinsèque ne facilite pas la compréhension de ce qu'entraine ultèrieurement un changement d'unité. (Evidemment, aucun problème ne se pose si l'objectif est de faire répéter des règles à des perroquets).

Maint lecteur pensera que nous sommes bien loin du modeste problème de l'introduction des vitesses, des accélérations, des forces ... dans le second degré. Mon opinion est que ce problème est si peu modeste que l'on peut se demander s'il est soluble. Il est illusoire de croire que l'on puisse présenter "élémentairement" une science que l'humanité a eu tant de peine à élaborer : faire de la statique sans la considérer comme un cas particulier de la dynamique, faire de la mécanique sans faire allusion au système de référence (ce que j'ai appelé plus haut l'espace d'un observateur), passer allègrement du cas du point matériel à celui du solide sans expliciter tout ce que cela implique, et croire que quelques expériences bien faites suffiront pour justifier l'énoncé de principes dont l'évidence s'est à tout le moins tardivement et difficilement révélée ne peut pas conduire à une compréhension réelle de cette difficile discipline. Faut-il alors renoncer à l'enseigner ? certainement pas, mais sans doute faut-il commencer par regarder en face ses réelles difficultés et ne pas essayer de les tourner par de petites ruses.

ANNEXE

Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels sur un même corps, (X, (Y,Z) l'espace des applications linéaires de X dans l'espace des applications linéaires de Y dans Z, et (X x Y, Z) l'espace des applications bilinéaires de X x Y dans Z.

Dire que F est bilinéaire de X x Y dans Z signifie :

(1) Quels que soient x_1 et x_2, vecteurs de X, λ_1, λ_2 scalaires et Y vecteur de Y, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1 y) + \lambda_2 f(x_2 y)$$

(2) Quels que soient x, vecteur de X, y_1, y_2, vecteurs de Y et λ_1, λ_2 scalaires, on a :

$$f(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 f(x, y_1) + \lambda_2 f(x, y_2)$$

Théorème . En associant à tout élément u de $\mathcal{L}$(X, (X, Y)Z l'application v de X x Y dans Z , définie par

$$v(x, y) = u(x)\,(y)$$

on définit un isomorphisme de $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z)$ sur $\mathcal{L}(X \times Y, Z)$.

a) v est bilinéaire. En effet la bilinarité de u entraine que v satisfait la condition (1) la linarité de u(x) entraine que v satisfait la condition (2).

b) L'application $u \longmapsto v$ est sujective, car si $f \in \mathcal{L}(X, Y, Z)$, pour x fixé, l'application $y \longmapsto f(x, y)$ appartient à $\mathcal{L}(Y, Z)$ en vertu de (2), et en vertu de (1) l'application $x \longmapsto (y \longmapsto f(x, y))$ est linéaire de X dans $\mathcal{L}(Y, Z)$.

c) L'application $u \longmapsto v$ est manifestement linéaire.

d) L'application linéaire $u \longmapsto v$ est injective et son noyau est réduit à $\{0\}$

En effet, si v est nulle, on a $\forall\, x \in X$ et $\forall\, y \in Y$ $v(x, y) = 0$, donc $\forall\, x \in X$ $u(x)$ est l'application nulle, donc u est elle-même l'application nulle.

L'application $u \longmapsto v$ est qualifiée de canonique : elle est définie par les seules structures de $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ et de $\mathcal{L}(X, Y, Z)$, sans l'intervention d'aucun élément extérieur à ces deux espaces.

NOTE HISTORIQUE

La notion de dérivée est, dans l'histoire des mathématiques, une notion relativement récente puisqu'elle s'est élaborée au XVIIème siècle.

A cette époque d'autres branches de mathématiques sont déjà considérablement développées. Au nombre de celles-ci, chacun met évidemment la géométrie : les Grecs l'ont, dès la fin du IIIème siècle avant notre ère, portée à un admirable degré de perfection (mort d'Archimède 212 av. J.C.) mais citons également les résultats obtenus, pour la résolution des équations algébriques, au XVIème siècle -c'est la Renaissance- par l'école Italienne de Mathématiques. Au début du siècle Scipion del Ferro résout l'équation $x^3 + ax = b$, les recherches qui se développent ensuite sont principalement menées par Jérôme Cardan (1501-1576) et ses disciples : elles aboutissent à l'introduction des "nombres complexes" et à la résolution par L. Ferrari de l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (équation générale du 4e degré).

Le XVIIème siècle est celui où s'élaborent les bases fondamentales du calcul différentiel et intégral.

Au début de ce siècle, les mathématiciens ne disposent pas des notions, notations et définitions générales qui leur permettraient de rédiger avec quelque précision des théorèmes ou des formules d'analyse ; ainsi les concepts de fonction, variable, paramètre et a fortiori limite et dérivée n'existent pas. Viete (mort en 1603) vient à peine d'introduire l'utilisation des lettres pour noter des nombres non spécifiés et les résultats généraux sur la résolution des équations sont encore le plus souvent donnés sous forme de recettes, illustrées par des exemples numériques de résolution.

Deux grands domaines de recherche alors inexplorés ou presque vont attirer l'attention des astronomes, ingénieurs, philosophes et mathématiciens, il s'agit de la cinématique et de la géométrie analytique que fonde Descartes (1620). La cinématique, qui selon le Petit Larousse Illustré est "l'étude des mouvements indépendamment des forces qui le produisent", repose évidemment sur une idée intuitive, expérimentale de quantités variables avec le temps -de fonctions du temps comme nous dirions aujourd'hui- la géométrie analytique dans son principe veut permettre l'étude de la géométrie par les méthodes de calcul, de l'algèbre ; elle parle implicitement fonction lorsqu'elle parle "courbe".

Dans ces domaines de recherche, si la notion de base est celle de fonction, trois grands types de problèmes recouvrent le champ du calcul différentiel : il s'agit de la vitesse, des tangentes, des minimums et des maximums.

En 1604 Galilée, à l'apogée de sa carrière scientifique, croit démontrer que dans un mouvement rectiligne où la vitesse croît proportionnellement au chemin parcouru ($x'(t) = k. x(t)$) la loi du mouvement sera bien celle ($x = ct^2$) qu'il a découverte dans la chute des graves ! Descartes en 1618 montre par un raisonnement obscur que cette hypothèse est insoutenable, Fermat un peu plus tard reprend ce raisonnement de manière plus convaincante. Par comparaison entre progression géométrique et arithmétique, Neper introduit en 1611 les logarithmes dont il donne une définition cinématique.

Kepler, dans l'étude du mouvement des astres et planètes fait l'observation qu'une fonction varie lentement au voisinage d'un maximum, Fermat dès avant 1630 inaugure à propos de tels problèmes sa méthode infinitésimale (un arc "infiniment petit" d'une courbe est assimilé à un segment de droite "infiniment petit" (corde ou portion de tangente)) méthode qu'il étend à la détermination de tangentes (tangentes à la cycloïde) et même à la recherche des points d'inflexion.

A mesure que ces méthodes nouvelles se développent, la cinématique cesse d'être une science à part -on s'aperçoit que les courbes et fonctions algébriques (définies à partir de polynômes) et les courbes et fonctions définies à partir du mouvement de certains corps n'ont du point de vue "local" rien qui les distingue- la variable "temps" n'est plus qu'une variable dont l'aspect temporel est pure affaire de langage.

Cette tendance est particulièrement nette dans la seconde moitié du XVIIème siècle. Isaac Barrow imagine de faire, de la variation simultanée de diverses grandeurs en fonction d'une variable indépendante universelle conçue comme "un temps", le fondement d'un calcul infinitésimal à tendance géométrique et obtient ainsi vers 1670 un théorème très général sur les tangentes puisqu'il comprend comme cas particuliers tout ce qui a été fait jusque là sur ce sujet. Isaac Newton dans le domaine de la cinématique porte le mouvement à son terme ou presque : ses "fluentes" sont des fonctions du "temps", qui est en fait une variable universelle, et ses "fluxions" sont les dérivées des "fluentes" par rapport au temps ; c'est d'ailleurs Newton qui introduit la notation encore usitée $\dot{x}$ pour noter la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \longmapsto x(t)$.

Vers 1670 les concepts essentiels de l'analyse infinitésimale sont assez bien dégagés mais les modes d'exposés restent incroyablement complexes. A aucun moment on ne peut se passer d'avoir sous les yeux une figure parfois compliquée, décrite au préalable avec un soin minutieux ; pour les 100 pages essentielles de ses "lectiones geometricae" (Londres 1670) Barrow donne 180 figures !

C'est Leibniz qui, à partir de 1675 réalise "l'algébrisation" de l'analyse infinitésimale c'est-à-dire sa réduction à un calcul opérationnel muni d'un système de notations uniforme de caractère algébrique. Il réalise pour la nouvelle analyse ce que Viete pour la théorie des équations et Descartes pour la géométrie ont fait. En particulier il introduit la notion de triangle différentiel et la notation d : (comme le plus souvent de façon explicite ou non il considère la "différentielle" pour la valeur 1 de la variable elle s'identifie à la dérivée) ;

sa démarche s'appuie sur des passages à la limite qu'il serait bien en peine de justifier rigoureusement. C'est lui qui introduit les mots "constante" "variable", "paramètre". En 1698 son disciple Johann Bernouilli lui propose d'appeler "fonction de x" : "une quantité formée d'une manière quelconque à partir de x et de constantes" en précisant qu'il s'agit d'une quantité formée "de manière algébrique ou transcendante".

Quand bien même la notion leibnizienne de différentielle n'a pas grand sens, les bases fondamentales du nouveau calcul, ses notions et notations sont posées ; Leibniz et ses premiers disciples Johann et Jakob Bernouilli rivalisent de découvertes ; avec le XVIIème siècle s'achève l'époque des pionniers.

Entre 1751-1765 D'Alembert tente dans les articles "différentiel" et "limite" de l'Encyclopédie de définir avec une plus grande clarté les notions de limite et de dérivée - mais ces avis n'ont pas de suite immédiate.

Il faudra attendre 1821 et les ouvrages d'enseignement de Cauchy, en particulier son Cours d'Analyse, pour se trouver sur un terrain solide. Il définit une fonction essentiellement comme nous le faisons aujourd'hui, bien que dans un langage encore un peu vague ; la notion de limite fixée une fois pour toutes est prise pour point de départ, celles de fonction continue (au sens actuel) et de dérivée s'en déduisent immédiatement, ainsi que leurs principales propriétés élémentaires - l'existence de la dérivée au lieu d'être un article de foi devient une question à étudier par les moyens ordinaires de l'analyse. A cette époque l'étude des rapports entre continuité et dérivabilité reste un grand problème, les meilleurs mathématiciens essaient d'abord de montrer que les fonctions continues sont dérivables ; terme est mis à ces recherches par Weierstrasse en 1861 et 1872 lorsqu'il construit une fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point.

Le point de vue historique ici développé est très unilatéral puisqu'il s'attache à l'aspect différentiel du calcul différentiel et intégral sans aborder l'intégration. Il est évident que dans l'élaboration progressive des notions, les deux aspects sont presque toujours imbriqués. C'est ainsi que les noms même de Pascal, de Grégory et de Huygens n'ont pas été cités, ce qui est manifestement une énorme lacune.

Il faut également préciser que tout exposé historique de ce type sur les mathématiques ne rend pas compte réellement des difficultés rencontrées par les mathématiciens. En formulant dans notre langage, avec des concepts et des notations dont ils ne disposaient pas, les problèmes auxquels ils étaient confrontés ont réduit souvent ceux-ci au rang d'un banal exercice de première ou de terminale... Nous reconstituons leur itinéraire confortablement installé sur les hauteurs qu'ils ont humanisées ; de là la vue porte plus loin, le paysage s'ordonne ; les escarpements qu'ils ont dû affronter nous les dominons.

Néanmoins, à la lecture de ce qui précède on comprendra que la notion de "dérivée" n'est pas aussi "évidente" que pourrait le laisser croire une lecture rapide d'un manuel de première : pendant tout le XVIIème siècle, les meilleurs esprits ont abordé des problèmes de "dérivée" du niveau de la recherche sans aboutir à <u>une définition</u> correcte de cette notion !

Pour cela, il faudra attendre le XVIIIème siècle ; et c'est seulement vers la fin du XIXème que sera clairement faite la distinction entre continuité et dérivabilité.

o

o o

Afin de préciser les étapes historiques voici entre quelles dates s'inscrit la vie des principaux mathématiciens cités :

CARDAN J. 1501-1576
VIETE François 1540-1603 (né à Fontenay-le-Comte)
NEPER John 1550-1617
GALILEE 1564-1642
KEPLER Johann 1571-1630
DESCARTES René 1596-1650 (né à Descartes-Indre et Loire)
FERMAT Pierre de 1601-1665
PASCAL Blaise 1623-1662
BARROW Isaac 1630-1677
HUYGHENS Christian 1629-1695
NEWTON Isaac 1642-1727 (fut l'élève de Barrow en 1664 et 65)
LEIBNIZ Gottfried 1646-1716
BERNOUILLI Jakob 1654-1705
BERNOUILLI Johann 1667-1748

Cette note historique a été rédigée essentiellement à partir des "Eléments d'histoire des Mathématiques" de Bourbaki, partie "Calcul Infinitésimal".

J. VERLEY