

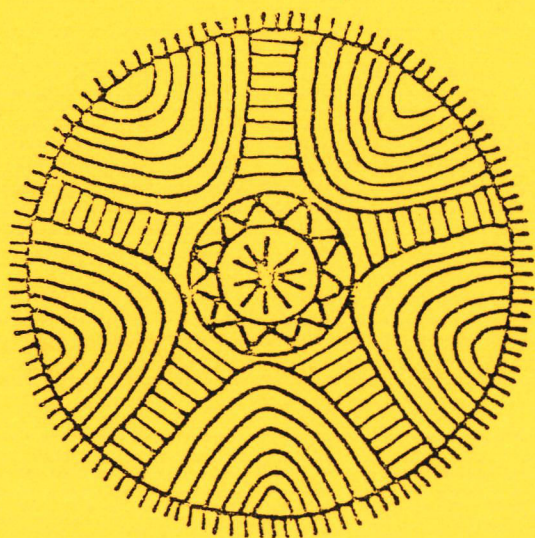
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

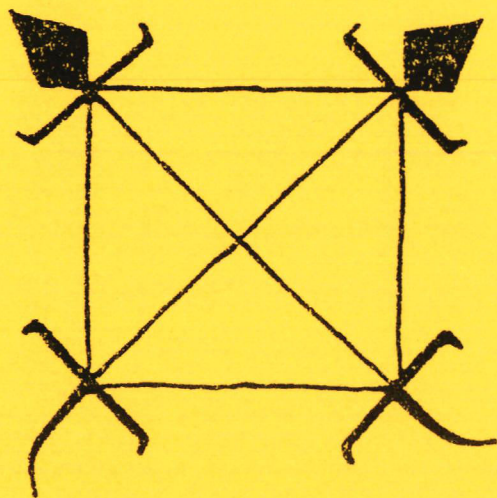
UNIVERSITE PARIS VII

28

JUIN 1981



en Seconde



par le groupe "Second Cycle"

NIVEAU

CLASSE DE SECONDE

PUBLIC

PROFESSEURS DU SECOND CYCLE

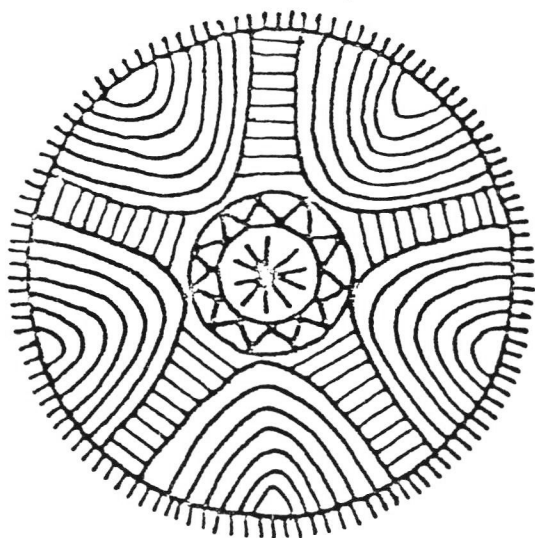
SUJET

DEUX PRÉSENTATIONS DES ANGLES ET ROTATIONS, TRIGONOMÉTRIE ;
THÈMES D'ÉTUDE

OBJECTIF

INFORMATION SUR LES NOUVEAUX PROGRAMMES

DESSINS DE COUVERTURE : MOTIFS DÉCORATIFS ÀSHANTI (GHANA)



en Seconde

PAR LE GROUPE " SECOND CYCLE "

Michel BEAN

Hervé HAMON

Bernard PARZYSZ

Roger PROTEAU

Nelly ROUSSIGNOL

Danièle SPERANDIO

Isabelle TENAUD

09 FEV. 2009

4518

S O M M A I R E

Avant-propos	p. 3
Ch. 1 : Angles, rotations	p. 5
Ch. 2 : Rotations, angles	p.23
Ch. 3 : Trigonométrie	p.39
Ch. 4 : Addition des angles	p.47
Ch. 5 : Thèmes	p.51

A V A N T - P R O P O S

Cette brochure traite des alinéas suivants du programme :

Cercle trigonométrique ; mesure d'un arc orienté ; mesure de l'angle d'un couple de demi-droites. Demi-droite définie par son angle avec une demi-droite fixée.

Comme on n'a pas les outils nécessaires à une définition et à une mesure rigoureuses des angles, on se bornera à la définition provisoire suggérée par l'usage du rapporteur.

En ce qui concerne les fonctions trigonométriques, il n'est question que de les explorer à partir de la mesure des arcs de cercle et du mouvement circulaire uniforme, et aussi en utilisant les touches des calculatrices.

Il ne sera demandé aux élèves que de connaître leur périodicité, leurs symétries, leur sens de variation ; de savoir interpréter et appliquer des relations telles que :

$$\cos (x + \pi) = -\cos x,$$

$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, ... ; d'apprendre quelques valeurs remarquables en liaison avec l'étude des polygones réguliers à 3, 4, 6 côtés.

Les formules dites d'addition ne sont pas au programme.

Angle inscrit dans un cercle, angle au centre associé.

Rotations ; composition de deux rotations de même centre.

Conservation des distances, et des angles orientés, par une rotation.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Symétries et rotations laissant invariant un polygone régulier de 3, 4, 6 côtés ;

— Quart de tour (ou rotation d'angle droit) ;

— Quadrangle inscriptible ;

— Lignes de niveau de $M \rightarrow \widehat{MA, MB}$.

— Relations métriques dans le triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A,$$

$$2 S = b c \sin A,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 R$$

Nous proposons d'abord deux présentations (basées sur des points de vue différents) de la partie : "Angles et Rotations".

Dans la première, les notions sont abordées de façon très intuitive. Nous commençons par la notion d'angle. Il y a très peu de démonstrations.

Dans la seconde présentation nous avons pris pour point de départ les isométries du plan. Après une étude expérimentale, nous définissons les rotations puis les angles ; la partie déductive est plus importante que dans la première présentation.

Ensuite nous développons les alinéas "Angles inscrits" et "Trigonométrie".

Nous avons alors inclus une partie "hors programme" sur l'addition des angles orientés, car nous pensons que cette notion serait utile pour développer les thèmes ; elle n'est néanmoins pas indispensable.

Les thèmes suivants ont ensuite été traités :

- lignes de niveau de l'application $M \mapsto (\widehat{MA, MB})$
- isométries laissant invariant un polygone régulier à n côtés
- quarts de tour
- quadrilatère inscriptible
- bissectrice
- relations métriques dans un triangle

N.B. Nous avons utilisé deux types de caractères typographiques :

- l'un concerne les parties utilisables pratiquement telles quelles dans une classe
- l'autre est utilisé pour les commentaires destinés aux enseignants

Ch. 1 A N G L E S - R O T A T I O N S

I Introduction à la notion d'angle

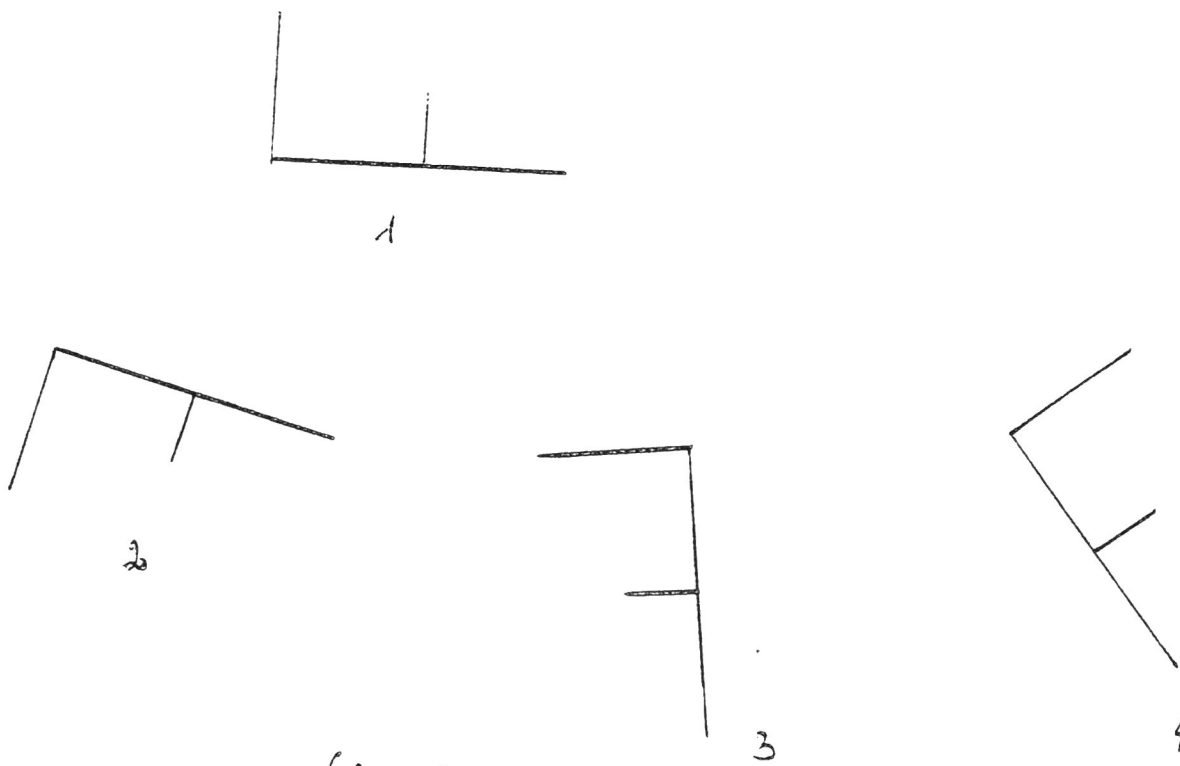
II Angles

III Rotations

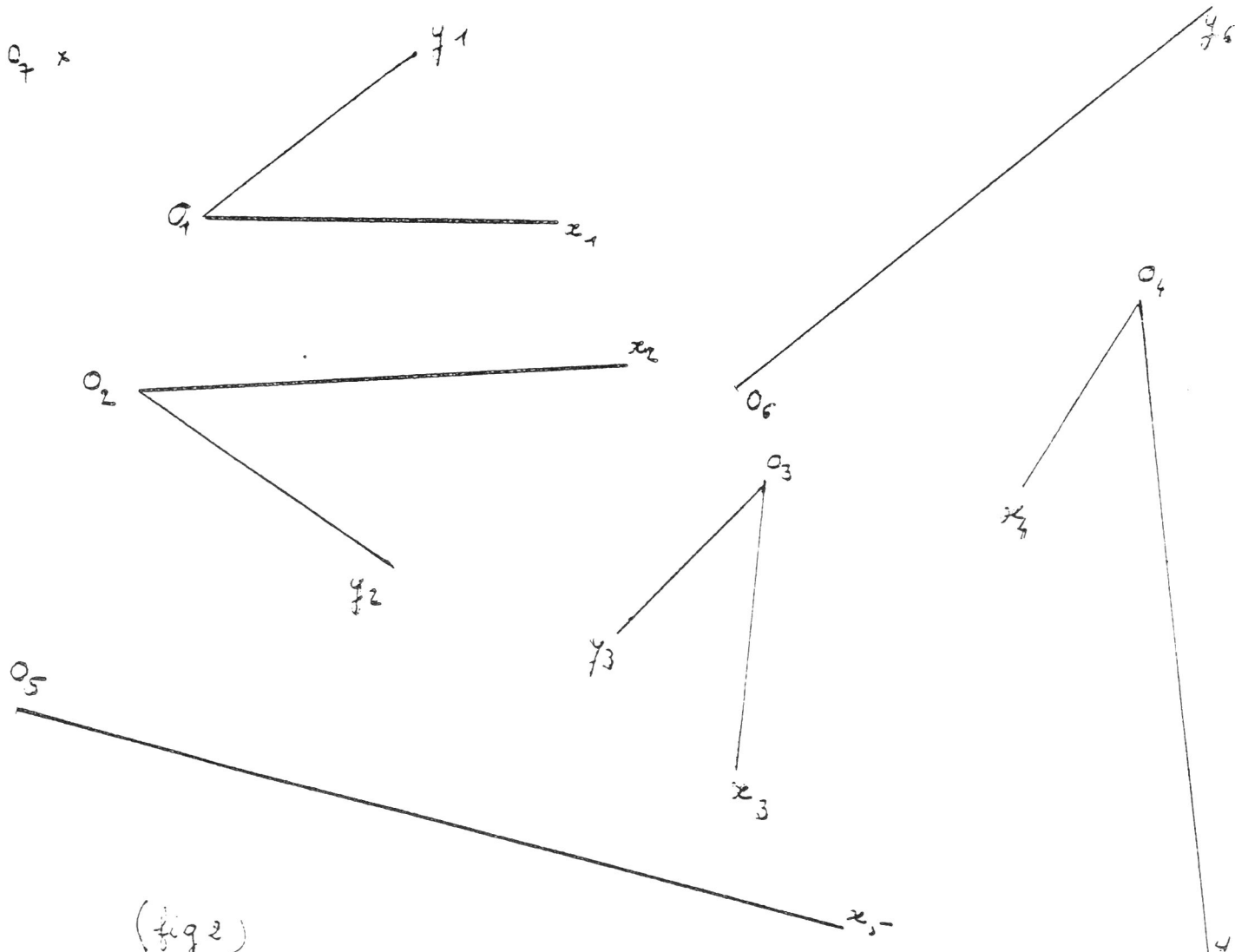
IV Mesures des angles

V Relation de Chasles
 Composition des rotations

VI Angle inscrit - Angle au centre



(fig 1)



(fig 2)

I - INTRODUCTION A LA NOTION D'ANGLE

Il s'agit d'effectuer avec le papier calque des manipulations sur la figure F (fig. 1 page 6).

. On décalque F_1 et on décrit les manipulations faites avec le calque pour superposer F_1 successivement à F_2, F_3 et F_4 .

On distinguera - superposition par glissement appelée déplacement

- superposition par retournement appelée antidépacement

. On recommence avec la figure F_2

. On considère maintenant les couples de demi-droites (O_1x_1, O_1y_1) , (O_2x_2, O_2y_2) , (O_3x_3, O_3y_3) , (O_4x_4, O_4y_4) (fig. 2 page 6) et on refait les mêmes manipulations qu'avec la figure F. (On pourra colorer en bleu les demi-droites Ox et en rouge les demi-droites Oy).

. Construire des couples de demi-droites se déduisant de (O_1x_1, O_1y_1) par dépacement, par antidépacement.

Construire O_5y_5 , telle que (O_5x_5, O_5y_5) se déduise de (O_1x_1, O_1y_1) par dépacement ; même question avec O_6y_6 (on recherche une demi-droite O_6x_6 telle que (O_6x_6, O_6y_6) se déduise de (O_1x_1, O_1y_1) par dépacement).

Déterminer deux demi-droites O_7x_7 et O_7y_7 , telles que (O_7x_7, O_7y_7) se déduise de (O_1x_1, O_1y_1) par dépacement.

Commentaire

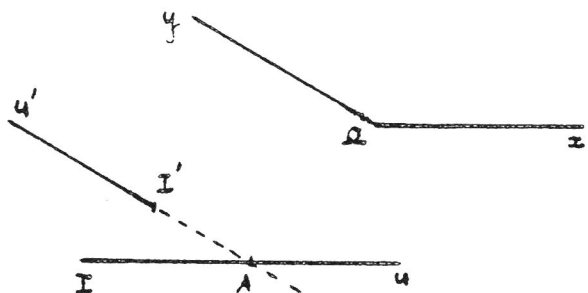
- Distinguer dépacement et antidépacement
- Remarquer que les dépacements et les antidépacements conservent les distances
- Si on se donne deux points et leurs images il n'existe qu'un dépacement possible et un seul antidépacement.
- Dégager la notion d'angle orienté de couples de demi-droites.

II - ANGLES

. On dira que les deux couples de demi-droites (Ox, Oy) et $(O'x', O'y')$ définissent le même angle pour exprimer qu'il existe un déplacement transformant Ox en $O'x'$ et Oy en $O'y'$.

On notera $\widehat{(Ox, Oy)}$ l'angle représenté par le couple de demi-droites (Ox, Oy) .

Remarquons que $\widehat{(Oy, Ox)}$ se déduit de $\widehat{(Ox, Oy)}$ par un antidéplacement ; on dit que $\widehat{(Ox, Oy)}$ et $\widehat{(Oy, Ox)}$ sont des angles opposés.

Autres définitions

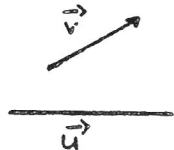
On considère un couple de demi-droites $(Iu, I'u')$, l'angle représenté par ce couple sera par définition l'angle $\widehat{(Ix, I'y)}$ si, I étant un point quelconque du plan, Ix et Iy sont respectivement parallèles à Iu et $I'u'$ et de même sens.

$$\widehat{(Iu, I'u')} = \widehat{(Ix, I'y)}$$

Si les supports des demi-droites Iu et $I'u'$ sont des droites sécantes en un point A , alors on peut poser

$$\widehat{(Iu, I'u')} = \widehat{(Au, Au')}$$

On pourra de même définir l'angle des deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ comme angle de demi-droites ayant respectivement comme vecteurs directeurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

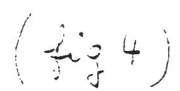
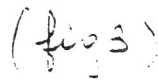


$$\widehat{(\vec{U}, \vec{V})} = \widehat{(Ix, I'y)}$$

. On notera la "conservation de l'angle" par translation, symétrie centrale qui sont des déplacements.

On vérifiera que l'homothétie "conserve aussi les angles" (fig.3).

Par contre la symétrie axiale ne conserve pas les angles, elle transforme un angle en son opposé (fig.4)



Exercices

ex_1 : On considère deux droites parallèles xx' et yy' et une sécante zz' telles que $xx' \cap zz' = \{A\}$; $yy' \cap zz' = \{A'\}$ (fig. 5).

Trouver dans la figure 5 de la page tous les représentants de l'angle $(\widehat{Ax,Az})$ d'abord de façon intuitive, puis en justifiant à l'aide des résultats du cours.

Commentaire

Ne pas oublier les couples tels que $(\widehat{Ax,A'z})$ par exemple

Mêmes questions avec $(\widehat{Az,Ax'})$ ou $(\widehat{Az,A'y'})$ etc....

ex_2 : A propos de la construction de droites parallèles. On rappelle le résultat suivant ; étant donné 3 points M,N,P il existe un point Q unique tel que (M,N,Q,P) soit un parallélogramme, Q est l'image du point P par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

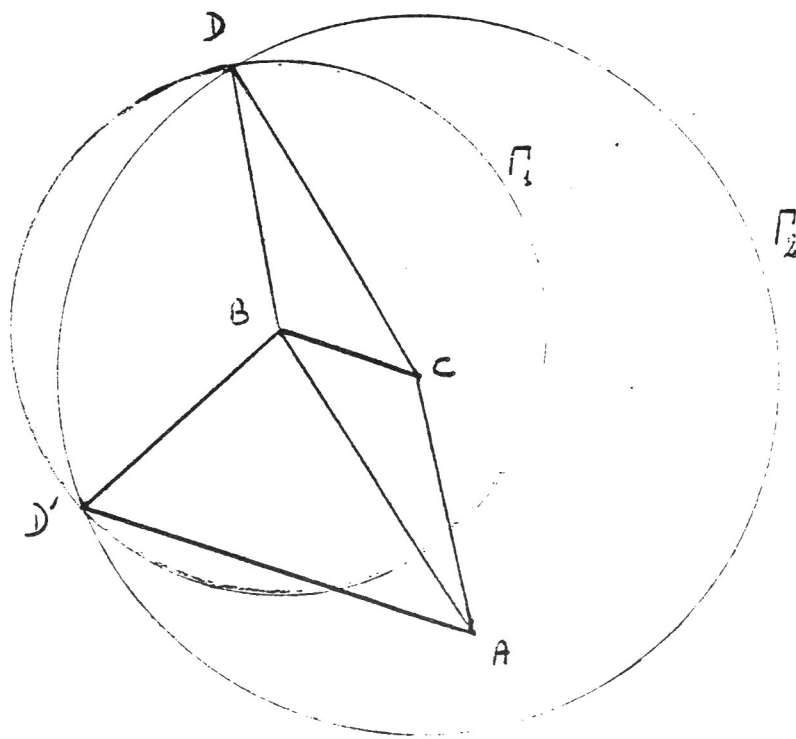
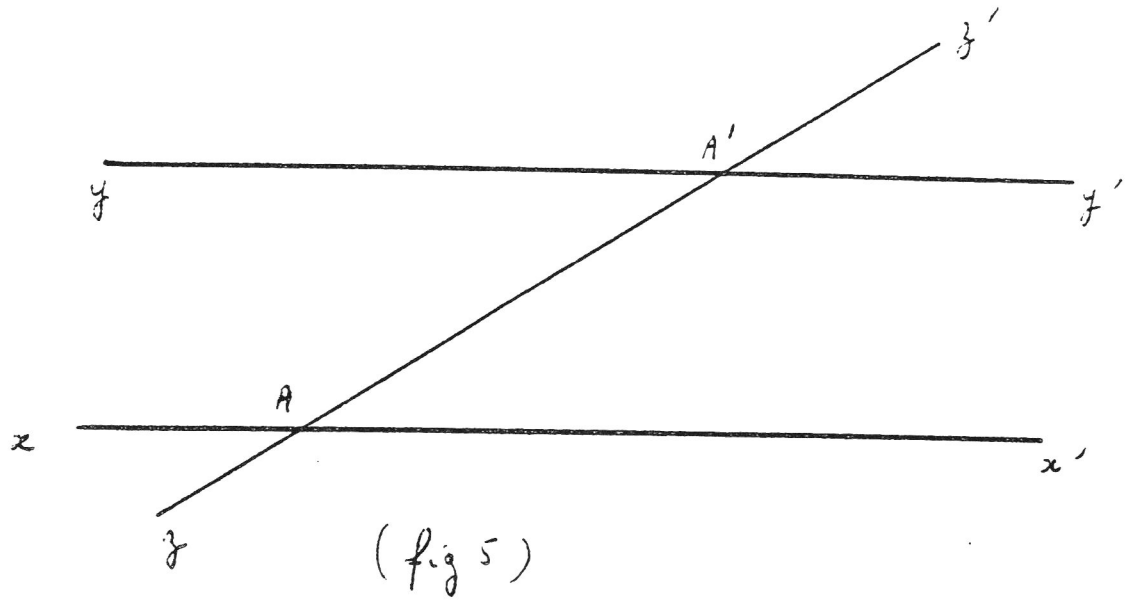
Soit trois points distincts A,B,C . On construit le cercle Γ_1 de centre B de rayon AC et le cercle Γ_2 de centre C et de rayon AB . Ces deux cercles se coupent en deux points D et D' ; on appelle D celui des deux points qui n'est pas du même côté que A par rapport à BC (fig.6).

- 1) Montrer que le quadrilatère (A,B,C,D) est parallélogramme.
- 2) Montrer que le quadrilatère convexe formé à partir des points A,B,C et D' est un trapèze isocèle.
 - a) pour quelle disposition des points A,B et C peut-on avoir $D' = A$? On éliminera ce cas.
 - b) montrer que D et D' sont symétriques par rapport à (BC)
 - c) Montrer que les angles $(\widehat{BC,BA})$ et $(\widehat{CB,CD'})$ sont opposés.
 - d) montrer que A et D' sont symétriques par rapport à une droite (Δ) que l'on déterminera.
 - e) en déduire que (AD') est parallèle à (BC) .

Commentaire

1) L'un des deux quadrilatères construits avec les points A,B,C,D d'une part A,B,C,D' d'autre part est nécessairement un parallélogramme car $AB = CD = CD'$ et $AC = BD = BD'$

On élimine D' car AD' devrait être une diagonale et donc A et D' devraient être de part et d'autre de BC .



(fig 6)

2) Le quadrilatère (A, B, C, D) est, suivant que A est d'un côté ou de l'autre de la médiatrice de (BC) , un quadrilatère convexe ou croisé ; et si A appartient à la médiatrice de (BC) alors $D' = A$.

3) Pour les questions 3, 4, 5

- les angles $(\widehat{C\vec{D}}, \widehat{C\vec{B}})$ et $(\widehat{C\vec{D}'}, \widehat{C\vec{B}})$ sont opposés (symétrie par rapport à BC) ; $(\widehat{C\vec{D}}, \widehat{C\vec{B}})$ et $(\widehat{B\vec{A}}, \widehat{B\vec{C}})$ sont égaux (alternes internes)
- on utilise la symétrie axiale d'axe Δ médiatrice de BC .

III - ROTATIONS

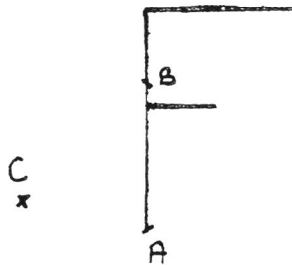
. Exemples concrets où interviennent la notion de rotation

- * roue d'une loterie
- * manège
- * fermeture à baïonnettes
- * moulin à vent ...

. Manipulations

1^o) Considérons une lettre F.

Construire une image obtenue après lui avoir fait subir un huitième de tour autour du point A.



Commentaire

deux solutions possibles, d'où on dégagera le sens

2^o) Même problème avec les points B et C.

Commentaire

Il s'agit de faire comprendre que la rotation opère sur tout le plan. Le point invariant n'est pas nécessairement sur F.

. Définition

Etant donné un point O et un angle $\hat{\alpha}$ (orienté) on appelle rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$ l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui associe à tout point M le point M' tel que

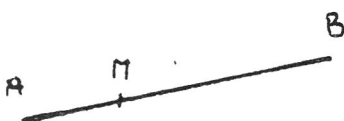
$$\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{OM}, \vec{OM}') = \hat{\alpha} \end{cases}$$

. Remarques

- * La rotation est un déplacement, elle conserve donc les distances et les angles orientés (d'après les manipulations).
- * Une rotation transforme un segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$ de même longueur

$$[AB] = \left\{ M / d(A, M) + d(A, B) = d(A, B) \right\}$$

La rotation est une isométrie.



Par conséquent $d(A,M) = d(A',M')$

$d(M,B) = d(M',B')$

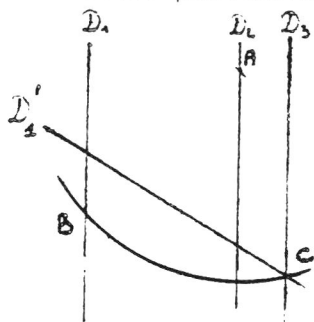
$d(A,B) = d(A',B')$

Par suite l'image de $[AB]$ est $[A'B']$

Une rotation transforme une demi-droite en une demi-droite, une droite en une droite, un cercle en un cercle de même rayon.

Exercices

1/Construire un triangle équilatéral ABC dont les sommets sont sur trois droites parallèles.



Commentaire

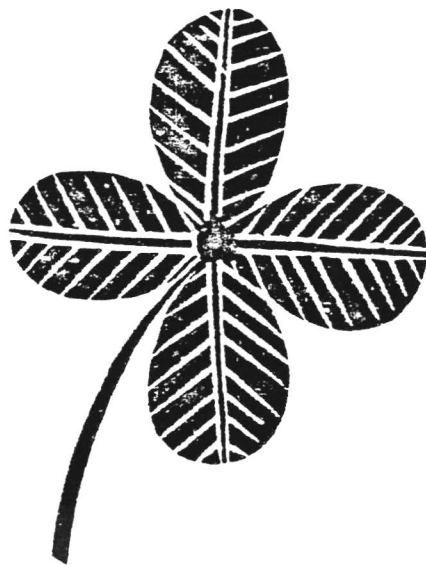
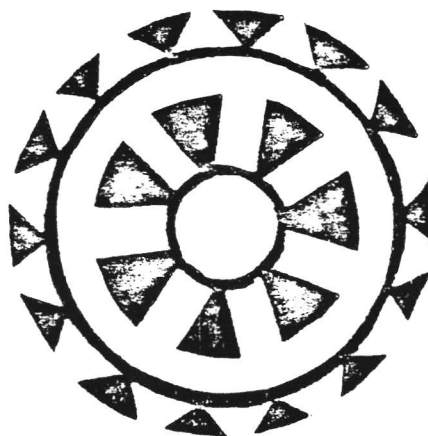
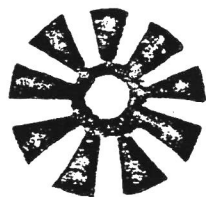
On fixe l'un des sommets, A par exemple; ayant constaté que C se déduit de B par une rotation de centre A (angle 60° ou -60°) on obtient C comme intersection de l'une des droites parallèles avec l'image de celle qui contient B. Par exemple $C = D_1' \cap D_3$. Quant à B il est l'antécédent de C.

Même question avec un triangle rectangle isocèle, avec un triangle isocèle ayant un "angle au sommet" de 20° .

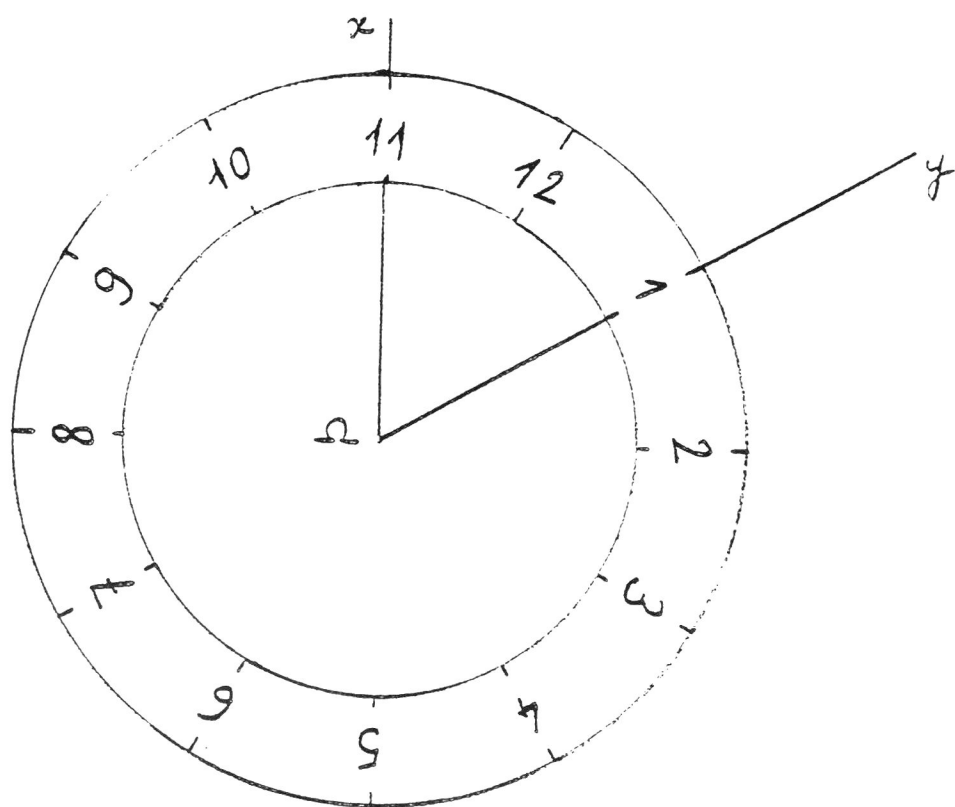
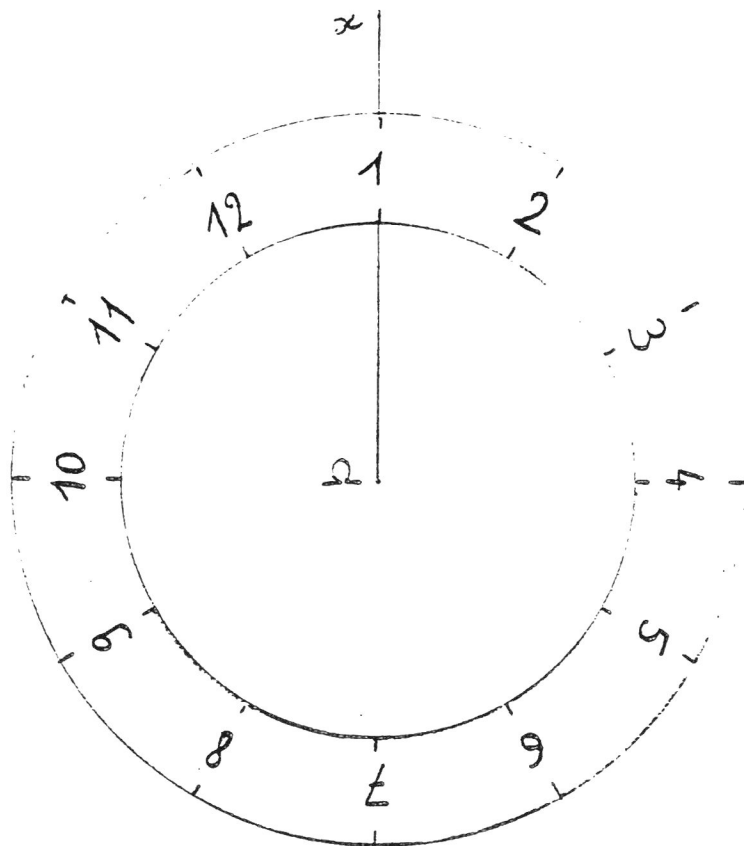
2/Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes et A un point n'appartenant ni à $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{D}'$. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $B \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}'$.

- * Si $\hat{\alpha} = \hat{O}$ la rotation est l'identité dans le plan
Si $\hat{\alpha} = \hat{p}$ la rotation de centre O est la symétrie centrale de centre O.
- * Si $\hat{\alpha} \neq \hat{O}$ la rotation n'admet qu'un seul point invariant, son centre
- * La rotation est une bijection du plan dans lui-même, l'application réciproque est la rotation de même centre et d'angle opposé.

- Exercices
- 1) Déterminer la rotation transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B') lorsque $AB=A'B'$ et $(AB) \parallel (A'B')$.
(Envisager tous les cas possibles, $A=A'$, $A \neq A'$, cas où les médiatrices de (A,A') et (B,B') sont confondues).
 - 2) Même question en envisageant des segments $[AB]$ et $[A'B']$ à la place des bipoints.
 - 3) Soit un point O et un triangle scalène (A,B,C) (c'est-à-dire ni rectangle, ni isocèle), on construit son image par la rotation de



- 16 -



(fig 7)

centre O , d'angle $1/8$ tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Trouver tous les représentants de l'angle de la rotation dans la figure formée par le triangle et son image.

IV - MESURE DES ANGLES

Commentaire

Prérequis. On sait mesurer les angles géométriques avec un rapporteur (degré)

Plan

- 1) Dans la transformation d'une figure par une rotation on ne connaît que l'état initial et l'état final.
- 2) Balayage du plan pour passer de la position initiale à la position finale en effectuant plusieurs tours
- 3) Orientation du plan (2 sens possibles)
- 4) Mesure des angles orientés.

. Imaginons la roue d'une loterie comportant 12 numéros. On s'intéresse au n° 1, on fait tourner la roue et on repère la nouvelle position du n° 1* (fig. 7 p. 16).

Appelons Ω_x la position initiale et Ω_y la position finale occupées par le n° 1. Quel trajet a-t-il effectué ?

Commentaire

Ou bien il est passé directement de Ω_x à Ω_y (la roue a été très faiblement lancée).

Ou bien elle a fait plusieurs tours dans un sens ou dans un autre.

On remarquera qu'elle a pu faire un $1/6$ de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ou $5/6$ de tour dans le sens inverse.

. Quels nombres peut-on associer à l'angle $(\widehat{\Omega_x, \Omega_y})$?

Commentaire

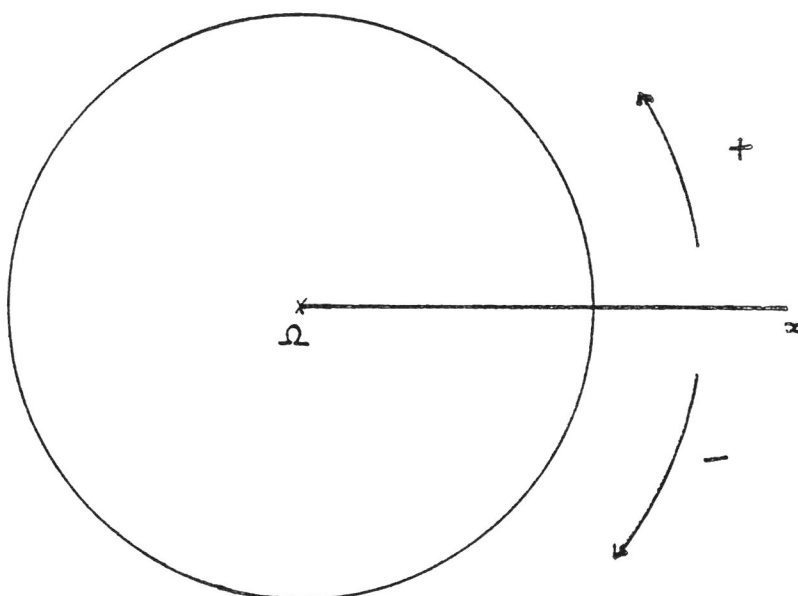
60 à droite, 420 à droite (quand on a effectué un tour)... $(60+k360)$ à droite (quand on a effectué k tours, $k \in \mathbb{N}$).

300 à gauche, 660 à gauche (quand on a effectué un tour)... $(300+k360)$ à gauche (quand on a effectué k tours, $k \in \mathbb{N}$) ("droite" signifiant sens des aiguilles d'une montre)

* axiome : la roue ne peut s'arrêter qu'en face d'un numéro.

. On dit qu'un cercle est parcouru dans le sens positif, ou direct, ou trigonométrique (on dit aussi que le plan est balayé dans le sens positif, ou direct ou trigonométrique) lorsqu'il est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Le sens contraire est appelé sens négatif ou indirect.



. Revenons à l'exemple de la roue de la loterie

a) A l'angle $(\widehat{\Omega_x, \Omega_y})$ (lorsque l'unité est le degré) sont associés les nombres :

- 60 ; -420 ; $-60 - k360$ ($k \in \mathbb{N}$), ...

+ 300 ; +660 ; $+300 + k360$ ($k \in \mathbb{N}$), ...

On est amené à dire que les nombres associés à $(\widehat{\Omega_x, \Omega_y})$ (lorsque l'unité est le degré) sont de la forme :

$-60 + k360$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Chacun de ces nombres est appelé une mesure en degré l'angle $(\widehat{\Omega_x, \Omega_y})$

Un angle admet donc une infinité de mesures en degrés qui diffèrent entre elles d'un multiple de 360.

Par exemple, les nombres -60 et +660 sont des mesures du même angle car $(660 - (-60)) = 720 = 2 \times 360$; leurs différences sont des multiples de 360.

On dit que -60 et 660 sont congrus modulo 360 ; on écrit $-60 \equiv 660 \pmod{360}$.

La mesure comprise entre -180 et +180 est appelée mesure principale

Exercices

1) On considère un cercle de centre O et un point A de cercle $\mathcal{C}$. Construire sur $\mathcal{C}$ les points $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ tels qu'une mesure en degrés de l'angle orienté de la demi-droite OA vers chacune des demi-droites $OM_1, OM_2, \dots, OM_k, \dots$ etc. soit respectivement :

3450 ; 30 ; -60 ; -690 ; 120 ; 1380 ; -300 ; -1680.

2) Soit Ax une demi-droite ; déterminer toutes les demi-droites Ay telles qu'une mesure en degré de $(\widehat{Ax, Ay})$ soit de la forme suivante :

$20 + 180k$; $-30 + 90k$; $-240 + 120k$; $45 + 60k$; $80k$ $k \in \mathbb{Z}$.

3) Déterminer par leurs mesures principales les angles dont une mesure en degrés, notée x, est solution de l'équation suivante : (faire une figure)

$$2x \equiv 60 \pmod{360} ; \quad 3x \equiv 90 \pmod{360} ; \quad 4x \equiv 0 \pmod{360}$$

$$6x \equiv 180 \pmod{360} ; \quad 4x \equiv 160 \pmod{360} ; \quad 2x \equiv x + 20 \pmod{360}$$

$$3x \equiv 60 - x \pmod{360}$$

Commentaire

Il est difficile d'être satisfait du choix d'une notation pour une mesure ; en effet si on désigne par exemple par $\text{mes}_d(\widehat{Ax, Ay})$ une mesure en degrés de l'angle $(\widehat{Ax, Ay})$, $\text{mes}_d(Ax, Ay)$ symbolise un nombre défini à 360 près.

b) Une mesure en degrés de l'angle nul est 0

$$\text{mes}_d(\widehat{Ax, Ax}) \equiv 0 \pmod{360}$$

Deux angles opposés ont des mesures opposées

$$\text{mes}_d(\widehat{Ax, Ay}) \equiv -\text{mes}_d(\widehat{Ay, Ax}) \pmod{360}$$

Commentaire

On remarquera l'analogie avec $\overline{AA} = 0$

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

c) Le cercle trigonométrique

* On appelle radian l'angle géométrique formé par deux demi-droites Ax , Ay qui intercepte sur le cercle de centre A et de rayon 1 un arc de longueur 1 .

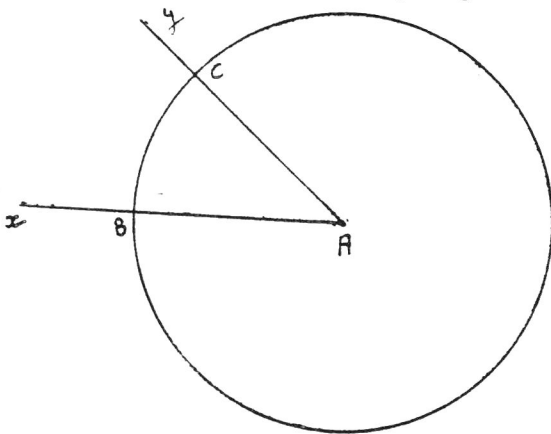
* Sur un cercle de centre A et de rayon 1 , un arc $\widehat{AB}$ a pour mesure en radians sa longueur.

* Soit $\hat{\alpha}$ un angle géométrique ; (Ax, Ay) un représentant de cet angle, on considère le cercle de centre A de rayon 1 et l'arc $\widehat{BC}$ intercepté par Ax, Ay .

Par définition :

la mesure en radians de $\hat{\alpha}$ est égale à la longueur de $\widehat{BC}$, est encore égale à la mesure en radians de $\widehat{BC}$.

Par exemple, l'angle plat mesure π radians (la longueur d'un demi-cercle de rayon 1 est égale à π).

Commentaire

Pour mesurer un angle orienté en radians, on peut refaire la même construction que celle qui a été faite en degrés en remplaçant 180 par π .

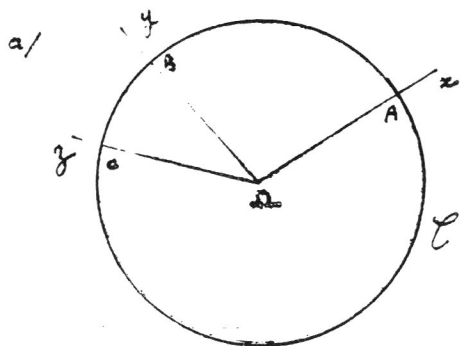
Le radian étant l'unité qui dans la suite sera la plus utilisée on peut adopter la notation $\text{mes}(Ax, Ay)$ pour désigner une mesure en radians de l'angle (Ax, Ay) . (Ici mes n'est pas indicé).

V- RELATION DE CHASLES - COMPOSITION DE ROTATION

. Relation de Chasles sur les mesures des angles

Commentaire

Nous ne définirons pas d'addition sur l'ensemble des angles, aussi la relation de Chasles est-elle donnée pour leurs mesures, elle s'exprimera donc sous forme d'une congruence modulo 2π .



Soit Ωx , Ωy et Ωz trois demi-droites.

Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω , de rayon 1.

$$\mathcal{C} \cap \Omega x = \{A\}; \quad \mathcal{C} \cap \Omega y = \{B\}; \quad \mathcal{C} \cap \Omega z = \{C\}$$

Soit θ_0 la mesure en radians comprise entre 0 et 2π de $(\Omega x, \Omega y)$ ($0 \leq \theta_0 < 2\pi$), et θ_1 la mesure en radians comprise entre 0 et 2π de $(\Omega y, \Omega z)$ ($0 \leq \theta_1 < 2\pi$).

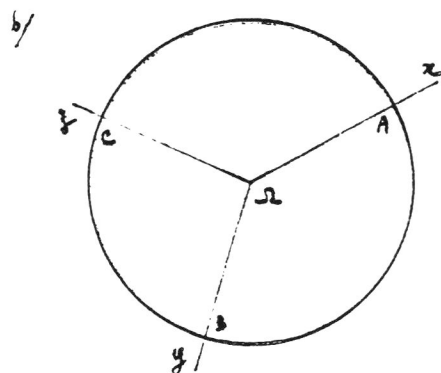
Deux cas de figures peuvent se présenter

a) $\theta_0 + \theta_1$ est la mesure en radians comprise entre 0 et 2π de $(\Omega x, \Omega z)$ ($0 \leq \theta_0 + \theta_1 < 2\pi$)

b) $\theta_0 + \theta_1$ est la mesure en radians comprise entre 2π et 4π de $(\Omega x, \Omega z)$ ($2\pi \leq \theta_0 + \theta_1 < 4\pi$).

D'où

$$\text{mes}(\widehat{\Omega x, \Omega z}) \equiv \text{mes}(\widehat{\Omega x, \Omega y}) + \text{mes}(\widehat{\Omega y, \Omega z}) \pmod{2\pi}$$



Commentaire

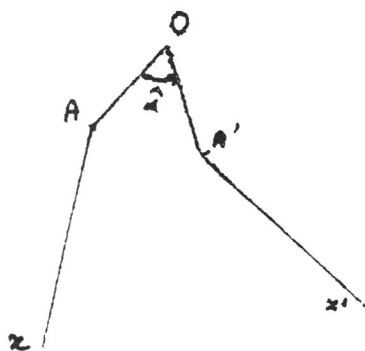
Remarquons l'analogie avec la relation de Chasles pour les mesures algébriques
 $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

On pourra parler aussi de relation de Chasles soustractive

$$\text{mes}(\widehat{\Omega x, \Omega z}) - \text{mes}(\widehat{\Omega x, \Omega y}) \equiv \text{mes}(\widehat{\Omega y, \Omega z}) \pmod{2\pi}$$

de même que l'on écrit $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$

. Conséquence pour l'angle d'une demi-droite et de son image par une rotation



Soit la rotation $r(O, \hat{\alpha})$, Ax une demi-droite $A'x'$ son image par la rotation donnée :

$$\text{mes}(\widehat{Ax, A'x'}) \equiv \text{mes}(\widehat{Ax, OA}) + \text{mes}(\widehat{OA, OA'}) + \text{mes}(\widehat{OA', A'x'}) \pmod{2\pi}$$

D'autre part

$$\text{mes}(\widehat{Ax, OA}) \equiv \text{mes}(\widehat{A'x', OA'}) \pmod{2\pi}$$

(car la rotation "conserve les angles")

De même

$$\widehat{\text{mes}(\vec{A'x'}, \vec{OA'})} \equiv - \widehat{\text{mes}(\vec{OA'}, \vec{A'x'})} \quad (2\pi)$$

$$\text{D'où } \widehat{\text{mes}(\vec{Ax}, \vec{A'x'})} \equiv \widehat{\text{mes}(\vec{OA}, \vec{O'A'})} \quad (2\pi)$$

Exercice :

On considère une droite $\mathcal{D}$ et un point O n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, soit $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ dans la rotation de centre O et d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. Construire $\mathcal{D}'$. Soit $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$; déterminer A_1 antécédent de A par la rotation et A_2 image de A par cette même rotation.

Soit $M \in \mathcal{D}$, trouver des constructions de l'image de M par cette rotation.

Commentaire

Donner le maximum de renseignements sur la figure, par exemple la composée de 2 rotations d'un quart de tour dans le sens trigonométrique est la symétrie de centre O .

. Composition des rotation de même centre

Commentaire

C'est une conséquence immédiate de la relation de Chasles. On notera l'importance du groupe des rotations de même centre opérant sur le plan

soit $r_1(O, \hat{\alpha}_1)$ et $r_2(O, \hat{\alpha}_2)$ deux rotations

$$\text{On a } \begin{cases} OM = OM' = OM'' \\ \widehat{\text{mes}(OM, OM'')} \equiv \widehat{\text{mes}(OM, OM')} + \widehat{\text{mes}(OM', OM'')} \end{cases} \quad (2\pi)$$

$r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$ tel que

$$\text{mes } \hat{\alpha} \equiv \text{mes } \hat{\alpha}_1 + \text{mes } \hat{\alpha}_2 \quad (2\pi)$$

VI - ANGLE AU CENTRE - ANGLE INSCRIT

cf. § III page du chapitre "ROTATIONS-ANGLES"

Ch. 2 R O T A T I O N S - A N G L E S

I Rotations

II Angles

III Angle inscrit et angle au centre

I - ROTATIONS

A l'aide du déplacement d'une feuille de papier calque (avec ou sans retournement), on peut dégager la notion d'isométrie, de déplacement et d'anti-déplacement d'un plan.

Il semble important d'insister sur le fait qu'on s'intéresse uniquement aux applications, c'est-à-dire qu'on n'étudie pas, sauf indication contraire, le mouvement, mais qu'on observe uniquement l'"état initial" et l'"état final".

Activités : On donne la figure 1, dans laquelle BCDE est un parallélogramme et $BA = AC$.

. On considère les déplacements f_1 à f_5 définis par :

$$f_1 : \begin{cases} D \mapsto C \\ E \mapsto B \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} C \mapsto C \\ B \mapsto B \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} B \mapsto D \\ C \mapsto E \end{cases} \quad f_4 : \begin{cases} B \mapsto B \\ C \mapsto A \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} D \mapsto A \\ E \mapsto B \end{cases}$$

Construire à l'aide d'un calque les images de chacun des points A,B,C,D,E par chacune de ces applications.

. parmi ces déplacements y en a-t-il d'un type connu ?

. mêmes questions pour les antidéplacements f_6 à f_9 définis par :

$$f_6 : \begin{cases} B \mapsto B \\ C \mapsto C \end{cases} \quad f_7 : \begin{cases} C \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases} \quad f_8 : \begin{cases} F \mapsto A \\ D \mapsto B \end{cases} \quad f_9 : \begin{cases} B \mapsto B \\ C \mapsto A \end{cases}$$

. peut-on définir de cette façon, à l'aide des points A,B,C,D,E d'autres isométries ?

. quelles sont, parmi les applications f_1 à f_9 celles qui sont égales à leur réciproque ?

La mise en page de la figure n'est pas fortuite ; elle est conçue de façon que tous les points cherchés soient sur la feuille. On pourra rajouter ultérieurement d'autres points pour faire comprendre aux élèves que tous les points du plan ont une image, et pas seulement ceux qui sont représentés. On pourra aussi faire composer certaines applications.

On déduira de ces activités les propriétés suivantes :

- 1 - Soit f une isométrie d'un plan P ; pour tout couple (A,B) de P^2 , on a : $A'B' = AB$, où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$

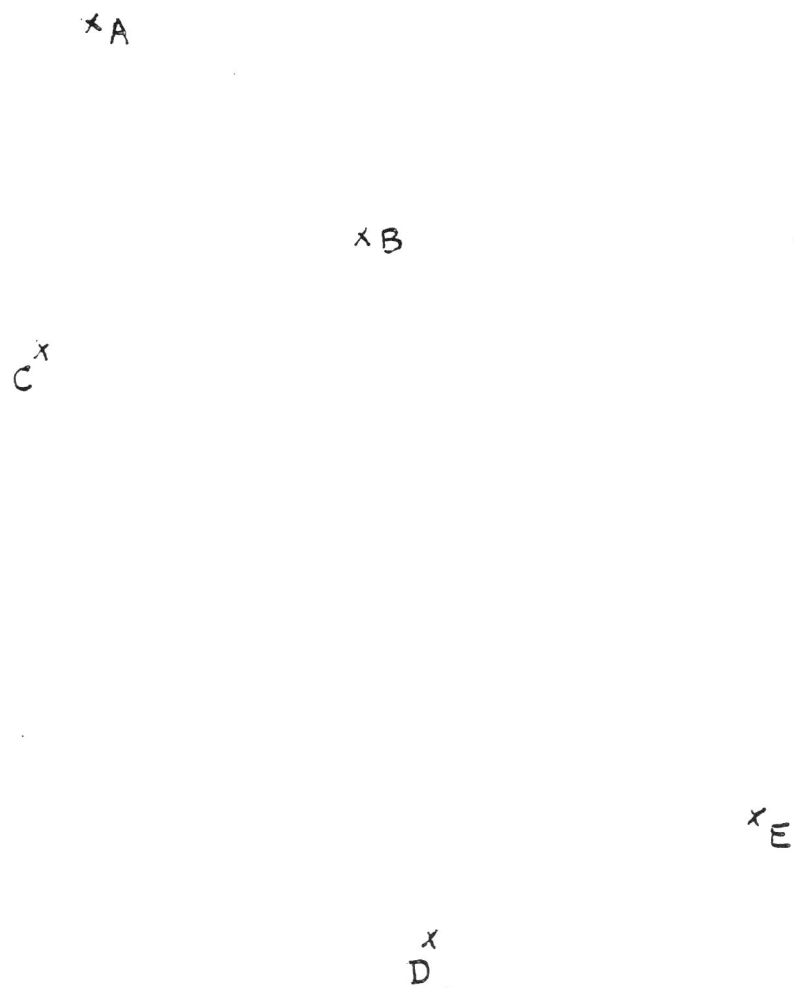


Figure 1

2 - Etant donné deux couples de points (A,B) et (A',B') tels que $A \neq B$ et $AB = A'B'$, il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, et un unique antidéplacement g tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

3 - Les isométries sont bijectives ; la composée de deux isométries est une isométrie, la composée de deux déplacements est un déplacement, la composée de deux antidéplacements est un déplacement.

3 bis - Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est un anti-déplacement.

4 - Soit f une isométrie, A et B deux points distincts et A' et B' leurs images par f .

- . l'image de la droite (AB) par f est la droite $(A'B')$
- . l'image de la demi-droite $[A,B)$ par f est la demi-droite $[A',B')$
- . l'image du segment $[A,B]$ par f est le segment $[A',B']$
- . l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon R .

Rotations : l'étude des déplacements ayant un point invariant O montre que l'on peut obtenir une telle application en faisant tourner le calque autour de O d'où la :

Définition : un déplacement ayant au moins un point invariant O , est appelé rotation de centre O .

Propriétés : (pouvant se déduire assez facilement des propriétés 1 à 4)

5 - Si une rotation a deux points invariants, c'est l'identité (en vertu de 2 et du fait que l'identité est un déplacement). On en déduit :

6 - Une rotation qui n'est pas l'identité a un unique point invariant

7 - Une rotation est déterminée par son centre O , un point distinct de O et l'image de ce dernier (cas particulier de 2)

8 - La composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites sécantes en O est une rotation de centre O (d'après 3, c'est un déplacement, et il laisse O invariant)

9 - Toute rotation de centre O peut s'exprimer comme composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites sécantes.

(Soit r une rotation de centre O ; si $r = id_p$, le résultat est immédiat ; si $r \neq id_p$, soit $A \neq O$ et $A' = r(A)$; on appelle D la droite OA et D' la

médiatrice de (A, A') ; D et D' sont sécantes en O , donc $S_{D'} \circ S_D(O) = O$;
d'autre part $S_{D'} \circ S_D(A) = A'$; d'après 8 $S_{D'} \circ S_D$ est une rotation, et d'après
7 $S_{D'} \circ S_D = r$).

Complément : tout déplacement du plan est une rotation ou une translation.
(On a ajouté cette propriété car on peut en donner une démonstration simple
à l'aide de ce qui précède).

Démonstration :

Soit f un déplacement de P et A un point de P .

On pose $A' = f(A)$ et $A'' = f(A')$.

Si $A' = A$, f est une rotation de centre A (éventuellement id_P). On suppose
dans la suite $A \neq A'$. Par conséquent, si on trouve un déplacement g tel que
 $g(A) = A'$ et $g(A') = A''$, $g = f$.

f étant une isométrie, on a : $AA' = A'A''$ (1)

1er cas : A, A', A'' sont alignés. Compte tenu de (1) on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{A'A''}$$

. Si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''}$: $A' = t(A)$ et $A'' = t(A')$, t étant la translation de vecteur
 $\overrightarrow{AA'}$. Donc $f = t$.

. Si $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{A'A''}$: alors $A'' = A$;

S étant la symétrie par rapport au milieu de (A, A') $A' = S(A)$ et $A'' = S(A')$.

Donc $f = S$

2ème cas : A, A', A'' non alignés. Soit D la médiatrice de (A, A') et D' la
médiatrice de (A, A'') ; les points A, A', A'' n'étant pas alignés, D et D' sont
sécantes en un point O . $S_{D'} \circ S_D$ est donc une rotation de centre O . Or :

$$S_{D'} \circ S_D(A) = S_{D'}(A') = A' \quad (\text{car } A' \in D' \text{ d'après (1)})$$

$$S_{D'} \circ S_D(A') = S_{D'}(A) = A''$$

Donc f est la rotation $S_{D'} \circ S_D$

Activités :

* Construction sans calque de l'image d'un point par une rotation : On donne
la figure 2; construire sans calque les points $r(B)$, $r(C)$, $r(D)$, r étant la
rotation de centre O transformant A en A' .

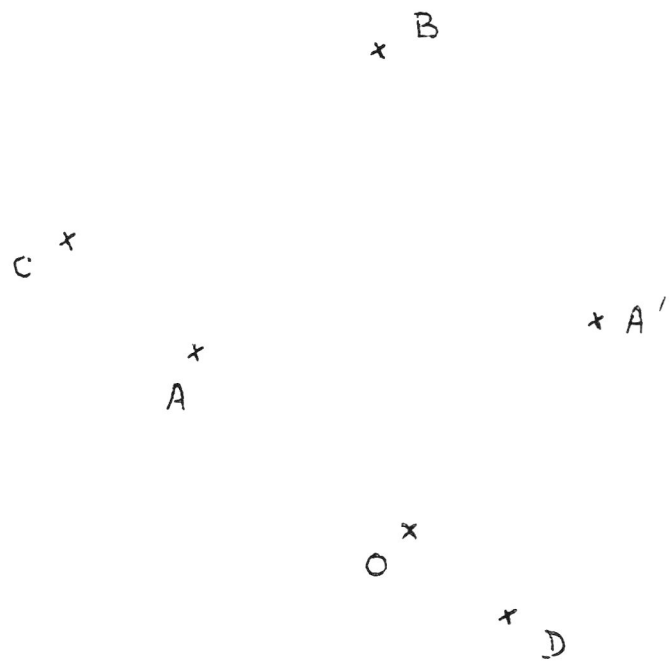


Figure 2

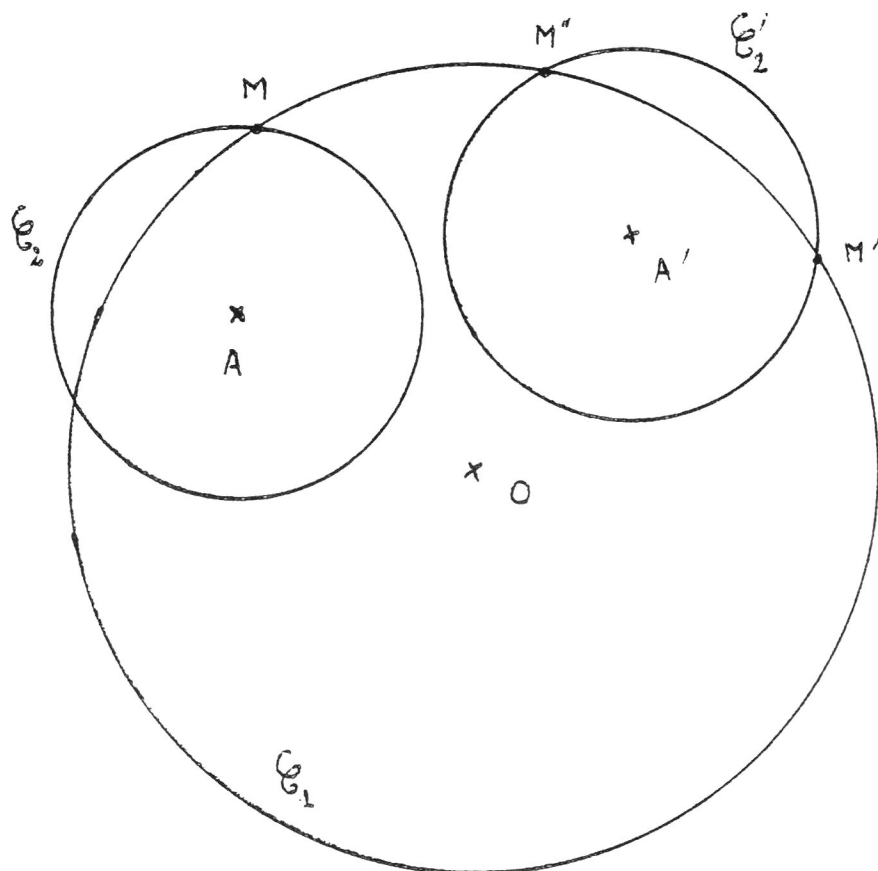


Figure 3

Il est possible que les élèves prononcent le mot "angle" et proposent d'utiliser un rapporteur ; cela peut constituer une bonne introduction au paragraphe suivant. Plus généralement, on pourra prendre en compte toute suggestion des élèves. Il paraît aussi intéressant de signaler les méthodes suivantes, même si les élèves ne les ont pas envisagées spontanément :

- méthode dite du "coin numéroté"

On matérialise le secteur angulaire saillant AOA' dans du papier, en ayant soin de distinguer (outre les deux faces) les deux bords (numérotés 1 et 2 par exemple). Si on cherche l'image de B , le "coin numéroté" ainsi construit permettra de trouver la demi-droite image de $[O, B]$ (prop.4) : On fait coïncider le bord 1 avec $[O, B]$; le bord 2 donnera la demi-droite cherchée ; le point B' , image de B par la rotation, sera alors déterminé, sur cette demi-droite par : $OB' = OB$. Même chose pour C et D .

- méthode à la règle et au compas

Soit $M \neq O$ et $M' = r(M)$; soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon OM et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon AM .

$M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$; donc $M' \in r(\mathcal{C}_1) \cap r(\mathcal{C}_2)$; $r(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et $r(\mathcal{C}_2)$ est le cercle $\mathcal{C}_2'$ de centre A' et de rayon (AM) .

1er cas : O, A, M ne sont pas alignés. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points ; $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2'$ se coupent donc aussi en deux points. Le problème est de savoir lequel de ces deux points est M' . On peut se contenter de le trouver sur la figure (fig.3) ou bien faire le raisonnement suivant : soit S la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $\{A, A'\}$; posons $M'' = S(M)$; $\mathcal{C}_1$ est invariant par S et $S(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2'$, donc $M'' \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$; soit d'autre part S' la symétrie orthogonale par rapport à (OA') ; on a $S' \circ S = r$ (voir plus haut), donc $M' = S'(M'')$; les points O, A, M n'étant pas alignés, O, A', M'' ne le sont pas, donc $S'(M'') \neq M''$; M' est donc le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2'$ qui n'est pas M'' .

2ème cas : O, A, M sont alignés. $M \in (OA)$, donc $M' \in (OA')$; d'autre part $OM = OM'$; il en résulte que M appartient à l'intersection de (OA') et du cercle de centre O et de rayon OM . On remarque de plus que $M' \in [O, A']$ si et seulement si $M \in [O, A]$.

* Recherche des centres des rotations transformant un point A en un point A'

* Recherche des centres des rotations transformant un couple (A,B) en un couple (A',B') : soit A,B,A',B' tels que $AB \neq 0$ et $AB = A'B'$. Chercher les rotations r telles que $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.

Pour les élèves, on pourra se contenter de l'étude d'un cas simple. Voici toutefois une étude détaillée de ce problème.

Si il existe une rotation r répondant à la question, son centre O appartient aux médiatrices Δ et Δ' de (A,A') et (B,B') .

1er cas : $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$: il n'existe aucune rotation transformant (A,B) en (A',B') (le déplacement transformant (A,B) en (A',B') est une translation).

2ème cas : $\Delta = \Delta'$ (fig.4) ; soit I un point de Δ et r la rotation de centre I telle que $r(A) = A'$; appelons S et S' les symétries orthogonales par rapport à Δ et IA' ; on a $r = S' \circ S$.

Or $S' \circ S(B) = S'(B')$; donc $r(B) = B'$ si et seulement si, $S'(B') = B'$, c'est-à-dire si et seulement si $B' \in (IA')$.

On en déduit :

- si $(A'B') \cap \Delta = \emptyset$, il n'existe pas de rotation transformant (A,B) en (A',B') . (Le déplacement transformant (A,B) en (A',B') est une translation).

- si $(A'B')$ et Δ sont sécantes, le point O cherché est le point d'intersection de $(A'B')$ et Δ .

3ème cas : Δ et Δ' sont sécantes (fig.5) ; soit O le point d'intersection de Δ et Δ' et r la rotation de centre O transformant A en A' . Montrons que $r(B) = B'$.

Soit B'' le symétrique de B par rapport à Δ . Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OB et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A' et de rayon $A'B'$. On sait que $r(B) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Or $B' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ et $B'' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ (car $OB'' = OB$ et $A'B'' = AB = A'B'$) ; d'autre part $B' \neq B''$, puisque $\Delta \neq \Delta'$; les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ étant distincts (car leurs centres le sont), on a : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{B', B''\}$. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à Δ et S' la symétrie orthogonale par rapport à (OA') ; on sait que $r = S' \circ S$; donc $r(B) = S'(B'')$ et $S'(B'') = B'$, OA' étant axe de symétrie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

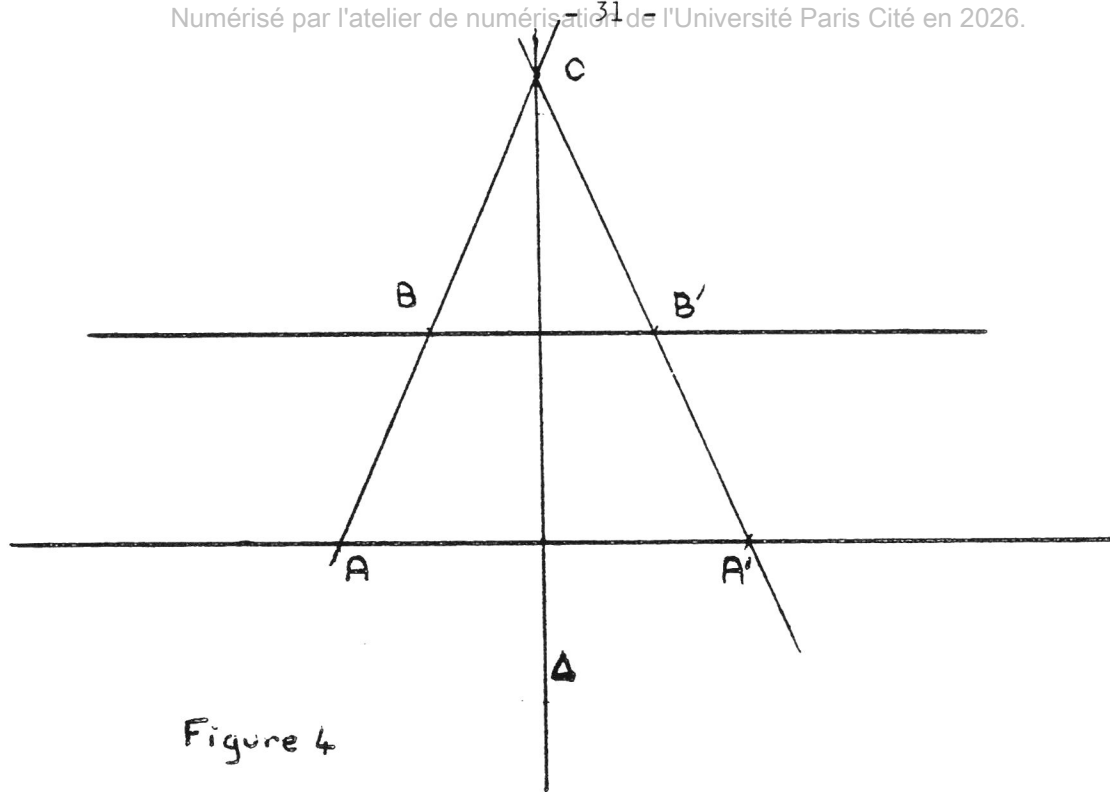


Figure 4

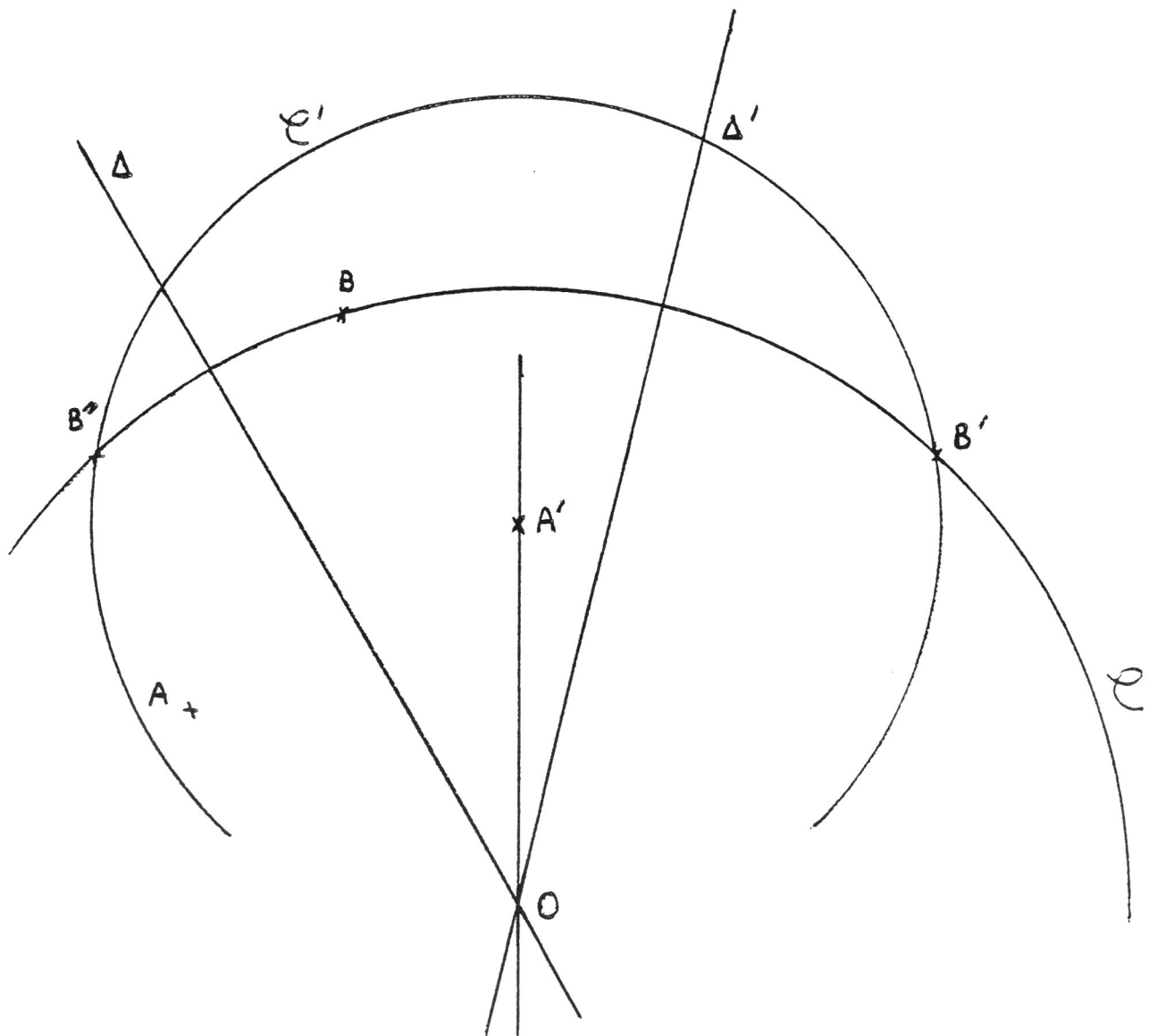


Figure 5

II - ANGLES

1ère méthode

1°/ Angle d'une rotation :

On fait ici intervenir les mouvements.

La définition d'une rotation a fait apparaître comment (l'application)-rotation pouvait se déduire du mouvement-rotation.

Soit une rotation r de centre O transformant un point A (distinct de O) en A' . Si l'on marque O et A sur un calque il y a une infinité de manières d'amener A sur A' en faisant tourner le calque autour de O .

Pour décrire un tel mouvement, on est amené à préciser le sens dans lequel on fait tourner le calque (on suppose qu'au cours d'une manipulation on le fait toujours tourner dans le même sens) et la "quantité" dont on le fait tourner ; il semble naturel d'évaluer cette "quantité" en tours et "fractions" de tour. De plus, on affecte un signe conventionnel à chaque sens (on oriente ainsi le plan). Deux tels mouvements diffèrent alors d'un nombre entier de tours.

On appellera mesure en tours de la rotation le nombre caractérisant l'un quelconque des mouvements de rotation correspondants. A partir de là (par division du tour) on peut définir les mesures en degrés et grades ; la mesure en radians, d'origine différente, sera étudiée au paragraphe **I** du Chapitre 3

On dira que deux rotations ont le même angle si elles ont les mêmes mesures.

2°/ Angle orienté de demi-droites :

Soit (Ox, Oy) un couple de demi-droites de même origine. Il existe une unique rotation de centre O transformant Ox en Oy . Si le réel α est une mesure de cette rotation, on dira que α est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$. On peut alors remarquer que $-\alpha$ est une mesure de l'angle $\widehat{(Oy, Ox)}$. Ceci permet de justifier l'expression angle orienté. On peut aussi à cette occasion introduire le terme angles opposés. $\widehat{(Oy, Ox)}$ est l'opposé de $\widehat{(Ox, Oy)}$.

Pour la suite et les activités, voir après l'exposé de la 2ème méthode.

2ème méthode (dite du "coin numéroté")

On dira que deux couples de demi-droites (Ax, Ay) et (Bz, Bt) font (ou définissent) le même angle si, et seulement si, ils correspondent à un même "coin numéroté" (voir page 29), c'est-à-dire que la rotation qui transforme Ax en

A_y et celle qui transforme B_x en B_t sont associées au même coin numéroté :

Notation : $(\widehat{A_x, A_y}) = (\widehat{B_z, B_t})$

Remarque : On peut ainsi définir l'angle d'une rotation de centre O : si M est un point quelconque du plan, distinct de O , et M' son image, c'est l'angle $(\widehat{OM, OM'})$ (On note ainsi l'angle du couple de demi-droites $([OM], [OM'])$, pour alléger l'écriture).

On définit ensuite la mesure :

Les élèves savent mesurer un secteur saillant à l'aide d'un rapporteur. Pour mesurer l'angle orienté (A_x, A_y) , il suffira d'adjoindre à la mesure du secteur saillant x_{A_y} un signe, + ou - suivant le sens dans lequel il serait "balayé" par une demi-droite d'origine A , de A_x vers A_y . La mesure qu'on obtient est la mesure "principale"; les autres s'obtiendront à partir de la composition des rotations.

/Partie commune aux deux méthodes/

Activités :

* Découper un disque de 6 cm de rayon dans du papier, et par pliages successifs, fabriquer un rapporteur gradué en 16^{es} de tours ; le tour correspondant à 360° , à combien de degrés correspond le 16^{e} de tour ? Porter sur le disque les graduations en degrés correspondant aux subdivisions. (Attention au sens).

* Etant donnés deux points O et A , construire les images de A , par les rotations de centre O et de mesure : 3 seizièmes de tour ; -5 seizième de tour, 1,125 tour, **$112,5^\circ$** , etc (en utilisant le rapporteur en papier), 73° ; 250° ; -250° ; 432° ; etc... (en utilisant un rapporteur du commerce).

Les élèves ayant le plus souvent un rapporteur "demi-rond", ils devront s'adapter.

* On donne la figure 6, déterminer à l'aide d'un rapporteur, des mesures en degrés des rotations de centre O transformant A en A_1 ; A en A_2 ; etc.

(A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à (OA) ; A et A_3 sont symétriques par rapport à O).

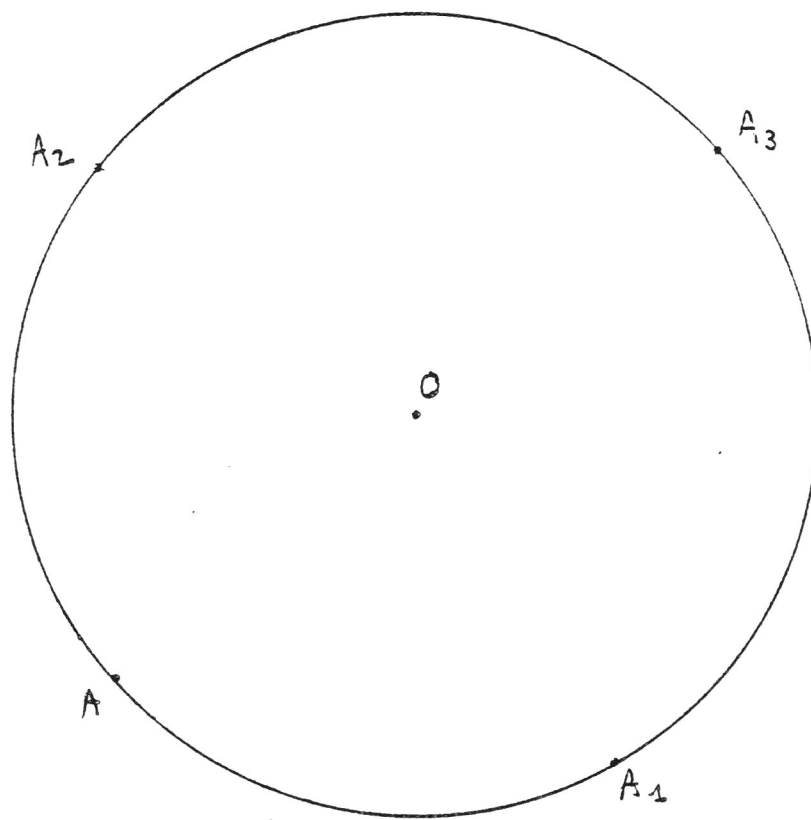


Figure 6

* Composée de deux rotations de même centre : On considère deux rotations r_1 et r_2 de même centre O , définies chacune par une mesure de leur angle. Quelles sont les transformations $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$?

On traitera ce problème sur des exemples variés.

La composée de deux rotations de centre O est un déplacement qui laisse O invariant ; c'est donc une rotation de centre O . Le problème est donc uniquement de déterminer une mesure de l'angle de la composée. Si on a choisi la 2ème méthode on mettra ainsi en évidence la pluralité des mesures d'un même angle. Quelle que soit la méthode choisie, il faudra, bien entendu faire apparaître des cas où la valeur absolue de la somme des mesures en degrés de r_1 et r_2 excède 360.

On déduira de cette étude :

- Si α_1 est une mesure de r_1 et α_2 une mesure de r_2 , $\alpha_1 + \alpha_2$ est une mesure de $r_1 \circ r_2$, d'où :
- $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$
- étant donné 3 demi-droites Ox, Oy, Oz de même origine, si α est une mesure de $(\widehat{Ox, Oy})$ et β une mesure de $(\widehat{Oy, Oz})$, $\alpha + \beta$ est une mesure de $(\widehat{Ox, Oz})$.

* Itérés d'une rotation : On donne deux points O et A ; on appelle r la rotation de centre O , de mesure 80° ; construire $A_1 = r(A)$, $A_2 = r(A_1)$, etc. ; donner des mesures des angles $(\widehat{OA, OA_1})$, $(\widehat{OA, OA_2})$, etc.

On a choisi 80° , car $80 = \frac{720}{9}$, ainsi 360 n'est pas un multiple de 80, $80 + 80 < 180$. On pourra faire remarquer que la rotation de centre O qui transforme A en A_n est r^n .

* Image d'un couple de demi-droites par une isométrie :

On constatera à l'aide du calque ou du coin numéroté les propriétés suivantes :

- Soit Ox, Oy deux demi-droites et f un déplacement ; on appelle $O'x'$ et $O'y'$ les images de Ox et Oy par f ; on a :

$$(\widehat{Ox, Oy}) = (\widehat{O'x', O'y'})$$
- Soit (Ox, Oy) deux demi-droites et g un antidéplacement ; on appelle $O''x''$ et $O''y''$ les images de Ox et Oy par g ; on a :

$$(\widehat{Ox, Oy}) = (\widehat{O''y'', O''x''})$$

III - ANGLE AU CENTRE ET ANGLE INSCRIT

Théorème : Soit A,B,C trois points (distincts deux à deux) d'un cercle de centre O ; si α est une mesure de l'angle $(\widehat{CA, CB})$ (on note ainsi l'angle du couple de demi-droites $([CA), [CB))$), 2α est une mesure de $(\widehat{OA, OB})$.

Démonstration :

1ère étape : On suppose les points O,C,B alignés (fig.7).

Soit H le milieu de (A,B) ; on a :

$$\vec{OH} = \frac{1}{2} \vec{CA} \quad \text{et} \quad \vec{OB} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

Donc, par translation : $(\widehat{CA, CB}) = (\widehat{OH, OB})$

D'autre part, la droite (OH) étant la médiatrice de (A,B) on a , par symétrie : $(\widehat{OA, OH}) = (\widehat{OH, OB})$

Soit α une mesure de $(\widehat{CA, CB})$; α est donc une mesure de $(\widehat{OA, OH})$ et de $(\widehat{OH, OB})$; 2α est donc une mesure de $(\widehat{OA, OB})$.

2ème étape : Cas général (fig.8)

Soit C' le point diamétralement opposé à C ; soit α une mesure de $(\widehat{CA, CC'})$ et β une mesure de $(\widehat{CC', CB})$.

D'après le premier cas, 2α est une mesure de $(\widehat{OA, OC'})$ et 2β une mesure de $(\widehat{OC', OB})$. Donc $2\alpha + 2\beta$ est une mesure de $(\widehat{OA, OB})$. Or $\alpha + \beta$ est une mesure de $(\widehat{CA, CB})$.

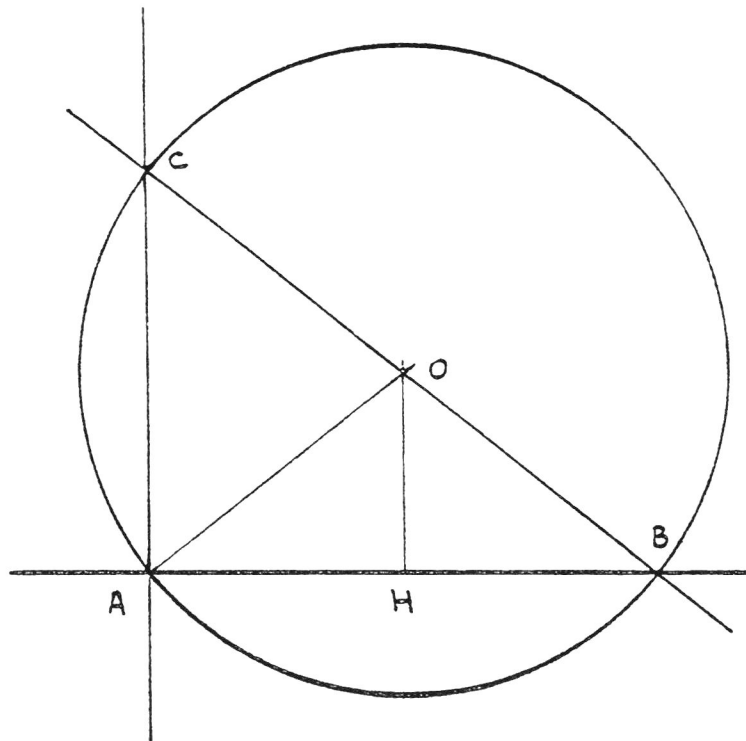


Fig. 7

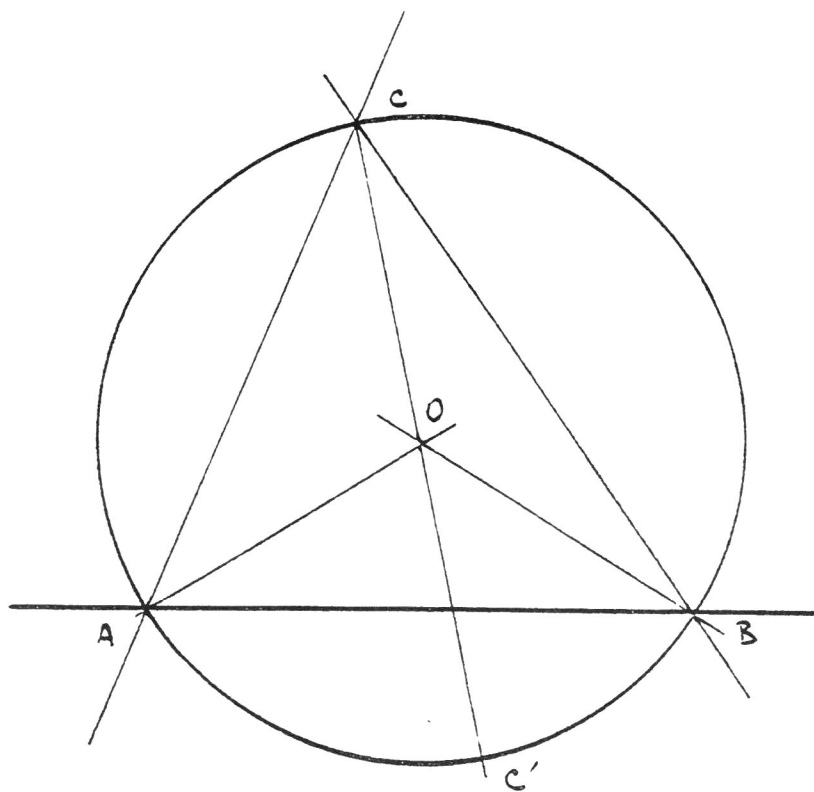


Fig. 8



Ch. 3 - T R I G O N O M E T R I E

I Le Radian

II Le cercle trigonométrique

III Fonctions trigonométriques

I - LE RADIAN

Considérons deux cercles C et C' de même centre O et de rayons R et R' ; C' est l'image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda = \frac{R'}{R}$.

On sait que cette homothétie "multiplie les longueurs" par λ ; Si on appelle L et L' les longueurs respectives de C et C' on a donc :

$$L' = \lambda L = \frac{R'}{R} L \quad , \quad \text{d'où}$$

$$\frac{L'}{R'} = \frac{L}{R}$$

Le rapport $\frac{L}{R}$ est donc indépendant du cercle considéré ; on le note π .

Pour le calcul de π , voir chapitre : Approximation d'un réel par des suites.

Problème : Soit Ox et Ox' deux demi-droites et C un cercle de centre O ; on appelle A et A' les points d'intersection de Ox et Ox' avec C ; on appelle D la droite passant par A et orthogonale à (OA) (fig. 1).

On suppose que D est constituée d'un fil souple et inextensible et qu'on l'enroule sur C ; quels sont les points de D qui viennent coïncider avec A' ?

Solution : Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de D , tel que la demi-droite $(A, \vec{u})$ "s'enroule dans le sens direct".

Soit $M_0, M_1, M_2, \dots$ les points de D d'abscisses positives répondant à la question, M_0 étant le plus proche de A . La longueur AM_0 est égale à la distance qu'il faut parcourir sur le cercle pour aller de A vers A' dans le sens de la flèche. Si α est la mesure en degrés comprise entre 0 et 360 de l'angle $(\widehat{OA, OA'})$, cette distance est égale à $\frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$

D'autre part, deux points consécutifs de D répondant à la question sont distants de $2\pi R$. Appelons $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ les abscisses de $M_0, M_1, M_2, \dots$ dans le repère $(A, \vec{u})$; on a donc :

$$x_0 = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$$

$$x_1 = \theta_0 + 2\pi R$$

$$x_2 = \theta_0 + 4\pi R$$

$$x_k = \theta_0 + 2k\pi R \quad \text{où } k \in \mathbb{N}$$

De même, soit $M_{-1}, M_{-2}, \dots$ les points de D d'abscisses négatives $\theta_{-1}, \theta_{-2}, \dots$ répondant à la question. On a :

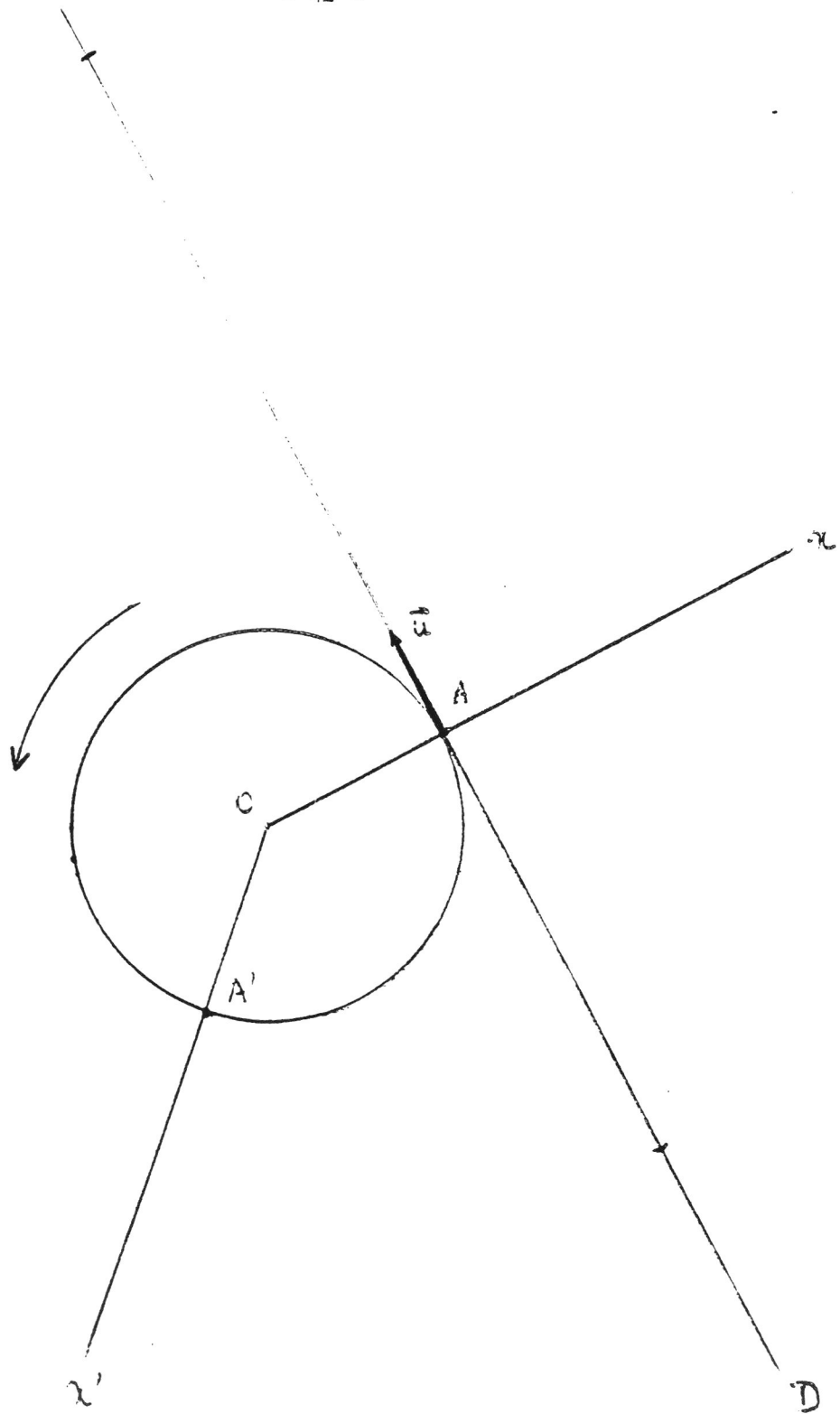


Figure 1

$$x_1 = \theta_0 - 2\pi R$$

$$x_2 = \theta_0 - 4\pi R$$

$$x_k = \theta_0 - 2k\pi R \quad \text{où } k \in \mathbb{N}$$

On a donc, pour tout k de $\mathbb{Z}$:

$$x_k = x_0 + 2k\pi R$$

On sait, par ailleurs que les mesures en degrés de $\widehat{(OA, OA')}$ sont les nombres de la forme $\alpha + 360k$, où $k \in \mathbb{Z}$; posons $\alpha_k = \alpha + 360k$; on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$x_k = \left(\frac{\alpha}{360} + k \right) \times 2\pi R$$

$$x_k = (\alpha + 360k) \times \frac{2\pi R}{360}$$

$$x_k = \frac{\pi}{180} \alpha_k R$$

Si l'on pose $\theta_k = \frac{\pi}{180} \alpha_k$, on a :

$$x_k = \theta_k \cdot R$$

est appelé mesure en radians de l'angle $\widehat{(OA, OA')}$ et on a :

$$\theta_k = \theta_0 + 2k\pi$$

Deux mesures en radians d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de 2π .

En revenant au problème étudié, si $R = 1$, les abscisses des points M_k sont égales aux mesures en radians de l'angle $\widehat{(OA, OA')}$.

Exercice : Quelles sont les mesures en radians des angles dont les mesures en degrés sont : 0, 30, 45, 60, 90, etc... ?

II - CERCLE TRIGONOMETRIQUE

On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1, sur lequel on a choisi un sens et une origine A (le sens choisi est habituellement le sens inverse des aiguilles d'une montre, qu'on appelle sens trigonométrique).

On considère un tel cercle C (Fig. 2) ; soit O son centre. On appelle Δ la droite orthogonale en O à (OA) ; soit B_1 et B_2 les points d'intersection de C et Δ , et A' le symétrique de A par rapport à O. Δ est donc la médiatrice de (A,A') et, la symétrie orthogonale par rapport à Δ étant un anti-déplacement, on a :

$$(\widehat{OA,OB_1}) = (\widehat{OB_1,OA'})$$

Soit α la mesure principale de $(\widehat{OA,OB_1})$; d'après Chasles, 2α est donc une mesure de $(\widehat{OA,OA'})$; or, π est une mesure de cet angle, d'où :

$$2\alpha = \pi + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Il en résulte que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

D'autre part, B_2 est le symétrique de B_1 par rapport à (AA'), donc :

$$(\widehat{OA,OB_2}) = (\widehat{OB_1,OA})$$

La mesure principale de $(\widehat{OA,OB_2})$ est donc $-\alpha$.

Un des deux angles $(\widehat{OA,OB_1})$ et $(\widehat{OA,OB_2})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ et l'autre $-\frac{\pi}{2}$. Dans la suite on conviendra d'appeler B celui des deux points B_1 ou B_2 qui correspond à la mesure $\frac{\pi}{2}$, l'autre étant noté B'.

Remarque : On vient de démontrer que si deux demi-droites sont orthogonales, leur angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

On pose maintenant $\vec{i} = \vec{OA}$ et $\vec{j} = \vec{OB}$ et on appelle D la droite orthogonale à (OA) en A ; remarquons que $\vec{j}$ est un vecteur unitaire de D.

A tout réel x, on associe le point N de D tel que $\vec{AN} = x\vec{j}$, puis, par "enroulement" on associe à N le point M de C ; M est donc le point de C tel que l'angle $(\widehat{OA,OM})$ ait pour mesure x. M sera dit image de x sur C.

Activités :

* Soit x et x' deux réels, et M et M' leurs images sur C. A quelle condition M et M' sont-ils :

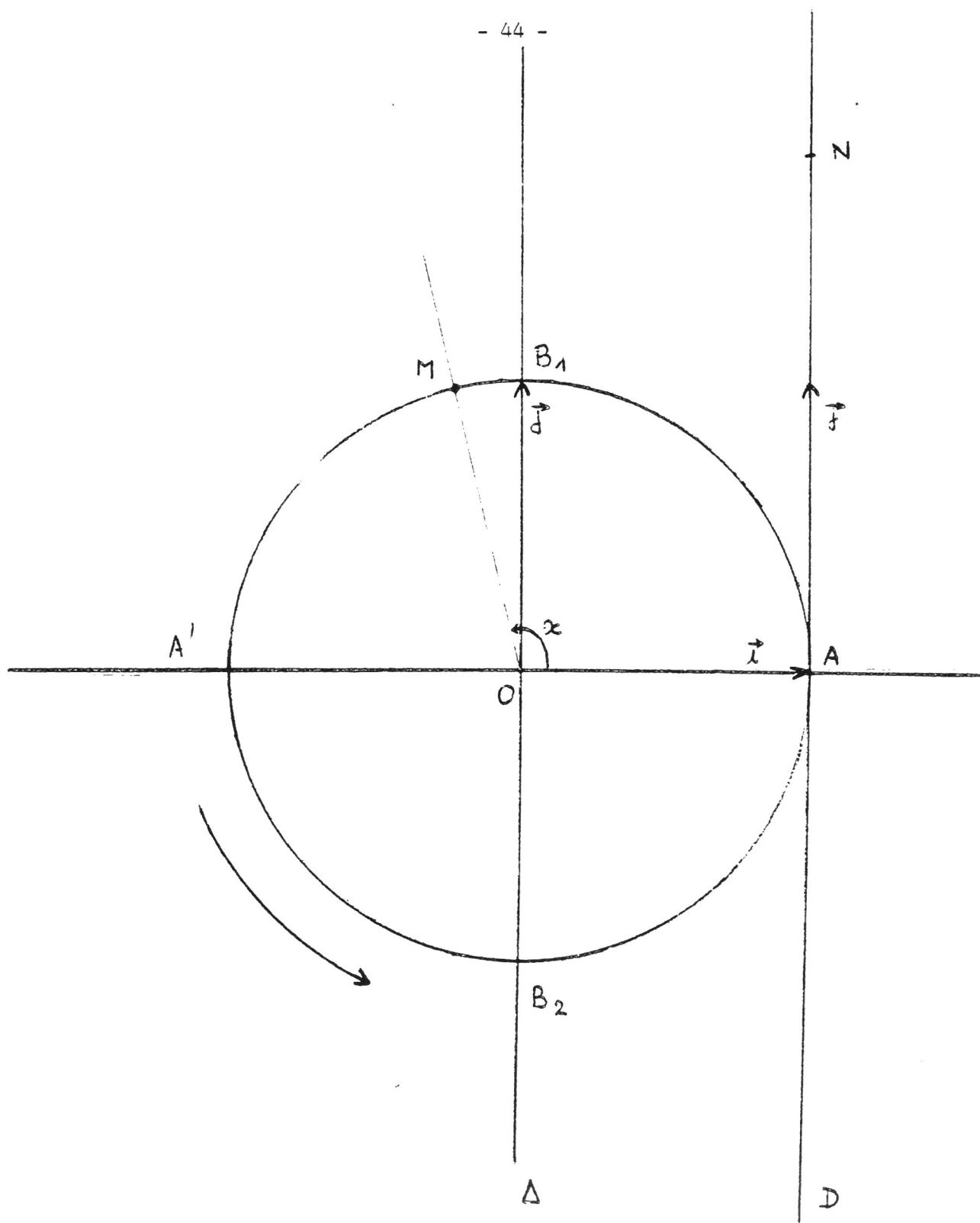


Figure 2

- égaux ?
- symétriques par rapport à 0 ?
- symétriques par rapport à (OA) ?
- symétriques par rapport à (OB) ?

* Construire à la règle et au compas les images sur C des multiples entiers de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{4}$.

IV - FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Définition : x étant un réel quelconque, on appelle $\cos x$ et $\sin x$ l'abscisse et l'ordonnée, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, du point M, image de x sur C.

$\cos$ et $\sin$ sont donc deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

On a immédiatement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

En effet

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = OM^2, \text{ car } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est orthonormé.}$$

On a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{et } \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

Plus généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

Il en résulte que, pour connaître les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ pour tout x réel, il suffit de connaître les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ lorsque $x \in]-\pi, \pi]$ par exemple.

Les propriétés vues pour la construction des images sur le cercle trigonométrique des multiples de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ permet de calculer les cosinus et sinus de ces nombres; on peut alors ébaucher la représentation graphique de ces fonctions, qu'on pourra affiner en utilisant une calculatrice.

Quelques relations simples :

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique :

. $x + \pi$ a pour image le symétrique de M par rapport à O , donc :

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \text{ et } \sin(x + \pi) = -\sin x$$

. $-x$ a pour image le symétrique de M par rapport à (OA) ; donc :

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

. $\pi - x$ a pour image le symétrique de M par rapport à (OB) ; donc

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin x$$

. appelons M' l'image de $x + \frac{\pi}{2}$

$\widehat{(OB, OA)}$ a pour mesure $-\frac{\pi}{2}$

$\widehat{(OA, OM')}$ a pour mesure $x + \frac{\pi}{2}$

donc $\widehat{(OB, OM')}$ a pour mesure x . Il en résulte que M' a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$ dans le repère $(O, \vec{OB}, \vec{OA'})$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \vec{OM'} &= \cos x \vec{OB} + \sin x \vec{OA'} \\ &= -\sin x \vec{OA} + \cos x \vec{OB} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \text{ et } \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

. on déduit enfin des relations précédentes :

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \text{ et } \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

Ces relations sont habituellement mises en évidence sur le cercle trigonométrique ; il semble aussi intéressant de les illustrer sur les représentations graphiques des fonctions (voir page ci-contre).

Remarques :

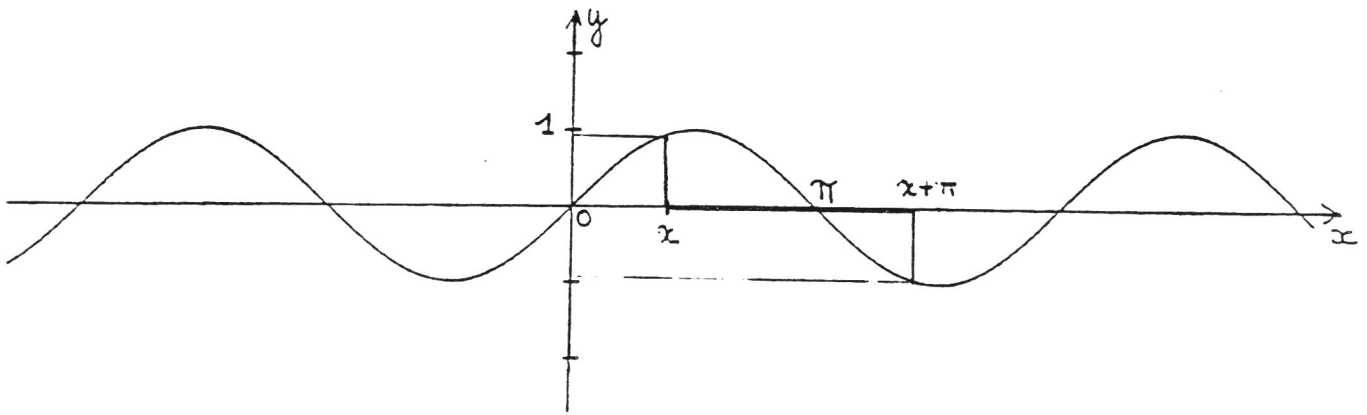
* Etant donné deux demi-droites Δ et Δ' , on appelle cosinus et sinus de l'angle (Δ, Δ') , le cosinus et le sinus de toute mesure en radians de (Δ, Δ') .

* Si α est une mesure en degrés de (Δ, Δ') , $\frac{\pi\alpha}{180}$ est une mesure en radians du même angle; on écrit :

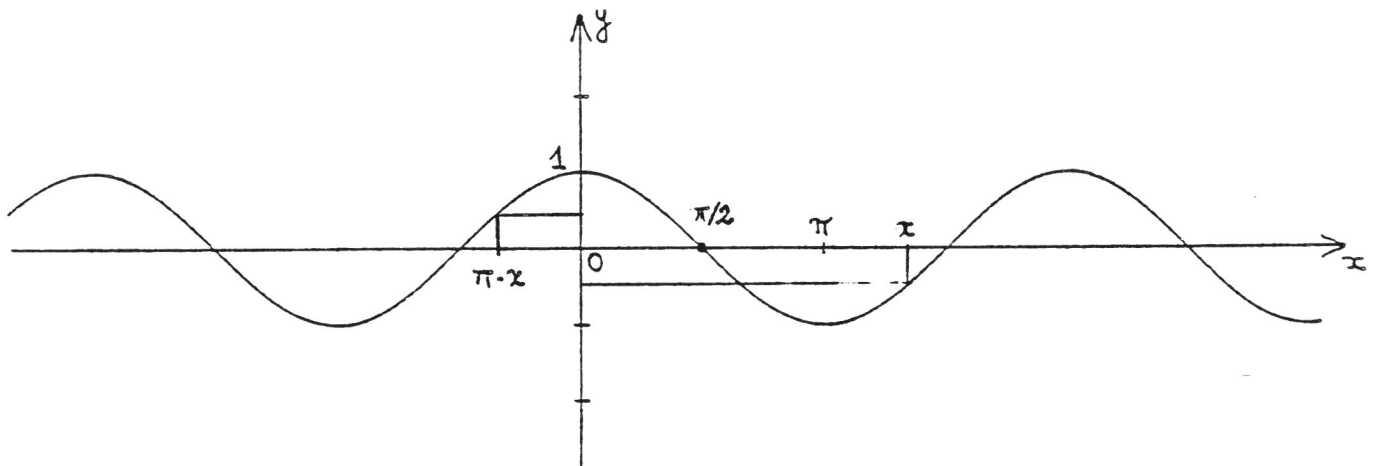
$$\cos \alpha^\circ = \cos \frac{\pi\alpha}{180} \text{ et } \sin \alpha^\circ = \sin \frac{\pi\alpha}{180}$$

On a donc, pour tout x réel :

$$\cos x = \cos(\frac{180x}{\pi})^\circ \text{ et } \sin x = \sin(\frac{180x}{\pi})^\circ$$

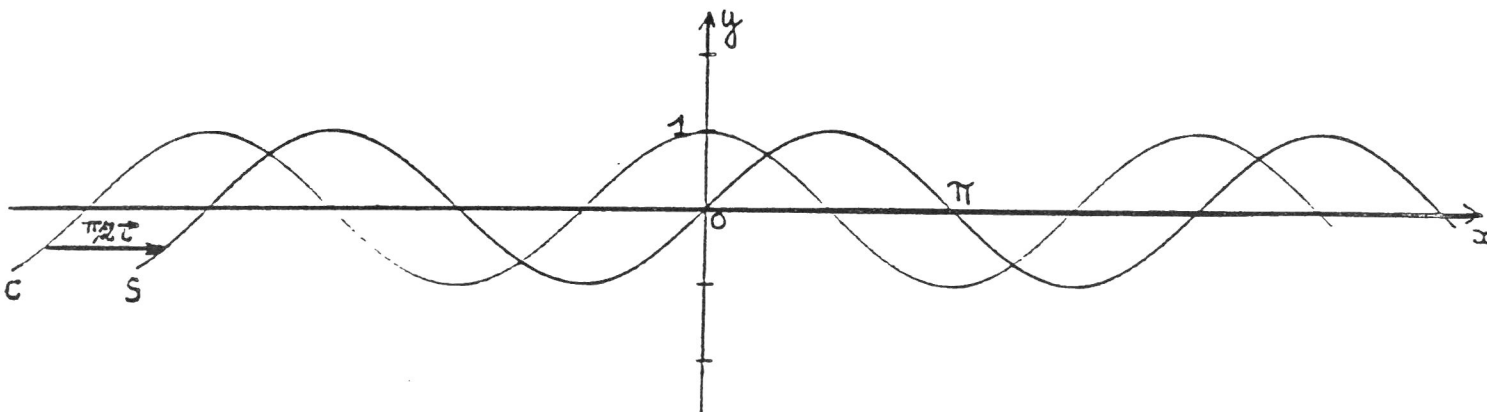


$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$



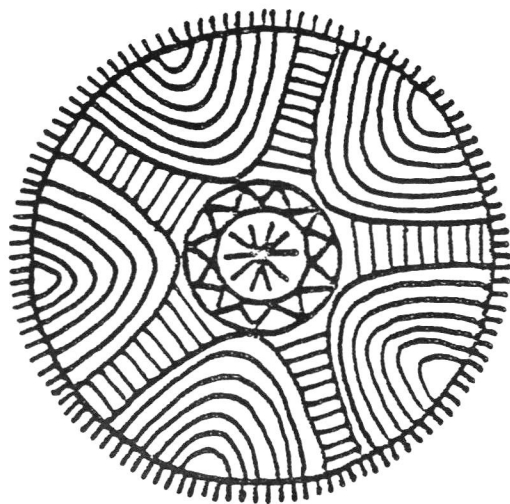
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

(x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$)



S est la translation de S par $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



Ch. 4 - A D D I T I O N D E S A N G L E S O R I E N T E S

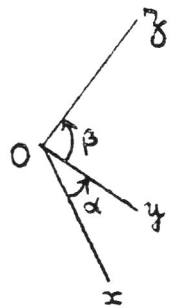
(hors programme)

- I Définition d'une addition entre angles de couples de demi-droites
- II Angle d'un couple de demi-droites d'origines différentes
- III Relation de Chasles pour l'addition des angles

N.B. : Dans chapitre on suppose choisie une unité de mesure d'angle une fois pour toutes.

L'addition des angles n'est pas une notion inscrite au programme. Pourtant, le véritable intérêt de la notion d'angle orienté par rapport à la notion d'angle non orienté est justement qu'on peut additionner de tels angles. D'ailleurs en rédigeant les thèmes nous nous sommes aperçus que beaucoup de démonstrations se trouvaient alourdis parce que l'on s'interdisait d'additionner les angles. Les enseignants qui feraient le choix d'approfondir cette partie pourraient trouver avantage à introduire l'addition des angles avant de traiter certains thèmes. C'est pourquoi nous en parlons dans ce chapitre. Néanmoins tous les thèmes ont été rédigés sans utiliser cette addition pour respecter le programme.

I - DEFINITION D'UNE ADDITION ENTRE ANGLES DE COUPLE DE DEMI-DROITES



Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux tels angles admettant respectivement α et β comme mesure.

Soit O un point, Ox une demi-droite et Oy l'image de Ox dans la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$. Soit ensuite Oz l'image de Oy dans la rotation de centre O et d'angle $\hat{\beta}$.

Alors Oz est l'image de Ox dans la rotation de centre O et d'angle $\hat{\gamma}$ admettant $\alpha + \beta$ pour mesure.

Remarquons que (Ox, Oz) est indépendant du choix de O et de Ox , puisqu'il admet de toute façon $\alpha + \beta$ comme mesure.

Définition : Si $\hat{\alpha}$ est un angle de mesure α et si $\hat{\beta}$ est un angle de mesure β , on appelle $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle dont une mesure est $\alpha + \beta$.

Remarque : Avec les notations utilisées pour préparer la définition, on obtient

$$(Ox, Oy) + (Oy, Oz) = (Ox, Oz)$$

ce qui est une première forme de la relation de Chasles (pour des demi-droites de même origine).

Propriétés :

. l'angle nul est neutre $\hat{\alpha} + \hat{0} = \hat{\alpha}$

. L'addition sur les angles orientés est associative

$$\begin{aligned} \text{En effet } (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\gamma} &= \widehat{\alpha + \beta} + \hat{\gamma} = \widehat{(\alpha + \beta) + \gamma} \\ &= \widehat{\alpha + (\beta + \gamma)} = \hat{\alpha} + \widehat{\beta + \gamma} \\ &= \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}) \end{aligned}$$

en notant $\hat{\alpha}$ (resp. $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$) l'angle dont une mesure est α (resp. β et γ) et en utilisant à plusieurs reprises, la définition.

. Tout angle a un opposé

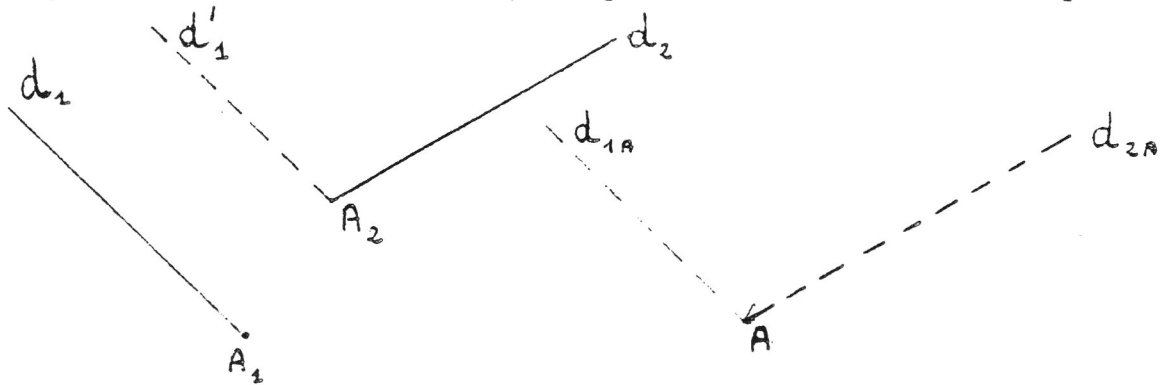
$$\begin{aligned} \text{En effet } (-\hat{\alpha}) + \hat{\alpha} &= \widehat{-\alpha + \alpha} = \hat{0} \\ \hat{\alpha} + (-\hat{\alpha}) &= \widehat{\alpha + (-\alpha)} = \hat{0} \end{aligned}$$

. L'addition est commutative

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} &= \widehat{(\alpha + \beta)} \\ \text{et} \quad \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} &= \widehat{(\beta + \alpha)} = \widehat{(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

II - ANGLE D'UN COUPLE DE DEMI-DROITES D'ORIGINES DIFFÉRENTES

Soit d_1 une demi-droite d'origine A_1 et d_2 une demi-droite d'origine A_2 .



Définition : Soit d'_1 l'image de d_1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$.
On dira que l'angle de (d_1, d_2) est l'angle de (d'_1, d_2) et on notera

$$\widehat{(d_1, d_2)} = \widehat{(d'_1, d_2)}$$

Soit alors A un point quelconque du plan.

Soit d_{1A} l'image de d_1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A}$ et d_{2A} l'image de d_2 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{A_2A}$. Montrons que $\widehat{(d_{1A}, d_{2A})} = \widehat{(d'_1, d_2)}$.

$$\begin{aligned} \text{En effet :} \quad d_{1A} &= t_{\overrightarrow{A_1A}}(d_1) = t_{\overrightarrow{A_1A}}[t_{\overrightarrow{A_2A_1}}(d'_1)] \\ &= (t_{\overrightarrow{A_1A}} \circ t_{\overrightarrow{A_2A_1}})(d'_1) \\ &= t_{\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1A}}(d'_1) \\ &= t_{\overrightarrow{A_2A}}(d'_1) \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part} \quad d_{2A} = t_{\overrightarrow{A_2A}}(d_2)$$

Comme une translation est un déplacement, donc conserve les angles,
 $\widehat{(d_{1A}, d_{2A})} = \widehat{(d'_1, d_2)}$

Propriété : Pour tout point A du plan, si $d_{1A} = t_{\overrightarrow{A_1A}}(d_1)$ et $d_{2A} = t_{\overrightarrow{A_2A}}(d_2)$

$$\widehat{(d_1, d_2)} = \widehat{(d_{1A}, d_{2A})}$$

Commentaires : Le programme n'étant pas très clair, nous n'avons pas compris si cette notion était, ou non, au programme. De toute façon nous pensons que cette notion est inutilisable si l'on n'a pas l'addition des angles, donc nous suggérons de ne pas en parler si on fait le minimum sur les angles. Elle prend par contre tout son intérêt avec la relation de Chasles.

III - RELATION DE CHASLES POUR L'ADDITION DES ANGLES

Pour trois demi-droites quelconques d_1, d_2, d_3

$$(\widehat{d_1, d_3}) = (\widehat{d_1, d_2}) + (\widehat{d_2, d_3})$$

Démonstration

Soit A_1 (resp. A_2, A_3) l'origine de d_1 (resp. d_2, d_3). Soit A un point du plan.

Soit $d_{1A} = t_{\overrightarrow{A_1A}}(d_1)$, $d_{2A} = t_{\overrightarrow{A_2A}}(d_2)$, $d_{3A} = t_{\overrightarrow{A_3A}}(d_3)$.

On sait que $(\widehat{d_{1A}, d_{3A}}) = (\widehat{d_{1A}, d_{2A}}) + (\widehat{d_{2A}, d_{3A}})$ d'après la définition 1.

Donc $(\widehat{d_1, d_3}) = (\widehat{d_1, d_2}) + (\widehat{d_2, d_3})$ puisque

$$(\widehat{d_1, d_3}) = (\widehat{d_{1A}, d_{3A}}) \quad \text{et} \quad (\widehat{d_1, d_2}) = (\widehat{d_{1A}, d_{2A}}) \quad \text{et} \quad (\widehat{d_2, d_3}) = (\widehat{d_{2A}, d_{3A}})$$

Ch. 5 - T H E M E S

Lignes de niveau de $M \mapsto \widehat{(MA, MB)}$

Isométries laissant invariant un polygone régulier à n côtés

Quarts de tour

Quadrilatère inscriptible

Relations métriques dans un triangle

Bissectrice

LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION : $M \mapsto (\widehat{MA, MB})$

On peut introduire ce thème par les quelques problèmes suivants :

- dans une salle de cinéma, où doit-on se placer pour voir l'écran ?
- on veut photographier la façade d'une maison ; où faut-il se placer pour avoir toute cette façade sur la photo ?
- un joueur de football se dirige avec le ballon vers les buts adverses parallèlement au grand côté du terrain ; quel est le moment le plus judicieux pour tirer ?

On voit que dans chaque cas on est ramené à l'étude du problème suivant : étant donné deux points distincts A et B d'un plan P, quel est la valeur de l'angle $(\widehat{MA, MB})$ en fonction de la position du point M dans ce plan.

De façon plus précise, on étudie l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M de $P - \{A, B\}$ associe la mesure en radians appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ de l'angle $(\widehat{MA, MB})$.

Voici quelques questions que l'on peut se poser sur cette fonction :

- 1 - Quelles sont les symétries laissant invariant l'ensemble $\{A, B\}$? Quelles propriétés en résulte-t-il pour f ?
- 2 - Connaissant les coordonnées de M dans un repère orthonormé bien choisi, peut-on calculer $f(M)$?
- 3 - Comment varie f lorsque M décrit certains sous-ensembles de P, notamment des droites ?
- 4 - Comment "visualiser" la fonction f ?

Quelques remarques sur ces questions :

Question 2 : Il y a deux options pour répondre :

1ère option : détermination graphique de $f(M)$ à l'aide d'un rapporteur

2ème option : détermination d'un algorithme de calcul et calcul effectif d'un nombre aussi grand que possible de valeurs de $f(M)$ (il est évidemment indispensable d'avoir un peu de trigo et de disposer de calculatrices). Les élèves pourront alors remarquer à l'issue du calcul, s'ils ne l'ont pas fait

auparavant, comment interviennent les propriétés vues à la question 1, qui permettent de limiter le nombre des calculs à effectuer si l'on a choisi un bon repère.

Question 3 : Si l'on fait varier M sur une droite D , on peut définir l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout x réel associe $f(M)$ où M est le point d'abscisse x dans un repère de D .

On pourra faire des représentations graphiques de ces fonctions. Pour cela, on pourra utiliser les résultats de la question 2. On pourra aussi se limiter à une étude qualitative permettant une première approche des notions suivantes :

- . limites à l'infini
- . discontinuité en un point (droites coupant $]A, B[$).
- . maximum et minimum (droites ne coupant pas $]A, B[$).
- . limite en un point (droites contenant A ou B).

Question 4 : Si l'on veut généraliser la représentation graphique des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions de $\mathbb{P}$ (ou $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$, on est amené à remplacer la courbe représentative par une surface S ; pour représenter cette surface dans un plan, on est amené à recourir aux techniques utilisées en géographie pour représenter le relief ; une de ces techniques est la représentation de lignes de niveau (Le problème est toutefois un peu plus simple qu'en géographie, puisqu'ici la fonction f est définie sur un plan et non sur une sphère.).

On cherchera donc d'abord expérimentalement les lignes de niveau, deux méthodes étant possibles :

- . utilisation des calculs vus à la question 3
- . utilisation d' "angles" en carton de mesures diverses

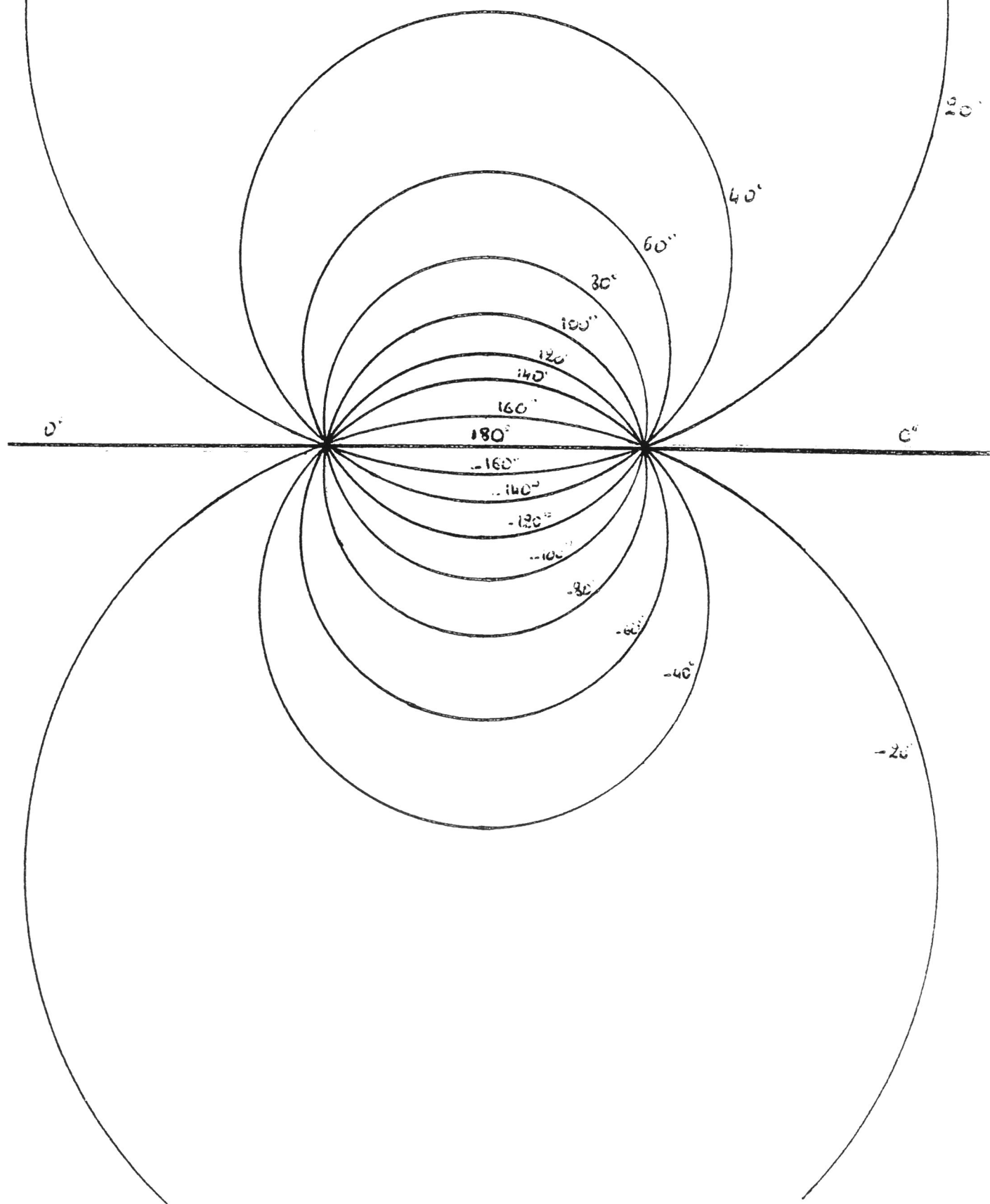
Remarque : Les courbes vues à la question 4 sont des sections de la surface S par des plans perpendiculaires à P .

En conclusion à cette étude essentiellement expérimentale, on pourra donner la démonstration suivante :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle contenant A et B ; soit α une mesure de $(\widehat{OA, OB})$, O étant le centre de $\mathcal{C}$. Il résulte du théorème sur l'angle au centre et l'angle inscrit que, pour tout M de $\mathcal{C}$:

$$2f(M) = \alpha + 2k\pi \quad , \text{ d'où } f(M) = \frac{\alpha}{2} + k\pi$$

Or on sait que $-\pi < f(M) < \pi$; il existe donc exactement deux valeurs k_1 et k_2 de k pour lesquelles $(\frac{\alpha}{2} + k\pi) \in]-\pi, \pi]$. Posons $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} + k_1\pi$ et $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2} + k_2\pi$; l'un de ces deux nombres est négatif ou nul, et l'autre est positif.



Pour tout M de $\mathcal{C}$, on a donc $f(M) = \alpha_1$ ou $f(M) = \alpha_2$.

Or, on remarque que f prend des valeurs positives dans l'un des deux demi-plans limités par (AB) et des valeurs négatives dans l'autre. (Cela se voit sur le dessin, mais on peut aussi le vérifier en calculant $\sin(\widehat{MA, MB})$). Donc f prend la valeur α_1 sur l'un des arcs de $\mathcal{C}$ limité par A et B et la valeur α_2 sur l'autre arc.

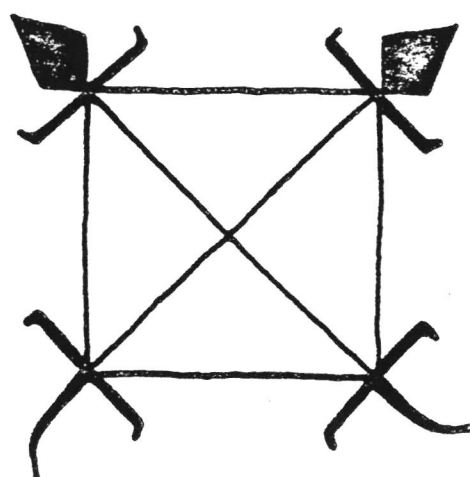
Pour terminer, on étudiera les lignes de niveau de f . On remarque tout d'abord que sur deux arcs de cercle distincts, d'extrémités A et B , f prend des valeurs distinctes (cela se voit par exemple en étudiant les valeurs prises par f sur la médiatrice de (A, B)).

Etant donné un point M de P :

. si $M \notin (AB)$, il existe un unique arc de cercle d'extrémités A et B passant par M ; il résulte de ce qui précède que cet arc est une ligne de niveau de f .

. si $M \in [A, B]$, $f(M) = \pi$ et la ligne de niveau correspondante est le segment $[A, B]$.

. si $M \in (AB) - [A, B]$ $f(M) = 0$, et la ligne de niveau correspondante est $(AB) - [A, B]$.



ISOMETRIES LAISSANT INVARIANT UN POLYGONE REGULIER A n COTES

On peut commencer par poser aux élèves le problème sous la forme :

"Trouver DES isométries laissant invariant un triangle équilatéral (resp. carré, pentagone régulier, etc...) donné."

Sous cette forme, la recherche démarrera sans difficulté. Un problème subsistera cependant :

Comment être sûr d'avoir obtenu TOUTES les isométries répondant à la question ? La réflexion pourra alors s'organiser, et on pourra s'inspirer des quelques propriétés qui suivent :

1) Nous avons vu (ou admis) que, étant donné deux points A et B, et deux points A' et B' tels que $A'B' = AB$, il existe un déplacement unique, et un antidéplacement unique, qui transforment A en A' et B en B'.

2) Nous avons défini les rotations comme "déplacement ayant un point invariant".

3) Nous allons maintenant démontrer que : un antidéplacement qui a un point invariant est une symétrie axiale.

Soit a un antidéplacement, et O un point invariant par a ; a étant différent de l'identité du plan (qui est un déplacement), il existe un point A qui n'est pas invariant par a . Posons $A' = a(A)$;

puisque $OA' = OA$ (a étant une isométrie), le point O appartient à la médiatrice (Δ) de (A, A') .

La symétrie par rapport à (Δ) transforme donc A en A' et O en O, comme le fait a . En vertu de l'unicité (voir 1°), on en conclut que a est la symétrie par rapport à (Δ) .

4) Soit un polygone régulier $\mathcal{P}$, inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$, et f une isométrie qui laisse $\mathcal{P}$ invariant.

a) f transformera nécessairement un sommet de $\mathcal{P}$ en un sommet de $\mathcal{P}$.

b) f transformera $(\mathcal{C})$ en un cercle de même rayon (c'est une isométrie), et qui sera circonscrit au transformé de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire à $\mathcal{P}$ lui-même.

Puisqu'il n'existe qu'un seul cercle circonscrit à un polygone régulier donné, $\mathcal{C}$ est invariant (globalement) par f . Son centre sera par conséquent un point invariant par f .

- 60 -

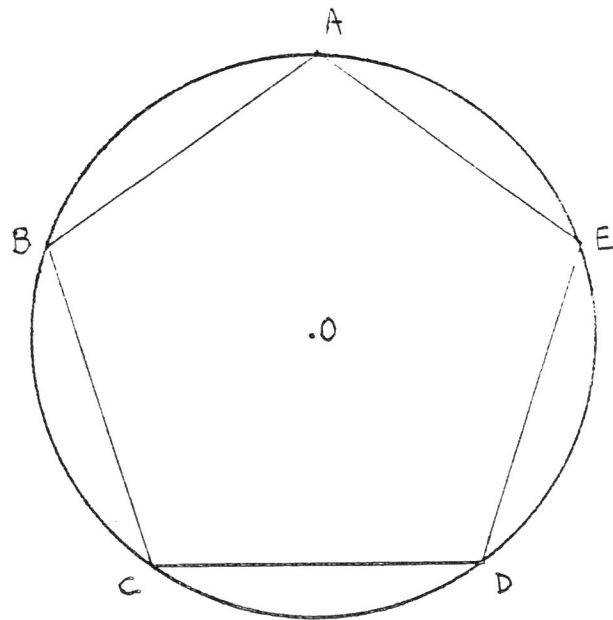


Figure 1

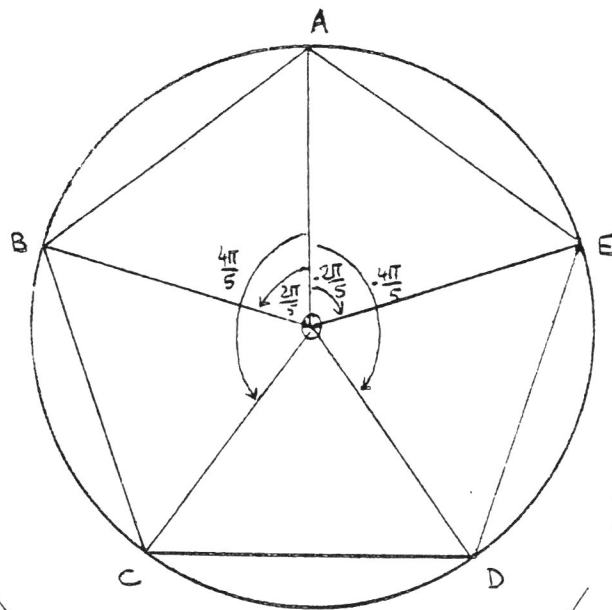


Figure 2

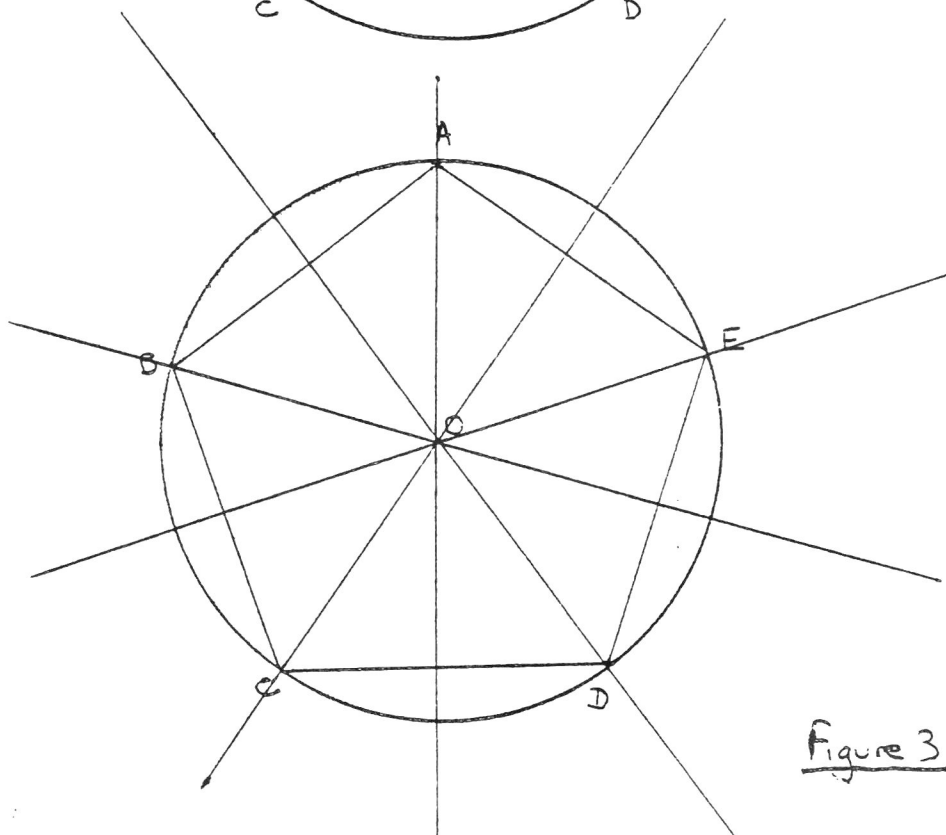


Figure 3

Conséquences : Les isométries laissant $\mathcal{S}$ invariant laisseront toutes le point O invariant. Il s'agira donc nécessairement (voir 2° et 3°) :

- . de rotations de centre O (si ce sont des déplacements)
- . de symétries axiales dont l'axe contient O (si ce sont des anti-déplacements).

Exemple : Cas du pentagone régulier convexe (figure 1)

a) Les rotations de centre O transformeront le sommet A en un sommet du pentagone (voir 4°a) ; ce sommet pourra être A, B, C, D ou E . Nous aurons alors, outre l'identité (rotation d'angle nul), les rotations de centre O et dont les angles ont pour mesures principales (en radians) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$ (figure 2).

b) Les symétries axiales échangeront (au moins) deux sommets du pentagone. Si ce sont A et B qui sont échangés, par exemple, la symétrie correspondante aura pour axe la médiatrice de (A, B) (Remarque : cette symétrie échange également C et E , et laisse D invariant). En **considérant** toutes les paires de sommets, on obtiendra ainsi 5 symétries, qui auront pour axes les médiatrices des bipoints constitués de deux sommets consécutifs du pentagone (figure 3).

Après l'étude des cas de différents polygones réguliers, on pourra faire remarquer (si cela n'est pas apparu en cours de recherche) que :

- si deux isométries laissent un polygone invariant, il en est de même de leurs composées ;
- si une isométrie laisse un polygone invariant, il en est de même de l'isométrie réciproque.

D'où une première approche de la notion de "groupe de transformations".

QUARTS DE TOUR

L'expression quart de tour est le titre d'un thème. Cette expression signifie rotation d'angle droit. Nous allons étudier successivement

- Les deux angles droits
- Rotations laissant invariante la figure formée de deux droites orthogonales
- Les "angles à côtés perpendiculaires"

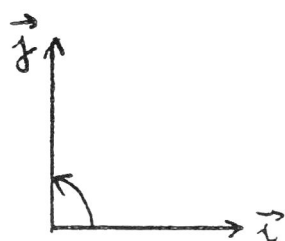
I - Les deux angles droits - Repères orthonormés directs et indirects

Définition 1 : Une orientation du plan étant choisie, l'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$ est dit angle droit direct. Nous le noterons $\hat{d}$. L'angle dont une mesure est $(-\frac{\pi}{2})$ est dit angle droit indirect. Nous le noterons $\hat{d}'$.
Remarquons que $\hat{d}$ et $\hat{d}'$ sont opposés.

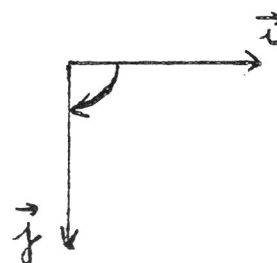
Définition 2 : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan. Soit Ox une demi-droite de vecteur directeur $\vec{i}$ et Oy une demi-droite de vecteur directeur $\vec{j}$. Si $(\widehat{Ox, Oy}) = \hat{d}$ on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe ou que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct.
Si $(\widehat{Ox, Oy}) = \hat{d}'$ on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est indirecte ou que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est indirect.

Illustration

Par exemple



repère orthonormé
direct



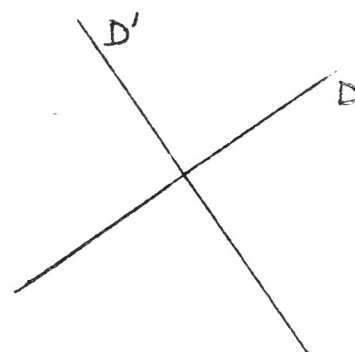
repère orthonormé indirect

II - Déplacements laissant invariante une figure formée de deux droites perpendiculaires (dans un plan orienté).

Problème : Soit D et D' deux droites perpendiculaires sécantes en O . Chercher les déplacements f tels que $D \cup D'$ soit invariante par f .

Soit f un déplacement laissant invariant $D \cup D'$.

Cela signifie que l'ensemble des images des points



de $D \cup D'$ par f est exactement $D \cup D'$.

Notons Δ l'ensemble des images des points de D par f et Δ' l'ensemble des images des points de D' par f .

L'image d'une droite par un déplacement étant une droite, Δ est une droite. L'image de $D \cup D'$ étant $D \cup D'$, l'image Δ de D par f est une droite incluse dans $D \cup D'$.

Donc $\Delta = D$ ou $\Delta = D'$

De même $\Delta' = D$ ou $\Delta' = D'$.

Remarquons que Δ' est différente de Δ , sinon l'image de $D \cup D'$ serait une droite.

On a donc $\Delta = D$ et $\Delta' = D'$ ou bien $\Delta = D'$ et $\Delta' = D$.

Nous pouvons maintenant montrer que $f(O) = O$

En effet $O \in D$, donc $f(O) \in \Delta$ et $O \in D'$ donc $f(O) \in \Delta'$

Donc $f(O) \in \Delta \cap \Delta'$, c'est-à-dire $f(O) \in (D \cap D')$, donc $f(O) = O$.

Soit A un point de D et $f(A)$ son image

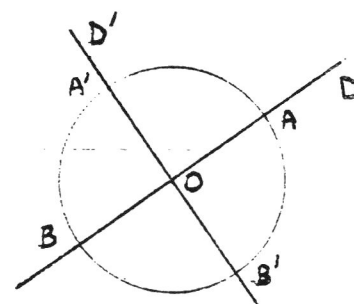
$d(O, f(A)) = d(O, A)$.

$D \cup D'$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon OA .

Notons B l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}$ et

D , notons A' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec

D' tel que $(\widehat{OA, OA'}) = \widehat{d}$ et notons B' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D' tel que $(\widehat{OA, OB'}) = \widehat{d}'$.



Sachant qu'un déplacement est complètement déterminé par la donnée de 2 points et leurs images, il existe 4 déplacements répondant à la question

$$\text{Id} : \begin{cases} O \rightarrow O \\ A \rightarrow A \end{cases} \quad \mathcal{R}(O, \widehat{p}) \begin{cases} O \rightarrow O \\ A \rightarrow B \end{cases} \quad \mathcal{R}(O, \widehat{d}) \begin{cases} O \rightarrow O \\ A \rightarrow A' \end{cases} \quad \mathcal{R}(O, \widehat{d}') \begin{cases} O \rightarrow O \\ A \rightarrow B' \end{cases}$$

Avant de mettre en forme un raisonnement il est souhaitable de laisser les élèves chercher les déplacements répondant à la question. Ils vont sans doute deviner les résultats après observation d'une figure, il restera alors à mettre avec eux le raisonnement en forme. Une fois les 4 déplacements obtenus, il peut être intéressant de leur faire composer ces déplacements entre eux et ainsi faire une approche de la notion de groupe de transformations.

III - Les "angles à côtés perpendiculaires"

Traditionnellement on parlait d'angles à côtés perpendiculaires pour parler d'une figure formée de 2 couples de demi-droites (d_1, d_2) et (d'_1, d'_2) tels que

d_1 et d_2 ont même origine O

d'_1 et d'_2 ont même origine O'

d_1 et d'_1 sont orthogonales

d_2 et d'_2 sont orthogonales

On veut comparer les angles $(\widehat{d'_1, d'_2})$ et $(\widehat{d_1, d_2})$.

Soit d''_1 l'image de d_1 dans la translation de vecteur $\vec{OO'}$

Soit d''_2 l'image de d_2 dans la translation de vecteur $\vec{OO'}$.

d''_1 et d''_2 sont des demi-droites d'origine O' .

Comme une translation est un déplacement, elle "conserve les angles". On a donc l'égalité :

$$(\widehat{d''_1, d''_2}) = (\widehat{d_1, d_2})$$

Comparons alors $(\widehat{d'_1, d'_2})$ à $(\widehat{d''_1, d''_2})$.

Nous noterons, pour alléger l'écriture r pour $\mathcal{R}(O', \hat{d})$ et r' pour $\mathcal{R}(O', \hat{d}')$

d''_1 et d'_1 sont orthogonales, donc $d'_1 = r(d''_1)$ ou $d'_1 = r'(d''_1)$

d''_2 et d'_2 sont orthogonales, donc $d'_2 = r(d''_2)$ ou $d'_2 = r'(d''_2)$.

1er cas : $d'_1 = r(d''_1)$ et $d'_2 = r(d''_2)$

Comme une rotation "conserve les angles"

$$(\widehat{d'_1, d'_2}) = (\widehat{d''_1, d''_2})$$

2ème cas : $d'_1 = r'(d''_1)$ et $d'_2 = r'(d''_2)$

De même $(\widehat{d'_1, d'_2}) = (\widehat{d''_1, d''_2})$

3ème cas : $d'_1 = r(d''_1)$ et $d'_2 = r'(d''_2)$

On sait que $r' = \mathcal{S}_O \circ r$ (ou $r' = r \circ \mathcal{S}_O$)

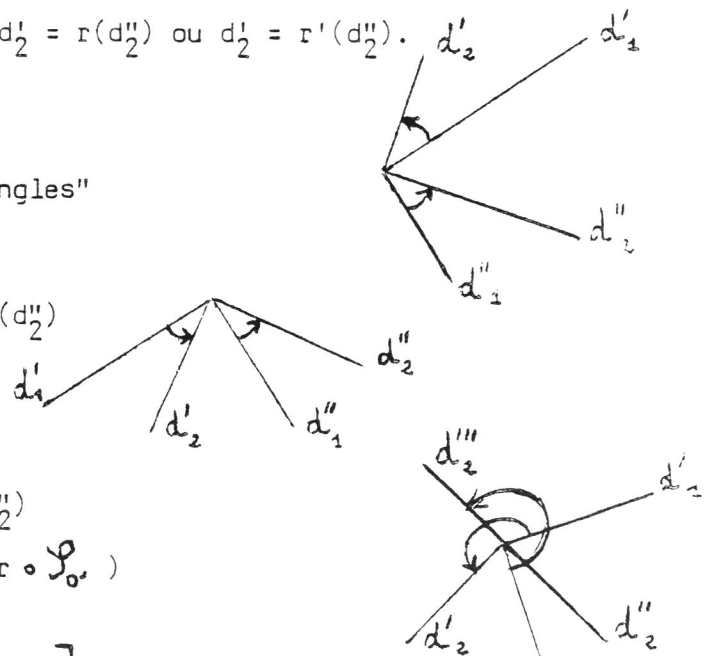
car $\mathcal{S}_O = \mathcal{R}(O, \hat{p})$

Donc $d'_2 = (r \circ \mathcal{S}_O)(d''_2) = r[\mathcal{S}_O(d''_2)] = r(d'''_2)$, si on note d'''_2 la demi droite opposée à d''_2 .

Comme $d'_1 = r(d''_1)$ et $d'_2 = r(d'''_2)$ on a $(\widehat{d'_1, d'_2}) = (\widehat{d''_1, d'''_2})$.

Donc $(\widehat{d'_1, d'_2})$ admet comme mesure une mesure de $(\widehat{d''_1, d'''_2})$ augmentée de π .

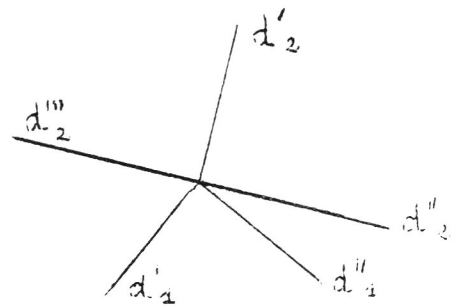
Comme $(\widehat{d''_1, d'''_2}) = (\widehat{d_1, d_2})$, on a obtenu :



Si α est une mesure de $\widehat{(d_1, d_2)}$, alors $(\alpha + \pi)$ est une mesure de $\widehat{(d'_1, d'_2)}$.

4ème cas : $d'_1 = r'(d''_1)$ et $d'_2 = r(d''_2)$

De même $r' = \mathcal{S}_O \circ r = r \circ \mathcal{S}_O$,
donc on obtient le même résultat.

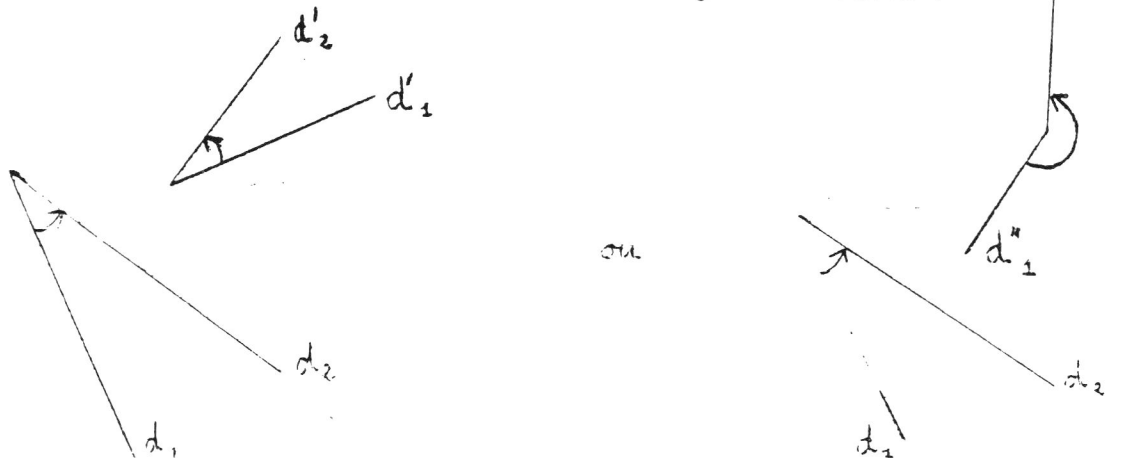


Conclusion : Soit d_1, d_2, d'_1, d'_2 , quatre demi-droites telles que

- $\left\{ \begin{array}{l} d_1 \text{ et } d_2 \text{ ont même origine} \\ d'_1 \text{ et } d'_2 \text{ ont même origine} \\ d_1 \text{ et } d'_1 \text{ sont orthogonales} \\ d_2 \text{ et } d'_2 \text{ sont orthogonales.} \end{array} \right.$

Alors si α est une mesure de $\widehat{(d_1, d_2)}$; α ou $\alpha + \pi$ est une mesure de $\widehat{(d'_1, d'_2)}$

Ces résultats correspondent aux deux cas de figures suivants :



N.B. On trouvera une application de ce résultat dans le thème "quadrilatère inscriptible".

Commentaires

1) Si nous avons à notre disposition l'addition des angles, la conclusion de cette étude s'énoncerait tout simplement :

$$\widehat{(d'_1, d'_2)} = \widehat{(d_1, d_2)} \text{ ou } \widehat{(d'_1, d'_2)} = \widehat{(d_1, d_2)} + \pi$$

2) Si l'on parlait en angles de paires de demi-droites (angles de 3ème) on aboutirait à : "les angles $\widehat{(d'_1, d'_2)}$ et $\widehat{(d_1, d_2)}$ sont égaux ou supplémentaires. Les enseignants de physique utilisent sans doute souvent cette forme.

QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

Définition : Un quadrilatère ABCD est dit inscriptible lorsqu'il existe un cercle contenant les points A,B,C,D.

Remarque : Etant donné un quadrilatère ABCD, il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ contenant A,B et C (cercle circonscrit au triangle ABC) ; ce cercle ne contient pas nécessairement D ; il existe donc des quadrilatères non inscriptibles et si ABCD est inscriptible, il existe un seul cercle contenant A,B,C,D ; on l'appelle cercle circonscrit au quadrilatère.

Théorème : Un quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si, α étant une mesure de $(\widehat{AC,AD}), (\widehat{BC,BD})$ a pour mesure α ou $\alpha + \pi$.

Démonstration :

. Si le quadrilatère est inscriptible : appelons β une mesure de $(\widehat{BC,BD})$ et O le centre du cercle circonscrit. On sait que 2α est une mesure de $(\widehat{OC,OD})$ ("angle au centre"), de même que 2β . Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2\alpha = 2\beta + 2k\pi$$

donc
$$\alpha = \beta + k\pi$$

D'où le résultat.

. Si $(\widehat{BC,BD})$ a pour mesure α ou $\alpha + \pi$: soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ACD et O' le centre du cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit au triangle BCD ; on sait que :

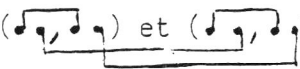
$$(\widehat{OC,OD}) \text{ a pour mesure } 2\alpha$$

$$(\widehat{O'C,O'D}) \text{ a pour mesure } 2\alpha \text{ ou } 2\alpha + 2\pi$$

Donc
$$(\widehat{OC,OD}) = (\widehat{O'C,O'D})$$

D'autre part, O et O' appartiennent à la médiatrice de (C,D). Il en résulte que $O = O'$; en effet, les angles $(\widehat{OC,OD})$ et $(\widehat{O'C,O'D})$ ayant mêmes mesures, les points O et O' appartiennent à une même ligne de niveau de l'application $M \mapsto (\widehat{MC,MD})$; cette ligne de niveau coupe la médiatrice de (C,D) en un unique point (car $2\alpha \neq 2k\pi$). (Si on n'a pas étudié les lignes de niveau utilisées, on se contentera de constater le résultat sur un dessin).

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ayant même centre et un point commun, ils sont égaux.

Remarque : La condition trouvée porte sur les mesures des angles $(\widehat{AC,AD})$ et $(\widehat{BC,BD})$; or, le fait que les quatre points A,B,C et D soient sur un même cercle est évidemment indépendant de l'ordre dans lequel on considère ces points ; on peut donc remplacer la condition énoncée par une condition analogue portant sur d'autres angles, pourvu que les angles considérés soient formés de la manière suivante : . (On répartit les quatre lettres A,B,C,D de manière qu'à deux places reliées par un trait figure la même lettre). Exemple $(\widehat{BC,BA})$ et $(\widehat{DC,DA})$.

Une application : (Cette application utilise un résultat étudié dans le thème "quart de tour" au § III).

Soit ABC un triangle et H son orthocentre ; on appelle A',B',C' les symétriques respectifs de H par rapport à (BC),(CA) et (AB). Les points A',B',C' appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration : Il suffit évidemment de démontrer le résultat pour un des points (A' par exemple).

Si le triangle est rectangle en B, on a $H = B = A'$; le résultat est alors immédiat ; de même si le triangle est rectangle en C. On suppose dans la suite que le triangle ABC n'est rectangle ni en B, ni en C. Les points H,A',B et C sont alors distincts deux à deux.

Par symétrie, on a :

$$(\widehat{A'B,A'C}) = (\widehat{HC,HB})$$

Or $(HC) \perp (AB)$ et $(HB) \perp (AC)$; donc, d'après le résultat sur les "angles à côtés perpendiculaires" (voir "quart de tour"), si on appelle α une mesure de $(\widehat{AB,AC})$, $(\widehat{HC,HB})$ a pour mesure α ou $\alpha + \pi$. Il en résulte que $(\widehat{A'B,A'C})$ a pour mesure α ou $\alpha + \pi$, ce qui prouve que le quadrilatère A'ABC est inscriptible.

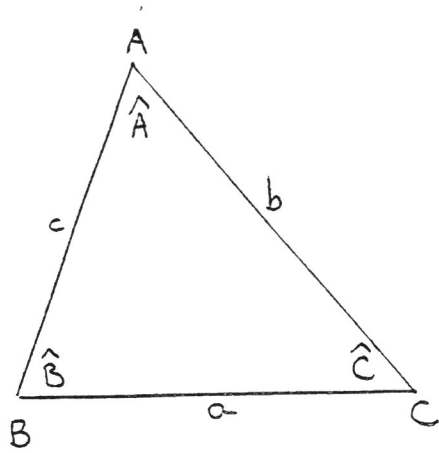


figure 1

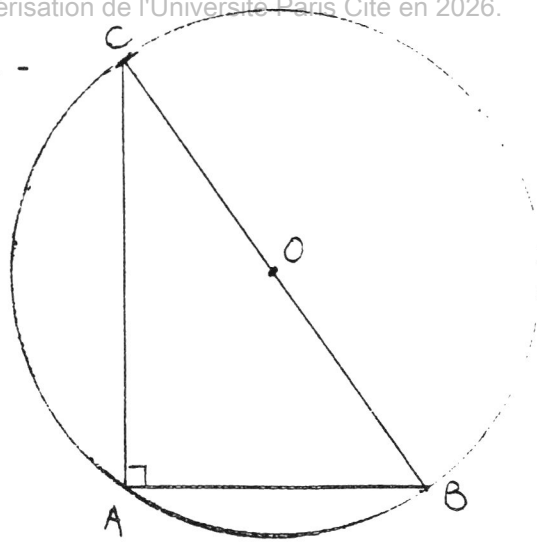


figure 2

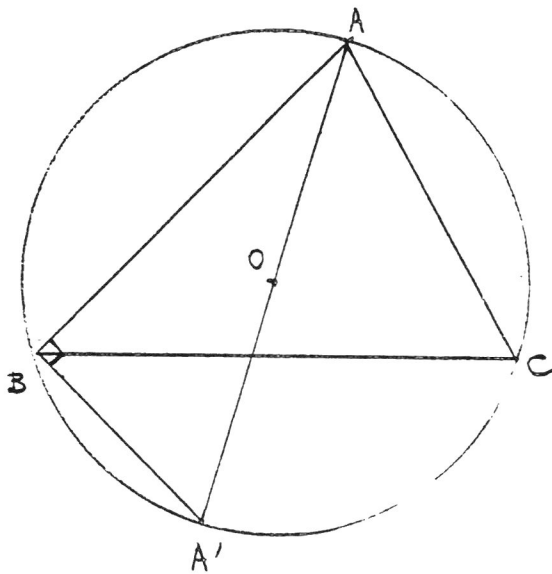


figure 3

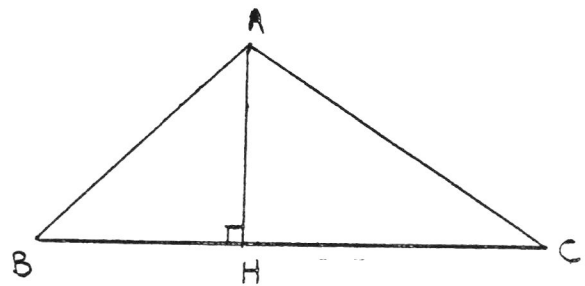


figure 4

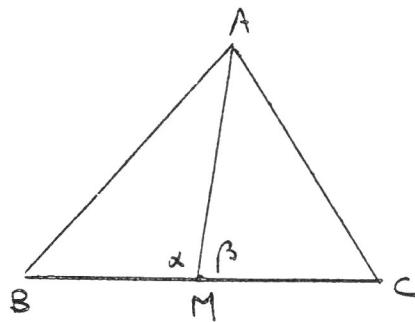


figure 5

RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

On peut introduire ce thème en évoquant les méthodes de la topographie, et en particulier la triangulation. (Exemple célèbre : Delambre et Méchain mesurant l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone, afin d'établir la longueur du mètre étalon) : le principe de base de ^{la} triangulation consiste en effet en la détermination complète d'un triangle (mesures des angles et des côtés) à partir d'un côté et des mesures des deux "angles adjacents".

. Du point de vue des angles, ce seront les angles géométriques qui interviendront dans le triangle, et non les angles orientés. Nous aurons alors (en notant, de la façon classique, $\widehat{A}$ la mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$) :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{A} &= \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ \sin \widehat{A} &= \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

. Nous utiliserons également les notations habituelles pour les longueurs des côtés :

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB \text{ (figure 1)}.$$

. Nous supposerons connue la relation "classique" sur les mesures des angles géométriques d'un triangle : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$

. Lorsque nous parlerons d'un "triangle", il s'agira d'un véritable triangle, non aplati.

1ère relation : Dans tout triangle ABC on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Ce résultat s'obtient à partir du produit scalaire, et de la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\text{En effet, on a } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ (Chasles) d'où} \\ \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = cb \cos \widehat{A}$. D'où, en reportant dans ce qui précède :

$$a^2 = b^2 - 2bc \cos \widehat{A} + c^2, \text{ qui est la relation annoncée.}$$

(On obtient les deux autres relations analogues par permutation des sommets du triangle).

Cas particulier : Théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \text{On a : } a^2 &= b^2 + c^2 && \iff \cos \widehat{A} = 0 \\ a^2 &= b^2 + c^2 && \iff (AB) \perp (AC) \end{aligned}$$

2ème relation : Dans tout triangle ABC on a : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$
(où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle)

a) Le résultat est immédiat si le triangle ABC est rectangle (en A, pour fixer les idées. Figure 2) :

$$\begin{aligned} \text{On a en effet : } \sin \widehat{B} &= \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \\ \sin \widehat{C} &= \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = a$$

Mais . $a = 2R$ ($[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit)
 . $\sin \widehat{A} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. D'où la relation annoncée.

b) Supposons maintenant que le triangle ABC n'est pas rectangle :

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. Alors A' est distinct de B et de C (sinon, le triangle ABC serait rectangle) : figure 3.

Dans le triangle rectangle ABA', on a

$$\sin(\widehat{A'A, A'B}) = \frac{AB}{AA'} = \frac{c}{2R}.$$

Si nous appelons α une mesure de l'angle $(\widehat{CA, CB})$, nous avons vu (voir Thème : quadrilatère inscriptible) ou nous admettons qu'alors une mesure de $(\widehat{A'A, A'B})$ est α ou $\alpha + \pi$. Dans tous les cas, on a alors

$$|\sin(\widehat{A'A, A'B})| = |\sin \alpha|$$

Mais, d'autre part, $\sin \widehat{C} = |\sin(\widehat{CA, CB})| = |\sin \alpha|$.

Donc : $\sin(\widehat{A'A, A'B}) = \sin \widehat{C}$, et finalement :

$$\sin \widehat{C} = \frac{c}{2R}, \text{ d'où } 2R = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

On obtiendra les deux autres égalités en permutant les sommets du triangle ABC.

3ème relation : Pour tout triangle ABC on a : $S = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ca \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}$
(où S est l'aire du triangle ABC)

Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC relative au côté $[BC]$ (figure 4)

On a $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH$

Or, on a $\sin \widehat{B} = \frac{AH}{AB}$, d'où $AH = AB \cdot \sin \widehat{B}$, et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AB \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \widehat{B}$

Les deux autres égalités s'obtiennent par permutation des sommets du triangle ABC.

Bien entendu, ces formules ne revêtiront d'intérêt que si on les fait intervenir dans de nombreux exercices (de triangulation, de construction, ou autres...). Nous nous contenterons ici d'en donner une application classique : le théorème de la médiane :

Problème : Déterminer(en fonction de a,b,c) la longueur de la médiane $[AM]$ du triangle ABC.

Appelons α la mesure (en radians) de l'angle géométrique $\widehat{AMB}$, et β la mesure de $\widehat{AMC}$ (figure 5). On a $\alpha + \beta = \pi$.

Dans le triangle AMB, la première relation permet d'écrire

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \alpha$$

Mais $BM = \frac{a}{2}$, d'où $c^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2AM \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha$,

$$\text{Soit } c^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - AM \cdot a \cos \alpha \quad (1)$$

De même dans le triangle AMC, nous obtiendrons :

$$b^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - AM \cdot a \cos \beta \quad (2)$$

Mais $\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, d'où

$$b^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} + AM \cdot a \cos \alpha \quad (3)$$

Additionnons (1) et (3) membre à membre ; il vient :

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

(qui n'est autre que le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$),

et finalement :

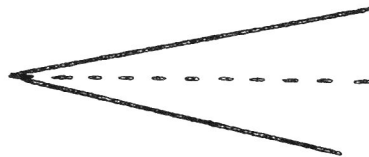
$$AM = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

B I S S E C T R I C E S

Si l'on dessine au tableau une figure telle que



et qu'on demande à un élève de tracer "la bissectrice", il y a fort à parier qu'il dessinera approximativement



c'est-à-dire une demi-droite, contenue dans le saillant défini par les deux demi-droites tracées. Pourtant, à aucun moment on n'a privilégié le saillant dans la question.

On peut ensuite demander aux élèves un -ou plusieurs - des "exercices" suivants :

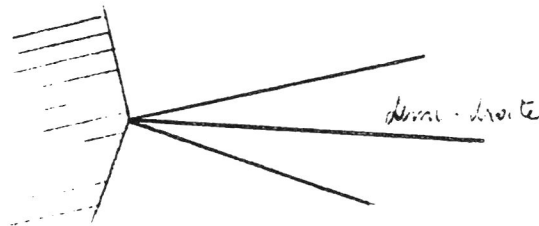
- tracer exactement cette demi-droite
- trouver cette demi-droite sur leur feuille de papier, sans aucun instrument
- comment est définie cette demi-droite ?

Les réponses peuvent être :

- 1) Liées à l'égalité des angles géométriques de chaque demi-droite avec la bissectrice
- 2) Liées à l'existence d'un axe de symétrie de la figure (en particulier s'ils font un pliage)
- 3) Liées à l'équidistance d'un point de la bissectrice aux deux demi-droites (en particulier s'ils font la construction au compas).

Les deux premières propriétés définissent en réalité non pas la demi-droite tracée, mais son support. Si l'élève n'a trouvé qu'une demi-droite, c'est qu'il pensait en fait à un secteur saillant, alors que la figure n'est formée que de deux demi-droites.

Si l'élève utilise la réponse 3, on peut lui demander ce qu'il entend au juste par "distance d'un point à une demi-droite". Si, par extraordinaire, il parle de "distance minimum d'un point du plan à la demi-droite", on peut lui montrer que cela définit, outre la demi-droite, toute une région R du plan :



S'il parle de projection orthogonale, il sous-entend en fait "sur la droite support", à moins qu'il ne considère que les points du saillant (voir plus haut). Cette demi-droite est donc en fait la bissectrice du secteur saillant, tandis que la droite obtenue avec l'une des deux premières propriétés est plutôt la bissectrice de la figure formée par les deux demi-droites.

*

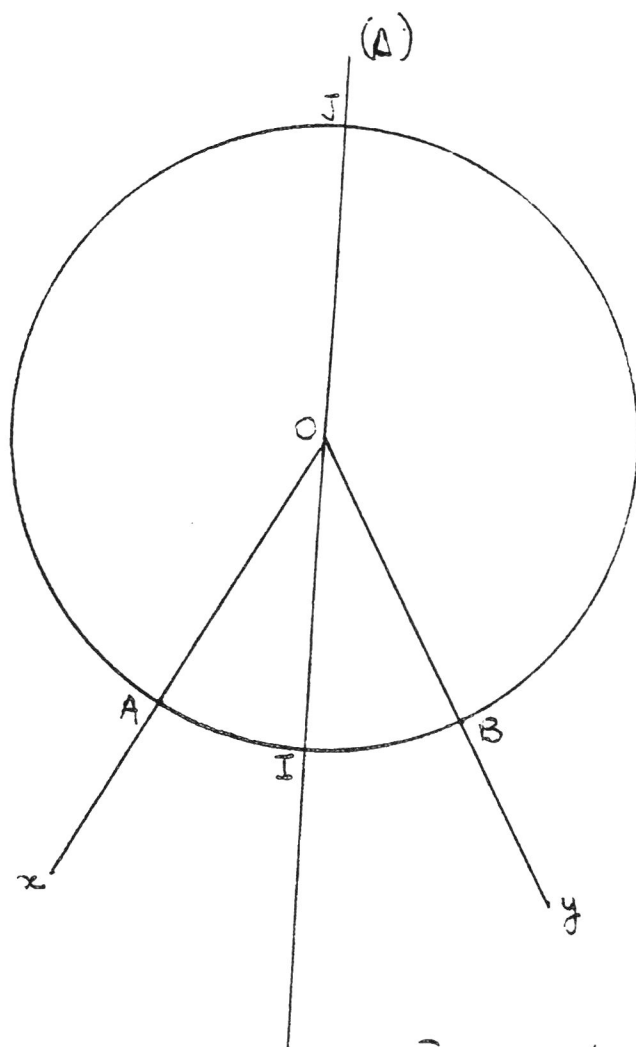


Figure 1

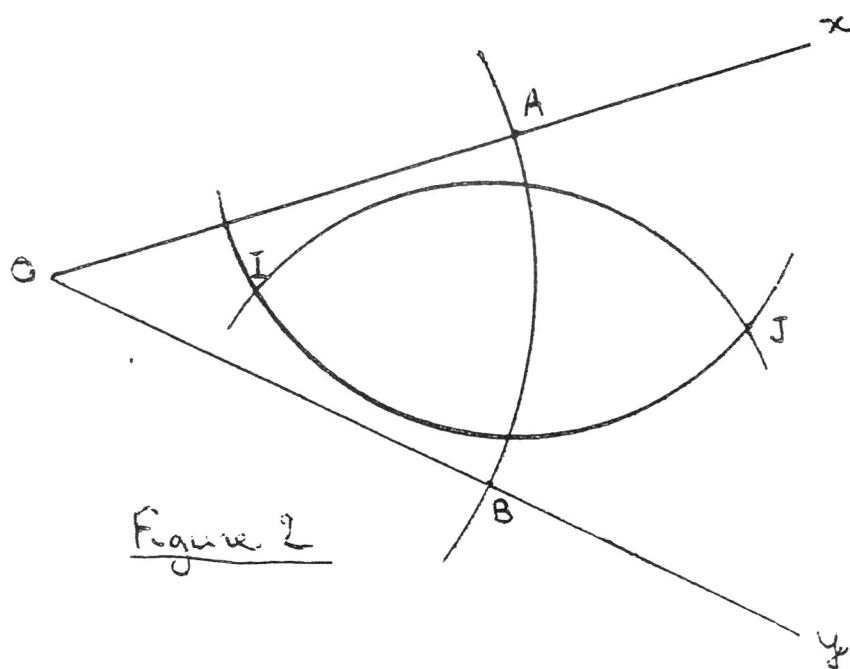


Figure 2

BISSECTRICE D'UN COUPLE DE DEMI-DROITES DE MEME ORIGINE

Rappel : Etant donné deux demi-droites de même origine Ox et Oy , il existe un unique déplacement et un unique antidéplacement qui transforment Ox en Oy :

. Le déplacement est la rotation de centre O et d'angle $\widehat{(Ox, Oy)}$.

. Quant à l'antidéplacement, il doit laisser O invariant. De plus, si on prend un point A quelconque de Ox , son transformé sera le point B (unique) de Oy défini par $OB = OA$ (on obtient B comme intersection de Oy et du cercle de centre O contenant A). Donc : la symétrie par rapport à la médiatrice (Δ) de $[AB]$ répond à la question.

Devinette : Les demi-droites Ox et Oy étant dessinées sur une feuille, comment obtenir (Δ) sans l'aide d'aucun instrument ?

Réponse : Par un pliage qui amènera Ox sur Oy .

Problème : Le cercle de centre O contenant A (tracé précédemment) coupe (Δ) en deux points (diamétralement opposés) I et J (figure 1). Quelles remarques peut-on faire au sujet des angles de la figure ?

Les angles "géométriques" (de troisième) $\widehat{AOI}$ et $\widehat{IOB}$ sont égaux (superposition par pliage). La symétrie d'axe (Δ) , étant un antidéplacement, échange le "sens" des angles.

Nous aurons donc $\widehat{(OI, OB)} = -\widehat{(OI, OA)}$ soit :

$$\widehat{(OA, OI)} = \widehat{(OI, OB)}, \text{ et de même}$$

$$\widehat{(OA, OJ)} = \widehat{(OJ, OB)}$$

Définition : (Δ) s'appelle la bissectrice du couple (Ox, Oy)

Remarque 1 : Nous parlons de la bissectrice d'un couple de demi-droites, et non pas de la bissectrice d'un angle, puisque l'angle est en fait une classe d'équivalence de couples : deux couples définissant le même angle n'auront pas, en général, la même bissectrice.

Remarque 2 : Puisque la symétrie axiale est involutive (Ox, Oy) et (Oy, Ox) auront même bissectrice.

Construction de la bissectrice de (Ox, Oy) (Figure 2)

On trace un cercle de centre O , qui coupe Ox en A et Oy en B , puis deux cercles de même rayon centrés en A et en B (le rayon est choisi de façon que ces cercles soient sécants ; AO , par exemple répond à la question). Les points d'intersection I et J de ces deux cercles sont (en raison de la symétrie de la figure) sur la bissectrice de (Ox, Oy) (ainsi que O , bien sûr !).

Théorème 1 : Pour tout point M , distinct de O , de la bissectrice de (Ox, Oy) , on a $\widehat{(Ox, OM)} = \widehat{(OM, Oy)}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate de ce que nous venons de voir.

Cherchons maintenant une mesure de $\widehat{(Ox, OI)}$ (en degrés) :

Soit φ une telle mesure ; puisqu'on a $\widehat{(OI, Oy)} = \widehat{(Ox, OI)}$, 2φ sera une mesure de $\widehat{(Ox, Oy)}$.

De même si φ' est une mesure de $\widehat{(Ox, OJ)}$, $2\varphi'$ sera une mesure de $\widehat{(Ox, Oy)}$.

Si nous appelons α une mesure de $\widehat{(Ox, Oy)}$, nous aurons donc, puisque 2φ et $2\varphi'$ sont également deux mesures de cet angle :

$$2\varphi = \alpha + 360k$$

$$2\varphi' = \alpha + 360k', \text{ où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}$$

φ et φ' seront par conséquent deux nombres de la forme $\frac{\alpha}{2} + 180h$ ($h \in \mathbb{Z}$)

Or, ces nombres correspondent aux mesures de deux angles :

. l'angle de mesure $\frac{\alpha}{2}$, pour h pair ;

. l'angle de mesure $(\frac{\alpha}{2} + 180)$ pour h impair.

Les angles $\widehat{(Ox, OI)}$ et $\widehat{(Ox, OJ)}$ étant différents (sinon, on aurait $[OI] = [OJ]$), l'un aura pour mesure $\frac{\alpha}{2}$, et l'autre $(\frac{\alpha}{2} + 180)$. D'où le :

Théorème 2 : Soit M un point (distinct de O) de la bissectrice de (Ox, Oy) . Si α est une mesure de $\widehat{(Ox, Oy)}$ en degrés, alors l'angle $\widehat{(Ox, OM)}$ admet pour mesure en degrés $\frac{\alpha}{2}$ ou $(\frac{\alpha}{2} + 180)$.

Remarque : Le théorème précédent s'adapte immédiatement aux mesures en grades ou en radians ; il suffit de remplacer 180 respectivement par 200 ou π .

On peut envisager une autre approche de la bissectrice :

Problème : Soit deux demi-droites Ox et Oy , telles que α soit une mesure en degrés de $(\widehat{Ox, Oy})$. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\widehat{Ox, OM}) = (\widehat{OM, Oy})$$

Résolution : Soit β une mesure de $(\widehat{Ox, OM})$; β est aussi une mesure de $(\widehat{OM, Oy})$. On a alors

$$\beta + \beta = \alpha + 360 k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

c'est-à-dire $2\beta = \alpha + 360 k$, ou encore :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + 180 k.$$

On sait que deux mesures d'un angle diffèrent d'un multiple de 360. Les réels solutions de l'équation (1) sont donc les mesures de deux angles différents (voir plus haut) : l'un admet $\frac{\alpha}{2}$ pour mesure et l'autre $(\frac{\alpha}{2} + 180)$.

Soit alors r la rotation de centre O et de mesure $\frac{\alpha}{2}$,
et soit r' la rotation de centre O et de mesure $(\frac{\alpha}{2} + 180)$

On pose $Oz = r(Ox)$ et $Oz' = r'(Ox)$.

L'ensemble des points M cherchés est la réunion des demi-droites Oz et Oz' .

De plus, $(\frac{\alpha}{2} + 180) - \frac{\alpha}{2}$ est une mesure de $(\widehat{Oz, Oz'})$, donc $(\widehat{Oz, Oz'}) = \hat{p}$ (angle plat).

Les demi-droites Oz et Oz' ont même support et sont distinctes ; leur réunion est une droite.

Définition : La droite zz' est appelée bissectrice de (Ox, Oy)

Remarque : La définition faisant jouer le même rôle à Ox et Oy , la bissectrice de (Ox, Oy) est aussi celle de (Oy, Ox) .

Théorème : La symétrie d'axe zz' transforme Ox en Oy

Soit A un point de la bissectrice et P un point de Ox , distincts de O (figure 3).

Dans la symétrie d'axe zz' , O sera invariant, et P sera transformé en un point Q tel que $(\widehat{OA, OQ}) = -(\widehat{OA, OP})$.

Or $-(\widehat{OA, OP}) = (\widehat{OP, OA}) = (\widehat{Ox, OA})$ et, par définition de la bissectrice ,
 $(\widehat{Ox, OA}) = (\widehat{OA, Oy})$.

- 78 -

figure 3

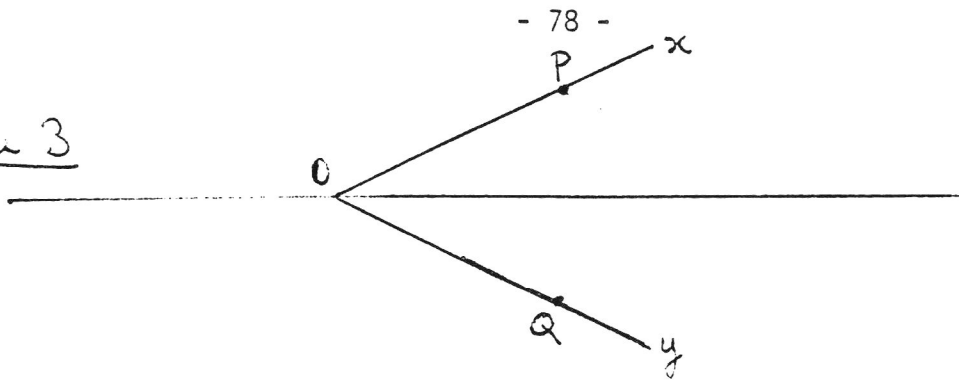


figure 4

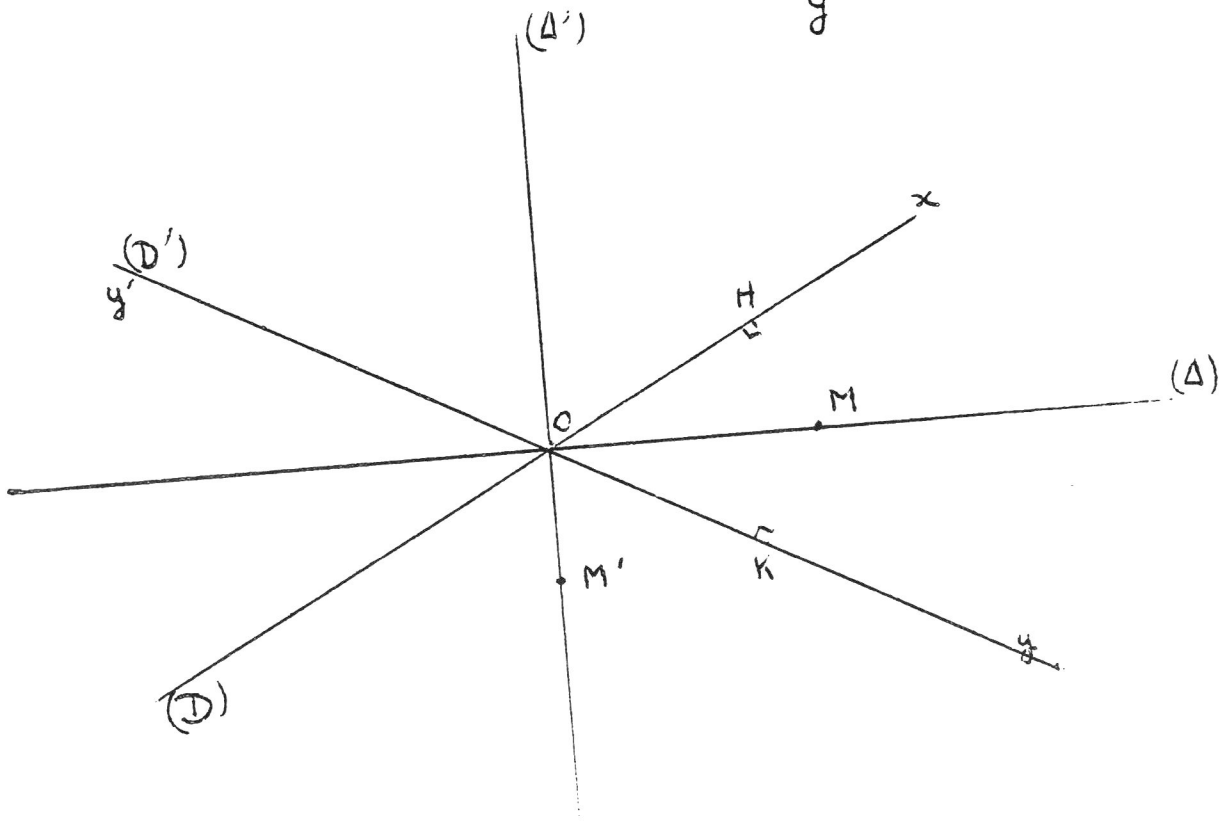
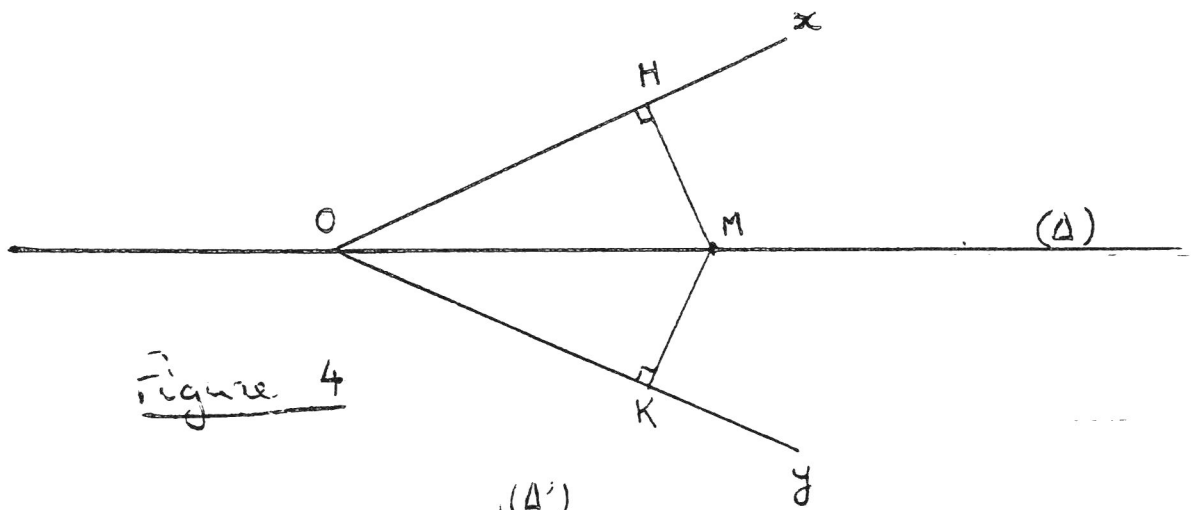


figure 5

Donc : $(\widehat{OA, OQ}) = (\widehat{OA, Oy})$; ce qui montre que Q appartient à Oy et donc (puisque la transformée d'une demi-droite par une symétrie est une demi-droite) que Oy est le transformé de Ox.

Nous pouvons maintenant reprendre la suite du thème :

Théorème : Tout point de la bissectrice de (Ox, Oy) est équidistant des supports de Ox et Oy.

Soit M un point de la bissectrice (Δ) de (Ox, Oy) , distinct de O. Appelons H et K les projections (orthogonales) respectives de M sur les supports de Ox et de Oy (figure 4).

La symétrie d'axe (Δ) transforme la droite (OH) en la droite (OK) ; l'image de la droite (MH), perpendiculaire à (OH), sera la droite perpendiculaire à (OK) contenant M, c'est-à-dire (MK). Le point H a donc pour image le point K, d'où $MH = MK$.

(N.B. Cette propriété subsiste encore si $M = O$, car alors on a $H = K = O$).

Etudions maintenant la réci-proque :

Soit deux demi-droites de même origine O, et de supports distincts :

- Ox, de support (D)
- Oy, de support (D').

Soit M un point du plan, distinct de O, H sa projection orthogonale sur (D) et K sa projection orthogonale sur (D'). On suppose $MH = MK$ (figure 5).

(N.B. Les supports (D) et (D') étant distincts, il en est de même des points H et K).

. Si $MH = MK = 0$, alors M est à la fois sur (D) et sur (D') : c'est le point O (cas que nous avons rejeté).

. Si $MH \neq 0$, les triangles OHM et OKM sont rectangles. Les points H et K sont donc sur le cercle de diamètre $[OM]$; d'autre part, puisque $MH = MK$, ils sont également sur un même cercle de centre M. Comme ils sont distincts, ils sont nécessairement symétriques par rapport à la "droite des centres" (OM).

Dans cette symétrie, (D) a pour transformé (D'), et inversement. Mais qu'en est-il pour Ox et Oy ?

Deux cas peuvent se présenter :

- . Ou bien Ox est transformé en Oy
- . Ou bien Ox est transformée en la demi-droite Oy', opposée à Oy.

Dans le premier cas, (OM) est la bissectrice (Δ) de (Ox, Oy) .

Dans le second cas, (OM) est la bissectrice (Δ') de (Ox, Oy) .

Montrons que (Δ) et (Δ') sont distinctes (nous allons même, en fait, montrer davantage) :

Soit M un point de (Δ) , et M' un point de (Δ') .

Appelons α une mesure en degrés de $(\widehat{Ox, Oy})$. Puisque $(\widehat{Oy, Oy'})$ est plat, une mesure de $(\widehat{Ox, Oy'})$ sera $\beta = \alpha + 180$.

Une mesure de $(\widehat{Ox, OM})$ est de la forme $\frac{\alpha}{2} + 180k$ (théorème 2), et de même une mesure de $(\widehat{Ox, OM'})$ est de la forme $(\frac{\beta}{2} + 180k')$ (où k et k' sont des entiers relatifs).

Alors, $\gamma = (\frac{\beta}{2} + 180k') - (\frac{\alpha}{2} + 180k)$ sera une mesure de $(\widehat{OM, OM'})$. Or $\gamma = (\frac{\alpha}{2} + 90 + 180k') - (\frac{\alpha}{2} + 180k)$; soit $\gamma = 90 + 180(k' - k)$. L'angle $(\widehat{OM, OM'})$ est donc un angle droit, c'est-à-dire que (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

(N.B.) Le point O est évidemment équidistant des droites (D) et (D') .

Théorème 4 : Soit deux droites xx' et yy' sécantes en O . L'ensemble des points équidistants de ces deux droites est la réunion des bissectrices des couples (Ox, Oy) et (Ox, Oy') .

Définition : Ces deux bissectrices sont appelées bissectrices du couple de droites (xx', yy') .

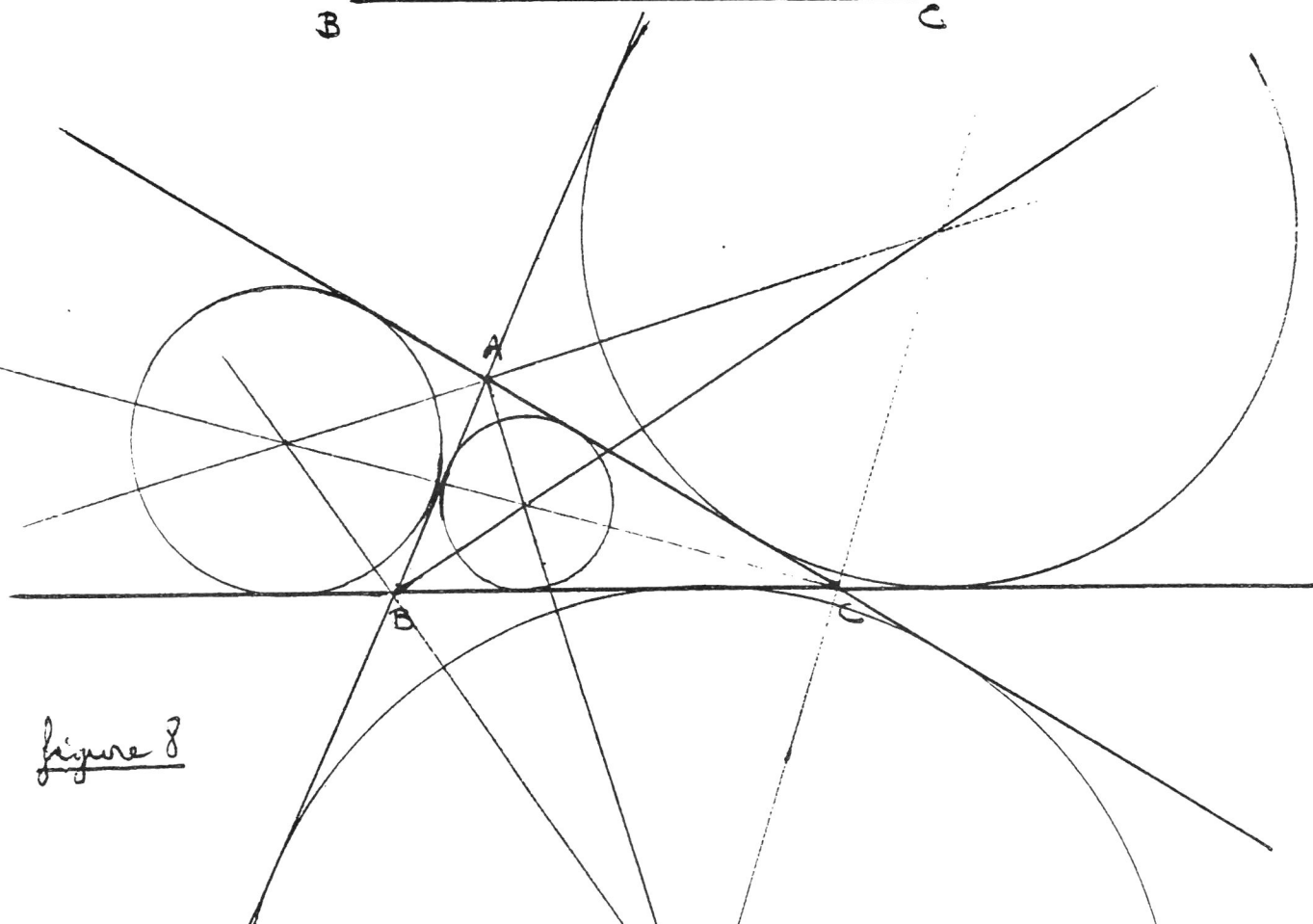
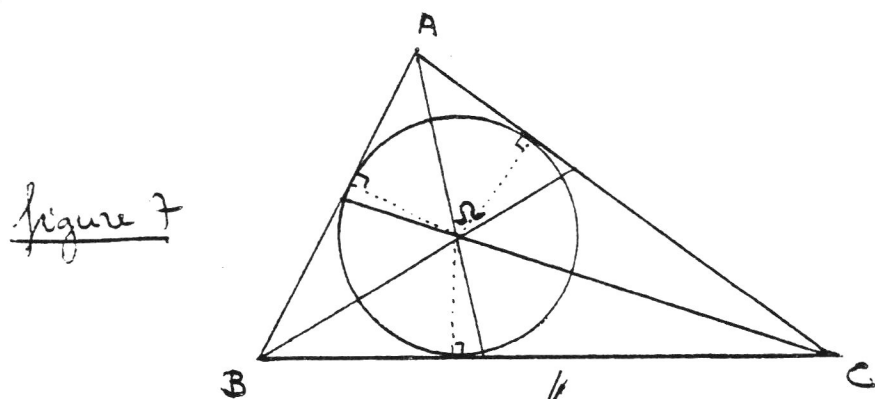
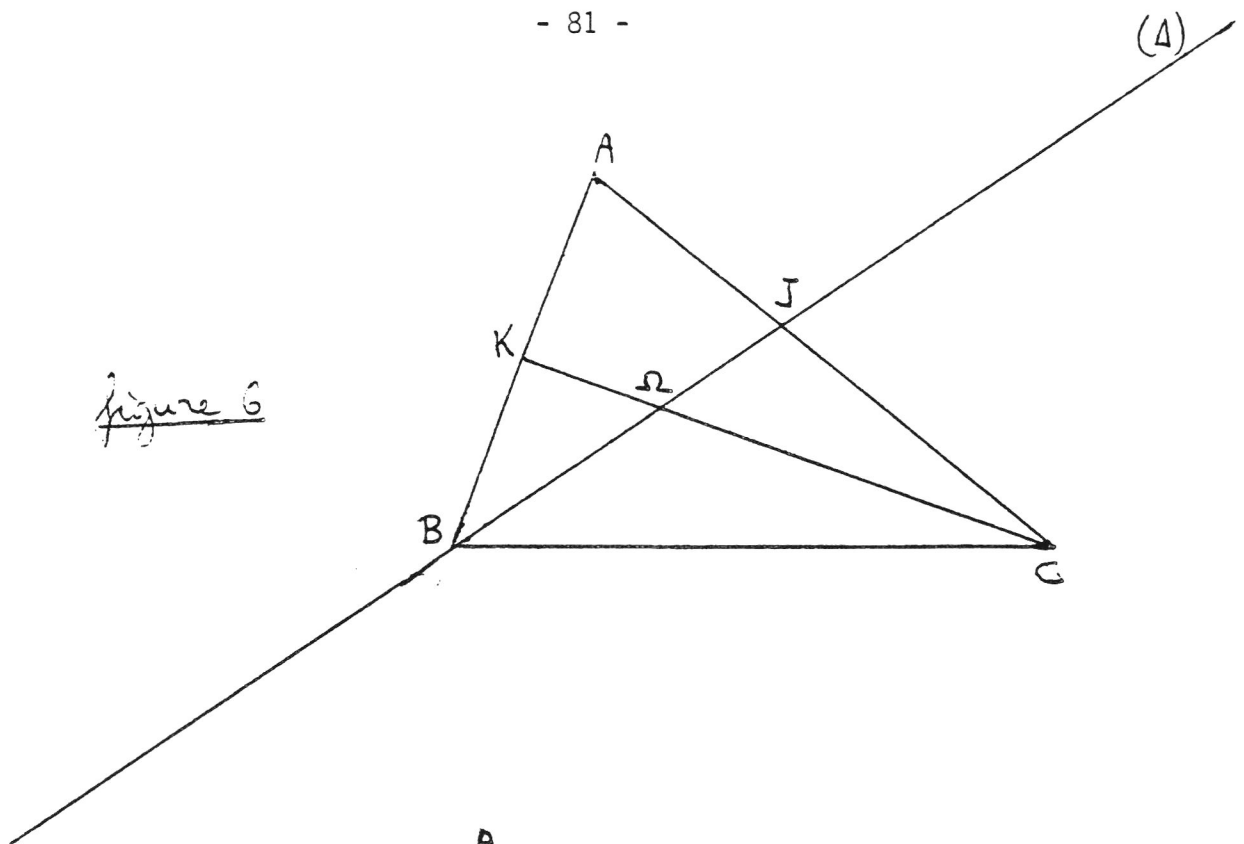
Remarque : Le couple (yy', xx') a évidemment mêmes bissectrices que le couple (xx', yy') .

Définition : Dans un triangle ABC , le couple de droites $((AB), (AC))$ admet deux bissectrices. L'une d'elles est la bissectrice du couple de demi-droites (AB, AC) on l'appelle bissectrice intérieure du triangle, en A . L'autre sera la bissectrice extérieure en A .

Théorème : Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un même point.

Considérons par exemple les bissectrices intérieures du triangle ABC en B et C , et montrons tout d'abord qu'elles sont sécantes.

Appelons (Δ) la bissectrice du couple (BA, BC) ; les points A et C sont situés



dans deux demi-plans différents de bord (Δ) , en vertu de la symétrie d'axe (Δ) qui transforme (BA) en (BC) . (Figure 6).

La droite (AC) va donc couper (Δ) entre A et C ; soit J le point d'intersection.

On démontre de même que la bissectrice du couple (CA, CB) coupe (AB) en un point K, situé entre A et B. Alors C et K sont dans deux demi-plans différents de bord (Δ) ; les bissectrices (BJ) et (CK) seront donc sécantes en un point Ω , intérieur au triangle.

Ω , étant sur la bissectrice (BJ) , est équidistant de (AB) et (BC) ; étant sur la bissectrice (CK) , il est également équidistant de (BC) et (AC) .

Ω est donc équidistant de (AB) et (AC) ; il est par conséquent situé sur l'une des bissectrices du couple de droites $((AB), (AC))$. Et, puisqu'il est situé dans le saillant $[\widehat{BAC}]$, il appartient nécessairement à la bissectrice intérieure en A.

Remarque et définition : Le point Ω est le centre d'un cercle, tangent aux côtés (AB) , (AC) et (BC) , situé dans l'intérieur du triangle ABC (Figure 7). On l'appelle centre du cercle inscrit au triangle.

On définirait de la même façon les centres des cercles exinscrits, points de concours d'une bissectrice intérieure et des bissectrices extérieures relatives aux deux autres sommets (figure 8).

PUBLICATIONS DE L'IREM DE PARIS VII (SUITE)

R e p r o d u c t i o n d e t e x t e s a n c i e n s

-I- DISME (1585)

-II- GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (F , KLEIN 1896)

EDITEUR : IREM

DIRECTEUR/RESPONSABLE DE LA PUBLICATION : ANDRÉ DELEDICQ

TIRAGE : 250 EXEMPLAIRES

DÉPÔT LÉGAL : 6/81

IREM PARIS VII - TOUR 55/56, 11^{ÈME} ÉTAGE

2, PLACE JUSSIEU ----- 75005 PARIS

PUBLICATIONS DE L'IREM

PARIS VII

- 1-BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
- 2-MATHÉMATIQUES ET AUTONOMIE/GESTION
- 3-NOMBRES A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE
- 4-GROUPE FRANÇAIS/MATHÉMATIQUE N°1
- 5-QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LA DÉMONSTRATION
- 6-MOIRÉS
- 7-PAVAGES ET COLORIAGES
- 8-AUTOUR DU CUBE
- 9-DES CHIFFRES ET DES NOTES
- 10-CALCUL MENTAL
- 11-CALCUL 1ER CYCLE
- 12- CALCUL 2^{ème} CYCLE
- 13-LE CUBE HONGROIS - MODE D'EMPLOI -
- 14-DE LA TEMPÉRATURE RÉSULTANTE SÈCHE À L'ANGLE SOLIDE
- 15-GROUPE FRANÇAIS/MATHÉMATIQUE N°2
- 16- LES JEUX DU CLUB DES CORDELIÈRES
- 17-COLORIAGES GÉOMÉTRIQUES
- 18-Q.C.M. (CNTE)
- 19-COCOTTES, DRAPEAUX ET GÉOMÉTRIE
- 20-QUI COURT ?
- 21-ALMANATHÉMATIQUES
- 22-FRISES
- 23-RÉCURRENCE
- 24-CLIMATISONS LES MATHÉMATIQUES
- 25- ESPACE (1ER CYCLE)
- 26-BIBLIOGRAPHIE
- 27- NOMBRE D'OR
- 28-ROTATIONS-ANGLES

Suite →