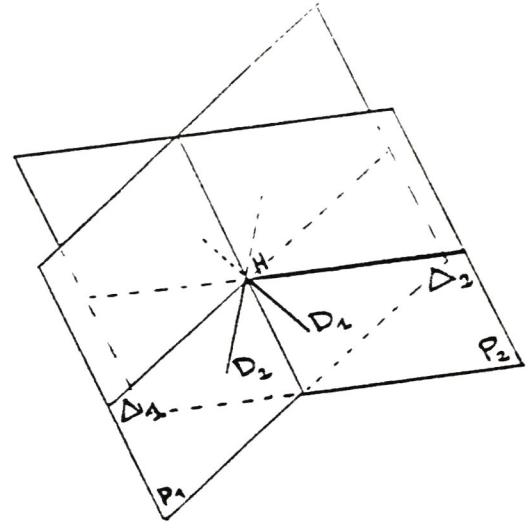
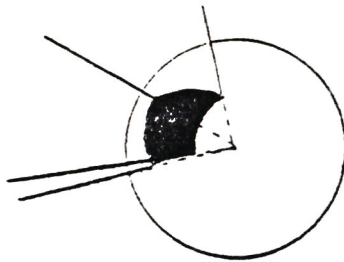


n° 32

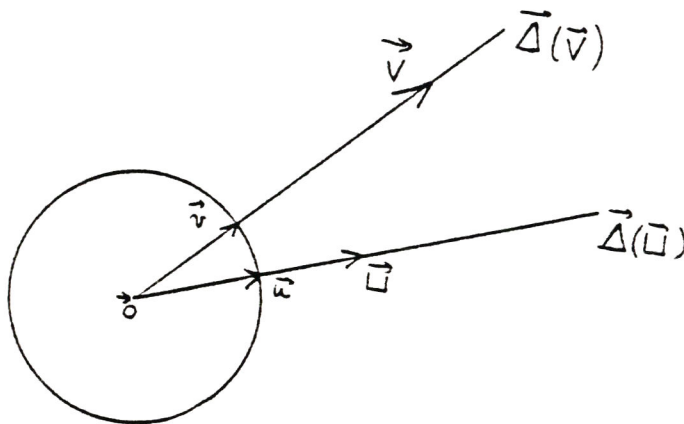
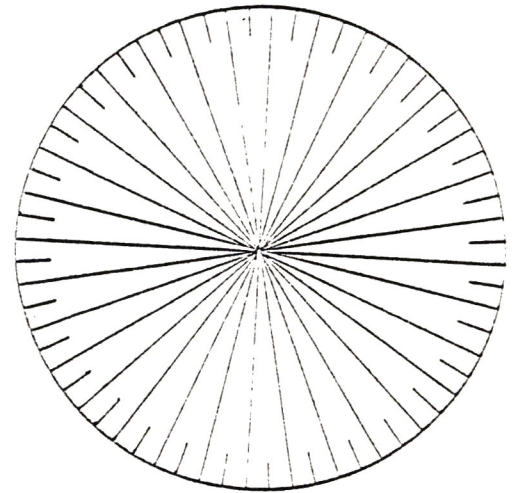
1983

UNIVERSITE PARIS 7 DENIS DIDEROT
IREM - CASE COURRIER 7018
2, Place Jussieu - 75251 PARIS Cedex 05
Tél. : 01 44 27 53 83 - Fax : 01 44 27 56 06



LES ANGLES

F. COLMEZ
N. ROUSSIGNOL



S O M M A I R E

1

Préface

CHAPITRE 1 - QU'EST-CE QU'UN ANGLE ? p. 5

- I - Enquête réalisée par les élèves de 5ème auprès d'adultes de leur entourage
- II - Quelques réponses écrites par des élèves de T_C
- III - Essai d'analyse de quelques situations
- IV - Richesse du concept d'angle

CHAPITRE 2 - QUELQUES ACTIVITES EN SIXIEME p.17

- I - Présentation
- II - Activités préliminaires sur les cercles
- III - Comparaison de secteurs de disque
- IV - Construction d'un premier instrument de mesure
- V - Amélioration de l'instrument
- VI - Le rapporteur
- VII - Les rotations
- VIII - Construction d'un cadran de montre

CHAPITRE 3 - ESSAI D'ANALYSE DIDACTIQUE DES ACTIVITES EN SIXIEME ... p.36

- I - Le cercle
- II - Comparaison de secteurs de disque
- III - Reproduction d'un secteur
- IV - Passage aux rotations
- V - Graduation d'un cadran de montre
- VI - A propos des cordes et des arcs

CHAPITRE 4 - SUGGESTIONS D'ACTIVITES p.46

- I - Tableau de suggestions pour le premier cycle
- II - Utilisation de polygones réguliers pour paver le plan ou pour construire des polyèdres réguliers.
- III - Raccordement de rails de trains miniatures
- IV - A quelle distance est la ligne d'horizon ?
- V - Une situation aboutissant à l'addition des angles orientés
- VI - Quelques exercices d'origine non mathématiques trouvés dans les livres de 3ème (programme 1980)
- VII - Un problème pratique d'optique: vérification de l'angle d'un prisme

CHAPITRE 5 - DEFINITIONS THEORIQUES DES ANGLES DE DEMI-DROITES	 p.100
I - Présentation	
II - Des mouvements de rotation à la transformation ponctuelle correspondante	
III - Matrice d'une application linéaire dans une base	
IV - Les isométries vectorielles d'un plan vectoriel euclidien	
V - Le groupe des rotations vectorielles pour la loi $\odot$	
VI - Angles de couples de vecteurs ou de demi-droites vectorielles	
VII - Angle d'une rotation ponctuelle - Angle d'un couple de demi-droites affines	
VIII - Angles de paires de demi-droites	
CHAPITRE 6 - LES SECTEURS ANGULAIRES	 p.126
I - Introduction	
II - Réflexion sur les définitions possibles des secteurs angulaires	
III - Angles de secteurs	
CHAPITRE 7 - LA "MESURE" DES ANGLES	 p.137
I - Présentation du problème	
II - "Mesure" des angles de couples de vecteurs - Présentation théorique	
III - "Mesure" des angles de couples de vecteurs - Présentation en classe	
IV - La "mesure" des angles de paires de demi-droites	
V - Mesure des secteurs	
CHAPITRE 8 - LES ANGLES DE DROITES	 p.153
I - Une façon d'aborder les angles de couples de droites	
II - La théorie	
III - Ce qu'on peut faire avec des angles de couples de droites	
IV - Les angles de paires de droites	
CHAPITRE 9 - LA TRIGONOMETRIE	 p.163
I - Introduction	
II - Définitions des fonctions sinus et cosinus	
III - Les formules trigonométriques	
IV - Les équations ou inéquations trigonométriques	

CHAPITRE 10 - LES NOTATIONS		p.182
I - Introduction		
II - Notations qui ne font pas intervenir la mesure		
III - Notations faisant intervenir les mesures		
IV - Conclusion		
CHAPITRE 11 - LES ANGLES A L'ECOLE ELEMENTAIRE		p.190
I - Présentation		
II - Chronique d'une classe de CM ₂		
III - Commentaires		
IV - Essai d'analyse		
ANNEXE 1 : Les angles comme source de situations de proportionnalité ..		p.197
ANNEXE 2 : Classification d'angles		p.200
ANNEXE 3 : Qu'est-ce qu'une mesure ?		p.207
CONCLUSION		p.212

P R E F A C E

Il a souvent été demandé dans les stages IREM une information sur les "angles".

Les réponses ponctuelles adaptées aux préoccupations immédiates n'étaient pas, en général, pleinement satisfaisantes. En effet, le concept d'angle a de multiples facettes et le lien entre celles-ci n'est pas toujours évident.

Les questions soulevées par l'enseignement des angles sont d'autant plus importantes que les programmes ne ménagent pas toujours la possibilité de faire le lien entre les différents aspects qu'un élève peut rencontrer au fil des années en mathématiques ou au cours d'une même année dans différentes disciplines.

Sans prétendre résoudre le problème d'enseignement qui vient d'être évoqué, cette brochure apporte des éléments de réflexion sur les points suivants:

- les différents aspects du concept d'angle
- l'ordre dans lequel ils sont introduits dans l'enseignement
- les activités possibles avec les enfants
- le lien théorique entre les différents aspects.

Que soient remerciés ici, pour leur apport d'information ou leur lecture critique, les animateurs de l'IREM, les collègues des classes de sixième, de l'école élémentaire et de l'enseignement technique, les géomètres, ophtalmologistes ou amateurs de voile et le journal Télé-poche.

CHAPITRE 1

QU'EST-CE QU'UN ANGLE ?

I - ENQUETE REALISEE PAR LES ELEVES DE 5^{ÈME} AUPRES D'ADULTES DE LEUR ENTOURAGE

Voici quelques réponses représentatives :

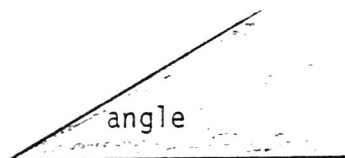
- . Deux droites qui se rejoignent en formant un angle
- . Deux demi-droites qui ont le même point origine
- . C'est l'intersection de deux lignes droites
- . L'angle, c'est l'espace compris entre les deux murs d'une pièce lorsqu'ils se rencontrent
- . Première solution : On appelle angle la portion de plan limitée par deux demi-droites issues d'un même point
- deuxième solution : Figure formée par deux droites, appelées côtés, ou deux plans, appelés faces, qui se coupent

II - QUELQUES REPONSES ECRITES PAR DES ELEVES DE TERMINALE C

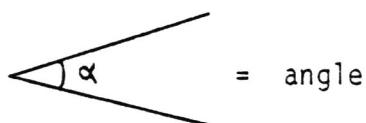
Il était demandé une définition pour non matheux : Nous citons une réponse de chaque type

- (1) Régions d'un plan comprises entre 2 demi-droites
- Régions de l'espace comprises entre 2 plans

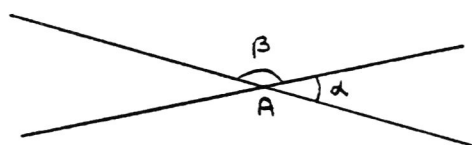
- (2) L'angle est la valeur qu'on attribue à une zone conique particulière



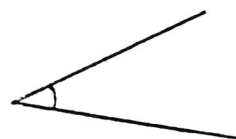
- (3)



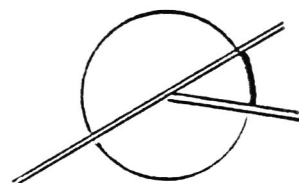
Un angle c'est l'écartement entre deux droites qui se coupent en un point A



- (4) La grandeur d'ouverture entre deux segments qui se touchent à une extrémité.



- (5) Lorsque deux droites se coupent en 1 point O, elles forment 4 angles. Un angle définit la position d'une droite par rapport à l'autre.
- (6) On appelle angle de deux droites la valeur mesurant la direction d'une de ces droites relativement à l'autre.
- (7) On détermine un angle lorsqu'à partir d'un point donné on trace deux directions de droite
- (8) Lorsque l'on prend 2 objets rectilignes (sinon ça ne marche pas) n'importe où qu'on les place dans l'espace, ils forment un angle. Pour simplifier: si on les prend qui se touchent en un point on pourra tracer un cercle de centre ce point et l'angle se définira comme une portion de cercle.



On peut, à travers ces réponses, cerner différentes situations relevant des angles.

- (1) Une région
- (2) La mesure d'une région
- (3) Un écartement de 2 droites
- (4) La mesure d'un tel écartement
- (5) *Quelque chose* qui donne la position d'une droite par rapport à une autre
- (6) La mesure de ce *quelque chose*
- (7) Une figure
- (8) *Quelque chose* qui ne dépend pas de la position des demi-droites que l'on a au départ

Remarques: (1) Les élèves parlent souvent de droites. On pourrait faire des phrases analogues à (3), (4), (5), (6) avec des demi-droites.

- (2) On ne trouve aucune allusion à l'angle d'une rotation, pourtant étudiée l'année scolaire précédente; est-ce dû à la question posée (donnez une définition pour non matheux ?) Obtiendrait-on les mêmes réponses de la part d'élèves de l'enseignement techniques qui ont davantage l'occasion de manipuler des angles dont on a tourné ?

III - ESSAI D'ANALYSE DE QUELQUES SITUATIONS

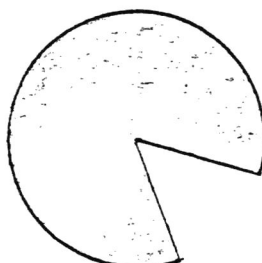
1 - DECOUPAGE D'UNE TARTE

On peut se placer du point de vue de celui qui mange. Il va lorgner

une part

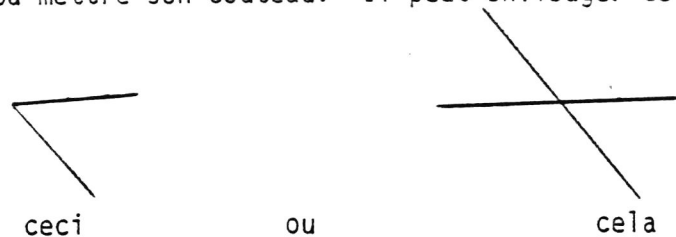


ou



s'il est particulièrement gourmand

On peut aussi se placer du point de vue de celui qui coupe.
Il réfléchit où mettre son couteau. Il peut envisager de faire

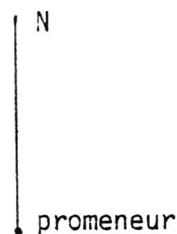


selon qu'il pense couper la tarte part après part ou qu'il envisage un découpage global de la tarte.

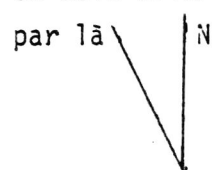
Suivant le point de vue adopté on a envisagé ou bien une portion de tarte, ou bien deux tracés s'arrêtant au centre de la tarte, ou bien deux tracés se coupant au centre de la tarte. Il suffit de se donner un nombre repérant l'écartement des deux traits pour obtenir une part de taille voulue.

2 - LA MARCHÉ A LA BOUSSOLE

On est amené à repérer une demi-droite par rapport à la demi-droite d'origine *soi* et indiquant le nord magnétique



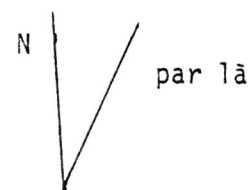
Il ne suffit plus ici de se donner un écartement car alors on ne saurait si l'on doit aller



Cas 1

Promeneur

ou



Promeneur

Cas 2

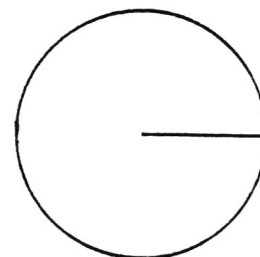
Nous devons nous donner un renseignement du genre 25° Ouest (cas 1) ou 25° Est (cas 2)

Une fois le 1er trait (PN) choisi, le deuxième est repéré par rapport au premier avec

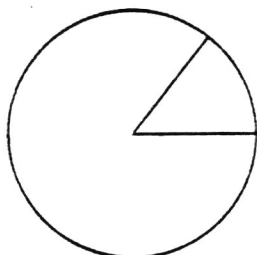
- un nombre caractérisant l'écartement
- un renseignement concernant l'orientation

Ceci est fondamentalement différent des deux traits de couteaux à donner dans la tarte.

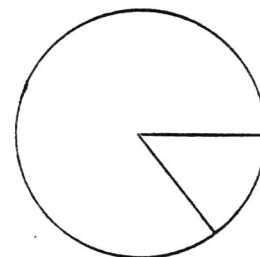
Si le premier trait de couteau est :



le deuxième peut être



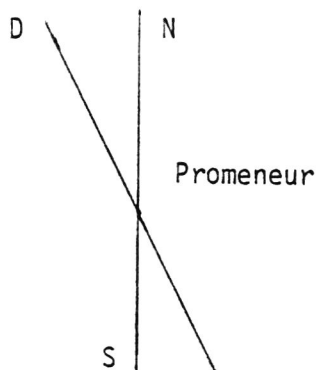
ou



cela ne changera pas la part de tarte obtenue

Certains diront :

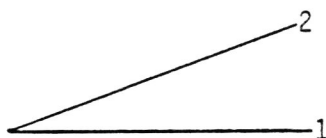
On aurait pu également se donner la droite Nord-Sud comme droite repère ; se donner alors comme renseignement 25° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, nous dit que nous devons marcher sur la droite D



ce qui risque de ne pas être assez précis pour savoir où aller...

3 - LES MOUVEMENTS DE ROTATION EN MECANIQUE

Lorsqu'un outil tourne de la position 1 à la position 2



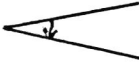
Il nous faut connaître

- un nombre précisant l'écartement de 1 et 2
- un sens de rotation
- le nombre de tours complets faits

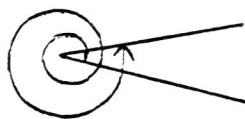
Il nous faut, cette fois-ci, trois renseignements.

4 - RECAPITULATION

Nous avons avec ces quelques exemples recensé 6 catégories de situations angulaires que nous résumons ainsi

Région	demi-droites	Droites	
			pas d'orientation
			orientation

et angles *généralisés*



IV - RICHESSE DU CONCEPT D'ANGLE

1 - LES PRINCIPALES NOTIONS RELATIVES AUX ANGLES

Les exemples précédents l'ont montré; le mot *angle* recouvre un grand nombre de notions mathématiques distinctes. Autrement dit, le concept d'angle présente de multiples aspects; pour les distinguer et tenir un discours compréhensible, il est nécessaire de faire suivre dans chaque cas le mot *angle* d'un qualificatif.

Les principaux aspects nous semblent être :

- Une région :
 - . dans un plan (secteur circulaire ou angulaire)
 - . dans l'espace (région délimitée par 2 plans, angle solide)
- Une caractéristique d'une rotation
- Une propriété relative à deux demi-droites ou à leurs directions
- Une propriété relative à deux droites ou à leurs directions
- En géométrie de l'espace, une propriété relative à deux plans, à une droite et un plan ou à leurs directions

2 - LES CONNOTATIONS MENTALES DU MOT *ANGLE*

Quoiqu'il en soit, chaque fois qu'on parle d'un angle, se profilent en référence :

- d'une part, deux droites, morceaux de droites ou directions de droites
- d'autre part, un ou plusieurs nombres

En outre, bien souvent, on a à l'esprit une idée de mouvement tournant; beaucoup de définitions mathématiques ont pour fonction de prendre en charge cette idée en réduisant le rôle du temps. On obtient ainsi des concepts ayant éliminé la durée, mais pas la chronologie comme, par exemple, les applications appelées rotations, ou même des concepts où n'est conservée que la trace du mouvement comme les secteurs.

3 - L'EVOLUTION DU LANGAGE

L'évolution assez récente du vocabulaire utilisé dans l'enseignement tend à distinguer entre figures d'une part, et propriétés des figures (ou classes de figures) d'autre part.

On réserve maintenant* le mot *angle*, accompagné d'un qualificatif, aux classes de figures.

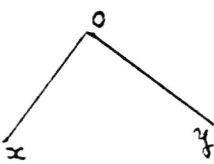
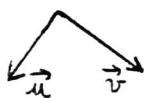
Ainsi, en parlant d'angle droit, on tient un discours valable pour une infinité de figures; pour se fixer les idées on pense plus particulièrement à une certaine figure constituée, par exemple, de deux demi-droites perpendiculaires que l'on représente par un dessin.

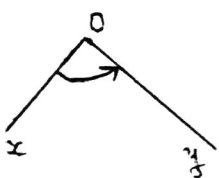


Inversement, selon la manière dont on agrmente ce dessin on en parlera en termes différents; c'est-à-dire qu'on utilisera des modèles de figures différents.

Pour  on parlera de secteur angulaire saillant droit

Pour  on parlera de secteur angulaire rentrant droit

Pour  ou  on parlera respectivement de paires de demi-droites orthogonales, de paires de vecteurs orthogonaux.

Pour  ou  on parlera respectivement de couples de demi-droites orthogonales ou de couples de vecteurs orthogonaux.

* Voir la définition d'Euclide en couverture qui adopte également cet état d'esprit avec un autre vocabulaire.

Mais si chacun de ces dessins n'est qu'un support pour traiter de propriétés communes à une classe de figures, autrement dit, s'il est une représentation d'une figure géométrique de cette classe, on parlera respectivement :

- d'angle de secteur saillant droit
- d'angle de secteur rentrant droit
- d'angle de paire de demi-droites ou de vecteurs
- d'angle de couple de demi-droites ou de vecteurs

Remarque : L'énumération précédente n'épuise pas la liste des modèles susceptibles d'être associés au dessin initial. Les divers ajouts à ce dessin sont autant de codages des différentes notions auxquelles on peut penser.

Il faut cependant être bien conscient que :

1) Il est vain de vouloir représenter par un codage particulier chacun des très nombreux modèles mathématiques auxquels peut renvoyer un dessin et dont il est une représentation, car :

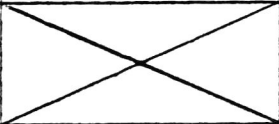
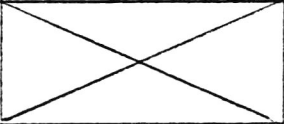
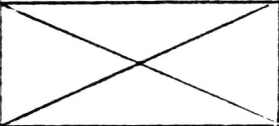
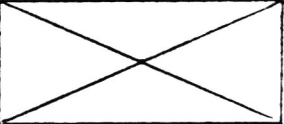
- . un tel codage serait trop lourd à manipuler
- . il ne pourrait sans doute pas être exhaustif
- . il est socialement irréaliste
- . il est inutile et à la limite serait nuisible.

En effet, s'il est indispensable que dans une classe donnée, à un moment donné, le codage adopté permette de savoir d'un coup d'oeil quel est le modèle d'angle en service (pour guider les recherches ou inversement transcrire sur le dessin les résultats obtenus) il ne faudrait pas qu'un codage trop rigide empêche d'abandonner un modèle pour utiliser un autre modèle mieux adapté au problème à traiter.

2) Ce qui vient d'être dit des codages par dessin s'applique également aux codages écrits, c'est-à-dire aux notations. Il serait sans doute souhaitable qu'il y ait une norme pour chaque notation; ce n'est pas le cas actuellement même pour les concepts principaux. Nous signalerons au chapitre 10 quelques notations usuelles, sans prétendre être exhaustifs, et nous en choisirons une dans chaque cas. Les choix faits pourront paraître arbitraires même s'ils nous semblent justifiés, mais nous nous garderons bien d'explicitier nos raisons car elles peuvent, bien sûr, être contestées. Et nous ne souhaitons pas déclencher par cette brochure une discussion stérile sur les codages qui se développerait au détriment du plus important : la réflexion sur les concepts eux-mêmes.

4 - STRUCTURATION DES ANGLES

Le passage des figures aux angles est associé à l'introduction de nombres (mesure des angles). Sur les nombres on sait définir une addition et un ordre. Sur chaque catégorie d'angle on peut définir soit une structure d'ordre, soit une structure algébrique compatible avec la mesure, mais jamais les deux à la fois. Indiquons cela dans un tableau :

Notion envisagée	Structure algébrique	Ordre
Secteurs angulaires [★] de sommet donné	réunion	partiel
Angles de secteurs angulaires		oui
Angles de paires de ^{★★} demi-droites		oui
Angles de couples ^{★★} de demi-droites	addition	
Angles de paires de droites		oui
Angles de couples de droites	addition	

★ Un secteur n'est pas un angle, mais nous le mettons dans ce tableau pour permettre la comparaison avec la notion d'angle de secteur.

★★ Du point de vue des angles les demi-droites et les vecteurs fournissent la même notion.

5 - LES RAISONS DE LA COMPLEXITE DU CONCEPT D'ANGLE

Quelles sont les raisons d'une telle profusion de modèles dans le concept d'angle? Il y a sans doute deux catégories de raisons:

- Des raisons pratiques : Les problèmes d'angle d'un tourneur, d'un maçon, d'un navigateur ou d'un contrôleur aérien par exemple ne sont pas de même nature

- Des raisons mathématiques : Le concept d'angle est intersectoriel. Il relève à la fois de la géométrie élémentaire, de l'algèbre linéaire, de la cinématique, de l'analyse etc... et chaque secteur fournit un ou plusieurs modèles.

En fait, ces deux catégories de raisons sont complémentaires et c'est à travers une série d'allers et retours entre problèmes pratiques et problèmes mathématiques que ce concept s'est construit

6 - LES ANGLES DANS L'ENSEIGNEMENT

L'enseignement procède à une réduction du cheminement qui vient d'être évoqué.

Dans les programmes de mathématiques du secondaire de l'enseignement général* on trouve actuellement les secteurs angulaires en 6ème, les angles de paires de demi-droites en 3ème, les angles de couples de demi-droites en 1ère C, et les angles de couples de droites en Terminale C.

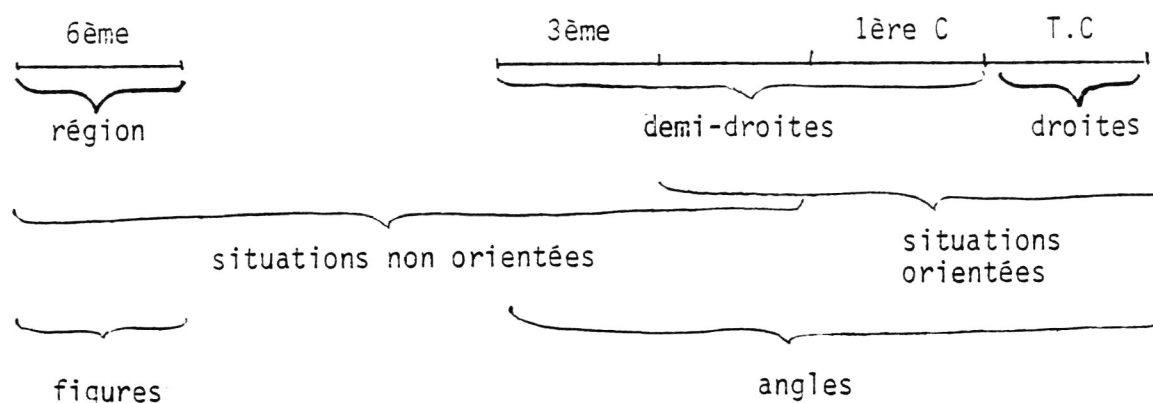
On s'intéresse à l'aspect *région* en 6ème, à l'aspect *bords* à partir de la 3ème, mais on ne s'autorise à ordonner les bords qu'à partir de la 1ère C.**

De plus, à partir de la 3ème, on étudie explicitement des angles, alors qu'en 6ème on feint de ne s'intéresser qu'aux figures elles-mêmes.

* Qu'en est-il dans l'enseignement technique?

** Dans les projets de programme de seconde applicables à la rentrée 1981, apparaît la notion d'angle orienté.
(cf la brochure sur les nouveaux programmes de seconde)

On peut résumer ce qui précède par le schéma suivant :



La forme d'esprit des enfants de chacune de ces classes est-elle particulièrement bien adaptée à chacune de ces définitions, ou est-ce seulement par souci de netteté qu'un aspect de la notion est mis au programme de chaque niveau suivant une progression supposée de la difficulté ?

Ne ferait-on pas mieux de permettre à l'élève de se familiariser tout au long de sa scolarité avec plusieurs aspects ?

On y gagnerait sans doute une démystification des angles ainsi qu'une bonne occasion de motiver l'introduction de quelques autres concepts (comme la transformation réciproque d'une transformation connue, les nombres négatifs, les classes de nombre modulo un nombre donné, de nouveaux rationnels etc ...). On a donc avec la notion d'angle, telle qu'elle est présentée actuellement, un exemple supplémentaire d'une attitude trop fréquente dans l'enseignement des mathématiques en France qui consiste à se priver de situations qui motivent l'introduction de nouvelles notions.

C'est après avoir pris nous-mêmes conscience de la richesse du concept d'angle que nous avons décidé de proposer à des élèves de 6ème des activités relevant de plusieurs de ces aspects.

L'expérience faite tend à montrer que les élèves passent sans difficulté d'un aspect à un autre. Le lecteur trouvera une description^{*} de cette expérience dans la partie suivante.

^{*} avec plus ou moins de détails suivant qu'un observateur étranger à la classe était là ou non.

CHAPITRE 2

QUELQUES ACTIVITES EN SIXIEME

I - PRESENTATION

En liaison avec la réflexion menée en 1978-79 dans le groupe I.R.E.M. du C.E.S. Pierre Brossolette à Melun, deux professeurs ont essayé de diversifier leurs activités sur les angles, chacun dans deux classes.

Les parties II, III, IV, V, VI, VII relatent, d'une manière assez détaillée, la démarche suivie par le premier; chaque partie correspond à une ou deux séances.

La partie VIII relate plus rapidement une des activités proposée à ses élèves par le second.

II - ACTIVITES PRELIMINAIRES SUR LES CERCLES

Pour la plupart des élèves de 6ème un cercle c'est un rond, une courbe qui tourne toujours pareil

Mais rarement un ensemble de points à égale distance d'un point donné (bien qu'ils l'aient vu à l'école primaire).

En effet, ils oublient facilement le centre d'un cercle après avoir tracé ce cercle. C'est pourquoi, avant toute activité sur les secteurs circulaires, il était utile de faire un rappel sur le cercle et le disque mettant l'accent sur l'utilisation du centre dans les constructions de cercles, de rayons, de diamètres et des définitions correspondantes.*

* Notons à ce sujet que les deux mots rayon et diamètre peuvent avoir trois sens et que c'est le contexte qui nous aide à choisir.

Le professeur a ensuite fait étudier à quelle condition deux cercles étaient superposables.

Pratiquement les enfants ont eu deux idées :

- Découper les cercles (ont-ils dit) mais en fait il s'agissait des disques et l'occasion était bonne de leur faire saisir la distinction entre cercles et disques.
- Utiliser un dessin sur un calque comme intermédiaire.

D'où les constatations :

- Deux cercles sont superposables s'ils ont même rayon
- Quand on superpose deux cercles, les centres se superposent également.

Ce type d'activité conduit à remplacer le mot égal, naguère suremployé par le mot superposable.

III - COMPARAISON DE SECTEURS DE DISQUE

Les enfants sont placés en équipe de 4.

Le professeur annonce que l'on va dessiner des tartes, s'en couper un morceau et le comparer avec ceux des autres.

Le professeur : *Quel est la forme du moule ?*

Un élève : *rond*

Le professeur : *Dessinez votre tarte ronde*

Certains commencent à dessiner les fruits et la croûte.

Le professeur : *Pour simplifier le dessin, faites seulement un disque*

Les enfants dessinent au compas un cercle de rayon quelconque.

Le professeur : *Coupez-vous en une part. Comment faites-vous?*

Des élèves : *. On coupe au centre*

. On coupe en huit

. Ça dépend combien on est

. On coupe en deux, puis

Le professeur : *Coloriez votre part*

Un peu plus tard :

Le professeur : *Comment est bordée votre part*

Des élèves : . *C'est la frontière*

- . *Un peu comme un triangle*
- . *Chaque côté, 2 rayons*
- . *Une partie arrondie*
- . *Un morceau du cercle*

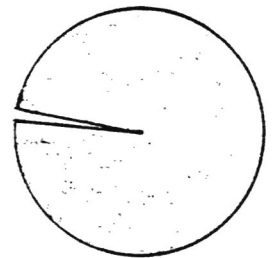
Le professeur : *Notre part est délimitée par 2 rayons et un arc de cercle. Comme s'appelle un tel morceau ?*

Personne ne sait.

Le professeur : *Un secteur circulaire. Continuez*

Les élèves découpent leur part. Dans l'ensemble de la classe des portions très variées sont apparues :

des très petites  jusqu'aux très grandes



Personne n'a gardé la tarte entière.

Pour comparer leurs parts les élèves utilisent différentes méthodes ou remarques.

- Certains cachent un morceau avec l'autre quand cela est possible.
 - D'autres essaient d'évaluer la portion de la tarte enlevée. Ils disent :

- . *J'en ai la moitié, tu en as un quart"*
- . *J'en ai les trois quarts,....*
- . *J'en ai un quart,*
- . *J'en ai plus que la moitié, ...*
- . *J'en ai moins que la moitié, ...*

etc....

Mais invités à utiliser le premier procédé, ils constatent qu'ils ne peuvent pas toujours conclure même s'ils ont pu estimer leur portion par rapport à chacune des tartes entières.

Alors ils évoquent aussi le rayon.

J'en ai la moitié et toi le quart; mais ta tarte est plus grosse que la mienne.

On a ainsi mis en évidence deux informations: portion et taille.

Le professeur est alors intervenu pour faire le point des remarques de chacun et a repris pour tous la phrase de quelques-uns.

Si nos tartes avaient même rayon on pourrait mieux comparer.

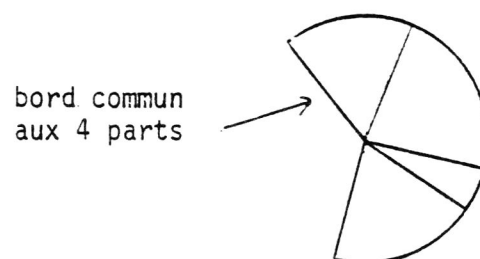
Spontanément, ces enfants veulent éliminer le facteur déjà bien connu (le cercle) pour étudier l'autre.

Le professeur donne une nouvelle consigne : *On prend tous le même moule, On fait tous une "tarte de rayon 10 cm. et on en coupe un morceau.*

Les élèves, pour comparer leur part

- soit concluent par un simple coup d'oeil
- soit superposent leurs morceaux avec un bord commun.

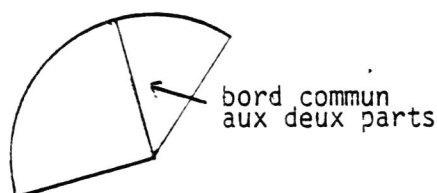
Certaines équipes superposent les quatre morceaux du plus petit au plus grand.



Le professeur montre ce travail à toute la classe, et demande aux enfants d'expliquer comment ils ont comparé. Ceux-ci donnent des explications diverses:

- . *le centre au milieu*
- . *on superpose les centres*
- . *on a mis 2 côtés bord à bord*

Le professeur prend 2 parts et les montre



comme ça ?

Un élève : *Non, il faut les faire chevaucher*

La classe a pris conscience qu'il fallait ajouter une information supplémentaire.

On élabore une phrase qu'on note sur le cahier.

Pour comparer deux secteurs circulaires de même rayon, on les découpe, on les met l'un sur l'autre en superposant les centres et deux bords.

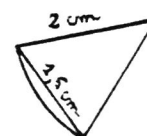
IV - CONSTRUCTION D'UN PREMIER INSTRUMENT DE MESURE

Consigne : Dessinez un secteur circulaire et donnez à votre voisin (qui ne doit pas le voir) des renseignements sur un papier pour qu'il puisse en dessiner un qui soit pareil (ou superposable, ou isométrique).

Quels genre de renseignements les enfants ont-ils utilisé ?

- le rayon du cercle (le plus souvent) ou le diamètre.
- un renseignement sur la portion
 - . moitiés, quarts, etc... si c'était le cas

- . un petit croquis pour montrer la corde et un nombre donnant sa mesure



Dans la classe que l'enseignant considère comme la meilleure, tout le monde a fourni assez de renseignements et personne n'a parlé de rapporteur.

On a ainsi obtenu sur 23 élèves environ :

- . une fois $3/4$
- . trois fois *une moitié*
- . une fois *une moitié de quart*
- . deux fois un croquis pour montrer la corde (ils ne connaissent pas le mot d'ailleurs).
- . tous les autres $1/4$

Dans la classe considérée comme faible, trois ou quatre élèves n'ont donné que le rayon comme renseignement, et deux élèves ont parlé de rapporteur mais sans savoir ce qu'on pourrait bien en faire.

Puis les élèves ont comparé le dessin obtenu avec le dessin initial, en réutilisant le travail de comparaison fait précédemment les principales difficultés rencontrées sont venues :

- de confusion entre rayon et diamètre
- d'erreurs sur la portion

Un bilan collectif a permis de constater que les quarts ont été souvent dessinés à l'équerre, parfois à vue.

Le professeur : *Dans la classe on a vu que les renseignements donnés le plus souvent étaient $1/4$, $1/2$, $3/4$, moitié de quart.*

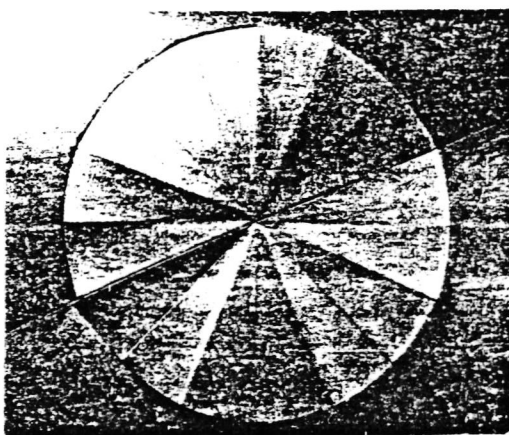
Un élève : *c'est un huitième*

Le professeur : *Peut-on faire des portions plus petites ?*

Elèves : *Oui, on partage encore
un seizième
un trente-deuxième*

On a ainsi abouti à la construction par pliages successifs d'un disque (sans déplier à chaque fois) d'une petite portion : un seizième

Nouvelle activité : on mesure avec le seizième étalon



Résultat du pliage

Le professeur : *Chaque élève va dessiner un secteur à l'aide de son étalon puis le donner à son voisin pour qu'il le mesure aussi. Dessinez une portion de un seizième, puis une portion de sept seizièmes.*

Plusieurs démarches ont été adoptées pour construire la portion de sept seizièmes.

Certains ont reporté avec leur coin (seizième étalon) sept fois leur seizième. Ce qui sera expliqué par l'écriture :

$$\frac{7}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{16}$$

$$\frac{7}{16} = 7 \times \frac{1}{16}$$

D'autres ont déplié leur disque jusqu'au demi-disque, ont rabattu un seizième et avaient ainsi un coin de 7 seizièmes à transcrire sur papier.

$$\frac{7}{16} = \frac{8}{16} - \frac{1}{16}$$

Le voisin n'obtient pas toujours la même chose, contrairement à ce que les élèves prévoyaient.

Le professeur : *Pourquoi ?*

Des élèves : . *Ce n'est pas bien fait*

. *Les seizièmes ne sont pas tous pareils*

. *On recommence, mais il ne faut pas plier plus que la moitié*

V - AMELIORATION DE L'INSTRUMENT

Le coin étalon n'est pas satisfaisant car ce n'est qu'un seizième approximatif. Même déplié, on voit que le pliage n'est pas régulier. On pourrait améliorer cet étalon en dépliant après chaque pliage pour replier dans une autre direction. On utiliserait alors les seizièmes repérés sur le disque déplié mais l'instrument ne serait pas plat.*

* Voir photo à la page précédente

Le professeur : *Dessinez un partage régulier pour améliorer votre instrument.*

Certains plient en 2, puis en 4 d'abord. La majorité dessine un diamètre puis un autre avec l'équerre pour la plupart. Ils partagent ensuite en deux à l'aide de la corde. Ils aboutissent à 32 ou 64 secteurs suivant la taille de leur disque.

Le professeur : *Vous allez maintenant construire une portion avec les renseignements suivants :*

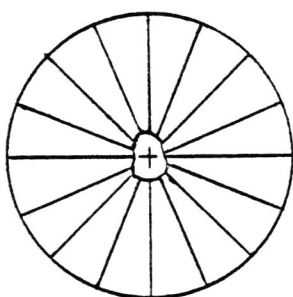
- 11 cm de rayon (plus grand que le rayon de l'instrument)
- 5 soixante quatrième

Les élèves eurent un problème pour placer le centre de l'instrument sur le centre du secteur qu'ils voulaient construire. Ils ont utilisé la pointe du compas à travers leur instrument.

Certains ont alors eu l'idée de faire un trou, mais ils se sont aperçus qu'ils ne voyaient plus le centre de l'instrument.

Le professeur : *Collez un bout de scotch des deux côtés et marquez à nouveau le centre.*

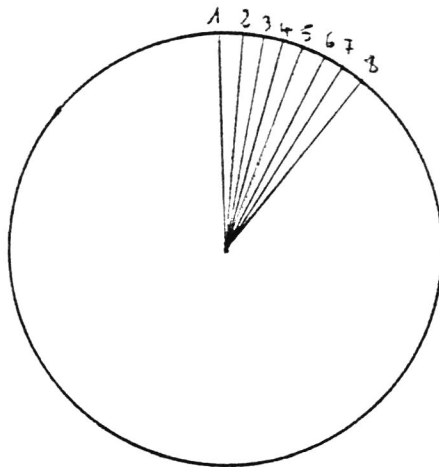
Réalisation et marquage du centre par 2 traits.



(Voici le dessin d'un rapporteur ainsi obtenu avec un partage en 16)

Le professeur : *Construisez un secteur de huit soixante quatrième.*

Quelques élèves comptent en montrant les traits du doigt



un
deux
trois ...

et dessinent donc
7 soixante quatrième au lieu de 8

Le professeur : *Construisez une autre portion*

- 5cm de rayon (plus petit que les rayons des instruments)
- 29 soixante quatrième

Il a fallu prolonger les "rayons".

Le professeur : *Construisez encore une portion*

- tant de rayon
- 51 soixante quatrième

Les élèves sont alors fatigués de compter et proposent de graduer.

Certains commencent comme cela

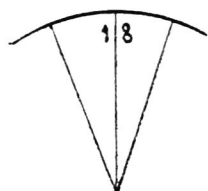


Des élèves :

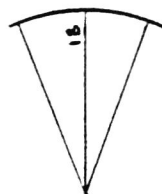
- . *Il faut un zéro comme sur la règle*
- . *Il faut numéroté les traits comme un double décimètre.*

26

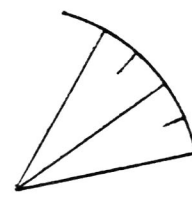
Le professeur : Notez



ou

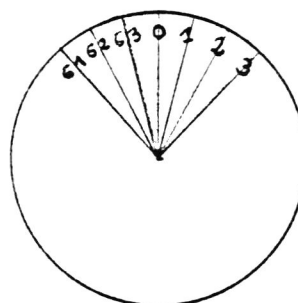


.. Vous pouvez numéroté de 2 en 2 seulement.



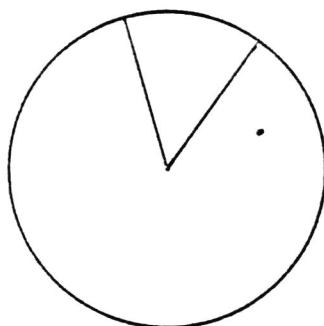
Ils graduent :

Un élève : Je n'en ai que 63 !



Le professeur fait regarder une montre au lieu de 12 on aurait pu mettre 0, ... ou 24.

Après cette mise au point relative au nombre de traits et d'intervalles, on va pouvoir réutiliser l'instrument.

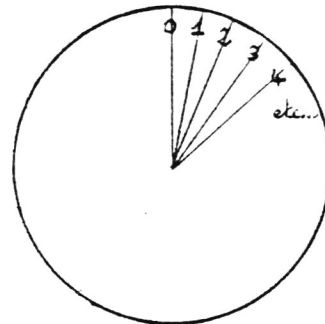


A chaque fois, on mesure les deux secteurs en soixante quatrième et on constate que la somme fait 64^{*}

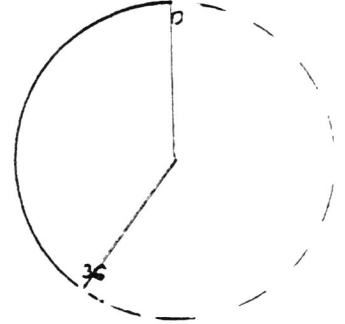
^{*} Si le premier est un nombre entier de soixante quatrième.



A un moment donné un enfant
mesure le secteur



avec son instrument



et lit : 36

Son voisin lui dit : *Mais ce n'est pas possible, c'est moins que la moitié.*

Il prend son instrument, mesure aussi et lit 36 .

Que se passe-t-il ?

La classe analyse la situation et on constate qu'il faut balayer le secteur à mesurer dans le sens (croissant) de la graduation. On va vérifier.

Le professeur dessine au tableau



Voici un secteur à mesurer, où allez-vous placer le zéro ?

Tous : *en haut*

Une petite fille : *non, en bas*

Et l'on a alors constaté que cette petite fille avait gradué son instrument dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, tandis que tous les autres l'avaient gradué dans le sens des aiguilles d'une montre.

La petite fille est désolée car elle pense s'être trompée.

Le professeur donne alors d'autres portions à mesurer en demandant de marquer le zéro sur le trait où l'on devra placer le zéro de l'instrument. La petite fille trouve les mêmes résultats que son voisin avec son instrument, elle est rassurée.

Le professeur : *Oui, je vais vous donner un instrument. Comment va-t-il être gradué ?*

Les élèves : *.Des partages en deux plus fins
. 180*

Maintenant que les enfants sont bien familiarisés avec leur instrument, le professeur distribue un rapporteur rond gradué en degré, dessiné sur carton.

La graduation étant dans le sens trigonométrique, la petite fille est contente.

Les élèves découpent le disque gradué; ils évident le centre et le marquent sur du scotch comme ils ont fait sur leur propre instrument.

Le professeur propose encore de mesurer des portions en plaçant bien le zéro.

Il demande aussi la mesure de la portion située entre deux graduations quelconques. Voici quelques questions posées :

- . entre 17 et 35
- . entre 20 et 352 dans le sens de la graduation
- . entre 352 et 20 dans le sens de la graduation

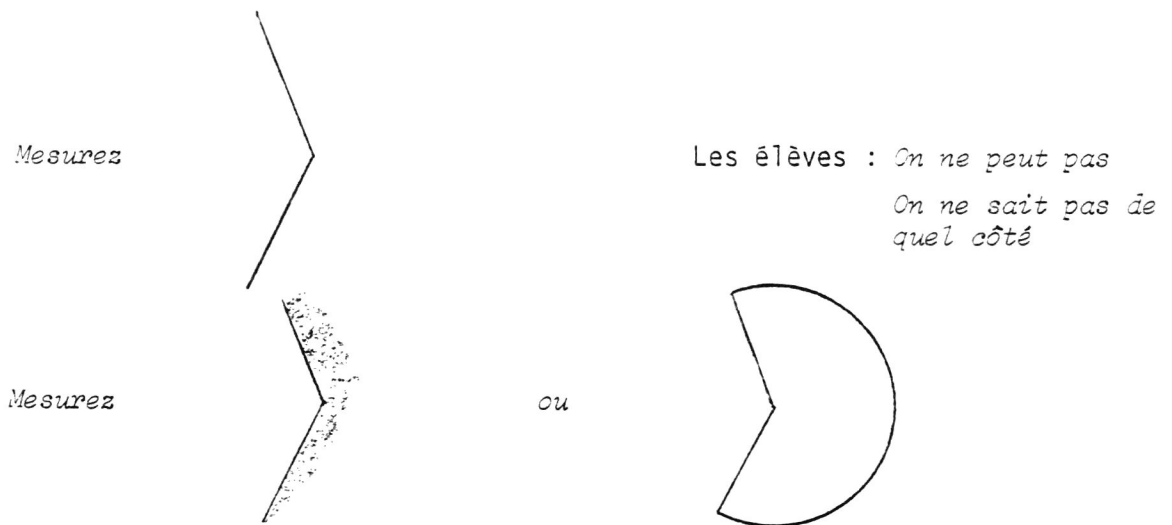
Les élèves se familiarisent ainsi avec l'instrument en degrés.

VI - LE RAPPORTEUR

Le professeur fait redire comment on s'y prend pour mesurer.

Des élèves : *.on place le centre
.on place un côté*

Le professeur dessine au tableau.



(chacun de ces schémas donne le renseignement voulu)

Le professeur : Où met-on le zéro ?

Un élève : Là

Un autre : Non, ça tourne pas dans le sens des aiguilles d'une montre

Le professeur : Là alors ?

Le professeur : On tourne dans quel sens ?

Un élève : De gauche à droite

Le professeur (avec des gestes):

C'est quoi de gauche à droite ?

Après quelques remarques confuses d'élèves perplexes.

Un élève : Non, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

Le professeur : Construisez une portion de la mesure que vous voulez et donnez là à votre voisin pour qu'il la mesure. Comparez vos résultats.

Dans l'ensemble les élèves mesurent bien. Il se glisse encore quelques erreurs que les enfants découvrent bien entre eux.

- alignements imprécis, centre pas tout à fait en face
- erreurs de lecture (car l'instrument est gradué en demi-degré)
- erreurs d'inattention.

Le professeur : *Le refaire une fois*

Ils le font. Dans cette classe (la meilleure) deux enfants n'avaient pas encore assimilé comment on mesurait une portion.

Le professeur : *Maintenant c'est moi qui vous donne quelque chose à construire 203°*

Le professeur circule et trouve encore quelques erreurs de sens.

Le professeur : *Placez votre zéro pour me simplifier le travail de vérification* (il le dit en fait pour obliger les enfants à réfléchir au sens). Après vérification de tous les cahiers.

Le professeur : *Je vous en donne un autre*

Un élève : 413°

Remarque : L'élève a donné un nombre supérieur à 360° , c'est justement ce que le professeur s'apprêtait à faire.

Le professeur : *D'accord, 413°*

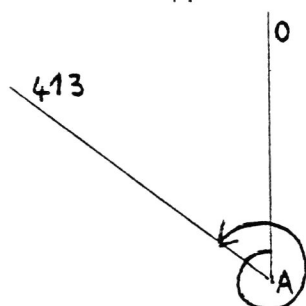
Des élèves : . *On ne peut pas*
 . *C'est pas possible*
 . *Si, si je sais*

et ils se mettent au travail.

Plusieurs enfants trouvent une bonne construction

- soit en faisant ($413 - 360$)
- soit en comptant sur leur rapporteur $360, 370, 380, 390, 400, 410, 413$, en amorçant un deuxième tour.

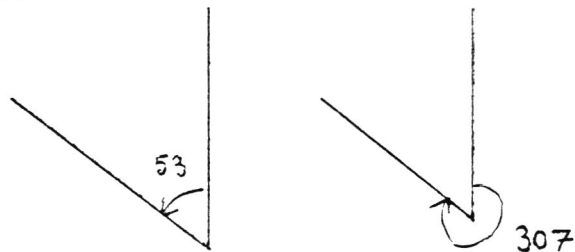
On voit apparaître plusieurs fois le dessin suivant :



que le professeur reproduit au tableau.

Il prend alors une règle, la place sur la demi-droite appelée 0, une extrémité sur A, et la fait pivoter autour de A, de un tour complet plus ce qu'il faut pour arriver sur l'autre. *Est-ce que j'aurais pu donner d'autres nombres pour trouver la même chose ?*

Apparaissent les résultats :



Le professeur : *Pouvez-vous trouver autre chose ?*

Un élève : 1493

Le professeur : *Comment as-tu trouvé cela ?*

L'élève : *J'ai tourné 4 fois*

Le professeur : *Autre chose ?*

Un élève : *On peut tourner autant de fois qu'on veut.*

La cloche sonne

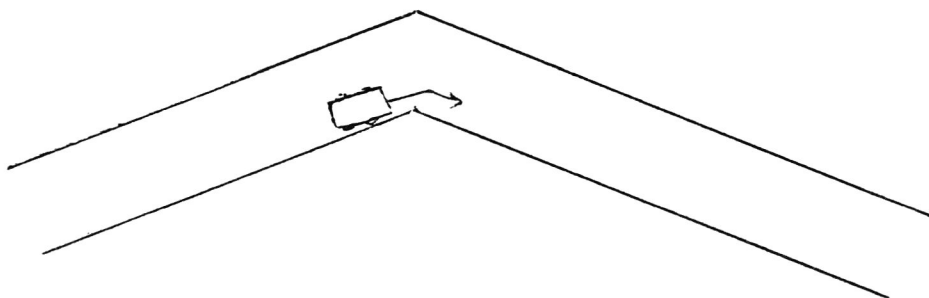
VII - LES ROTATIONS

Au cours de la leçon suivante le professeur a repris la même situation. Il a fait inscrire dans un tableau à 2 colonnes les nombres qui permettaient de caractériser les rotations pour passer d'une demi-droite à l'autre.

Dans le sens contraire des aiguilles d'une montre	Dans le sens des aiguilles d'une montre
413	307
53	$307 + 360$
1493	$360 - 53$
$n \times 360 + 53$	$n \times 360 + 307$
avec n naturel	ou $n' \times 360 - 53$
	n et n' entiers naturels

Il a ensuite proposé la situation suivante :

Voici une voiture sur une route. De combien va-t-elle tourner ?



Là encore, la réponse devait contenir deux renseignements : un nombre et un sens de rotation.

Une fois que les élèves avaient bien compris sur plusieurs exemples, le professeur a dit :

Placez une voiture sur une route avant un virage pour lequel elle devra tourner de 36° dans le sens des aiguilles d'une montre par exemple.

La situation s'est avérée intéressante car la réponse n'est complète que si le dessin comprend la route et la position de la voiture (pour indiquer le sens du déplacement).

La séance s'est terminée après plusieurs constructions sur le même principe.

L'année se terminant, aucun prolongement n'a été envisagé.

VIII - CONSTRUCTION D'UN CADRAN DE MONTRE

I - DEMARCHE DANS UNE PREMIERE CLASSE

Consigne : *Dessinez en les agrandissant un cadran de montre circulaire et un cadran de montre rectangulaire (indiquez l'échelle du dessin). Faites un grand dessin qui remplisse toute la feuille.*

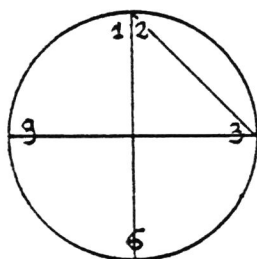
Le professeur anime une discussion sur la position et le mouvement d'une aiguille. On remarque qu'une extrémité est au centre du cadran et que l'autre décrit un cercle.

De plus, le mouvement est régulier. La petite aiguille, par exemple, tourne autant à chaque heure.

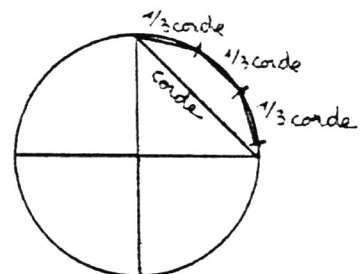
On décide de dessiner le cercle que décrit l'extrémité de la petite aiguille et de le graduer régulièrement pour marquer les douze heures. Il s'est alors posé le problème du partage du cercle en 12. La construction d'un dodécagone régulier n'avait pas été étudiée dans cette classe. Certains se souvenaient avoir tracé des hexagones dans la classe antérieure et ont utilisé cela.

Tout le monde (ou presque) a tracé d'abord deux diamètres perpendiculaires (ou à peu près) sans savoir l'exprimer si on le demande. C'est intuitif pour les enfants mais cela demande à être explicité à un moment ou à un autre avec toute la classe.

Pour partager en trois, les enfants qui ne connaissaient pas^{*} l'hexagone ont souvent adopté la démarche suivante :



Ils ont tracé une corde, l'ont mesurée, ont divisé le nombre obtenu en trois :



ils ont reporté trois cordes de longueur du tiers de la précédente et constaté que cela ne marchait pas.

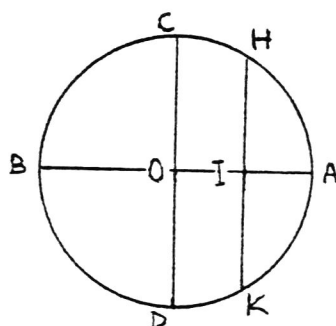
^{*} ou ne pensaient pas.

Ils ont été très étonnés, puis, soit tous seuls, soit sur l'intervention de l'enseignant se sont rendus à l'évidence et ont repris leur recherche.

Certains ont mesuré la corde restante, divisé encore en trois et rajouté à l'ancien tiers ce qu'ils trouvaient là. Ils y étaient presque. Il fallait, éventuellement, reprendre le procédé une dernière fois. D'autres ont constaté que leur méthode ne convenait pas, ont tout effacé et partagé, en tâtonnant, en utilisant toujours le compas pour reporter des arcs égaux.

Un élève a pris une ficelle, mesuré la longueur du cercle, partagé en douze et reporté sur le cercle douzième après douzième.

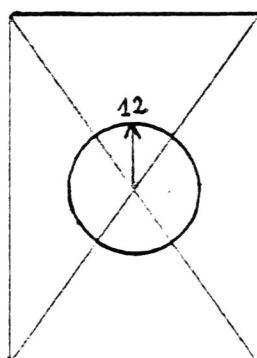
Un autre a fait la construction suivante :



Il a construit ses deux diamètres AB et CD, marqué le milieu I de $[O, A]$, tracé la parallèle à CD en I qui coupe le cercle en H et K. H et K sont des points de la graduation voulue.

L'avait-il déjà vu ou est-ce dû au hasard ? On n'a pas pu savoir.

Une fois gradué le petit cercle décrit par la pointe d'une aiguille se pose le problème du report sur le bord du cadran.



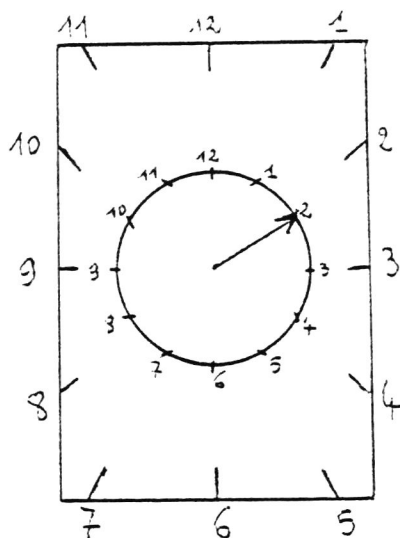
Remarque : Pour le cadran circulaire on pouvait bien sûr graduer directement le bord du cadran. L'utilisation du cercle trajectoire de l'extrémité de l'aiguille n'est en réalité indispensable que pour le cadran rectangulaire.

2 - DEMARCHE DANS UNE DEUXIEME CLASSE

Consigne : *Dessinez un cadran rectangulaire sur une feuille, dessinez un cadran circulaire de l'autre côté et graduez les deux.*

Pour le cercle, les mêmes problèmes que dans l'autre classe se sont posés.

Pour le rectangle les enfants ont cherché à graduer régulièrement le rectangle. On les a laissé faire et ensuite on leur a parlé du déplacement de l'aiguille, on leur a fait graduer le petit cercle décrit par son extrémité et se demander si cela allait avec leur graduation. Beaucoup trouvait que oui dans cette classe assez faible.



Mais quand on leur demandait *Imaginez que la petite aiguille est sur le 2 du petit cercle, vers où regarde-t-elle ?* Ils se rendaient compte qu'elle n'était pas dirigée vers le 2 du rectangle.

Ils n'ont plus eu alors qu'à modifier la graduation du rectangle en traçant des demi-droites issues du centre et passant par les points marqués sur le petit cercle pour voir où elles coupaient le rectangle.

CHAPITRE 3

ESSAI D'ANALYSE DIDACTIQUE DES ACTIVITES EN SIXIEME

I - LE CERCLE :

1 - DEFINITION D'UN CERCLE

a) Quelques réponses à une enquête dans la rue :

- *C'est un truc comme ça* 
- *Je crois que c'est une figure géométrique*
- *Je ne me rappelle plus la géométrie*
- *Une tige qui fait ça* 
- *Une longue courbe qu'on raccroche*
- *C'est un rond. Un rond rond. Une forme de rond*
- *Une ligne courbe fermée qu'on peut tracer avec un compas*
- *C'est un rond qui a une forme bizarre*
- *C'est une infinité de points en forme de circonférence*
- *C'est une forme géométrique parfaite qui peut évoquer la lune ou le soleil couchant*
- *C'est une réunion de plusieurs personnes*

b) Pour les enfants :

Très jeunes (avant 3 ans en général) les enfants savent reconnaître un rond parmi différentes formes.

Vers 7 ans, ils sont capables d'exprimer un critère de reconnaissance avec des formules du genre :

- *Cà tourne toujours pareil* (pour un vrai rond)
- *C'est pas rond partout pareil* (pour une ellipse, par exemple)

La définition usuelle du cercle *ensemble des points à distance donnée d'un point donné* n'est pas spontanément* perçue comme condition nécessaire et suffisante.

Les enfants comprennent que tous les points tracés avec un compas sont à la même distance du centre. Mais en l'absence d'activités spécifiques portant sur le régionnement du plan, la définition n'est pas fonctionnelle. En effet, on constate qu'en 6ème encore beaucoup d'élèves ne réalisent pas que le compas permet d'obtenir tous les points à une distance donnée d'un point donné et ne pensent pas à utiliser le compas pour traduire une propriété portant sur des distances.

De fait la plupart du temps les enfants oublient purement et simplement le centre ou alors ne le perçoivent que comme centre de symétrie.

Au cours des activités décrites, quand il est dit : *Si deux cercles sont superposés les centres coïncident*, ces centres interviennent seulement comme centre de symétrie (les enfants parlent volontiers de *milieu*). On aurait pu dire la même chose pour des rectangles ou toute autre figure ayant un centre de symétrie.

On peut d'ailleurs remarquer que l'aspect distance au centre n'est pas utile pour les activités portant sur les secteurs.

2 - LE MOT SUPERPOSABLE

Tout le monde donne une signification au mot *superposable* pour des figures planes : les deux figures occupent le même emplacement dans l'espace (on néglige leur épaisseur).

La superposition devient impossible pour des objets de l'espace qui sont cependant susceptibles d'occuper (mais à des instants différents) le même emplacement.

Le mot *superposable* n'a plus de sens.

* Ils auraient plutôt tendance à décrire un cercle tout autrement mais leurs définitions sont plus délicates à manier.

On est alors conduit à analyser le critère de ressemblance de deux tels objets, c'est-à-dire d'en faire une description mathématique telle que:
 Si on nomme A_1, B_1, C_1, D_1 etc.... des points[★] du solide S_1 et $A_2, B_2, C_2, D_2 \dots$ les points du solide S_2 qui peuvent occuper les places respectives de A_1, B_1, C_1, D_1 dans la substitution évoquée ci-dessus, on a :

$$d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2), \quad d(A_1, C_1) = d(A_2, C_2), \quad d(A_1, D_1) = d(A_2, D_2),$$

$$d(B_1, C_1) = d(B_2, C_2) \quad \text{etc} \dots$$

De façon générale; si M_1 et N_1 désignent deux points quelconques de S_1 , si M_2 et N_2 désignent les points correspondants de S_2 , on a

$$d(M_2, N_2) = d(M_1, N_1)$$

On dit souvent que S_1 et S_2 sont isométriques pour traduire toutes ces égalités de distances^{★★}.

L'usage du mot isométrique pour les figures planes superposables est rétroactivement légitime.

Est-il ou non préjudiciable pour les enfants de l'employer quand ils ne travaillent que sur des figures planes pour lesquelles le mot superposable est bien clair ?

II - COMPARAISON DE SECTEURS DE DISQUE

Dessinez un secteur de disque pour représenter une tarte est déjà une abstraction. Cependant le support *part de tarte* a beaucoup motivé les enfants pour comparer des secteurs circulaires entre eux. Auraient-ils aussi bien participé sans ce support ? Nous ne pouvons le dire.

★ Nous sommes dans le modèle, nous ne sommes plus dans le réel lorsque nous parlons de points et de solide

★★ Remarquons que 2 solides isométriques ne peuvent pas toujours occuper le même emplacement (même à des instants différents): penser par exemple, à 2 solides idéalisant nos deux mains. Ils sont identiques du point de vue des distances, mais différents par l'orientation!

L'expression *secteur circulaire* n'était connu d'aucun enfant. On peut d'ailleurs remarquer que *secteur disquaire* serait peut-être mieux adapté mais n'est pas utilisé.

Le professeur n'a pas insisté sur le moment, mais au fur et à mesure que le travail avançait, il a progressivement remplacé l'expression *part de tarte* par le mot *portion* au cours des manipulations et discussions et par l'expression *secteur circulaire* dans le moment de mise en forme des résultats. Divers niveaux de langage ont ainsi été pratiqués dans la classe comme dans la vie courante pour l'apprentissage de la langue maternelle.

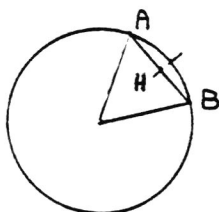
On peut remarquer que la comparaison de deux secteurs circulaires de même rayon utilise, en fait, la superposition des deux disques dont sont extraits les secteurs. On voit ainsi l'intérêt des activités de superposition de disques faites auparavant et on retrouve l'importance des centres.

III - REPRODUCTION D'UN SECTEUR

1 - LE MESSAGE : Les élèves ont d'abord dessiné un secteur circulaire quelconque; ils se sont rendus compte qu'ils n'arrivaient pas à le décrire à l'exception de 2 élèves qui ont pensé à mesurer la corde correspondante. Ceux qui ne s'en sortaient pas ont alors dessiné un secteur qu'ils ont pu décrire à l'aide d'une fraction simple.

2 - LA CONSTRUCTION D'UN BON INSTRUMENT

L'idée qui vient aux enfants quand on leur demande comment obtenir des divisions plus petites est le partage en deux. C'est effectivement le plus naturel et le plus simple à réaliser, que ce soit en pliant, ou en dessinant (on se sert alors d'une corde).



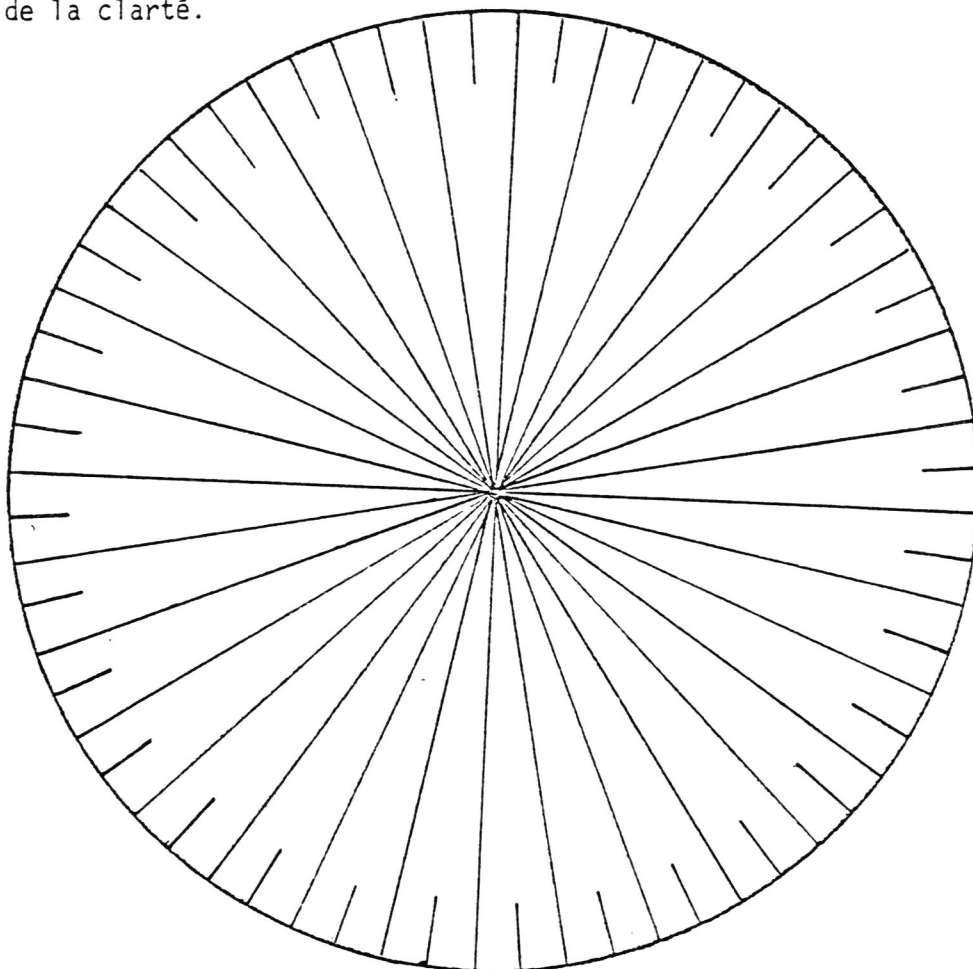
Pour partager AB en deux, on prend le milieu H de la corde [A, B], et OH partage le secteur en deux.

Malheureusement pour les enfants, les unités conventionnelles ne sont pas issues de partages en 2 successifs, que ce soit le degré, le grade ou le radian.

Néanmoins, cette envie de partager en deux des enfants a été exploitée par le professeur pour leur faire construire un instrument de mesure plus satisfaisant que leur étalon : *un seizième* obtenu par pliage successifs.

Cela demande beaucoup de soin dans le dessin mais les élèves appliqués sont récompensés par le résultat. Certains élèves trop peu soigneux obtiennent des partages visiblement irréguliers.

Jusqu'au partage en 32, on peut dessiner les diamètres, par contre pour le partage en 64, on peut se contenter de mettre un tiret qu'on obtient immédiatement car la corde est alors très proche de l'arc. On gagne ainsi du temps et de la clarté.



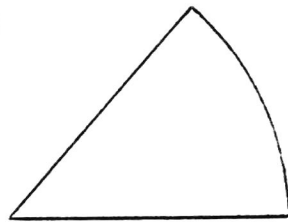
- Partage en 64 obtenu en dessinant -

3 - LE MESURAGE

Quand un enfant dessine un secteur de p soixante-quatrième, son voisin, en contrôlant, tombe *juste* ou à peu près.

Mais pour un secteur dessiné n'importe comment, la manipulation fait tomber souvent loin d'un trait, comme dans toute activité de mesurage, ce qui conduit à donner le résultat par un encadrement.

Exemple :



Ce secteur mesure entre 8 soixante-quatrième et 9 soixante-quatrième

4 - L'ELABORATION D'UNE GRADUATION :

En construisant eux-mêmes leur instrument de mesure les élèves ont été amenés à réfléchir d'une part :

- à la position des nombres (entre les traits ou sur eux)
- au rôle du zéro
- l'absence du 64

d'autre part

- au sens dans lequel on gradue.

A ce sujet il s'est avéré fort instructif dans la classe dont on a parlé qu'une enfant ait gradué dans le sens contraire des autres^{*}. Si l'on veut être sûr qu'une telle situation se reproduise, il peut être intéressant de circuler dans les rangs et, tout en aidant certains enfants, d'amorcer (pas forcément en partant du zéro d'ailleurs) le numérotage de leurs traits dans un sens ou dans l'autre. Il est à noter que c'est le sens inverse de celui d'une montre qu'il faut provoquer, car l'autre apparaît majoritairement, voire unanimement (c'est ce qui s'est passé dans une autre classe).

^{*} Ce fut l'effet du hasard, le professeur n'étant pas intervenu.

5 - LES FRACTIONS

Les enfants notent $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, mais quand ils parlent de huitième, seizième, soixante-quatrième, ils n'ont plus de notation à leur disposition. Le professeur n'en a pas donné préférant leur garder un statut d'unité comme (1 m. ou 1 cm.). Il serait sans doute intéressant de profiter de ce genre de situation pour introduire de nouveaux nombres.

IV - PASSAGE AUX ROTATIONS

L'utilisation d'un instrument rond (et non demi-rond comme l'instrument courant) et l'utilisation d'une unique graduation pendant la période d'initiation a obligé les élèves à se poser des questions relatives aux sens de rotation. Ce fut une première étape.

Et quand on a parlé^{*} d'un nombre qui dépasse la mesure du tour complet, la notion de région s'est trouvée gommée. Le seul recours possible était alors l'interprétation en terme de mouvement de rotation.

Les comportements des élèves nous confirment qu'il n'y a pas de raison d'ordre psychogénétique pour éluder cet aspect avec des élèves de 6ème et même des élèves plus jeunes (cf. chapitre 11)

C'est au contraire leur nuire que de ne pas aborder cet aspect des choses. Il ne faut pas alors s'étonner des difficultés qu'ont les élèves de 1ère C à penser *orienté*. Dans cette classe on n'a plus le temps, ni l'envie de manipuler. On en est au stade de la mise en théorie d'une expérience non vécue.

* Il est à noter que cette idée a germé dans la tête d'un élève. C'est donc un problème à leur portée.

V - GRADUATION D'UN CADRAN DE MONTRE

1 - ECHELLE

Comme la classe venait de travailler sur les échelles le professeur a demandé aux élèves d'indiquer à quelle échelle ils dessinaient leur cadran de montre pour leur donner l'occasion de réfléchir à une échelle d'agrandissement, alors que le plus souvent avec les cartes ils voient des échelles de réduction.

2 - CONSTRUCTIONS D'HEXAGONES

a) Les attitudes les plus souvent rencontrées

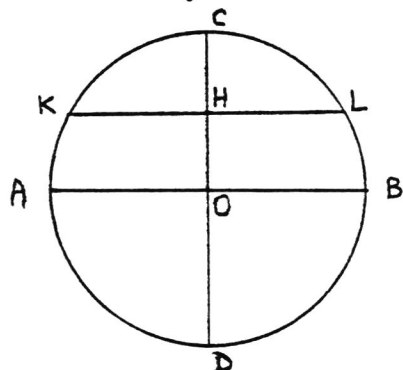
Les enfants qui pensaient à utiliser un hexagone régulier et qui savaient le construire au compas, ont pu rapidement partager leur cercle en douze après avoir tracé deux diamètres perpendiculaires.

Ceux qui se sont lancés dans un essai de partage en 3 en n'utilisant pas la particularité de la situation, ont permis de soulever des problèmes importants sur les arcs et les cordes.

Lorsque le maître a fait la synthèse de ce qui s'était passé, chacun a appris quelque chose.

b) Une attitude rencontrée exceptionnellement

Que dire à l'élève qui a construit son hexagone en utilisant le milieu d'un rayon ?



H est le milieu de (O, C)

KL est parallèle à AB et contient H

Cet élève à raison (car $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$), et il peut le vérifier sur son dessin si celui-ci est soigné.

On peut essayer de valider cette construction :

O et C sont symétriques par rapport à la droite KL. Donc $\angle [K, O] = \angle [K, C]$. Par conséquent la corde [K, C] a pour longueur R (de même que la corde [L, C]) et on obtient bien les mêmes points que dans la construction au compas.

Il reste à justifier que KC est un côté d'un hexagone régulier (ce qui validera du même coup la construction de la rosace).

On peut remarquer qu'on a ainsi un bon moyen de couper une tarte en 6.

VI - A PROPOS DES CORDES ET DES ARCS

1 - INTERET DE LA SITUATION

Cette activité est riche car elle fait intervenir de nombreuses notions :

- lien entre arcs de cercles et cordes qu'ils sous-tendent
- polygones réguliers
- notion d'angle
- proportionnalité entre mesure d'angles et longueur d'arc intercepté
- non proportionnalité entre mesure d'angle et longueur de ligne brisée interceptée

Elle peut ainsi intervenir de plusieurs façons :

- avant l'étude de chacune de ces notions (en prenant soin au fur et à mesure des découvertes de bien faire le point sur chaque notion envisagée)
- comme utilisation et enrichissement des notions mises en jeu après une étude antérieure de certaines d'entre elles.

C'est en particulier de cette manière qu'on pourrait procéder en début de 5ème et faire ainsi une révision active.

2 - UTILISATION DE LA REGULARITE

Les élèves de 6ème à qui la graduation d'un cadran rectangulaire a été proposée sans aucune indication ont tous gradué régulièrement leur rectangle. Il ne leur est pas venu à l'idée d'utiliser les angles.

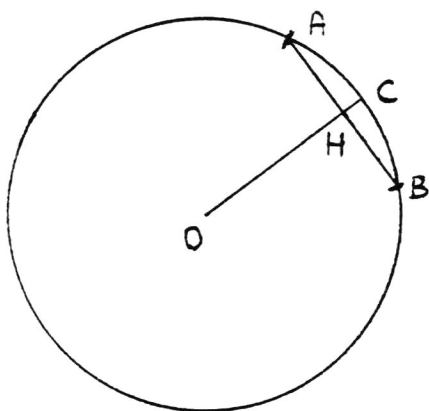
Dans quelles circonstances pourrait-on être sûr qu'au moins quelques élèves y pensent ?

- après avoir parlé d'angles et de leurs mesures ?
- au cours de quelle année scolaire ?
- à quel moment de l'année ?

Les difficultés des élèves proviennent de ce qu'ils ont interprété le problème du partage des arcs de cercles comme un problème de partage de cordes; cela marche bien pour le partage en deux et ne marche plus pour le partage en trois. En effet :

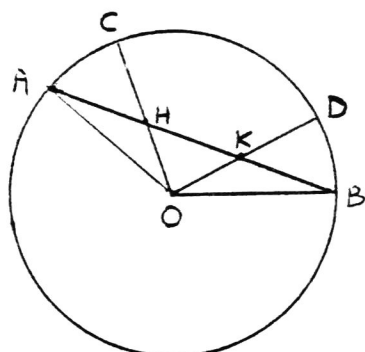
. Pour construire un arc de même longueur qu'un autre arc du même cercle, les élèves utilisent le compas. En fait, ils reportent des cordes de la même longueur ce qui peut se justifier. En effet, *deux arcs de même longueur sur un cercle ou sur deux cercles de même rayon sous-tendent des cordes de même longueur*. Ceci peut se constater à leur niveau par superposition.

. Partager en deux revient pour les enfants à trouver le *milieu*, c'est-à-dire à déterminer l'élément de symétrie (axe ou point) de la figure. Dans le cas d'un secteur circulaire ou d'un arc, l'axe de symétrie OC peut se construire facilement à l'aide du milieu de la corde AB; ce que les enfants expliquent en disant : *c'est pareil des deux côtés*.



Ils peuvent d'ailleurs valider cette phrase expérimentalement par pliage autour de (OC) et finalement partager en deux le secteur ou l'arc c'est partager en deux la corde.

. Ils adoptent une démarche analogue pour le partage en 3.

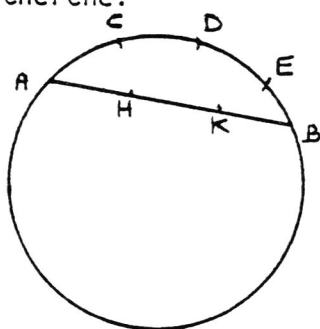


$$\ell[A, H] = \ell[H, K] = \ell[K, B]$$

Ils partagent en trois la corde AB avec leur double-décimètre et tracent OH et OK pour partager le secteur ou l'arc en trois: (On observe cette démarche, même si le partage en deux n'a pas été effectivement fait avant par les enfants).

Tous les enfants ne sont pas convaincus de leur erreur en regardant les arcs AC et CD; mais en essayant de les superposer ils doivent se rendre à l'évidence.

Une fois convaincus que cela ne marche pas, beaucoup* d'entre eux essayent de récupérer leur travail en reportant au compas le tiers de la longueur de la corde pour obtenir la corde sous-tendue par l'arc supposé être le tiers cherché.



$$\ell[A, H] = \ell[H, K] = \ell[K, B]$$

$$\ell[A, C] = \ell[A, H]$$

$$\ell[C, D] = \ell[A, H]$$

$$\ell[D, E] = \ell[A, H]$$

Mais E n'est pas égal à B

Ils constatent que le 3ème point ainsi obtenu ne coïncide pas avec l'autre extrémité de l'arc. Souvent alors ils repartagent en trois le bout restant et le rajoutent à chaque arc précédemment trouvé.

Remarque : Il n'existe aucun procédé géométrique pour partager un angle en trois. Par contre, il existe des systèmes articulés qui permettent de le faire.

Par exemple :



• articulation

▣ coulisse

* Les autres abandonnent les cordes et partagent en 3 en tâtonnant

CHAPITRE 4

SUGGESTIONS D'ACTIVITES

Dans ce chapitre sont regroupées un certain nombre d'activités sur les angles pouvant être proposées à différents niveaux.

Au paragraphe 1, nous avons réuni dans un tableau une liste d'objectifs pour les classes du 1er cycle, en citant, en regard, des activités correspondantes.* La plupart de ces activités sont décrites dans la suite du chapitre ou dans le reste de la brochure.

Dans les autres paragraphes, les activités sont regroupées par thème et sont destinées à des classes de différents niveaux (premier ou second cycle).

I - TABLEAU DE SUGGESTIONS POUR LE 1^{ER} CYCLE

CLASSE	OBJECTIFS	ACTIVITES
6ème	Faire fonctionner les notions de réunion et d'intersection sur des ensembles infinis; comprendre de qu'est un secteur	Etude des réunions ou intersections de secteurs et recherche des conditions dans lesquelles on peut obtenir encore un secteur
6ème	Savoir comparer des secteurs	Comparaison de secteurs circulaires (Chapitre 2 § III)

* Certains de ces objectifs ne sont pas mentionnés dans les programmes actuels, même implicitement, mais nous paraissent importants.

CLASSE	OBJECTIFS	ACTIVITES
6ème	Savoir mesurer un secteur circulaire ou autre	Utilisation d'un rapporteur rond - fabriqué par l'élève (chap.2 § IV,V) - fourni à l'élève pour utiliser une unité usuelle (chap.2 § VI)
De la 6ème à la 3ème	Savoir repérer une demi-droite par rapport à une autre Savoir tracer une demi-droite connaissant son origine et sa "position" (?) par rapport à une autre.	Description d'une figure utilisant à la fois une mesure de secteur angulaire et un sens de rotation Reproduction d'une figure Construction d'une figure à partir d'une description (en particulier: tracé de parallèles)
6ème	Prendre conscience du rôle particulier du cercle dans les relations entre arcs interceptés par des secteurs sur une courbe et les angles de ces secteurs (voir annexe 1)	Graduation de montre (Chap.2 §VIII) Partage d'arcs de cercle
3ème	Mesurer les arcs de cercle en unité d'angle ou en unité de longueur Mesurer l'angle dont on a tourné lorsqu'on se déplace - sur une ligne polygonale	Mesurer au rapporteur Mesurer avec une ficelle "Somme des angles" d'un triangle ou d'un polygône
6ème-5ème	- sur une courbe	Recherche de l'angle d'un virage (chap. 2 § 'II) Raccordement de rails de train miniature (Chap. 4 § III)

CLASSE	OBJECTIFS	ACTIVITES
6ème-5ème	Déterminer des mesures d'angles dans un polygône	Pavage d'un plan avec des polygônes réguliers (chap.4 § II)
5ème	Rechercher le centre d'un cercle dont fait partie un arc donné	.Raccordement de morceaux de couronne nécessitant un tri suivant leur rayon de courbure .Recherche du centre d'une assiette ou d'un morceau d'assiette .Raccordement de rails droits par des rails courbes pour un train électrique miniature à simuler sur un dessin (chap. 4 § III)
6ème	Composer des rotations	Tracé de dessins Etude de papiers peints
5ème	Voir dans l'espace	Construction de polyèdre réguliers (chap. 4 § II)
3ème	Trigonométrie dans le triangle rectangle	Recherche de la distance de l'horizon (chap. 4 § IV) Mesure du rayon de la terre
3ème	Trigonométrie sur le cercle entier	Repérage d'une demi-droite par rapport à une demi-droite de référence fixée.

II - UTILISATION DE POLYGONES RÉGULIERS POUR PAYER LE PLAN OU POUR CONSTRUIRE DES POLYÈDRES RÉGULIERS

Niveau : 6ème ou 5ème

Notion : angles de secteurs

i - PAVAGE DU PLAN

1.1 - Le problème

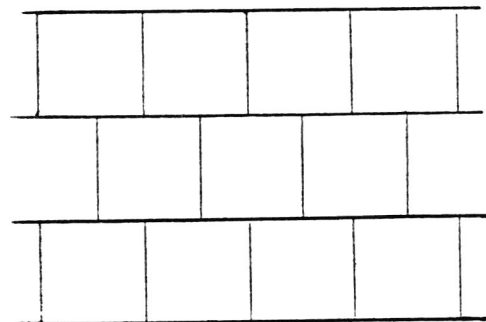
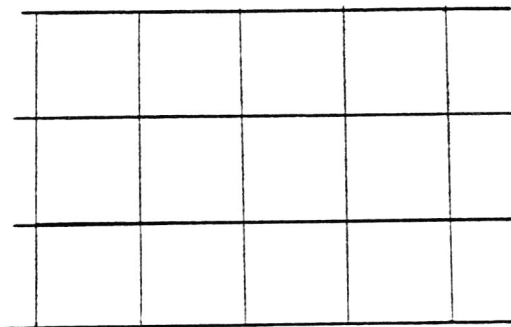
A des élèves connaissant les polygones réguliers, on peut demander lesquels ils choisiraient pour recouvrir une surface plane, quelle que soit sa taille, en n'utilisant qu'une forme de base et sans laisser de trou.

Ils connaissent tous les carrelages faits avec des carrés; certains connaissent aussi ceux faits avec des tomettes hexagonales. Y en a-t-il d'autres possibles ?

On précisera qu'on veut un dallage

du genre

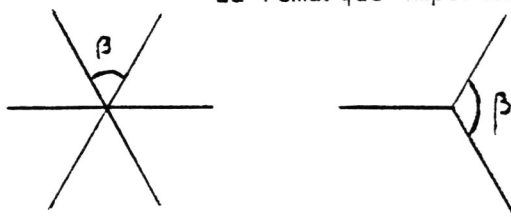
et non du genre



c'est-à-dire que les polygones se raccordent en leurs sommets.

1.2 - Indications sur la recherche

La remarque importante est la suivante :

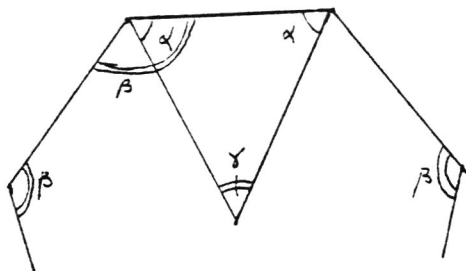


Si β est la mesure en radian de l'angle de deux côtés consécutifs du polygone de base, un multiple de β est 2π *

*Nous utilisons ici le radian, les élèves utiliseront sans doute, le degré ou le tour.

Pour découvrir cette relation les élèves auront sans doute besoin de faire des croquis.

. Voici une méthode pour évaluer β (une autre méthode, nécessitant moins de connaissance, est présentée dans le chapitre 11).



$$n\gamma = 2\pi \quad \text{donc} \quad \gamma = \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{D'autre part} \quad 2\alpha + \gamma = \pi$$

("Somme des angles d'un triangle")

$$\text{et} \quad 2\alpha = \beta$$

$$\text{Donc} \quad \beta = \pi - \gamma = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

. Il reste à étudier les multiples de β pour voir si un de ces multiples est 2π . On sait qu'un polygone a au moins 3 côtés. En organisant ces essais dans un tableau on obtient :

n	β	2β	3β	4β	5β	6β
3	$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
4	$\pi - \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π		
5	$\pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{12\pi}{5} > 2\pi$	impossible	
6	$\pi - \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π			
7	$\pi - \frac{2\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$	$\frac{10\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7} > 2\pi$	impossible		
8	$\pi - \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4} > 2\pi$	impossible		
9	$\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$	$\frac{14\pi}{9}$	$\frac{21\pi}{9} > 2\pi$	impossible		

. On peut penser avoir obtenu une liste exhaustive des possibilités.
Le raisonnement suivant permet de justifier cette conjecture :

Si un polygône a plus de 6 côtés, la valeur de β est plus grande que celle de l'hexagone régulier. Donc 3β sera toujours supérieur à 2π . Il faudrait seulement 2 polygones pour faire le tour, donc β devrait être égal à π , ce ne serait plus un polygône mais une ligne droite. Les seuls n qui conviennent sont donc 3, 4 et 6.

. Remarques :

1) Tout cela peut apparaître très vite dans une classe et rendre inutile les lignes 7-8-9 du tableau

2) On peut se reporter au chapitre 11 pour voir les réactions d'enfants de l'école élémentaire à cette situation.

2 - CONSTRUCTION DE POLYEDRES REGULIERS

2.1 - Problème

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers superposables. Quels polyèdres réguliers peut-on fabriquer? Limitons-nous aux polyèdres convexes.

2.2. - Indications sur la recherche

. Pour que les élèves donnent une signification à ce problème, il est souhaitable qu'ils disposent de polyèdres convexes servant de référence (ils n'ont pas à être réguliers).

En un sommet se raccordent p polygones réguliers à n côtés. Cette fois-ci une condition nécessaire mais non suffisante, a priori, d'existence du polyèdre est :

$$p \cdot \beta < 2\pi \text{ avec } p \geq 3$$

. En regardant le tableau précédent on voit que p ne peut être égal qu'à 3, 4 ou 5.

i) Peut-on faire des polyèdres réguliers avec des triangles équilatéraux ? 3β , 4β et 5β sont inférieurs à 2π . Il y a donc au plus trois tels polyèdres. Ils existent tous les trois :

- a) le tétraèdre régulier (4 faces)
- b) l'octaèdre régulier (8 faces)
- c) l'icosaèdre régulier (20 faces)

ii) Avec des carrés ? $3\beta < 2\pi$ $4\beta = 2\pi$

Un au maximum; c'est le cube (6 faces)
ou hexaèdre régulier

iii) Avec des pentagones $3\beta < 2\pi$ $4\beta > 2\pi$

Un au maximum. Il existe, c'est le dodécaèdre régulier (12 faces)

. La meilleure façon de se convaincre de l'existence de ces 5 polyèdres réguliers (solides de Platon) est de les construire, en carton par exemple.

3 - REMARQUE

Dans ces deux problèmes il y a deux parties :

D'abord la recherche de conditions nécessaires en supposant le problème résolu; c'est la phase de manipulations exploratoires.

Ensuite la preuve que ces conditions sont suffisantes, qui à ce niveau se traite par construction effective de l'objet désiré.

III - RACCORDEMENT DE RAILS DE TRAINS MINIATURES

Niveau suggéré : 6ème - 5ème

Notion : Angles de secteurs et orientation (préparation aux angles de couples de demi-droites).

N'ayant pas eu le temps d'expérimenter dans une classe une activité sur ce thème, nous donnons ici seulement quelques suggestions. Cette activité peut faire suite à l'étude de virages sur une route expérimentée en 6ème
(cf chap.2 § VII)

1 - PREPARATION DE L'ACTIVITE

Il vaut mieux s'informer, au préalable, des "rails" existant effectivement dans un modèle du commerce ("rails" étant pris ici au sens de "morceaux de voie")

A titre indicatif, voici les "rails" disponibles dans une marque de trains miniatures.

Rails droits : 153 mm, 140 mm, 247 mm, 109 mm, 104,5 mm, 37 mm, 29,5 mm

Rails courbes :

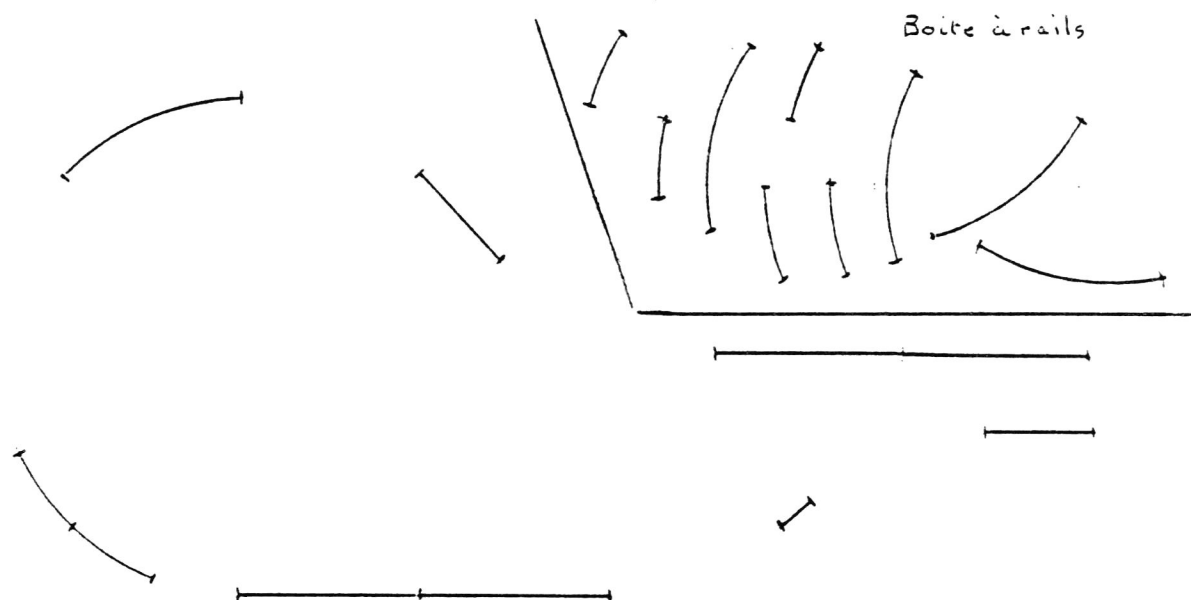
. pour un rayon de 445 mm, sont disponibles des rails de $\frac{1}{12}$ tour, $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12})$ tour

. pour un rayon de 385 mm, sont disponibles des rails de $\frac{1}{12}$ tour, $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{12})$ tour et $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12})$ tour

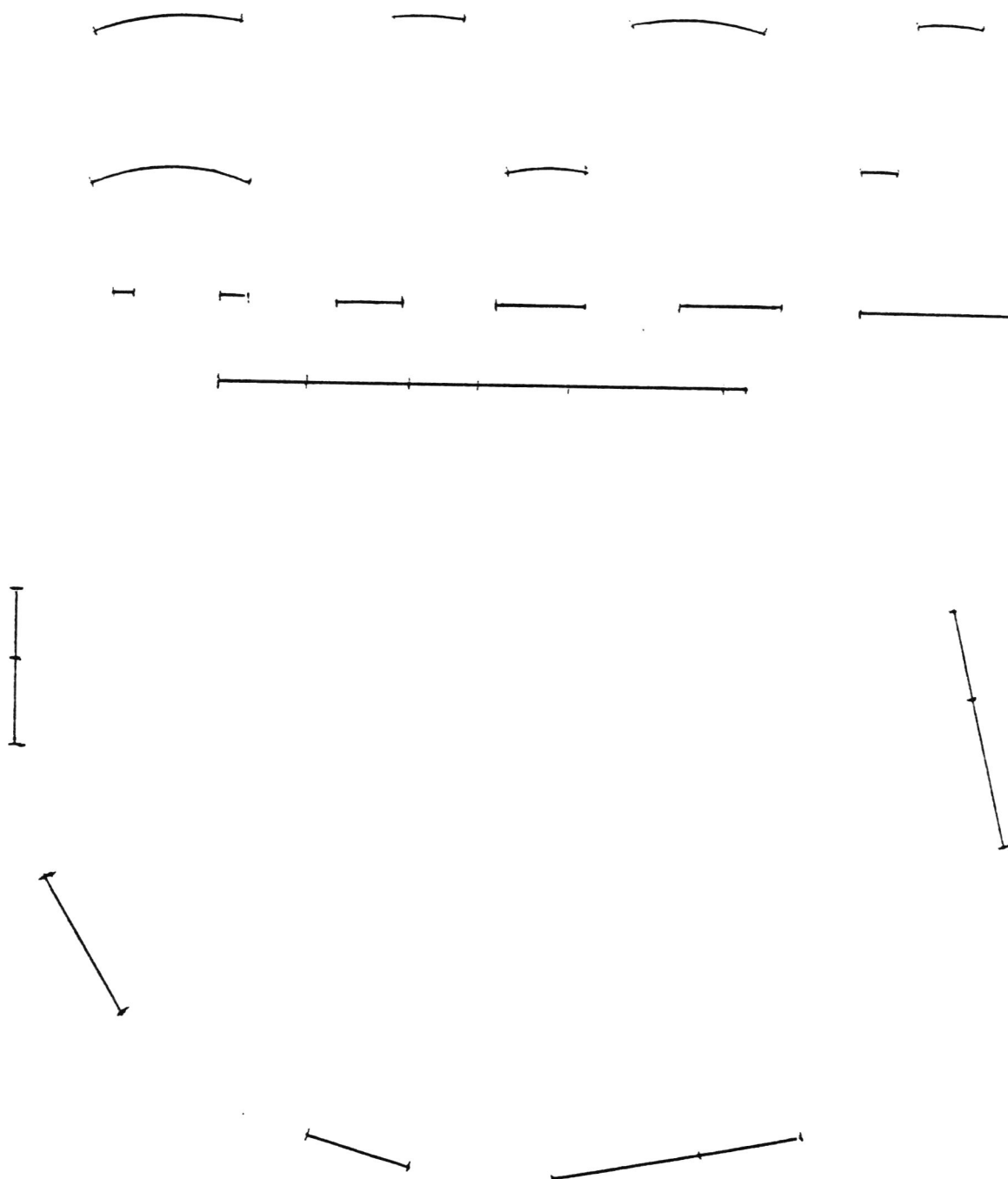
. pour un rayon de 325 mm, sont disponibles des rails de $\frac{1}{8}$ tour, $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})$ tour et $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{8})$ tour

2 - PROBLEME

2.1 - Donner aux élèves des schémas incomplets de circuits où figurent seulement des rails droits, ces rails étant schématisés par des segments et demander s'il est possible ou non de compléter les circuits sans toucher aux rails donnés.



54



2.2. - Indiquer aux élèves les rails disponibles (rails droits et rails courbes).

Il y a plusieurs façons de donner ces indications :

i) Schématiser les rails existants par des traits simples sur un papier, ou mieux sur un calque.

ii) Donner la longueur des rails droits et indiquez pour chaque type de rail courbe combien il en faut pour reconstituer un cercle et quel est le diamètre du cercle ainsi obtenu

iii) Ne rien dire mais répondre à toute question des élèves. C'est sans doute une façon très intéressante de procéder mais qui prendra plus de temps.

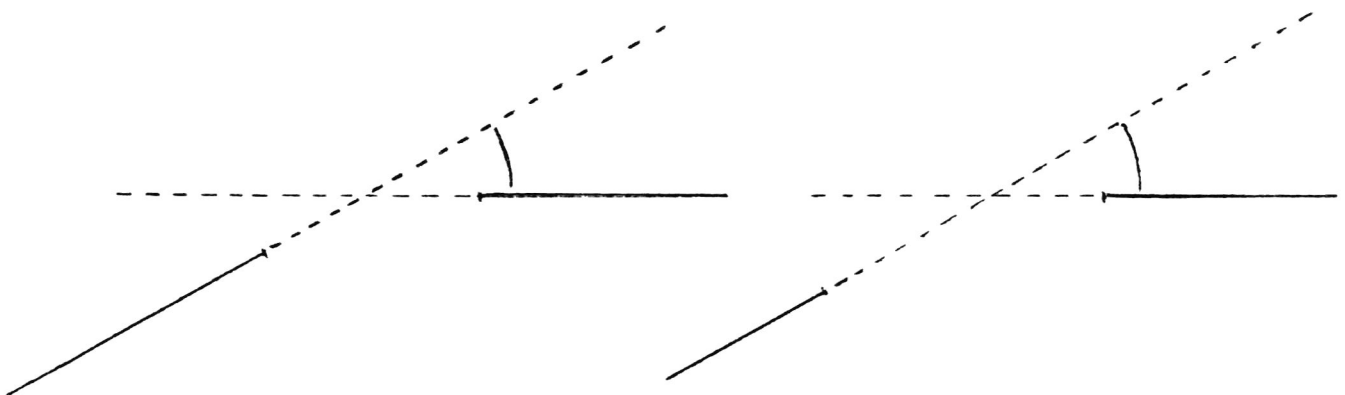
3 - INDICATIONS SUR LA RECHERCHE

3.1. - Pour analyser son ébauche de circuit l'élève a plusieurs façons de s'y prendre :

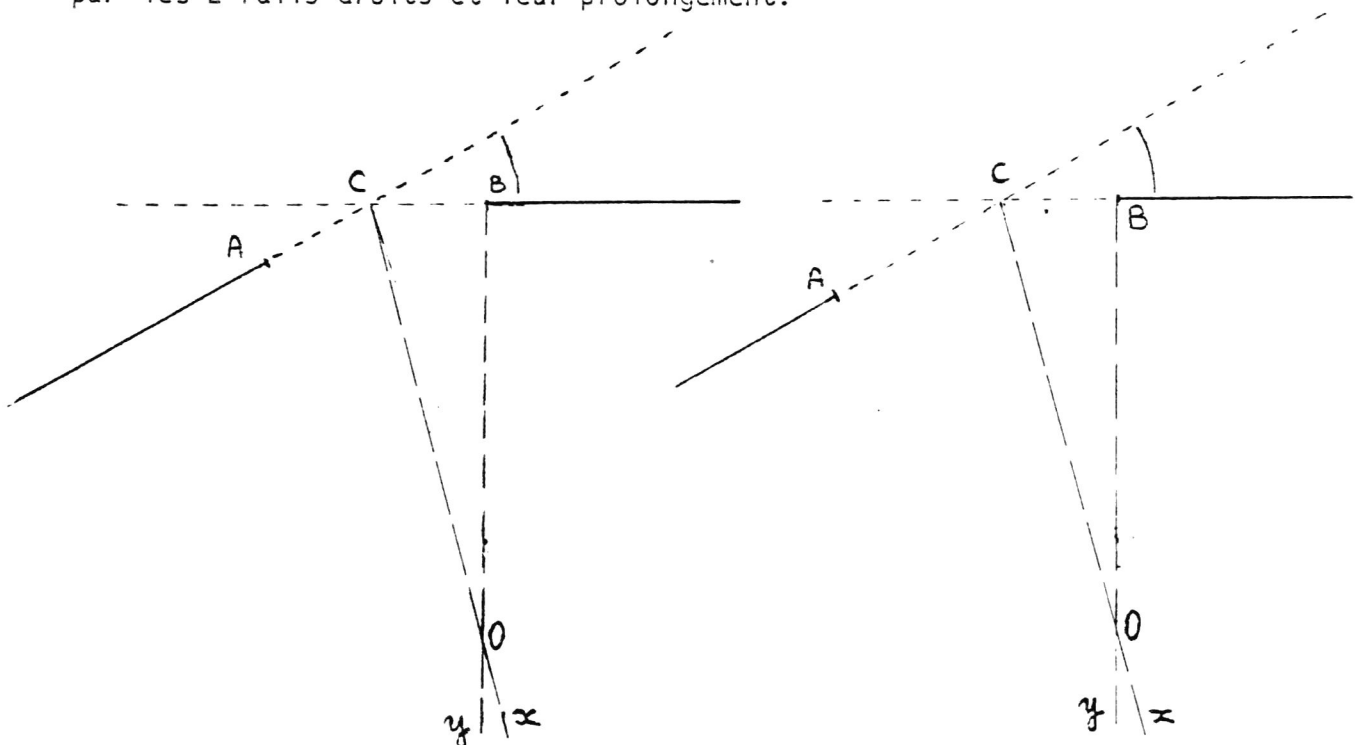
i) S'il dispose des schémas des rails ronds sur papier calque, il peut essayer de les superposer à son dessin pour trouver ce qui conviendra. Il lui restera ensuite à dessiner proprement ce qu'il a trouvé.

ii) Il peut, directement sur son dessin de circuit, chercher l'angle dont on tourne pour passer d'un morceau droit à un autre et le comparer avec les angles dont il dispose grâce aux rails courbes.

Remarque : L'angle seul ne suffit pas; les positions des extrémités des rails droits ont aussi leur importance

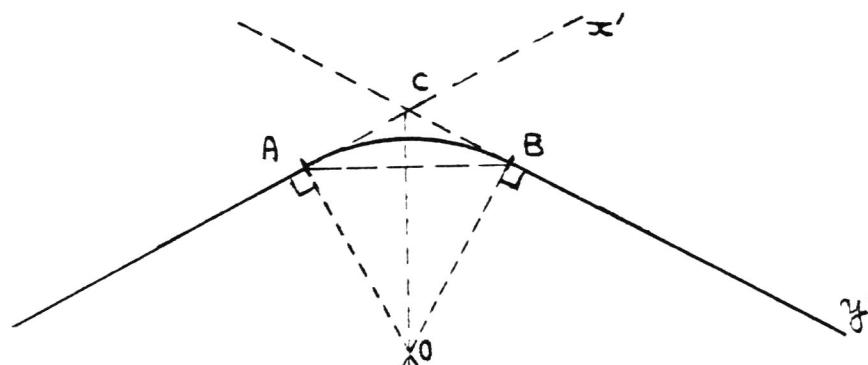


Dans ces 2 situations on tourne du même angle. Le centre d'un arc de cercle qui complète doit être sur la bissectrice Cx de la figure formée par les 2 rails droits et leur prolongement.



Soit By orthogonale à BC et O le point de concours de By et Cx .
Si BO est le rayon des rails courbes disponibles, on peut le placer. Dans la situation I c'est terminé; dans la situation II il faut compléter par un rail droit du côté de A

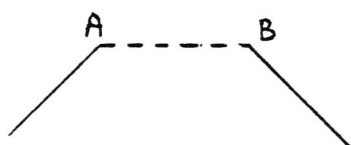
3.2 - Les élèves auront sans doute des difficultés pour savoir où placer le centre de l'arc qu'ils veulent dessiner. Il est alors nécessaire d'observer un schéma complet pour analyser la figure suivante :



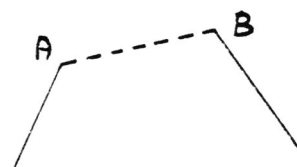
Voici les propriétés à dégager :

- . La distance des extrémités des rails droits est égale à la distance des deux extrémités du rail courbe

- . Le segment AB a une position symétrique par rapport aux 2 rails droits, c'est-à-dire, qu'il fait le même angle avec chacun des rails droits. L'axe de symétrie est la droite CO mais l'appréciation de la symétrie peut se faire à l'oeil.



ça peut aller

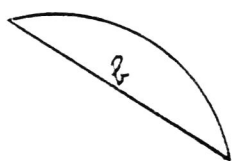


ça ne va pas

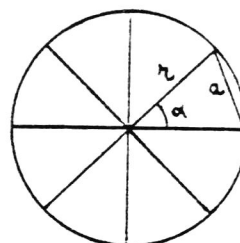
$$\widehat{x'Cy'} = \widehat{AOB}$$

- . Si O est le centre de l'arc, OA et OB sont orthogonaux respectivement aux deux rails droits

3.3. - Un autre problème peut aussi se poser : trouver le rayon de courbure d'un rail courbe, sachant qu'il en faut n (souvent 8, 16 ou 32) pour reconstituer un cercle complet, on peut trouver ce rayon après avoir mesuré la corde

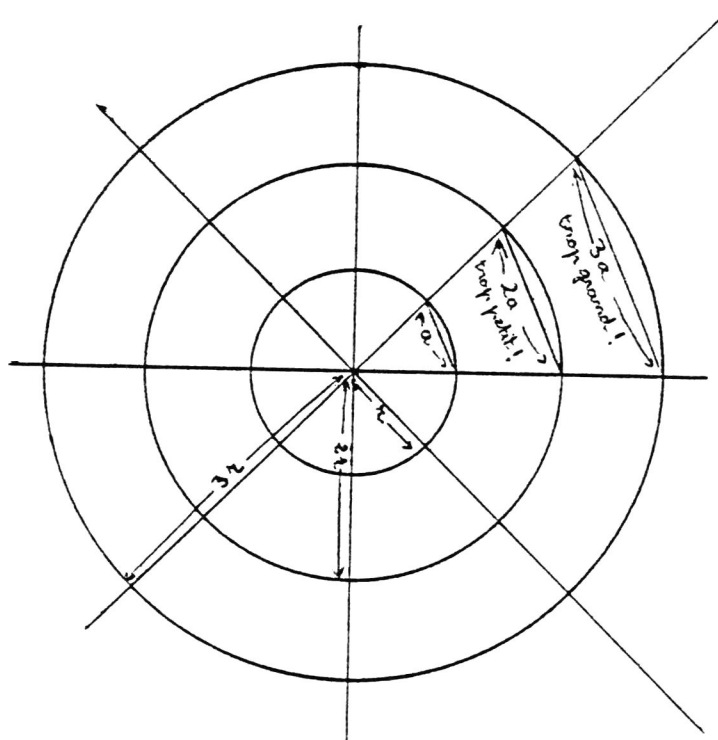


rayon inconnu R
corde mesurée b



maquette avec rayon connu r
pour un partage en 8; on mesure
la corde sur le dessin (a)

La maquette étant trop petite il faut essayer de l'agrandir pour obtenir un cercle contenant des arcs de bonne dimension. Il est possible d'essayer par tâtonnement; on constate que si l'on double le rayon de cercle toutes les dimensions (en particulier celle de la corde) sont doublées; de même si l'on triple, quadruple, etc.... En comparant $2a$, $3a$, ... à b on constate, par exemple, que b est le produit de a par un nombre inconnu (compris entre 2 et 3) pour trouver ce nombre on peut continuer par tâtonnement, ou poser la division $b : a$ (en d'autres termes chercher x tel que $a \times x = b$ ou $x = b : a$) x étant déterminé, on obtient $R = r \times x$



4 - REMARQUES

4.1 - Pour les vrais trains, on ne raccorde pas avec des arcs de cercle, mais avec des courbes de courbure variable abordables à grande vitesse

4.2 - La démarche de la maquette auxiliaire plusieurs fois utilisée n'est autre que la mise en application de la démarche très importante en géométrie classiquement annoncée par la phrase rituelle: *Supposons le problème résolu*

4.3 - Les angles utilisés apparaissent comme *angles de secteurs orientés*, en fait une notion préparant la détermination principale (comprise entre $-\pi$ et π) des angles de couples de demi-droites.

IV - A QUELLE DISTANCE EST LA LIGNE D'HORIZON ?

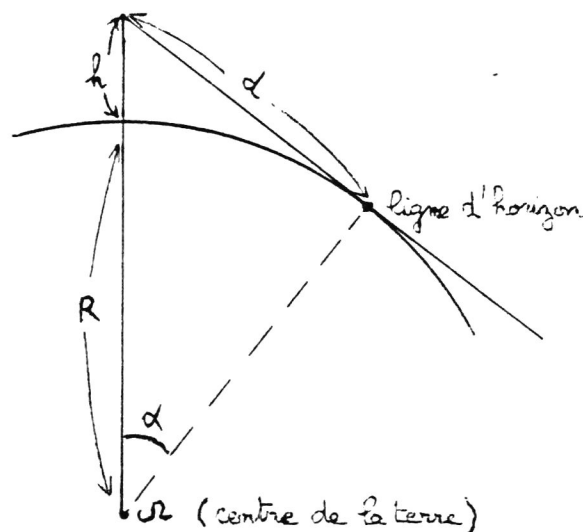
Niveau suggéré : fin de 3ème ou 2^{nde}

Notion : Angles dans un triangle rectangle

1 - PROBLEME

On suppose que la terre est sphérique et que les rayons lumineux sont rectilignes ce n'est donc qu'un modèle en première approximation

On veut calculer d en fonction de h



2 - INDICATIONS SUR LA RECHERCHE

. les relations utilisées sont les suivantes :

$$\frac{R}{R+h} = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{d}{R+h} = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{. donc} \quad d^2 &= (R+h)^2 \sin^2 \alpha \\ &= (R+h)^2 [1 - \cos^2 \alpha] \\ &= (R+h)^2 \left[1 - \frac{R^2}{(R+h)^2}\right] = (R+h)^2 - R^2 \\ &= 2Rh + h^2 \\ d &= \sqrt{h^2 + 2Rh} \end{aligned}$$

. On peut calculer d en diverses circonstances.

- lorsqu'on est au niveau de la mer suivant qu'on est adulte ou enfant
- lorsqu'on est sur une montagne

On peut alors expliquer aux élèves :

Comme h est petit devant R en général, on peut négliger h² devant 2Rh.

$$d \simeq \sqrt{2Rh}$$

L'emploi de calculatrices peut être intéressant pour comparer les 2 valeurs

$$\sqrt{h^2 + 2Rh} \quad \text{et} \quad \sqrt{2Rh}$$

on peut constater que si $\frac{h}{R} < \frac{1}{1000}$ les 3 premiers chiffres significatifs sont les mêmes dans les deux calculs

Applications numériques:

$$R \simeq 6400 \text{ en km}$$

1) h = 0,8 en mètres	d $\simeq$ 3,2 km
2) h = 1,50 m	d $\simeq$ 4,4 km
3) h = 300 m	d $\simeq$ 6,2 km
4) h = 1000 m	d $\simeq$ 113 km
5) h = 2000 m	d $\simeq$ 160 km
6) h = 4000 m	d $\simeq$ 226 km
7) h = 4807 m	d $\simeq$ 248 km

V - UNE SITUATION ABOUTISSANT A L'ADDITION DES ANGLES ORIENTES

Niveau suggéré : seconde programme 1981.

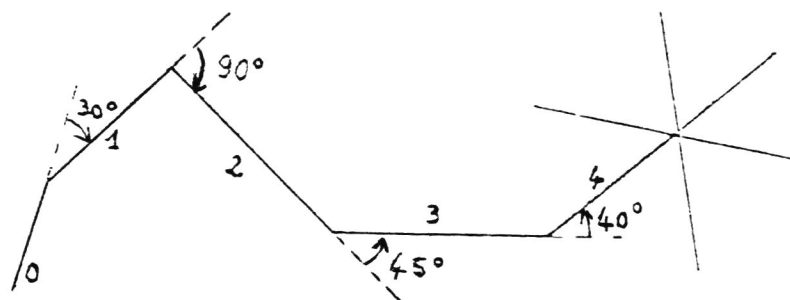
Notion : L'addition des angles orientés

1 - PROBLEME

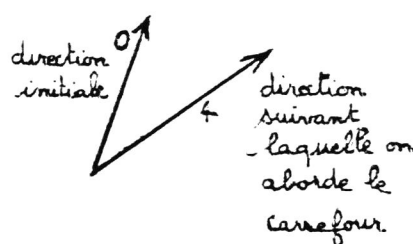
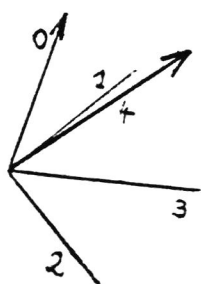
Dans une ville qu'il veut traverser de part en part, un automobiliste est dévié à cause de travaux. En suivant les panneaux de déviation il doit tourner de 30° vers la droite, puis de 90° vers la droite, puis de 45° vers la gauche, puis de 40° vers la gauche. Il parvient ensuite à un carrefour où débouchent 6 rues régulièrement disposées (dont la sienne). Il n'y a plus de panneaux de déviation, et personne pour le renseigner. Quelle rue prendriez-vous à sa place ?

2 - INDICATIONS SUR LA RECHERCHE

. Dans une première étape, un élève cherchera sûrement à dessiner un trajet correspondant à l'énoncé mais sera sans doute gêné par l'absence d'indication concernant la longueur des différents tronçons. Les différents dessins qu'il est possible d'imaginer n'ont en commun que les directions et les sens empruntés par la voiture.



. C'est pourquoi on peut garder uniquement la trace des directions et travailler sur le dessin suivant :

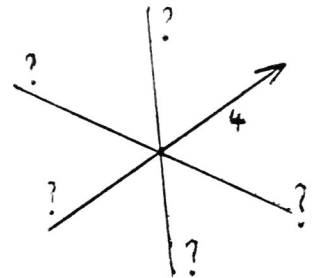


Mesurons en prenant 2 pour sens direct

$$30 + 90 - 45 - 40 = + 35$$

La voiture roule donc dans une direction qui est inclinée de 35° vers la droite par rapport à sa marche initiale.

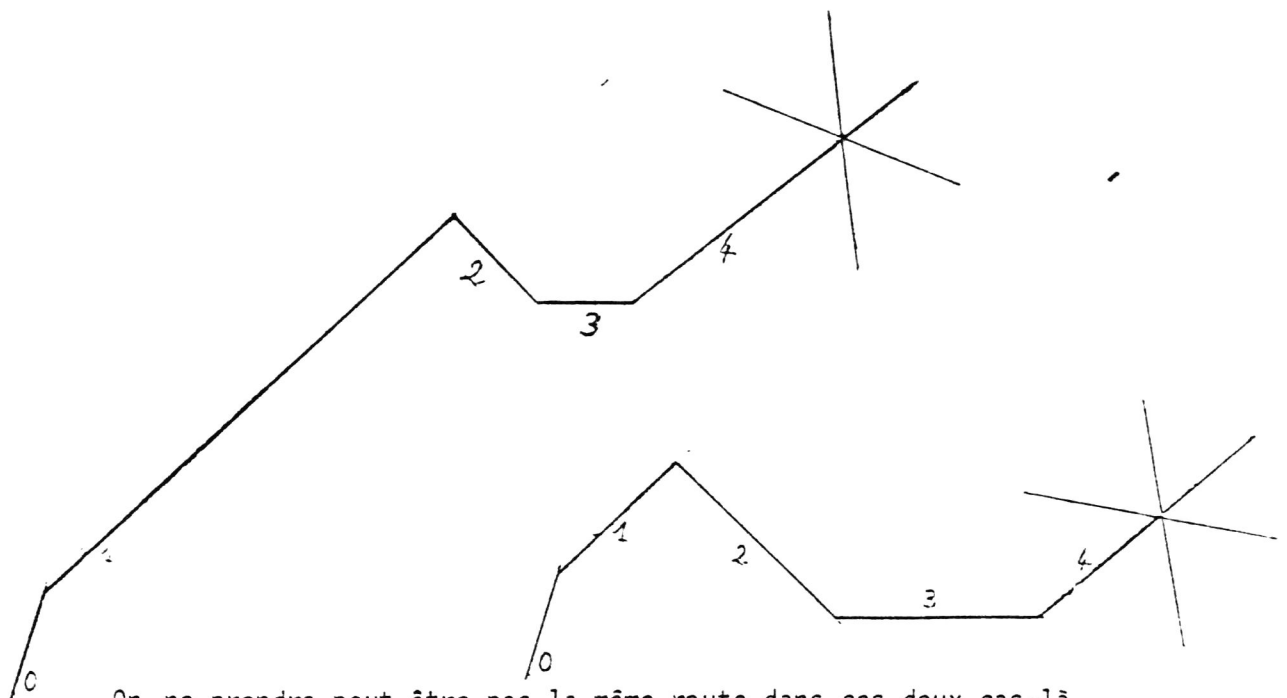
. On se demande alors quelles sont les directions des rues du carrefour.



Elles sont repérées par une de leurs mesures en degrés, soit par exemple:
 $35, 35+60, 35+120, 35+180, 35-60, 35-120$
 c'est-à-dire $35, 95, 155, 215, -25, -85$

Deux de ces rues seulement ramènent vers la route initiale. Celle repérée par -25 et celle repérée par -85 .

. Le choix entre les deux ne peut se faire qu'en estimant si on s'est plus ou moins éloigné du départ de la déviation, et le résultat n'est en aucun cas assuré, car plusieurs inconnues subsistent (longueur de la déviation, obligation ou non de changer encore de direction).



On ne prendra peut être pas la même route dans ces deux cas-là.

VI - QUELQUES EXERCICES D'ORIGINE NON MATHÉMATIQUE TROUVÉS DANS LES LIVRES DE 3ÈME (PROGRAMME 1980).

Nous avons choisi dans les livres de 3ème quelques exercices à la fin des chapitres sur les angles, parmi ceux dont le texte n'était pas purement mathématique.

Pour chacun d'eux nous essayons de préciser :

- le niveau de difficulté
- les connaissances préalables
- les objectifs
- une ou plusieurs rédactions de la solution
- un commentaire sur l'énoncé de l'exercice si cela nous semble nécessaire.

1 - LE SEXTANT

1.1 - Livre : IREM Strasbourg chez ISTR p.72 n° 27

L'octant ($1/8^e$ de cercle), devenu ensuite le sextant ($1/6^e$ de cercle), a remplacé l'arbalète présentée au chapitre précédent.

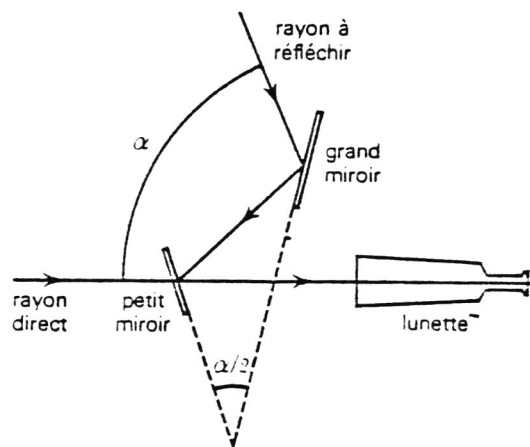
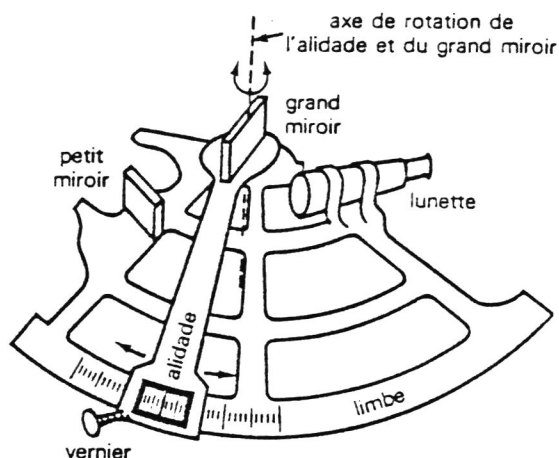
L'observateur regarde le petit miroir à travers la lunette du sextant. Le petit miroir est à moitié transparent (on utilise actuellement pour cela des verres très réfléchissants, comme le verre au titane). Ainsi les rayons lumineux qui arrivent dans la lunette sont :

- ou bien des rayons qui ont traversé le petit miroir;
- ou bien des rayons qui ont été réfléchis par le petit miroir.

Ces derniers proviennent du grand miroir qui les a réfléchis. Le grand miroir est fixé sur l'alidade (voir schéma) qui peut pivoter en se déplaçant devant un arc de cercle gradué, appelé limbe.

On a représenté deux rayons lumineux que l'observateur verra *coïncider* : un rayon direct et un rayon qui a été réfléchi deux fois. En déplaçant l'alidade, l'observateur pourra superposer l'image de l'horizon (rayons directs) et celle du bas du disque solaire ou d'une étoile (rayons réfléchis).

Démontrer la relation angulaire indiquée sur le schéma. Sachant que le limbe est gradué pour la mesure de α , et que la graduation du limbe occupe 60° , indiquer quel intervalle angulaire en degrés est fourni par cette graduation.



1.2 - Cet exercice est difficile. On peut le faire faire en 3ème ou en seconde à partir de 1981, si on explique rapidement comment chemine un rayon lumineux réfléchi par un miroir.

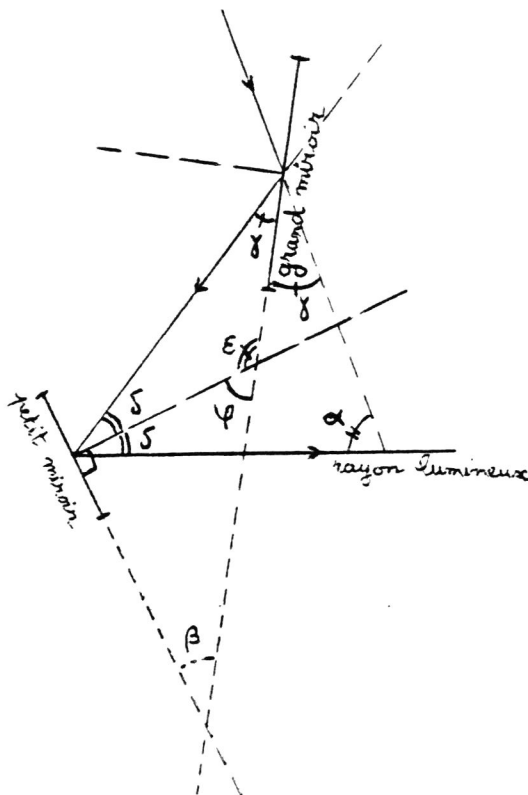
Cet exercice est intéressant car il fait utiliser dans une situation concrète le lien entre les angles et les symétries. D'autre part, le résultat à démontrer n'est pas évident.

1.3 - Nous proposons ici deux démonstrations de l'exercice. L'une en modélisant par les angles de paires (en 3ème), l'autre par des angles de couples de demi-droites (en seconde 81)

Les connaissances préalables sont pour la première modélisation *la somme des angles d'un triangle est le plat*, et *une symétrie conserve les angles*. Pour la deuxième modélisation ce sont *la relation de Chasles pour l'addition des angles* et *une symétrie transforme un angle en son opposé*.

1.4 - Démonstration de la relation angulaire

i) avec des angles de paires : on travaille avec les mesures des angles indiqués sur la figure



$$2\delta + 2\gamma + \alpha = \pi$$

$$\delta + \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

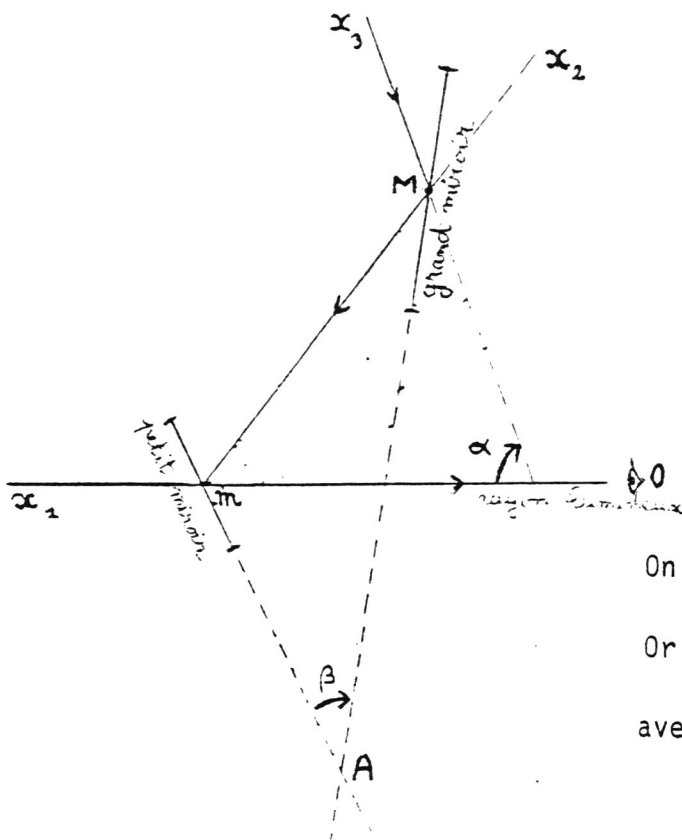
$$\epsilon = \pi - (\delta + \gamma)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\phi = \pi - \epsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha}{2}}$$

ii) avec des angles de couple

On note $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, des vecteurs directeurs des demi-droites $0x_1, mx_2, Mx_3$

On note $\vec{W}_1$ et $\vec{W}_2$ des vecteurs directeurs des droites Am et AM supports des miroirs.

On sait que la réflexion sur un miroir est une symétrie par rapport au miroir

On veut évaluer $\widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_3)}$ en fonction de $\widehat{(\vec{W}_1, \vec{W}_2)}$

$$\text{Or } \widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_3)} = \widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_2)} + \widehat{(\vec{V}_2, \vec{V}_3)}$$

$$\text{avec } \widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_2)} = \widehat{(\vec{V}_1, \vec{W}_1)} + \widehat{(\vec{W}_1, \vec{V}_2)}$$

$$\text{mais } \widehat{(\vec{V}_1, \vec{W}_1)} = \widehat{(\vec{W}_1, \vec{V}_2)}$$

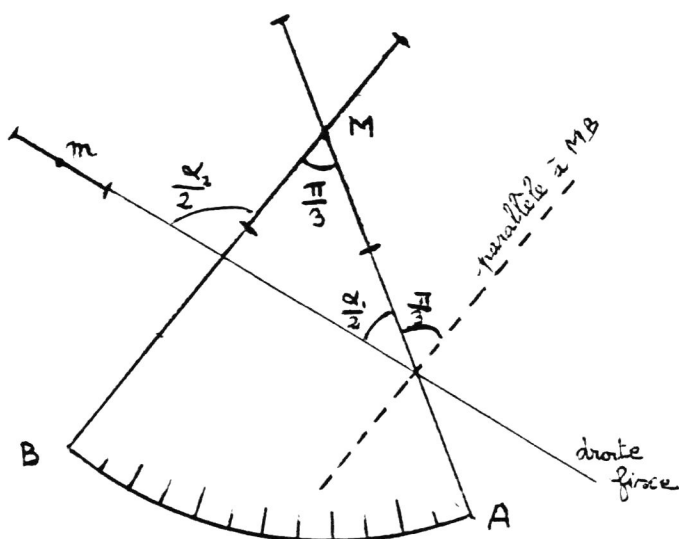
$$\text{donc } \widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_2)} = 2\widehat{(\vec{W}_1, \vec{V}_2)}$$

$$\text{de même } \widehat{(\vec{V}_2, \vec{V}_3)} = 2\widehat{(\vec{V}_2, \vec{W}_2)}$$

$$\text{donc } \widehat{(\vec{V}_1, \vec{V}_3)} = 2\widehat{(\vec{W}_1, \vec{W}_2)}$$

1.5 - Réponse à la dernière question

L'alidade peut pivoter de 60° autour de l'axe de rotation



MA et MB sont les positions limites de la droite de référence de l'alidade où l'on peut utiliser la graduation.

Si $\frac{\alpha_1}{2}$ et $\frac{\alpha_2}{2}$ sont les valeurs limites des mesures de $\frac{\alpha}{2}$.

$$\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{donc } \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}$$

Les rayons limites que l'on peut repérer déterminent donc un angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ en radian soit encore 120 en degré.

1.6 - Commentaire

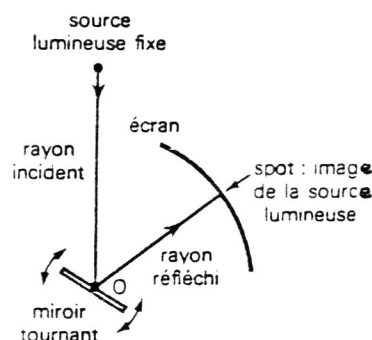
Cet exercice demande une certaine familiarisation avec la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir; il peut être précédé de l'exercice 28 de la même page dont voici le texte.

Miroirs tournants.

Pour mesurer un angle de rotation d'un dispositif physique, on utilise des instruments fonctionnant d'après le principe du miroir tournant, illustré ci-contre (vu de haut).

Au dispositif, on associe un miroir, pouvant tourner avec lui autour d'un axe vertical. Une source de lumière fixe est réfléchi par le miroir sur un écran, où apparaît un point lumineux appelé spot.

Démontrer que si le miroir tourne autour de l'axe vertical (point O du schéma) d'un angle α , le rayon réfléchi tourne d'un angle 2α . Comment alors graduer l'écran?



2 - LE POINT SUR UN SEUL AMER :



Un navire fait route vers l'est à une vitesse constante connue v . A une certaine heure (l'instant t_0), on a aperçu du navire un phare. L'angle entre la direction du phare vu du navire et la route du navire a été relevé : on le désigne par α (voir figure). Plus tard, à l'instant $t_0 + t$, cet angle a de nouveau été relevé : on désigne par β sa valeur à cet instant. Le phare était le seul point de repère dont on disposait, et pourtant il est possible de déterminer très précisément la position du navire à l'instant $t_0 + t$. Comment?

Rappel : la relation entre vitesse, temps et distance parcourue est $v = \frac{d}{t}$.

Application numérique :

- Vitesse en nœuds (1 nœud est égal à 1,853 km/h) : $v = 8$.
- Angles en degrés : $\alpha = 18^\circ 30'$
 $\beta = 32''$.

Le phare apparaît au nord de la route du navire.

- Heures : t_0 : 22 h 30
 $t_0 + t$: 23 h 30.

. Livre : IREM de Strasbourg p.62 n°26

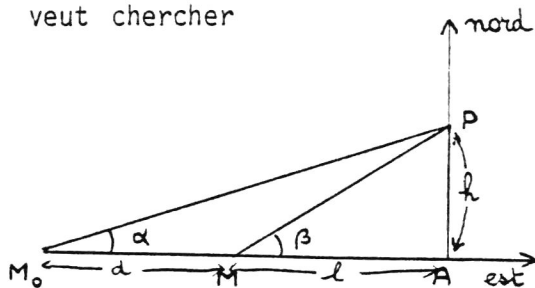
Niveau : 3ème à 1ère suivant l'interprétation que l'on donne à l'exercice et suivant la méthode utilisée.

Objectifs de l'exercice : Il faut préciser ce que l'on cherche : Soit une construction géométrique de la position du navire à l'instant $t_0 + t$, soit les coordonnées de ce point dans un repère à déterminer

Activité facultative : Situer le navire sur une carte en supposant que le phare est celui d'Eckmühl (en Bretagne, vers la pointe de Penmarch).

2.1 - Niveau 3ème - Première recherche

Complétons d'abord la figure de l'énoncé, pour préciser ce qu'on veut chercher



Si on peut calculer h et l en fonction des données du problème, on saura situer le point M où se trouve le navire à l'instant $(t_0 + t)$

Pour calculer h et l on dispose des renseignements suivants

$$\begin{cases} h = l \operatorname{tg} \beta \\ h = (l + d) \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

α et β sont mesurés et d est calculé par $d = vt$

Le système devient

$$\begin{cases} l = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \\ h = \left[\frac{h}{\operatorname{tg} \beta} + vt \right] \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} l = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \\ \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right) h = vt \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

soit

$h = vt \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$ $l = vt \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$

Remarque : Ici α et β sont des mesures des angles $\widehat{AM_0P}$ et $\widehat{AMP}$

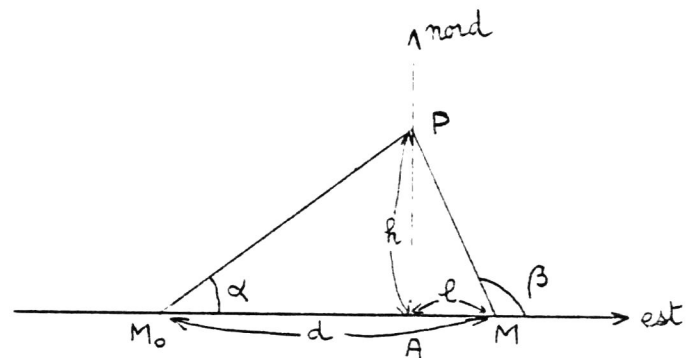
2.2 - Niveau 3ème - Deuxième recherche

On peut considérer que la figure de l'énoncé n'est pas la seule disposition possible et examiner les autres cas de figure.

Situation I : voir 1ère recherche

Situation II :

$$\begin{cases} h = (d - \ell) \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{h}{\ell} = \operatorname{tg} (\pi - \beta) \\ h = (d - \ell) \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{h}{\ell} = - \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$



On a toujours $d = vt$

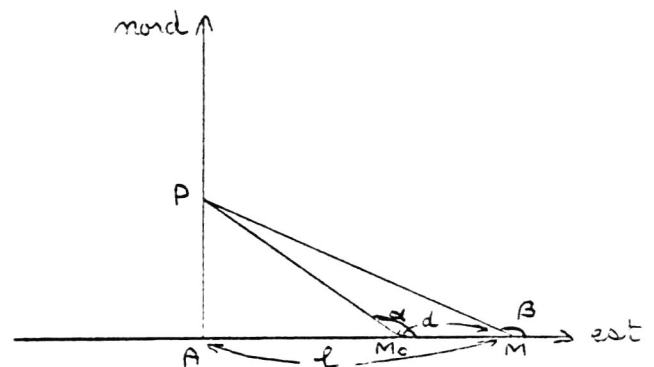
$$\begin{cases} \ell = - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \\ h = \left[vt + \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \right] \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} h &= vt \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} \\ \ell &= -vt \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

Situation III

$$\begin{cases} \frac{h}{\ell} = \operatorname{tg} (\pi - \beta) \\ \frac{h}{\ell - d} = \operatorname{tg} (\pi - \alpha) \\ h = - \ell \operatorname{tg} \beta \\ h = - (\ell - d) \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lambda = -\frac{h}{\operatorname{tg}\beta} \\ h = -\left[-\frac{h}{\operatorname{tg}\beta} - d\right]\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{h}{\operatorname{tg}\beta} \\ h = \left[\frac{h}{\operatorname{tg}\beta} + d\right]\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

On a toujours $d = vt$

D'où

$$\begin{aligned} h &= vt \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \\ \lambda &= -vt \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}$$

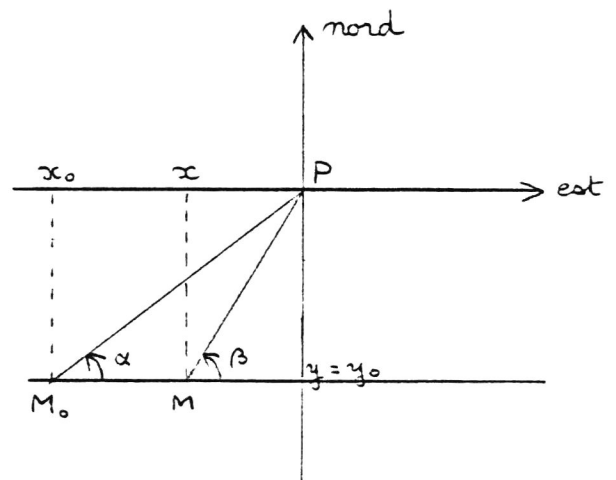
Remarques:

1) Dans les 2 derniers cas les significations de α et β sont indiquées par les dessins.

2) Les formules obtenues présentant beaucoup de ressemblances, on peut avoir intérêt, pour étudier le problème sous la forme la plus générale à considérer des angles orientés. (voir ci-dessous)

2.3. - Niveau 1ère

Prenons cette fois-ci un repère d'origine P, dont les axes sont dirigés respectivement vers l'est et vers le nord, et cherchons l'abscisse x et l'ordonnée y de M. Notons x_0 et y_0 les coordonnées de M_0



M_0 est sur la droite passant par l'origine
de coefficient directeur $\operatorname{tg}\alpha$

M est sur la droite passant par l'origine
de coefficient directeur $\operatorname{tg}\beta$

M et M_0 ont même abscisse.

La différence des abscisses

de M et de M_0 est la distance parcourue
pendant la durée t , à la vitesse v .

On doit donc résoudre le système, dont les inconnues sont x_0 , y_0 , x et y

$$\begin{cases} y = y_0 \\ x - x_0 = vt \\ y = x \operatorname{tg}\beta \\ y_0 = x_0 \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = y \\ x_0 = x - vt \\ y = x \operatorname{tg}\beta \\ y = (x - vt) \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

Pour trouver x et y , il suffit donc de résoudre le système obtenu avec les
2 dernières équations

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$y = \left[\frac{y}{\operatorname{tg}\beta} - vt \right] \operatorname{tg}\alpha$$

ce qui donne après calculs

$$\begin{aligned} y &= - vt \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \\ x &= - vt \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}$$

Remarques :

i) On peut vérifier qu'on obtient les mêmes résultats que précédemment en examinant dans chaque situation les relations entre x et z d'une part, y et h d'autre part.

ii) Pour faire les calculs précédents on peut, en référence aux nombres complexes, repérer les vecteurs $\vec{OM}_0$ et $\vec{OM}$ par leur module et leur argument ρ_0, θ_0 et ρ, θ . Les relations sont alors

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \theta - \rho_0 \cos \theta_0 &= d \\ \rho \sin \theta - \rho_0 \sin \theta_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ système d'inconnues } \rho \text{ et } \rho_0$$

Système dont la résolution donne : $\rho = \frac{d \sin \theta_0}{\sin (\theta_0 - \theta)}$ et par suite

$$x = \frac{d \sin \theta_0 \sin \theta}{\sin (\theta_0 - \theta)} \quad y = \frac{d \sin \theta_0 \cos \theta}{\sin (\theta_0 - \theta)}$$

Avec les notations précédentes $\theta_0 = \alpha + \pi$ et $\theta = \beta + \pi$ et

$$x = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \quad y = \frac{d \sin \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

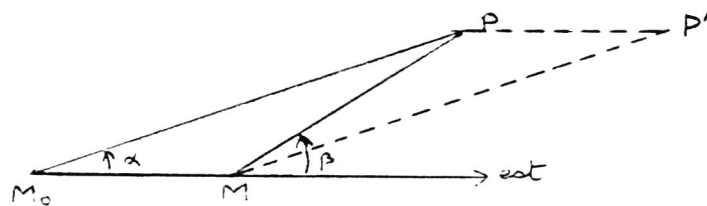
Si on repère les directions à partir du nord par α' et β' comme le font les marins $\theta_0 = \alpha' + \frac{\pi}{2}$ $\theta = \beta' + \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{d \cos \alpha' \cos \beta'}{\sin (\alpha' - \beta')} \quad y = \frac{-d \cos \alpha' \sin \beta'}{\sin (\alpha' - \beta')}$$

2.4 - Résolutions graphiques tous niveaux

Cette méthode de résolution graphique est utilisée par les marins. Elle est beaucoup plus rapide que tous les calculs présentés ci-dessus et est dans la pratique suffisamment précise car les erreurs de dessins sont inférieures aux erreurs de mesures..

Pour la comprendre, complétons le parallélogramme ayant M_0 , M et P comme sommets



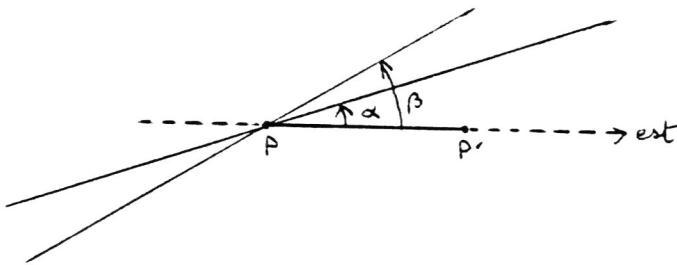
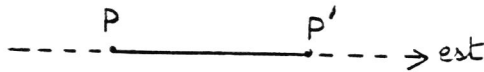
On en déduit alors le procédé suivant de construction de M

Plaçons P', sachant que $\vec{PP'} = \vec{M_0M}$

et que

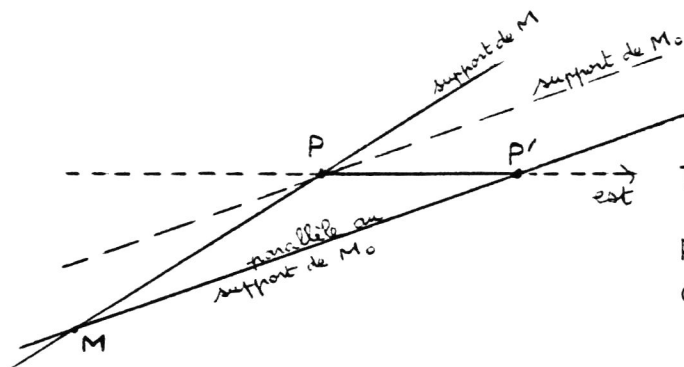
$$\|\vec{M_0M}\| = vt$$

$\vec{M_0M}$ est dirigé d'ouest en est



Plaçons les droites où doivent être M_0

et M connaissant α et β , mesures d'angles (orientés par les marins, qui peuvent ne pas l'être pour des élèves de 3ème)



Traçons la parallèle au support de M_0 passant par P'. Elle coupe le support de M, en M ...

Remarques :

i) En pratique, la détermination du vecteur $\vec{M_0M}$ n'est pas immédiate car il faut tenir compte du déplacement de la mer sur le fond (causé par les marées) et de la dérive (causée par le vent). Les navigateurs disposent de tables de correction.

ii) Si l'on dispose d'une carte marine, on doit calculer la distance parcourue en mille car c'est l'unité utilisée sur la carte. Comme 1 noeud vaut 1 mile à l'heure, cette évaluation est facile. Par contre, si l'on dispose d'une carte terrestre il faudra évaluer d en km.

iii) Il ne faut pas confondre

- le mille marin : une minute d'arc de grand cercle (1 852 m par excès)
- le mile terrestre angle saxon : environ 1 609 m.

iiii) Par la méthode géométrique, c'est en fait l'additif de l'énoncé qui est traité. Cet additif est également utile avec la méthode analytique; il permet de savoir si les élèves sont capables d'interpréter leurs résultats numériques.

3 - REALISATION D'UN CONE DE REVOLUTION EN CARTON

18. On veut réaliser un cône de révolution en carton. Le disque de base a un rayon de 3 cm. La génératrice du cône a pour longueur 7 cm. Calculer l'angle du secteur de disque constituant la surface latérale et construire ce cône.

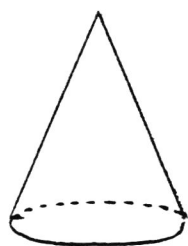
Delagrave 3ème

Niveau possible : 5ème à 3ème

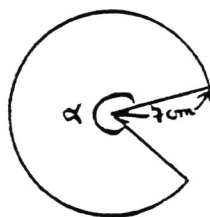
Connaissances nécessaires : Lien entre la longueur d'un arc et la mesure du secteur angulaire intercepté.

Commentaires :

Pour comprendre cet exercice, il serait bon que l'élève ait auparavant construit un cône en carton, de n'importe quelle dimension, ou qu'il le fasse à cette occasion. Il sera ensuite à même de faire des croquis du cône fait, et du patron pour faire le lien entre les deux.



cône réalisé



patron du cône

Ces croquis n'ont pas besoin d'être aux bonnes dimensions

C'est la longueur de l'arc "bord du patron" qui est la longueur du cercle de base du cône.

mesure de l'arc "bord du patron" : 7α

mesure du cercle $2\pi \times 3$

$$\text{Donc } 6\pi = 7\alpha \quad \text{soit } \alpha = \frac{6}{7}\pi$$

Remarques :

i) nous avons fait ici les calculs en radians, il est bien évident que les élèves peuvent procéder avec l'unité qu'ils veulent.

ii) Cet exercice est davantage un exercice de géométrie dans l'espace qu'un exercice sur les angles.

4 - PEUT-ON VOIR LE MONT BLANC DEPUIS KEDEUSE ?

Peut-on voir le Mont-Blanc depuis Kédeuse?

Kédeuse est un petit sommet qui domine la station de ski des Carroz-d'Arâches (à proximité de la route Genève-Chamonix). L'altitude de Kédeuse est 1 757 m. Sur une carte, on peut voir deux sommets situés entre Kédeuse et le Mont-Blanc : l'un est l'arrivée d'un télésiège de la station de Flaine, son altitude est 2 196 m; l'autre est la Pointe de Platé, à 2 553 m d'altitude.

La question est de savoir si ces sommets empêchent ou non d'apercevoir le Mont-Blanc depuis Kédeuse.

Les distances relevées sur une carte à l'échelle $\frac{1}{200\,000}$ sont les suivantes depuis Kédeuse :

Sommet du télésiège de Flaine : 2,3 cm;

Pointe de Platé : 4,3 cm;

Mont-Blanc (altitude 4 807 m) : 13,2 cm.

Irem de STRASBOURG p. 60 n° 13

Niveau : 3ème

Cet exercice porte sur les angles par l'intermédiaire des pentes de droites. Il suffit de connaître les pentes de droites.

Nous proposons ensuite un prolongement qui nécessite l'utilisation de la notion de tangente dans un triangle rectangle.

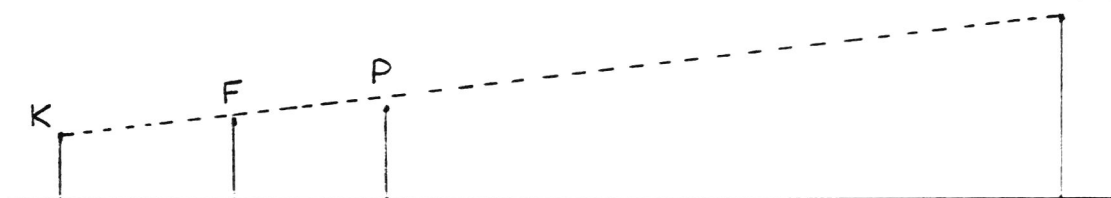
4.1 - Si l'on suppose la terre plate

En faisant un croquis à l'échelle, on peut espérer répondre à la question. Evaluons donc les hauteurs de différents sommets sur une coupe au $\frac{1}{200\,000}$.

Altitude de Kédeuse : 1 757 m soit au $\frac{1}{200\,000}$. 0,88 cm

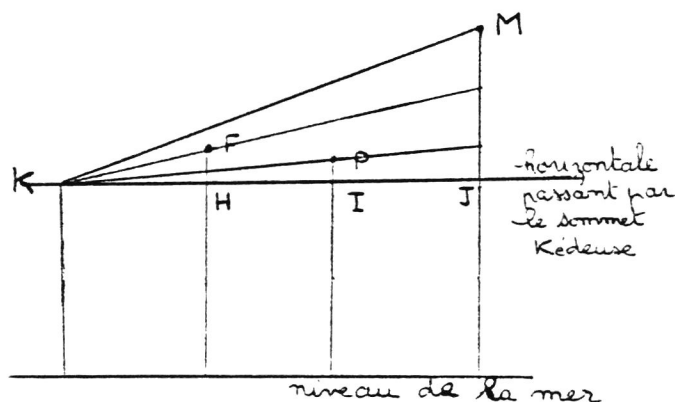
" du télésiège de Flaine : 2 196 m soit au $\frac{1}{200\,000}$ 1,10 cm

Altitude de Platé : 2 553 m soit au $\frac{1}{200\ 000}$ 1,28 cm
 " du M^t Blanc : 4 807 m soit au $\frac{1}{200\ 000}$ 2,40 cm
 M^c Blanc



D'après le dessin la droite KM passe quasiment par F. On ne peut donc pas répondre à la question. Evaluons alors les pentes des droites KM, KP et KF.

Le croquis ci-contre est volontairement érroné



On veut comparer les nombres

$$\begin{array}{l} \frac{FH}{KH} \quad , \quad \frac{PI}{KI} \quad \text{et} \quad \frac{MJ}{KJ} \\ \text{soit} \\ \frac{2196 - 1757}{2,3 \cdot 10^{-2} \times 200\ 000} \quad , \quad \frac{2553 - 1757}{4,3 \cdot 10^{-2} \times 200\ 000} \quad \text{et} \quad \frac{4807 - 1757}{13,2 \cdot 10^{-2} \times 200\ 000} \\ \text{qui valent} \\ \frac{439}{2600} \quad , \quad \frac{796}{8600} \quad \text{et} \quad \frac{3050}{26400} \\ \text{soit encore} \\ 0,0954 \quad , \quad 0,0926 \quad \text{et} \quad 0,1155 \end{array}$$

Ces calculs montrent que KM a une pente plus forte que KF et KP. On peut voir le Mont Blanc du mont Kédeuse.

4.2 - Peut-on supposer la terre plate pour cet exercice ?

La distance au sol représentée par 13,2 cm sur la carte est de $13,2 \times 10^{-3} \times 200\,000$ soit 2 640 m, soit 2,640 km. Ceci correspond à un angle au centre de mesure $\alpha = \frac{2,6}{6400}$ puisque le rayon de la terre est 6 400 km.

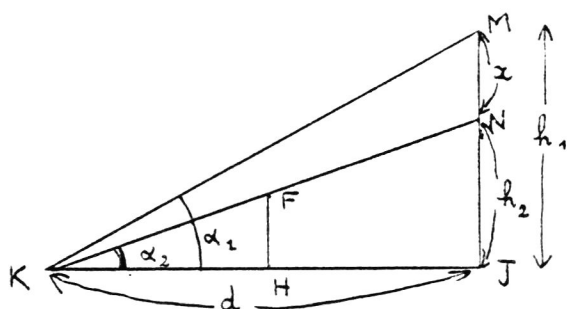
$$\alpha \simeq 4,063 \cdot 10^{-4} \text{ en radians}$$

$$\alpha \simeq 0,0004 \text{ en radians ou } 0,023 \text{ en degrés}$$

Une telle valeur ne remet pas en cause notre conclusion, car la correction à apporter serait du même ordre de grandeur que l'incertitude résultant des données dans l'énoncé (il suffit de faire les calculs pour le voir !)

4.3 - Prolongements possibles :

i) On voit donc le Mont Blanc depuis Kèdeuse, mais quelle hauteur x du Mont Blanc voit-on ?



Sur ce croquis, l'écart entre les droites KF et KM a été accentué

$$h_1 = MJ$$

$$\frac{h_2}{KJ} = \frac{FH}{KH} \quad \text{donc} \quad h_2 = \frac{KJ}{KH} \cdot FH$$

$$\text{Donc } x = h_1 - h_2 = MJ - \frac{FH}{KH} KJ$$

$$x = 3050 - \left(\frac{439}{4600} \times 26400 \right)$$

$$x \simeq 3050 - 2519,5$$

$$x \simeq 530,5 \text{ en m}$$

ii) Il est intéressant d'évaluer l'angle sous lequel on voit ces 500 m. de Mont Blanc (l'angle $\widehat{NKM}$ du croquis ci-dessus).

Evaluons pour cela les mesures de $\widehat{JKM}$ et $\widehat{JKN}$ à l'aide de leurs tangentes

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{MJ}{KJ} \simeq 0,1155$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{FH}{KH} \simeq 0,0954$$

Ces valeurs étant petites, on peut assimiler

$\operatorname{tg} \alpha_1$ à α_1 , mesure en radians de $\widehat{JKM}$
 et $\operatorname{tg} \alpha_2$ à α_2 , " " de $\widehat{JKN}$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \widehat{HKF} &\simeq 5,45^\circ \\ \widehat{JKM} &\simeq 6,59^\circ \end{aligned}$$

On voit donc le haut du Mont Blanc depuis Kédeuse sous un angle d'environ 1° . C'est un angle nettement supérieur à l'acuité visuelle de la plupart des gens. A ce propos donnons quelques informations sur l'acuité visuelle.

4.4. - Qu'est-ce que l'acuité visuelle ?

Nous allons donner ici quelques points de repère. Avec ces données numériques, il est possible de fabriquer des énoncés d'exercices très simples.

a) Acuité liée au minimum visible

Définition : Cette acuité est le *diamètre apparent du point*^{*} *le plus petit dont on peut reconnaître la présence sur un fond uniformément éclairé avec un seul oeil.*

Cette acuité est de l'ordre d'une vingtaine de secondes pour une très bonne vue.

Ce n'est pas cette acuité que l'on mesure dans les contrôles courants.

^{*} au sens de tache

b) Acuité liée au pouvoir séparateur de l'oeil ?

Définition : Cette acuité donne l'ouverture angulaire minimum capable de donner des images susceptibles d'être séparées par la rétine (avec un seul oeil toujours).

On considère qu'une telle ouverture minimum est d'environ 1'.

On définit alors cette acuité visuelle par
$$\frac{1}{\text{mesure en minute de cet angle minimum}}$$

Une personne qui perçoit un détail sous un angle de 1' a donc une acuité visuelle de 1. On dit en pratique 10 dixièmes. Une telle personne peut lire les lettres de la 1ère ligne des tableaux de contrôle de la vue, c'est-à-dire qu'elle voit un détail de la lettre sous un angle de une minute. Par exemple pour le **E** un détail est la hauteur d'une barre horizontale.

c) Exercice : Lors d'un contrôle de vue, la personne examinée est à 5 m. du tableau. Sachant que le **E** de la 1ère ligne est tel que la largeur entre les barres horizontales est égale à la largeur des barres elles-mêmes, quelle est la hauteur du **E** de la 1ère ligne ?

(Réponse : 7,3 mm)

d) Exercice : Sachant que la vision de près est testée à 40 cm, quelle hauteur de lettre doit-on lire pour avoir une acuité de près de 10 dixièmes. Comparer avec la hauteur des lettres d'un journal.

(Réponse : 0,58 mm)

e) Voici les valeurs des acuités à différents âges de la vie pour une vue normale:

Les prématurés : 1 quarantième

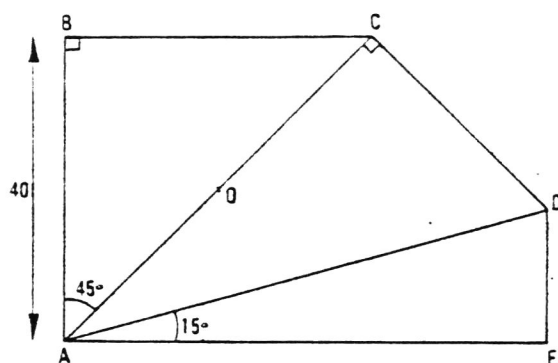
Les nouveaux-nés et nourissons : 1 trentième à 1 dixième

Les enfants de 2 ans : 4 dixièmes

Les enfants de 4 ans : 8 dixièmes à 10 dixièmes

A partir de 45 ans et plus sensiblement encore à partir de 60 ans le pouvoir séparateur baisse.

5 - TRIANGULATION D'UNE PLAQUE



10.59 Une pièce d'acier a la forme ci-dessus (cotes en mm).

1° Calculer à 1/10 mm près par défaut :

$d(A, C)$; $d(C, D)$; $d(A, D)$; $d(A, E)$; $d(D, E)$.

2° Calculer en degrés, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$.

Hachette p. 247

Niveau : 3ème

Connaissances :

Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle

Commentaire : C'est un exercice d'entraînement demandant à l'élève d'organiser ses calculs et nécessitant le recours à une table ou une calculatrice (calculs approchés)

Remarquons qu'il manque deux indications d'angles. Peut-on sous-entendre que les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{AED}$ sont droits ?

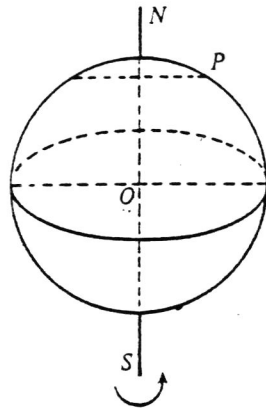
Enfin, si l'élève interprète la consigne du calcul à 1/10mm près par défaut comme *je n'écris dans chaque résultat qu'un chiffre après la virgule*, les erreurs accumulées peuvent être de plusieurs millimètres.

6 - DISTANCE PARCOURUE PAR UN POINT DE LA TERRE EN UNE HEURE

Galion : niveau 3ème

⑫ La surface de la Terre peut être considérée comme une sphère de 6 366 km de rayon. Elle fait un tour sur elle-même en 24 heures, l'axe de rotation étant la droite des pôles NS . Ce mouvement est à peu près uniforme.

Un point marqué sur la Terre décrit un cercle dont le centre est situé sur la droite des pôles.



Calcule la longueur de l'arc de cercle décrit en une heure par un point P de 60° de latitude Nord.

Connaissances mathématiques :

Longueur d'un arc de cercle -
cosinus d'un angle

Connaissance géographique :

latitude

6.1 - Commentaires :

a) Posé tel quel, cet exercice n'a en fait pas de sens, car on ne précise pas dans quel repère on se place.

Il est peut-être sous-entendu dans l'esprit de l'auteur: *dans un repère d'origine le centre de la terre, et dont les axes sont fixes par rapport à la galaxie.* En tout cas c'est dans un tel repère que les calculs seront abordables.

Sans une discussion (peut-être difficile à conduire) avec les élèves sur le problème du repère, cet exercice est dangereux. Il risque de laisser dans la tête des élèves des idées fausses (toutes naturelles pour eux pourtant) quant à la cinématique (cf article de E. Saltiel et J.L. Malgrange dans la revue de l'A.P.M. de septembre 1979).

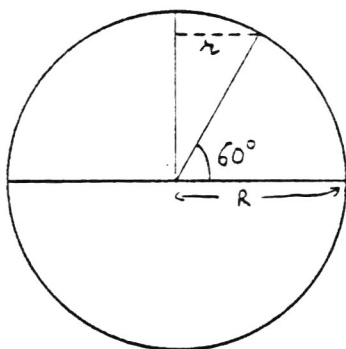
Si l'on a su mener cette discussion, on peut alors se lancer dans les calculs.

b) le nombre 6,366 est manifestement obtenu en calculant un quotient approché de 40 000 par 2π , comme l'exercice nécessite de retrouver la longueur du cercle à partir de son rayon, le jeu des erreurs ainsi accumulées ne permettra pas de retrouver les 40 000 du départ. Pourquoi ne pas mettre directement cette donnée dans l'énoncé ?

c) En réalité la terre est aplatie; si on la modélise par une sphère c'est son tour qui est donné; si on la modélise par un ellipsoïde le rayon équatorial est de 6 378 km et le rayon polaire de 6 357 km. Mais les calculs sont d'un autre niveau.

6.2. - Rédaction du calcul :

Un point P à 60° de latitude nord décrit, en 24 h, un cercle dont on va calculer le rayon



$$r = R \cos 60^\circ$$

$$r = \frac{R}{2}$$

En 24 h, P parcourt donc une distance égale à $2\pi r$

En 1 h, P parcourt $\frac{2\pi r}{24}$ soit $\frac{2\pi}{24} \frac{R}{2}$ soit $\frac{\pi R}{24}$ soit 833,3 km

6.3 - Prolongement possible :

On peut poser le même exercice pour un point situé dans sa propre ville. Le calcul nécessitera alors l'emploi d'une table de cosinus ou d'une calculatrice (si l'on a pas la chance d'être à une latitude remarquable pour sa valeur).

Par exemple à Paris à 49° de latitude nord

$$r = R \cos 49^\circ$$

En 1 heure un point de Paris parcourt donc

$$\frac{2 \pi r}{24} \text{ soit } \frac{2 \pi R \cos 49^\circ}{24}$$

c'est-à-dire 1 093,4 km

On peut alors remarquer qu'entre Brest et Strasbourg qui sont distants d'environ 900 à 1 000 km, et qui sont à peu près à la latitude de Paris, il y a un décalage d'un peu moins d'1h au soleil.

6.4 - Remarques :

On peut faire un calcul, cas par cas, ou bien si l'on sait d'avance qu'on veut faire une série de calculs, on a avantage à calculer une fois pour toutes la distance parcourue par un point de l'équateur en une heure et à multiplier ensuite le résultat (1 667 km) par le cosinus de la latitude du point considéré.

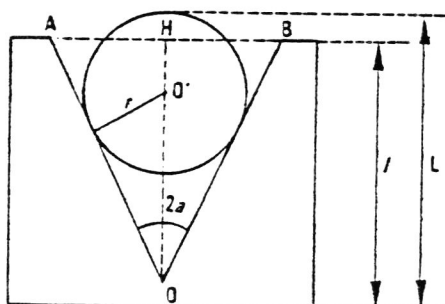
7 - CALCUL DE LA PROFONDEUR DE L'ENTAILLE D'UNE PIÈCE MÉTALLIQUE

Hachette p.247 n° 10.60

Niveau : 3ème

7.1 - Commentaire

Pour calculer la profondeur $h = d(O, H)$ de l'entaille faite dans une pièce d'acier usinée (voir la figure ci-dessous), on dispose d'une pige cylindrique disposée comme l'indique la figure en coupe. On connaît le rayon r de la pige et la mesure en degrés, de l'angle $[\widehat{AOB}]$. La pige étant en place, les seules mesures que l'on puisse effectuer au pied à coulisse sont les mesures L et l . Calculer h , sachant que $r = 20$ mm, $l = 85$ mm, $L = 100$ mm, $2a = 60^\circ$.



L'intérêt de cet exercice vient de la nécessité d'une bonne observation de la figure et d'une programmation des calculs. Il n'y a ensuite aucune difficulté pour effectuer le calcul. On a seulement besoin d'une relation fondamentale dans un triangle rectangle.

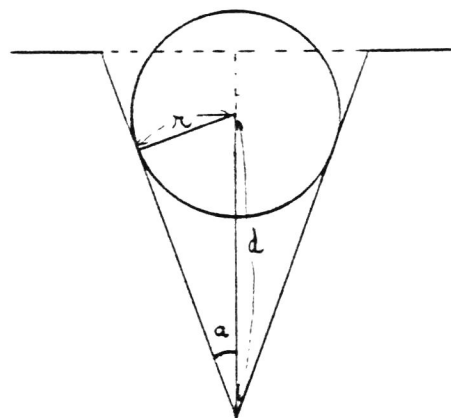
7.2 - Faisons un croquis d'étude

$$r = d \sin a$$

donc
$$d = \frac{r}{\sin a}$$

donc
$$h = d + (r - (L - \ell))$$

$$h = \frac{r}{\sin a} + r - L + \ell$$



8 - AVEC UNE BOULE DE BILLARD

On admet qu'une boule de billard (assimilée à un point dans le plan euclidien) lancée sans effet rebondit suivant une trajectoire symétrique à la première par rapport à la bande.

1° Démontrer qu'après deux réflexions successives sur deux bandes rectangulaires, la trajectoire finale est parallèle à la trajectoire initiale.

2° Soit A et B deux boules : comment lancer la boule A pour qu'elle touche la boule B après :

- a) une seule réflexion ?
- b) après deux réflexions sur des bandes rectangulaires, sur des bandes parallèles ?
- c) après trois réflexions sur des bandes consécutives ?

3° * On lance la boule A dans les mêmes conditions, afin qu'elle touche successivement les bandes. Comment la lancer pour qu'elle revienne en A ?

Hachette 3ème p.158 n° 6.74.

Niveau : 3ème et au-delà

Connaissances : transformations d'angles par symétries

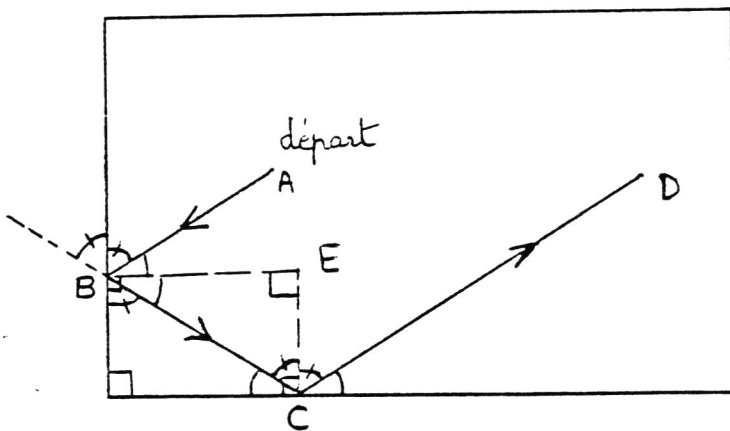
8.1 - Nous proposons de modifier la première question comme suit :

Démontrer qu'après 2 réflexions successives sur deux bandes perpendiculaires (situation I) ou sur deux bandes parallèles (situation II) la trajectoire est parallèle à la trajectoire initiale

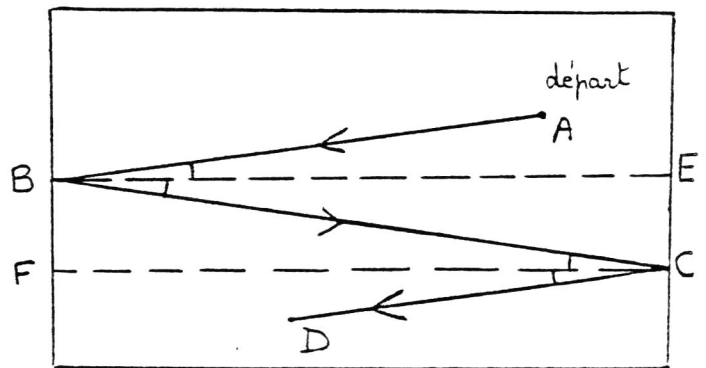
La question 2° c) qui n'est pas marquée d'une étoile est très difficile à notre avis, mais elle ne manque pas d'intérêt. Pour y répondre complètement il faut énormément de temps. Nous ne la mènerons pas à son terme, car cela nous conduirait un peu loin des angles.

8.2 - Indications sur la première question modifiée :a) Sans orientation :

Si on indique soigneusement les angles égaux et complémentaires, la figure parle d'elle-même. Nous ne proposons pas de rédaction.



Situation I



Situation II

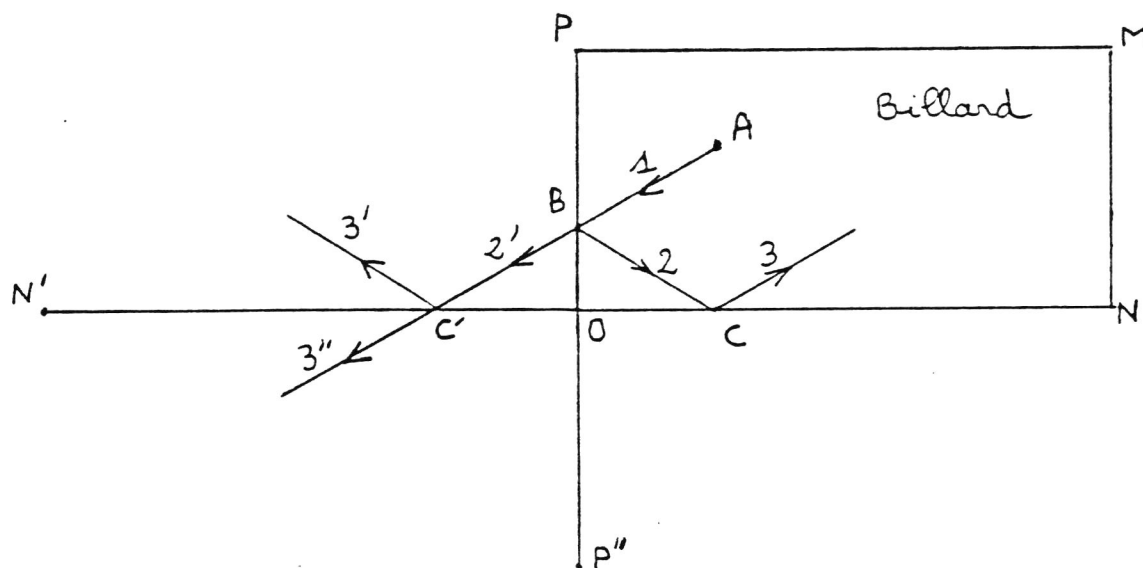
b) Avec orientation :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{I}} \quad \widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} &= \widehat{(\vec{AB}, \vec{BC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{CD})} \\
 &= 2 \widehat{(\vec{BE}, \vec{BC})} + 2 \widehat{(\vec{BC}, \vec{CE})} \\
 &= 2 [\widehat{(\vec{BE}, \vec{BC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{CE})}] \\
 &= 2 \widehat{(\vec{BE}, \vec{CE})} \\
 &= 2 \hat{d} \text{ ou } 2 \hat{d}' \\
 &= \hat{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{II}} \quad \widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} &= \widehat{(\vec{AB}, \vec{BC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{CD})} \\
 &= 2 \widehat{(\vec{BE}, \vec{BC})} + 2 \widehat{(\vec{BC}, \vec{CF})} \\
 &= 2 [\widehat{(\vec{BE}, \vec{BC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{CF})}] \\
 &= 2 \widehat{(\vec{BE}, \vec{CF})} \\
 &= 2 \hat{p} \\
 &= \hat{0}
 \end{aligned}$$

c) en utilisant des symétries:

Situation I



Le trajet réel suivi par la boule est 1 - 2 - 3.

Le trajet 2' - 3' est fictif. C'est le symétrique de 2 - 3 par rapport à OP.

Le trajet 3'' est le symétrique de 3' par rapport à ON'

$3 = S_{OP}(3')$ où S_{OP} est la symétrie orthogonale par rapport à la droite OP

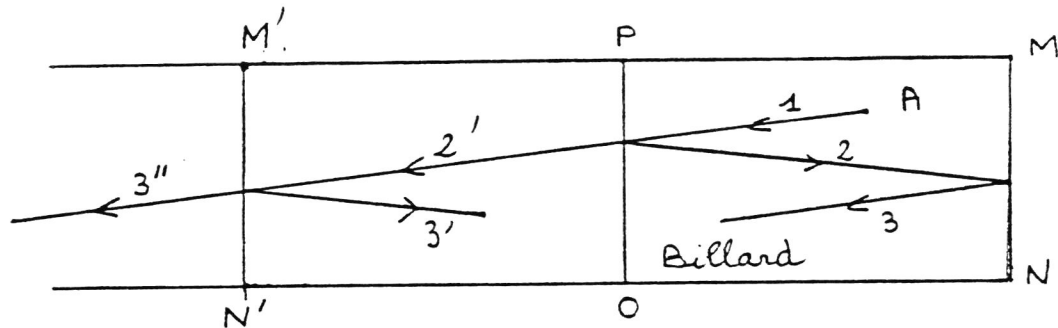
$3' = S_{ON'}(3'')$ où $S_{ON'}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite ON'

Donc $3 = S_{ON'}[S_{OP}(3'')]$

$3 = (S_{ON'} \circ S_{OP})(3'')$

$3 = S_O(3'')$ où S_O est la symétrie par rapport au point O

Une symétrie-point transforme une droite en une droite parallèle. Les rayons 3 et 3'' sont donc parallèles et de sens opposés, donc 3 est parallèle à 1 et de sens opposé.

Situation 2

Ici $3''$ est le symétrique de $3'$ par rapport à $M'N'$

Tout le reste est analogue à la situation 1

$$\text{Ici } 3 = S_{OP} (3')$$

$$3' = S_{M'N'} (3'')$$

$$\text{Donc } 3 = (S_{OP} \circ S_{M'N'}) (3'')$$

$$3 = t_{\vec{2N'O}} (3'')$$

$$3 = t_{\vec{2ON}} (3'')$$

où $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$

3 étant l'image de $3''$ par une translation, est parallèle à $3''$ et de même sens,
donc est parallèle à 1 et de même sens.

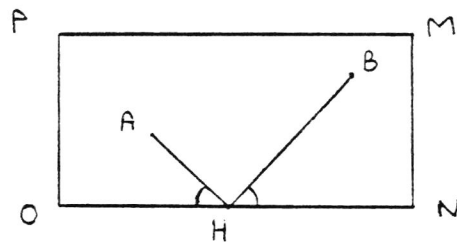
d) Remarques :

. En réalité un joueur de billard donne plus ou moins d'effet à ses boules. La règle d'un rebond *symétrique* n'est donc qu'une règle idéale. Par contre cette règle est valable avec une très grande précision pour des rayons lumineux se reflétant dans un miroir.

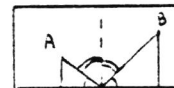
. La méthode utilisant les symétries est sans doute un peu sophistiquée pour cette situation simple. Nous avons décidé de la présenter pour la faire comprendre. Nous allons l'utiliser pour les questions suivantes où cela allège le calcul. De toute façon cette méthode est réellement utilisée en optique géométrique.

8.3 - Indications sur la deuxième question:

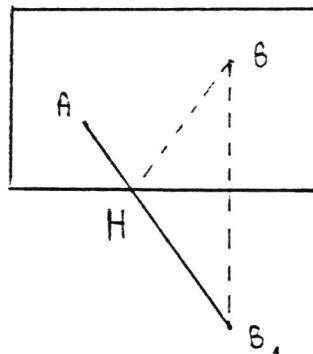
a) Comment viser à partir de A pour atteindre B après 1 rebond ?
Faisons la figure d'un trajet réalisé. Il suffit pour cela de placer B en dernier sur le croquis.



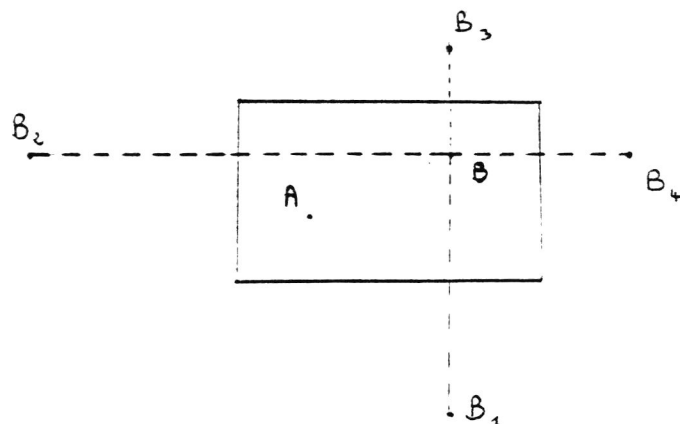
Comment trouver H connaissant A et B ? Le problème semble d'abord être soluble en complétant des triangles et en faisant des petits raisonnements géométriques utilisant les égalités d'angles indiquées sur la figure ci-contre



En fait, si l'on utilise la méthode des symétries, on voit qu'il suffit de viser le symétrique de B par rapport à la bande sur laquelle on veut taper.



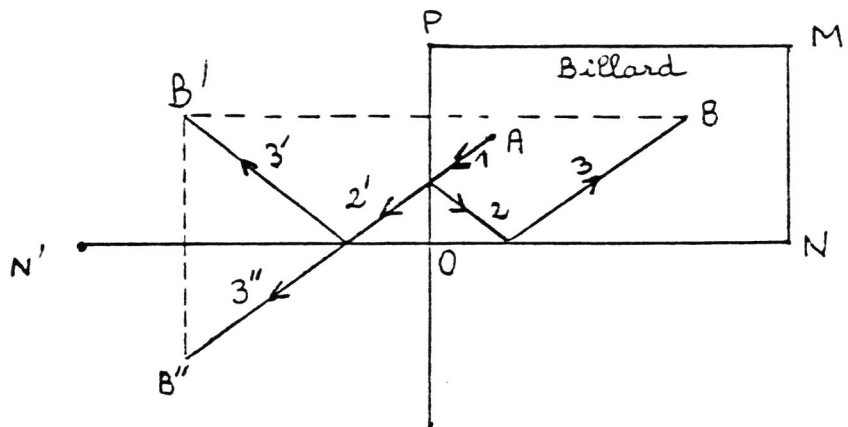
Il y a ainsi 4 possibilités d'atteindre B à partir de A en 1 rebond, suivant que l'on vise sur B_1 , B_2 , B_3 ou B_4



b) Comment viser à partir de A pour atteindre B après 2 rebonds ?

i) les 2 rebonds sont sur des bandes consécutives.

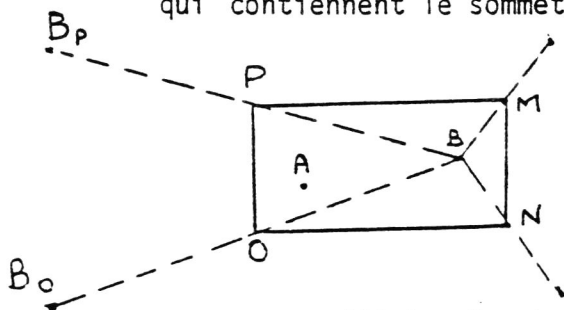
Analysons un trajet réalisé



$$B'' = S_0(B)$$

On voit qu'on doit viser sur le symétrique de B par rapport à O.

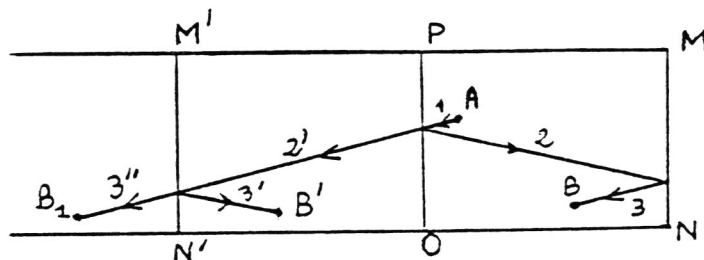
De même, on pourrait viser sur le symétrique de B par rapport à M, N, O ou P. Il y a donc 4 tirs possibles. La boule rebondit sur les 2 bandes qui contiennent le sommet centre de symétrie.



De A on peut viser B_M , B_N , B_O ou B_P

ii) les 2 rebonds sont sur des bandes parallèles.

Examinons un trajet réalisé



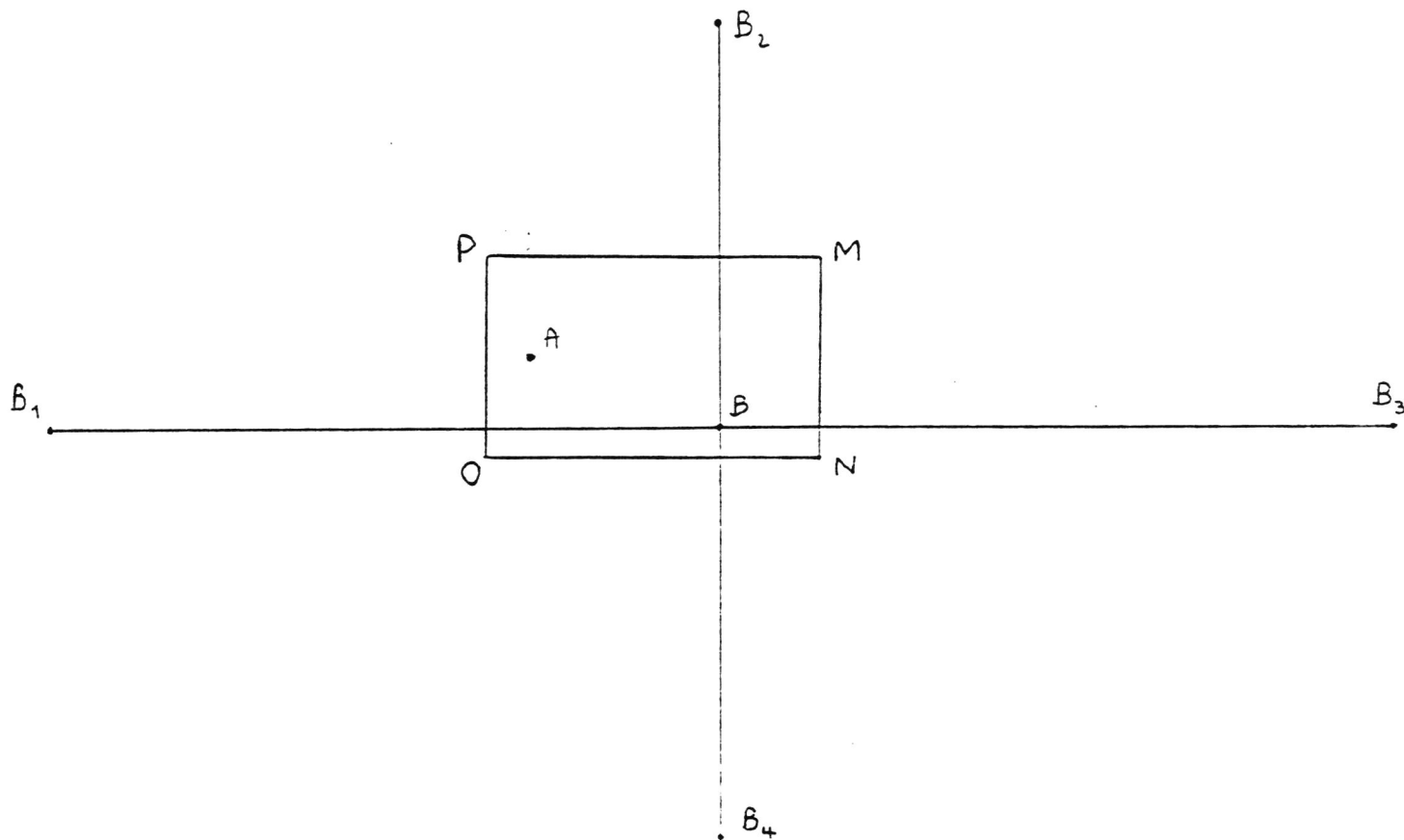
Il faut viser sur B_1 . Or $B_1 = t_{2NO}^{\rightarrow}(B)$

De même on pourrait viser sur

$$B_2 = t_{20P}^{\rightarrow}(B)$$

$$B_3 = t_{2PM}^{\rightarrow}(B)$$

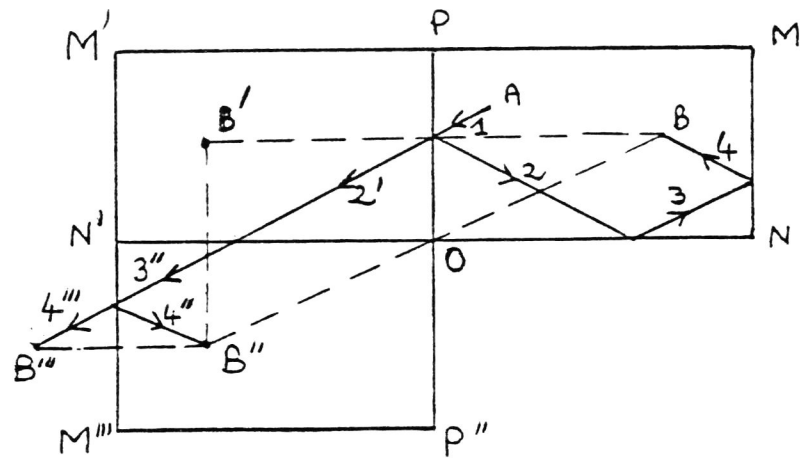
$$B_4 = t_{2MN}^{\rightarrow}(B)$$



Il y a 4 possibilités encore. On peut viser sur B_1 B_2 B_3 et B_4 .
On frappera toujours 2 bandes parallèles.

c) Comment viser à partir de A pour atteindre B après 3 rebonds sur des bandes consécutives ?

Examinons un trajet réalisé



$$B''' = S_{M'''N'}(B'')$$

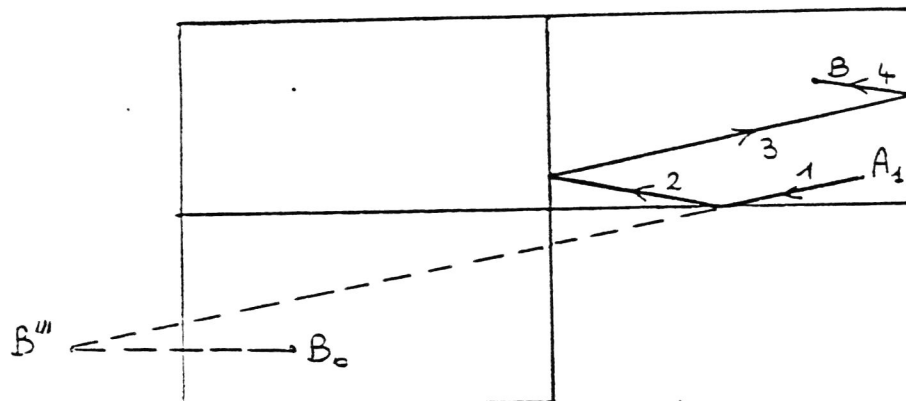
$$B'' = S_{N'O}(B')$$

$$B' = S_{OP}(B)$$

D'où

$$\begin{aligned} B''' &= S_{M'''N'}(B'') \\ &= S_{M'''N'}(S_{O}(B)) \\ &= (B_{M'''N'} \circ S_O)(B) \end{aligned}$$

Il faudrait donc viser un point tel que B''' . Cela suffira-t-il?
Les dessins suivant montrent que non.



En visant B''' , on atteint B en 3 rebonds sur des bandes successives ou non.

Deux questions se posent alors :

- ① Combien y a-t-il de façons d'atteindre B après 3 rebonds sur des bandes successives à partir d'un point A?
- ② Combien y a-t-il de façons d'atteindre B après 3 rebonds sur des bandes quelconques à partir de A ?

Eléments de réponse pour la question ①

Il y a 8 points tels que B'''; ils sont images de B par

$$S_{M''N'} \circ S_0$$

$$S_{M''P''} \circ S_0$$

$$S_{P''M''} \circ S_N$$

$$S_{P''O'} \circ S_N$$

$$S_{P'O''} \circ S_M$$

$$S_{N''O'''} \circ S_M$$

$$S_{PO''} \circ S_P$$

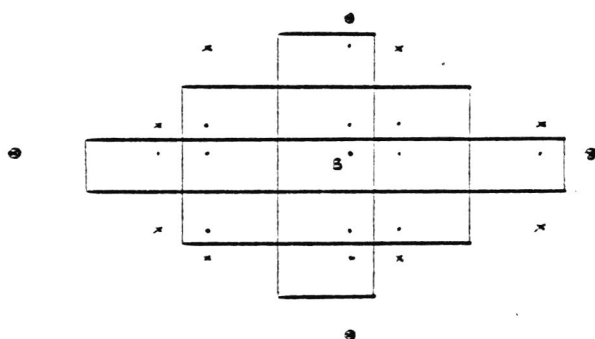
$$S_{M'N'''} \circ S_P$$

Il y a donc au plus 8 façons de viser pour un point A

On peut alors se demander si ces 8 possibilités existent réellement. Nous laissons au lecteur le soin de poursuivre car cela nous éloigne sensiblement des angles.

Eléments de réponse pour la question ②

Si l'on n'oblige pas les 3 rebonds à être sur des bandes successives, on constate que l'on peut viser 4 points supplémentaires.



x point à viser déjà obtenu

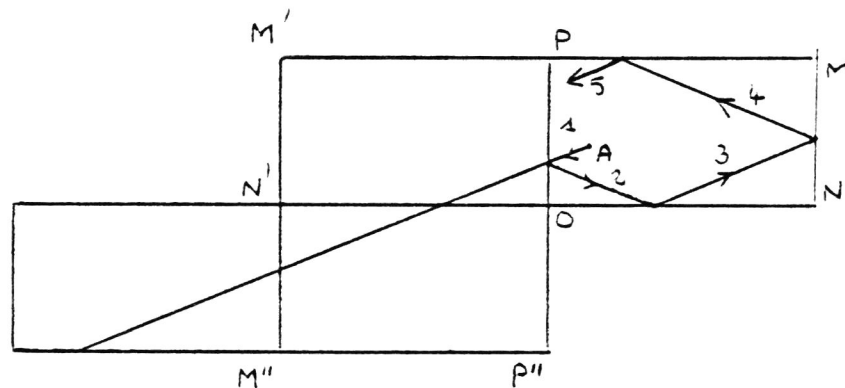
⊗ nouveau point possible

Il y a donc $(8+4)$, soit 12 possibilités de viser pour atteindre B en 3 rebonds à partir de n'importe quel point du billard.

8.4 - Indications sur la troisième question :

Comment revenir en A après 4 rebonds sur des bandes consécutives ?

On ne peut pas cette fois réaliser le dessin du trajet réel car on ne peut pas fixer le point d'arrivée après coup, puisqu'il est fixé (égal au point de départ). On peut seulement examiner un trajet comprenant 4 rebonds sur des bandes successives.



En utilisant les mêmes méthodes que dans les questions précédentes, on voit qu'il faudrait viser sur le point $(S_{M''P''} \text{ ou } S_{M''N'} \text{ ou } S_{N'O} \text{ ou } S_{OP}) (A)$

c'est-à-dire

c'est-à-dire

$(S_{M''P''} \text{ ou } S_{M''N'}) [(S_{N'O} \text{ ou } S_{OP}) (A)]$

c'est-à-dire

$S_{M''} [S_O (A)]$

c'est-à-dire

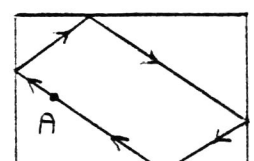
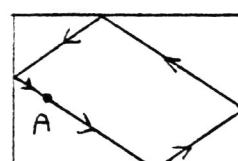
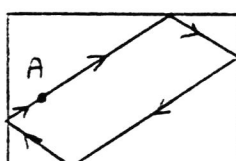
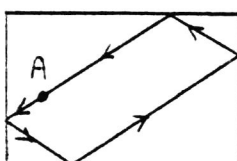
$t_{2OM''}^{\rightarrow} (A)$

ou encore

$t_{2MO}^{\rightarrow} (A)$

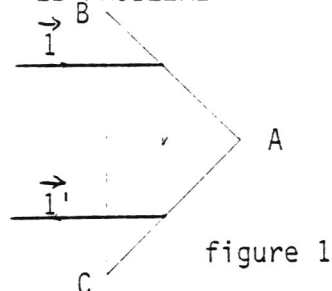
On doit donc viser pour un tel trajet dans la direction de la diagonale MO du billard. De même on peut taper la boule dans la direction de la diagonale NP

Il y a donc 4 trajets possibles:



VII - UN PROBLEME PRATIQUE D'OPTIQUE : VERIFICATION DE L'ANGLE D'UN PRISME^{*}

1 - LE PROBLEME

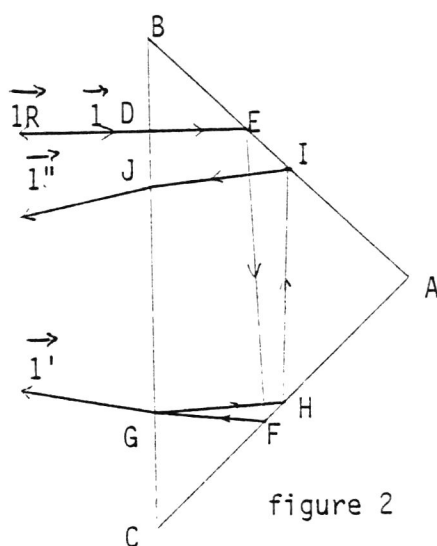


La figure 1 représente la section droite d'un prisme de verre. C'est un triangle rectangle isocèle ABC.

Si l'angle A' est parfaitement droit (et même si les angles en B et C ne sont pas égaux). Un rayon lumineux tel que $\vec{1}$ arrivant perpendiculairement sur la face BC pénètre sans déviation dans le prisme, est réfléchi sur les faces AB et AC et ressort en $\vec{1'}$ perpendiculairement à la face BC (il s'agit du problème des doubles bandes traité dans l'exemple du billard).

En réalité A n'est jamais parfaitement droit et les rayons $\vec{1}$ et $\vec{1'}$ ne sont pas parallèles. Un dispositif optique (lunette collimatée) permet de mesurer leur angle et par suite de connaître le défaut de l'angle A.

2 - QUELQUES MOTS SUR LE MODELE PHYSIQUE UTILISE



Le rayon $\vec{1}$ qui vient frapper perpendiculairement la face BC se partage en deux : une faible partie de la lumière est réfléchiée par la face BC selon $\vec{1_R}$ (parallèle à $\vec{1}$ et de sens contraire); la plus grande partie donne un rayon qui se réfléchit en E et F sur AB et AC (voir fig. 2). En G il y a un nouveau partage : la plus grande partie sort du prisme avec réflexion selon $\vec{1'}$; la plus faible partie est réfléchiée en G sur BC puis en H sur AC et en I sur AB;

^{*}Ce problème nous a été communiqué par Mr DECOSTER, professeur au Lycée Fresnel (lycée technique spécialisé en optique)

elle ressort en J avec réfraction selon $1''$ (il y aurait d'autres réflexions en J etc ..., mais les puissances lumineuses correspondantes sont trop faibles pour être perçues). La lunette collimatée permet de repérer les directions des rayons $1'$ (le plus lumineux) 1_R et $1''$ (moins lumineux) et de mesurer les angles de 1_R et $1'$, de 1_R et $1''$, en appliquant les lois de la réfraction, on peut donc calculer les angles de FG et JJ avec ED.

3 - PROBLEME MATHEMATIQUE

Trouver les relations entre les angles de FG et JJ avec ED et l'angle en A du prisme, sachant qu'une réflexion se traduit géométriquement par une symétrie dont l'axe est le support du miroir (on se ramène à un problème plan dans une section droite du prisme).

4 - METHODE ALGEBRIQUE

Angles de couple de vecteurs (niveau première). Dans une symétrie axiale, l'angle des images de deux vecteurs est opposée à l'angle de ces vecteurs.

La réflexion en E se traduit donc par l'égalité

$$\widehat{(\vec{DE}, \vec{AB})} = -(\vec{EF}, \vec{AB}) \text{ soit encore } \widehat{(\vec{DE}, \vec{AB})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{EF})}$$

De même les autres données du problème s'écrivent

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{EF}, \vec{AC})} &= \widehat{(\vec{AC}, \vec{FG})} \\ \widehat{(\vec{FG}, \vec{BC})} &= \widehat{(\vec{BC}, \vec{GH})} \\ \widehat{(\vec{GH}, \vec{AC})} &= \widehat{(\vec{AC}, \vec{HI})} \\ \widehat{(\vec{HI}, \vec{AB})} &= \widehat{(\vec{AB}, \vec{JJ})} \end{aligned}$$

La relation de Chasles permet d'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{DE}, \vec{FG})} &= \widehat{(\vec{DE}, \vec{AB})} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{EF})} + \widehat{(\vec{EF}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{AC}, \vec{FG})} \\ &= 2 \widehat{(\vec{AB}, \vec{EF})} + 2 \widehat{(\vec{EF}, \vec{AC})} \\ &= 2 \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \end{aligned}$$

De même on peut écrire

$$\begin{aligned} \widehat{(DE, JJ)} &= \widehat{(DE, FG)} + \widehat{(FG, BC)} + \widehat{(BC, GH)} + \widehat{(GH, AC)} + \widehat{(AC, HI)} + \widehat{(HI, AB)} + \widehat{(AB, JJ)} \\ &= 2\widehat{(AB, AC)} + 2\widehat{(FG, BC)} + 2\widehat{(AC, HI)} + 2\widehat{(HI, AB)} \end{aligned}$$

comme $2\widehat{(AB, AC)} + 2\widehat{(AC, HI)} + 2\widehat{(HI, AB)} = 2\widehat{(AB, AB)} = 0$

$$\widehat{(DE, JJ)} = 2\widehat{(FG, BC)}$$

où $\widehat{(FG, BC)} = \widehat{(FG, DE)} + \widehat{(DE, BC)} = -2\widehat{(AB, AC)} + \widehat{(DE, BC)}$

et $\widehat{(DE, IJ)} = -4\widehat{(AB, AC)} + 2\widehat{(DE, BC)}$

comme DE est perpendiculaire à BC

$$2\widehat{(DE, BC)} = \hat{P} \text{ angle plat}$$

en résumé nous avons obtenu

$$\widehat{(DE, FG)} = 2\widehat{(AB, AC)} \quad \text{soit} \quad \widehat{(ED, FG)} = P + 2\widehat{(AB, AC)}$$

et $\widehat{(DE, JJ)} = p - 4\widehat{(AB, AC)} \quad \widehat{(ED, IJ)} = -4\widehat{(AB, AC)}$

Supposons pour fixer les idées que nous ayons orienté le plan de telle sorte que l'une des déterminations de $\widehat{(AB, AC)}$ soit voisine de $\frac{\pi}{2}$ donc de la forme $\frac{\pi}{2} + \alpha$ où α positif ou négatif est un nombre petit

on trouve comme détermination de $\widehat{(ED, FG)} : 2\alpha$

et de $\widehat{(ED, IJ)} : -4\alpha$

./...

5 - METHODE UTILISANT LES SYMETRIES

5.1 - Constructions

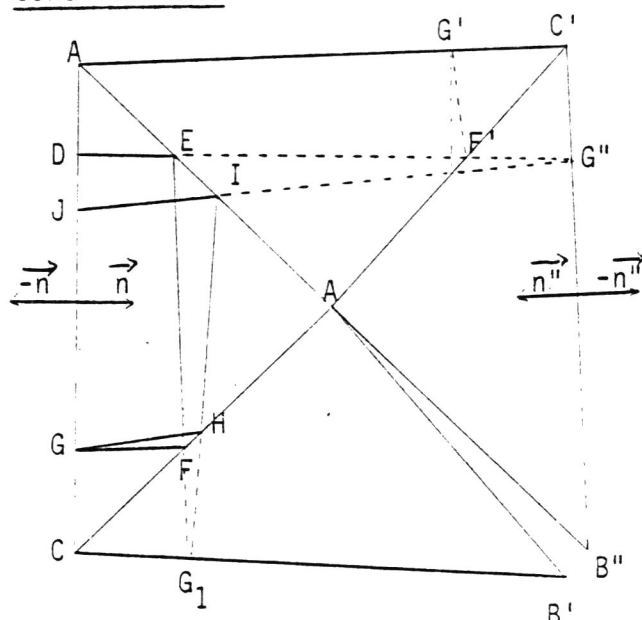


figure 3

La figure fondamentale est la même que précédemment, complétons-la ainsi (fig. 3)

Soit C' la symétrique de C par rapport à la droite AB , B' le symétrique de B par rapport à AC et B'' le symétrique de B' par rapport à AC'

Construisons par étape le rayon lumineux $DEFG$

La droite DE coupe AC' en F' ; le trajet réel EF est symétrique, par rapport à AB , au trajet virtuel EF' que suivrait la lumière en l'absence du miroir AB . On construit EF en joignant E au symétrique F de F' par rapport à AB , F est le point du miroir AC où le rayon se réfléchit.

a) On peut réitérer le processus : l'intersection G_1 de EF avec CB' est le symétrique du point G où le rayon réfléchi en F frappe la face BC

b) On peut également raisonner avec des miroirs virtuels successifs : le rayon virtuel EF' se réfléchit en F' sur le miroir virtuel AC' et le point G' s'obtient comme symétrique par rapport à AC' du point G'' intersection des droites EF' et $C'B''$. ($C'B''$ est l'image dans le miroir virtuel AC' de BC' , lui-même image de BC dans le miroir AB)

5.2 - Remarques

. On peut démontrer comme exercice sur les compositions de symétries que G_1 et G'' sont symétriques par rapport à AB (sans intérêt ici)

. On passe de $C'G''B''$ à CGB par le produit des symétries d'axe AC' et d'axe AB, c'est-à-dire par la rotation du centre A et d'angle $2(\widehat{AC', AB})$

. La première construction paraît plus simple à première vue, mais la seconde à l'intérêt suivant :

Pour pouvoir appliquer la loi de la réfraction on cherche l'angle de FG avec la normale à BC; or cet angle est aussi celui de $F'G''$ (c'est-à-dire DE) avec la normale à $B''C'$ (sur les éléments considérés se déduisent les uns des autres par une rotation). Une fois construit $B''C'$ la mesure peut se faire directement et cela pour n'importe quel rayon même s'il n'est pas perpendiculaire à BC.

. Les opticiens utilisent ce fait en disant que le prisme est équivalent à la lame de faces BC, $B''C'$ dont l'angle α reste à calculer

. En particulier cette équivalence est très commode pour construire le second rayon ($1''$) après réflexion en G; en effet, il suffit de tracer la droite symétrique de DG'' par rapport à $B''C'$, elle coupe AB en I et BC en J et on obtient directement la dernière partie de ce trajet (fig. 3)

5.3 - Utilisation de la construction précédente pour faire les calculs

On peut conduire les calculs soit sur des angles de vecteurs (niveau première)

soit sur des angles de secteurs (niveau premier cycle)

(c'est cette dernière méthode qui est utilisée dans les cours d'optique).

a) Angles de vecteurs

La face $B''C'$ est l'image de la face BC par une rotation d'angle $2(\widehat{AB, AC'}) = 2(\widehat{AC, AB})$ donc l'angle $(\vec{n}, \vec{n}'')$ des normales orientées vers l'intérieur de la lame est $2(\widehat{AC, AB})$ et $(\vec{n}, -\vec{n}'') = 2(\widehat{AC, AB}) + \hat{P}$ c'est aussi l'angle $(\vec{F'G''}, -\vec{n}'')$ *

* $\vec{DE}$ et $\vec{n}$ définissent la même direction de demi-droite

Donc par la rotation réciproque on obtient

$$(\overrightarrow{-n}, \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{-n''}, \overrightarrow{F'G''}) = \hat{P} - 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \hat{P} + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FG}) = \hat{P} + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

la symétrie par rapport à $B''C'$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{G''J}) &= 2(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{B''C'}) \\ &= 2(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n''}) + 2(\overrightarrow{n''}, \overrightarrow{B''C'}) = 4(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \hat{P} \end{aligned}$$

(puisque $(\overrightarrow{n''}, \overrightarrow{B''C'}) = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{BC})$ est droit)

$$\text{donc } (\overrightarrow{-n}, \overrightarrow{G''I}) = 4(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{IJ}) = -4(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

et on termine comme plus haut

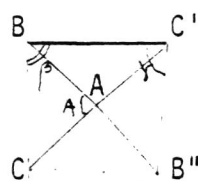
b) Angles de secteurs

Notons A , B et C les mesures des angles du prisme en degré par exemple

$$\text{On a } A + B + C = 180$$

$$\text{On a } \beta = \text{mes } \overrightarrow{CBC'} = 2B \text{ et } \gamma = \text{mes } \overrightarrow{BC'B''} = 2C$$

$$\text{donc } \beta + \gamma = 2(B + C) = 2(180 - A) = 360 - 2A$$



α

figure 4

Si $A > 90$ posons $A = 90 + \alpha^*$; alors
 $\beta + \gamma = 180 - 2\alpha < 180$ (fig. 4). Les
 droites BC et $C'B''$ ont un point d'inter-
 section situé du côté de C et B'' et la
 mesure α du secteur saillant qu'elles
 définissent est 2α

* ici α est un nombre négatif

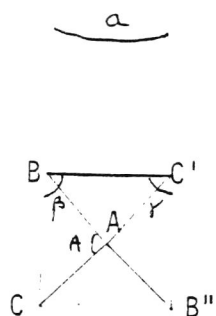


figure 5

(fig.5). Les droites BC et C'B'' ont un point d'intersection situé du côté de B et C' et la mesure a du secteur saillant qu'elles définissent est 2α .

La mesure des angles qui nous intéressent est reporté sur les figures ci-dessous

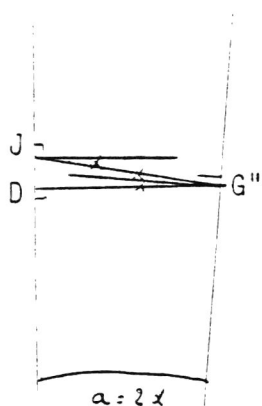


figure 6

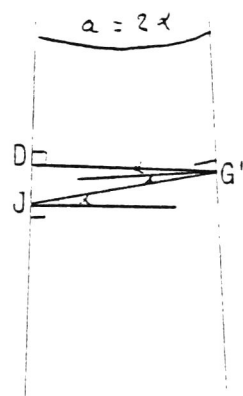


figure 7

6 - REMARQUES

6.1 - Les figures et les calculs faits sont valables pour des rayons lumineux qui frappent d'abord la face AB. Pour des rayons lumineux qui frappent d'abord la face AC il y a lieu d'intervertir le rôle de B et C. Algébriquement on obtient directement

$$\begin{aligned} \widehat{(ED, FC)} &= \widehat{P} + 2 \widehat{(AC, AB)} \\ \text{et} \quad \widehat{(ED, IJ)} &= -4 \widehat{(AC, AB)} \end{aligned}$$

Géométriquement il convient d'intervertir les figures 4 et 6 avec les figures 5 et 7.

6.2 - La valeur de α étant très petite, on peut appliquer la loi de réfraction approchée

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

Comme $\frac{n_1}{n_2}$ est voisin de 1,5 on utilise pratiquement les résultats suivants : 3α est une mesure de l_R et l' et 6α est une mesure de l'angle de l_R et l'' ce qui permet de trouver α en mesurant l'angle de l_R avec l' ou l'' .

6.3 - On pourrait de même traiter l'exercice suggéré par la figure 8 (écart entre l'angle en B et l'angle en C d'un prisme "isocèle")

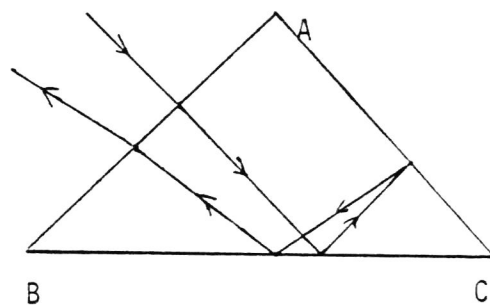


fig. 8 Section droite du prisme

CHAPITRE 5

DEFINITIONS THEORIQUES DES ANGLES DE DEMI-DROITES

I - PRESENTATION

Expérimentalement nous avons, au départ, fait des dessins appelés secteurs. Nous avons appris à les mesurer avec un rapporteur. Nous avons constaté que deux secteurs sont superposables lorsqu'ils ont même mesure.

Nous avons ensuite parlé de l'angle dont on a tourné au cours d'un mouvement de rotation.

D'autre part, nous avons dit dans l'introduction que pour parler de l'angle de deux droites ou demi-droites, seules importaient les directions (et le sens) de ces droites ou demi-droites, c'est pourquoi nous allons faire une étude dans un espace vectoriel, avant de travailler dans un espace ponctuel (ou affine).

Cette démarche n'est possible que lorsqu'on dispose de connaissances mathématiques déjà bien structurées (espace vectoriel, espace vectoriel euclidien, espace affine, espace affine euclidien) et permet alors une présentation économique.

Cette théorie serait vide de toute signification pour quelqu'un qui n'aurait jamais manipulé les secteurs, les couples de 1/2 droites, ..., les arcs de cercles, ... et qui voudrait s'en faire une idée à la lecture de ce qui suit.

Il ne s'agit pas du tout d'une progression pour présenter les concepts, mais d'une mise en forme après coup destinée à montrer les liens entre les différents concepts au sein d'une théorie très élaborée.

Nous allons, en conséquence, étudier les notions suivantes :

Dans un plan vectoriel euclidien

- . rotation vectorielle
- . angle d'une rotation vectorielle
- . angle de couples de demi-droites vectorielles ou de couples de vecteurs

Dans un plan affine euclidien

- . rotation ponctuelle
- . angle d'une rotation ponctuelle
- . angles de couples de demi-droites affines
(à partir des définitions des notions correspondantes dans le plan vectoriel)

Dans un plan vectoriel euclidien, ou un plan affine euclidien
 . angle de paires de demi-droites vectorielles ou affines

Remarque

Les passages les plus techniques, qui peuvent être sautés en première lecture, sont imprimés en caractères plus petits que les autres.

II - DES MOUVEMENTS DE ROTATIONS AUX ROTATIONS VECTORIELLES

1 - D'UN MOUVEMENT DE ROTATION A LA TRANSFORMATION PONCTUELLE CORRESPONDANTE

Quand un objet tourne autour d'un axe chacun de ses points décrit une trajectoire circulaire (ces points pouvant revenir éventuellement plusieurs fois au même endroit).

Dans l'étude mathématique des rotations on oublie ce que l'on sait sur les trajectoires pour ne considérer que les positions de départ et d'arrivée. On garde comme idée essentielle le fait que chaque partie a tourné de la même façon et c'est précisément cette idée que l'on peut traduire par le concept de rotation.

La définition d'une rotation ponctuelle plane pourrait être :

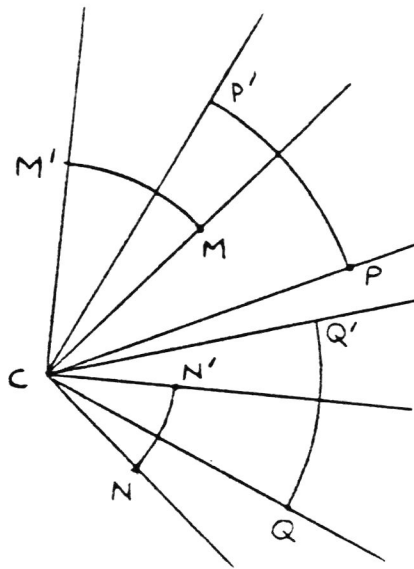
C'est une application du plan affine euclidien dans lui-même qui admet un point invariant unique (à moins que ce ne soit la transformation identique) et qui conserve les distances.

Cette caractérisation peut se traduire en langage vectoriel (voir cours T.C.).

Ce qui suit n'est qu'une illustration de ce passage et non une démonstration.

Remarque : Sur les dessins on représente les vecteurs à l'aide de bipoints ayant tous la même origine 0

2 - D'UNE ROTATION PONCTUELLE A LA ROTATION VECTORIELLE ASSOCIEE :



$$R(C) = C$$

$$R(M) = M'$$

$$R(N) = N'$$

Par R le segment $[M, N]$
est transformé en $[M', N']$

On peut remarquer sur le dessin que:

. 2 bipoints équipollents

ici $((M, N)$ et $(P, Q))$

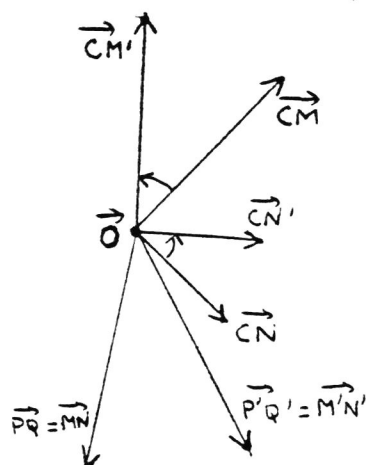
sont transformés en bipoints équipollents

ici $((M', N')$ et $(P', Q'))$

On peut définir une application de

Π dans Π à partir de R qui transforme

un vecteur en un vecteur de même norme.



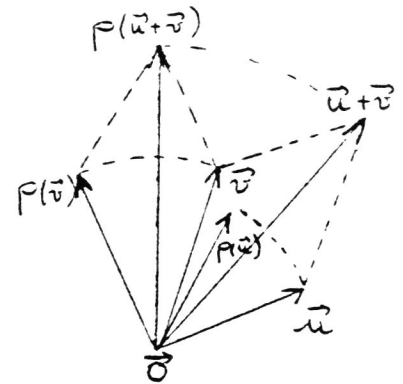
$$\rho(\vec{CM}) = \vec{CM'}$$

$$\rho(\vec{CN}) = \vec{CN'}$$

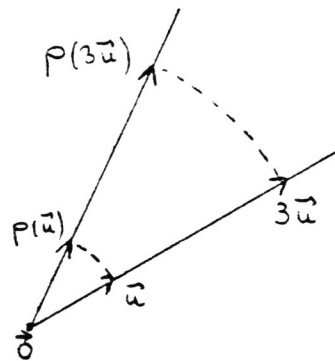
$$\rho(\vec{MN}) = \vec{M'N'}$$

$$\cdot \rho(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\vec{u}) + \rho(\vec{v})$$

(On imagine que le parallélogramme construit à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tourne sur celui construit à partir de $\rho(\vec{u})$ et $\rho(\vec{v})$)



$$\cdot \rho(\lambda \vec{u}) = \lambda \rho(\vec{u})$$



ρ est une application de Π dans Π

$\cdot \vec{0}$ est le seul vecteur invariant (sauf si ρ est l'identité).

Conclusion :

Pour étudier une rotation ponctuelle, on peut s'appuyer sur l'étude d'une application linéaire de Π dans Π , qui transforme chaque vecteur de Π en un vecteur de même norme et qui admet seulement $\vec{0}$ comme vecteur invariant (à moins que ce ne soit l'identité).

Auparavant donnons-nous quelques outils pour étudier une application linéaire générale.

III - MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS UNE BASE

Soit Π un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de Π . Cela signifie que tout vecteur de Π peut s'exprimer de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\forall \vec{u} \in \Pi \exists ! (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$$

Soit alors f une application linéaire de Π dans Π .

$$\begin{aligned} \text{Cela signifie :} \quad & \forall \vec{u} \in \Pi \quad \forall \vec{v} \in \Pi \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ & \forall \vec{u} \in \Pi \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Supposons que} \quad & f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} \\ & f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j} \end{aligned}$$

on dira que le tableau de nombres réels

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Alors si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque, il s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \text{et} \quad f(\vec{u}) &= f(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= f(x\vec{i}) + f(y\vec{j}) \quad (\text{car } f \text{ linéaire}) \\ &= xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) \quad (\text{car } f \text{ linéaire}) \\ &= x[a\vec{i} + b\vec{j}] + y[c\vec{i} + d\vec{j}] \\ &= (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

On peut remarquer qu'il est inutile de détailler toujours le calcul si l'on écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et apprendre à faire le produit des 2 tableaux de droite pour obtenir les résultats souhaités

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{u} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 6 \times 3 \\ 7 \times 2 + 4 \times 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad f(\vec{u}) = 28\vec{i} + 26\vec{j}$$

Conclusion : Si Π est un plan vectoriel^(**) rapporté à $\vec{i}, \vec{j}$, une application linéaire de Π dans Π est facile à utiliser si on connaît sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ avec la convention suivante:

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \end{array}$$

on lit dans cette colonne les composantes de $f(\vec{i})$ sur $(\vec{i}, \vec{j})$ on lit dans cette colonne les composantes de $f(\vec{j})$ sur $(\vec{i}, \vec{j})$

Nous voici maintenant prêts pour étudier les applications linéaires qui transforment un vecteur en un vecteur de même norme.

* Pour cette partie et pour celles relatives aux isométries vectorielles, les calculs non rédigés peuvent être cherchés par le lecteur ou lus dans un livre de 1ère C (programme 1979)

** non nécessairement euclidien, c'est-à-dire non nécessairement muni d'un produit scalaire.

IV - LES ISOMETRIES VECTORIELLES D'UN PLAN VECTORIEL EUCLIDIEN

On a vu que ce qu'on aimerait appeler rotation vectorielle était une application linéaire qui transforme un vecteur en un vecteur de même norme. Pour pouvoir parler de rotation vectorielle nous devons nous placer dans un plan vectoriel euclidien*

Alors on appellera norme de $\vec{u}$, le nombre $\vec{u} \cdot \vec{u}$ obtenu en faisant le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même

Nous conviendrons de rapporter $\vec{u}$ à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée (c'est-à-dire $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$)

Alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Définition : On appelle isométrie vectorielle du plan vectoriel euclidien Π toute application linéaire de Π dans Π qui transforme un vecteur en un vecteur de même norme.

1 - DETERMINATION DE LA MATRICE D'UNE ISOMETRIE VECTORIELLE

Les vecteurs sont repérés par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f(\vec{u}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par f de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \|f(\vec{u})\|^2 &= x'^2 + y'^2 \\ &= (ax + cy)^2 + (bx + dy)^2 \\ &= a^2 x^2 + 2acxy + c^2 y^2 + b^2 x^2 + 2bdxy + d^2 y^2 \\ &= (a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)xy + (c^2 + d^2)y^2 \end{aligned}$$

Pour que $\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de Π , il faut et il suffit que

$$(S) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2(ac + bd) = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

On trouve après résolution du système (S) que la matrice est de la forme

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \quad (\text{type I}) \\ \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \quad (\text{type II}) \end{array}$$

Comment interpréter géométriquement ces résultats ?

Vecteurs invariants par f :

La recherche des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ conduit aux résultats suivants:

Si la matrice de f est du type I : - soit $f = \text{Id}_{\Pi}$

- soit le vecteur nul est le seul vecteur invariant

Si la matrice de f est du type II, il y a une droite vectorielle de vecteurs invariants.

Ces résultats montrent en retour que si la matrice de f dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est du type I (resp. II), sa matrice dans une autre base orthonormée sera encore du type I (resp. II).

2 - ILLUSTRATION D'UNE ISOMETRIE DONT LA MATRICE EST DU TYPE II

On sait que f admet une droite vectorielle Δ de vecteurs invariants.

Soit alors $\vec{e}_1$, un vecteur unitaire*** de Δ .

Soit $\vec{e}_2$, tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit une base orthonormée (on peut démontrer qu'il existe 2 tels vecteurs)

* c'est-à-dire muni d'un produit scalaire. Nous vous renvoyons à un livre de 1ère C pour en trouver la définition

** $\|\vec{u}\|$ désigne la norme de $\vec{u}$

*** $\|\vec{e}_1\| = 1$. Il y a 2 choix possibles.

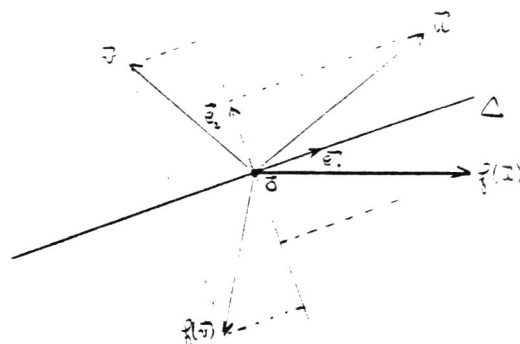
Comme $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et comme la matrice de f est du type II dans toute base orthonormée, on peut dire que la matrice de f dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)^*$ est

$$\begin{array}{cc|c} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \\ \hline \text{1ère colonne} & \text{2ème colonne} & \\ \text{connue car} & \text{imposée car la} & \\ \text{on connaît} & \text{matrice est de} & \\ f(\vec{e}_1) & \text{type II} & \end{array}$$

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$



Définition : Une telle application est appelée symétrie vectorielle orthogonale par rapport à Δ .

3 - ILLUSTRATION D'UNE ISOMETRIE DONT LA MATRICE EST DU TYPE I

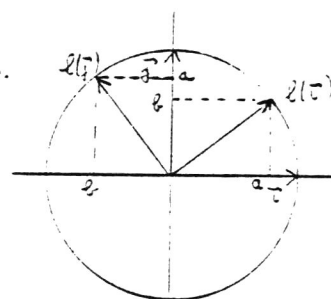
Soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée.

$$z(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$z(\vec{j}) = -b\vec{i} + a\vec{j}$$

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$z(\vec{u}) = xz(\vec{i}) + yz(\vec{j})$$



Sur le dessin : on remarque que l'on passe de $\vec{i}$ à $z(\vec{i})$ par la même rotation que de $\vec{j}$ à $z(\vec{j})$. Et comme $z(\vec{u})$ est placé par rapport à $z(\vec{i})$ et $z(\vec{j})$ comme $\vec{u}$ par rapport à $\vec{i}$ et $\vec{j}$, c'est encore la même rotation qui a fait passer de $\vec{u}$ à $z(\vec{u})$.

Définition : On appelle rotation vectorielle, toute isométrie vectorielle dont la matrice dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée est du type II

4 - CHANGEMENT DE BASE

On a vu que la matrice d'une symétrie vectorielle orthogonale avait une forme particulièrement simple dans 4 bases orthonormées privilégiées. La matrice est différente suivant les bases.

Par contre, en calculant la matrice d'une rotation vectorielle dans une autre base orthonormée on montre que celle-ci est

$$\text{soit } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ comme dans } (\vec{i}, \vec{j}), \text{ soit } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \text{ il en est ainsi dans } (\vec{j}, \vec{i})$$

On est ainsi conduit à partager les bases orthonormées en 2 classes. On dit que 2 bases d'une même classe sont de même orientation.

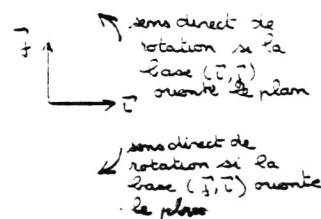
Si la matrice d'une rotation vectorielle est $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre A est indépendant de la base et appelé cosinus de la rotation alors que le nombre B est lié à l'orientation de la base. On l'appelle sinus de la rotation dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Il serait encore le sinus de la rotation dans toute autre base de même orientation. Mais le sinus de la rotation dans une base d'orientation contraire serait $-B$.

En résumé :

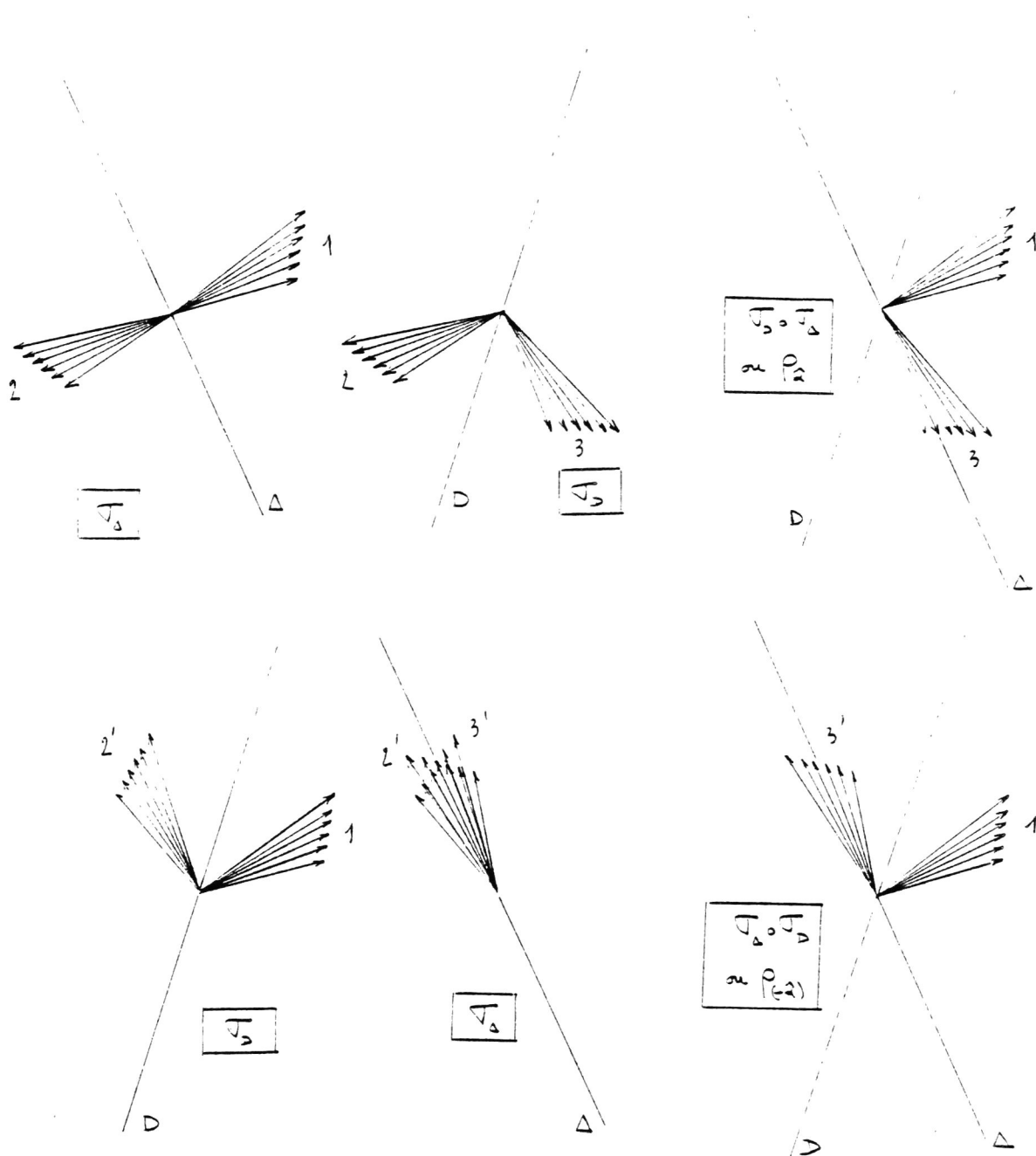
On peut parler du cosinus d'une rotation de façon intrinsèque, mais pour parler de son sinus, il faut préciser comment on a orienté le plan**

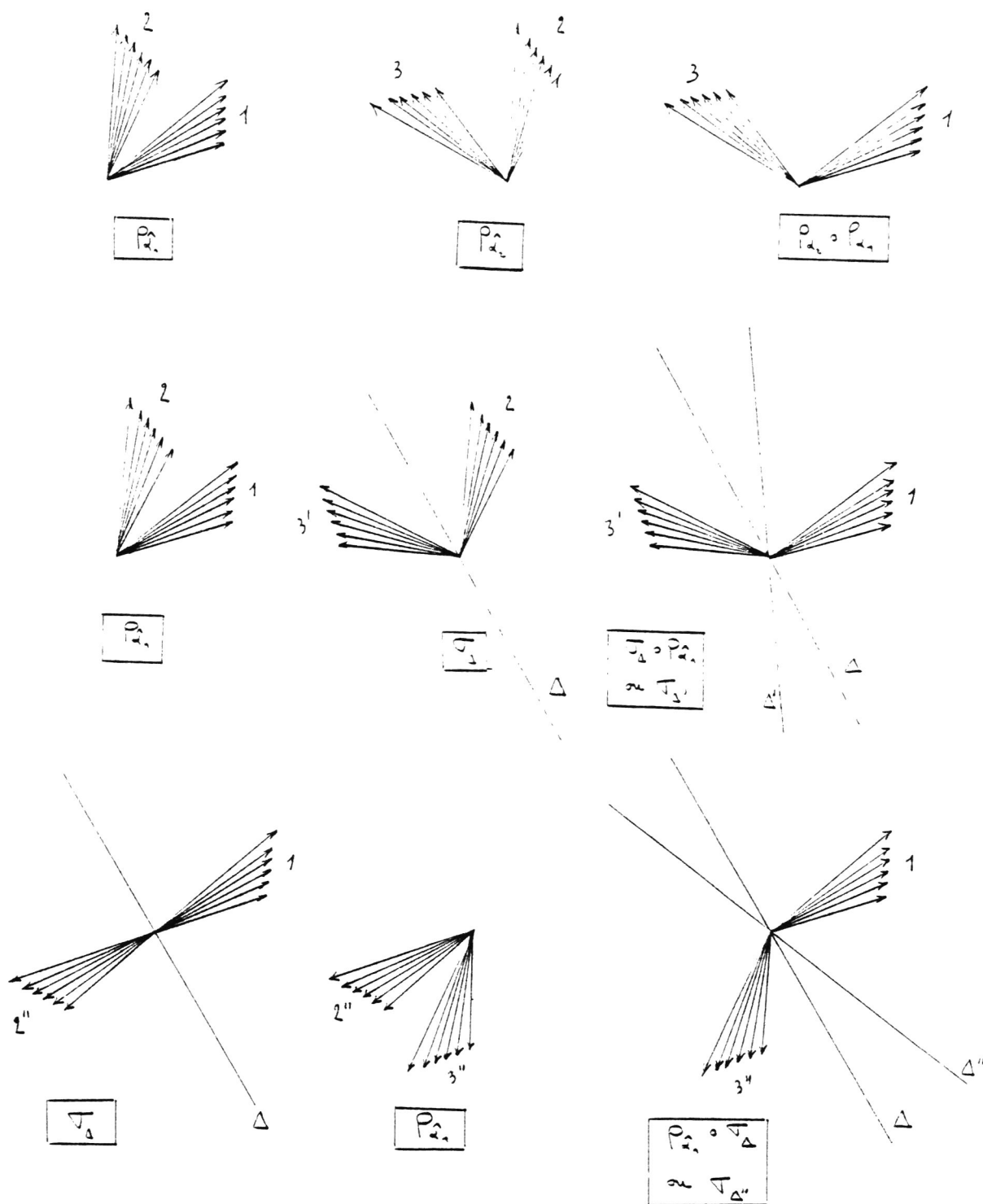
* On peut remarquer qu'il y avait 4 choix possibles pour cette base

** Intuitivement ceci correspond au fait que si on tourne, par exemple, de 30° pour $(\vec{i}, \vec{j})$, on tourne de (-30°) pour $(\vec{j}, \vec{i})$



V - LE GROUPE DES ROTATIONS VECTORIELLES POUR LA LOI 0

1 - ILLUSTRATION DE LA COMPOSITION DE DEUX ISOMETRIES VECTORIELLES



Tous les résultats observés sur ces dessins peuvent être vérifiés en calculant à chaque fois la matrice de l'application composée.

Remarques :

Nous venons d'observer que

- la composée de 2 symétries vectorielles orthogonales par rapport à des droites est une rotation vectorielle

De plus

$$\sigma_{\Delta} \circ \sigma_D \neq \sigma_D \circ \sigma_{\Delta}$$

- la composée de 2 rotations vectorielles est une rotation vectorielle.
On verrait aussi facilement que

$$\rho_{\hat{\alpha}_1} \circ \rho_{\hat{\alpha}_2} = \rho_{\hat{\alpha}_2} \circ \rho_{\hat{\alpha}_1} = \rho_{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2}$$

$$\rho_{-\hat{\alpha}} \text{ est la réciproque de } \rho_{\hat{\alpha}}$$

$$\text{Id}_{\pi} = \rho_{\hat{0}}$$

On peut résumer ces propriétés en disant que l'ensemble des rotations vectorielles est un groupe pour la loi de composition notée $\circ$

Nous allons retrouver cela dans la théorie

./...

2 - MATRICE D'UNE COMPOSÉE D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit f une application linéaire de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{I}$ de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans $(\overline{\mathbb{I}}, \overline{\mathbb{J}})$

Soit g une application linéaire de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{I}$ de matrice $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ dans $(\overline{\mathbb{I}}, \overline{\mathbb{J}})$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$

et $(g \circ f)(\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{telles que } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'(ax + cy) + c'(bx + dy) \\ b'(ax + cy) + d'(bx + dy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x'' = (a'a + c'b)x + (a'c + c'd)y \\ y'' = (b'a + d'b)x + (b'c + d'd)y \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En remplaçant dans l'écriture $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{on obtient } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à poser

$$\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{pmatrix}$$

On peut ainsi trouver la matrice d'une composée sans refaire tous les calculs intermédiaires.

Exemple :

$$\text{matrice de } f \text{ dans } (\overline{\mathbb{I}}, \overline{\mathbb{J}}) : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{matrice de } g \text{ dans } (\overline{\mathbb{I}}, \overline{\mathbb{J}}) : \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{matrice de } (g \circ f) : \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 & 5x_3 + 7x_4 \\ 6x_1 + 8x_2 & 6x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

3 - RETOUR AUX ISOMETRIES VECTORIELLES

En utilisant les matrices on montre que

- la composée de 2 rotations vectorielles est une rotation vectorielle ($\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2$)
- la composée de 2 symétries vectorielles orthogonales par rapport à des droites est une rotation vectorielle ($\sigma_2 \circ \sigma_1 \neq \sigma_1 \circ \sigma_2$ si les droites sont distinctes et non orthogonales)
- la composée d'une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite et d'une rotation vectorielle est une autre symétrie. ($\sigma \circ \rho \neq \rho \circ \sigma$ si ρ n'est pas une rotation de $\mathbb{I}$ ou l'identité).

4 - LE GROUPE DES ROTATIONS VECTORIELLES POUR 0

On peut, à l'aide encore des matrices, montrer qu'une rotation vectorielle est une bijection de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{I}$ et que sa réciproque est encore une rotation vectorielle

L'identité, application neutre pour la loi $\circ$, est une rotation vectorielle car sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est du type I

En rassemblant tous les résultats obtenus on obtient:

Théorème : L'ensemble des rotations vectorielles munis de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

On note $\mathcal{O}^+(\mathbb{I})$ l'ensemble des rotations vectorielles de $\mathbb{I}$ car les rotations vectorielles sont aussi appelées isométries vectorielles positives.

VI - ANGLES DE COUPLES DE VECTEURS OU DE DEMI-DROITES VECTORIELLES

1 - INTRODUCTION

Se donner 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, c'est se donner, en même temps, les deux demi-droites vectorielles qu'ils engendrent

$$\vec{\Delta}(\vec{U}) = \{\lambda \vec{U} / \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

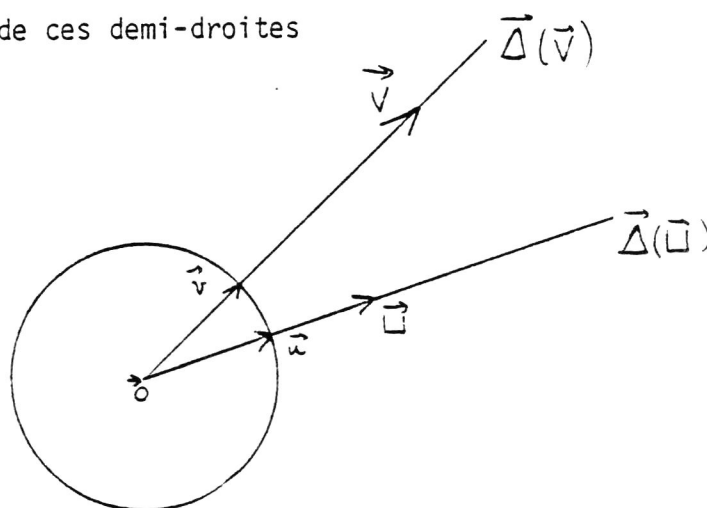
$$\text{et } \vec{\Delta}(\vec{V}) = \{\mu \vec{V} / \mu \in \mathbb{R}_+\}$$

ou encore les 2 vecteurs unitaires de ces demi-droites

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$$

et

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$



2 - COUPLES DE VECTEURS UNITAIRES AYANT MEME ANGLE

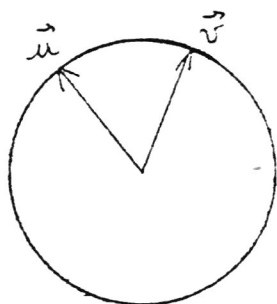
On dira que l'angle du couple $(\vec{U}, \vec{V})$ est le même que celui de $(\vec{\Delta}(\vec{U}), \vec{\Delta}(\vec{V}))$ ou encore de $(\vec{u}, \vec{v})$. On notera

$$\widehat{(\vec{U}, \vec{V})} = \widehat{(\vec{\Delta}(\vec{U}), \vec{\Delta}(\vec{V}))} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

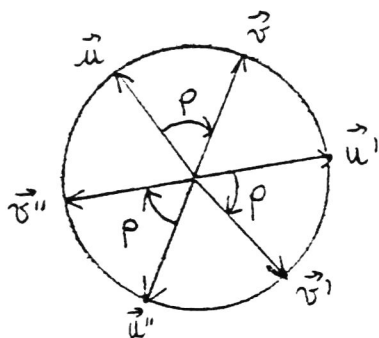
C'est pourquoi pour la définition d'un angle de couples de vecteurs nous allons nous limiter au cas où les 2 vecteurs sont unitaires.

3 - ANGLE D'UN COUPLE DE VECTEURS UNITAIRES

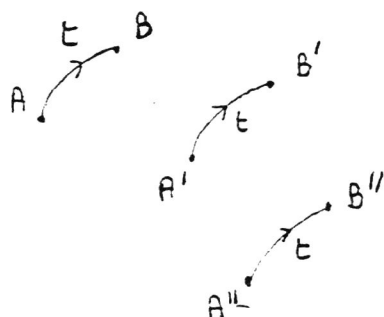
Tous les vecteurs de cette partie sont unitaires. On notera Π_1 l'ensemble des vecteurs unitaires de Π .



Caractériser un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ c'est traduire d'une certaine façon la différence de direction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire comment on tourne pour aller de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ (ou de $\vec{\Delta}(\vec{u})$ à $\vec{\Delta}(\vec{v})$)



C'est pourquoi on dira que $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ déterminent^{*} le même angle si et seulement si il existe une rotation vectorielle telle que $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$ et $\rho(\vec{u}') = \vec{v}'$



Cette démarche est analogue à la suivante : Deux bipoints (A, B) et (A', B') déterminent^{*} le même vecteur si il existe une translation telle que

$$t(A) = B \text{ et } t(A') = B'$$

Les phrases énoncées ci-dessus nous permettent de savoir si $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ ou $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ sans avoir donné de définition ensembliste d'un angle ou d'un vecteur^{**}

Voici cependant un choix de définitions théoriques possibles. Nous avons disposé celles relatives aux vecteurs dans la colonne de gauche, et en regard les définitions correspondantes pour les angles de couples de vecteurs unitaires.

* ou ont même

** Cette démarche est celle utilisée dans les petites classes pour l'introduction des naturels ou des longueurs

TRANSLATIONS ET VECTEURSROTATIONS VECTORIELLES ET ANGLES1ère Définition

Un vecteur c'est une classe d'équivalence dans $P \times P$ pour la relation R définie par

$(A,B) R (A',B')$ signifie:

$\exists t$ translation $t(A) = B$ et $t(A') = B'$

Un angle c'est une classe d'équivalence dans $\Pi_1 \times \Pi_1$ pour la relation R définie par

$(\vec{u},\vec{v}) R (\vec{u}',\vec{v}')$ signifie :

$\exists \rho$ rot.vect. $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$ et $\rho(\vec{u}') = \vec{v}'$

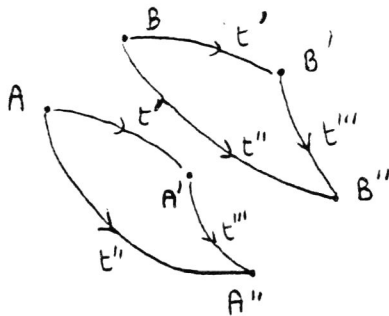
voir illustration à la page précédente

2ème Définition

Un vecteur c'est une classe d'équivalence dans $P \times P$ pour la relation R' définie par

$(A,B) R' (A',B')$ signifie

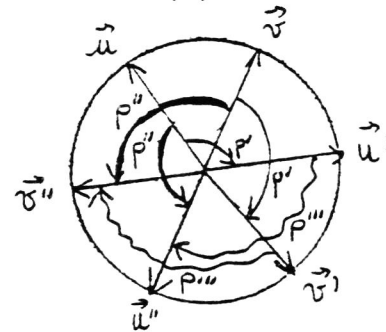
$\exists t'(\text{translation } t'(A)=A' \text{ et } t'(B')=B)$



Un vecteur c'est une classe d'équivalence dans $\Pi_1 \times \Pi_1$ pour la relation R' définie par

$(\vec{u},\vec{v}) R' (\vec{u}',\vec{v}')$ signifie

$\exists \rho' \text{ rot.vect. } \rho'(u) = u' \text{ et } \rho'(v) = v'$



Pour R' la translation ou la rotation change suivant les couples considérés dans une même classe d'équivalence; on transporte en bloc une figure sur l'autre: alors que dans la première définition on transporte séparément mais de la même façon chaque élément de la première figure sur l'élément correspondant de l'autre.

3ème Définition

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le graphe de la translation t telle que $t(A) = B$

L'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est le graphe de la rotation ρ telle que $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$

Remarque : Il s'agit de la translation t ou de la rotation ρ qui intervenait dans la première définition.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations
du plan P

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs

Notons $O^+(\Pi)^*$ l'ensemble des
rotations vectorielles

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles

Dans chaque colonne les deux ensembles peuvent être mis en correspondance bijective

$$\begin{cases} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ t & \longmapsto & \vec{u} \end{cases}$$

$\vec{u}$ est appelé vecteur de la translation t

$$\begin{cases} O^+(\Pi) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \rho & \longmapsto & \hat{\theta} \end{cases}$$

$\hat{\theta}$ est appelé angle de la rotation ρ

On note $+$ la loi de composition interne de $\mathcal{V}$ ou $(\mathcal{A})$ correspondant à la loi $\circ$ dans $\mathcal{T}$ (ou $O^+(\Pi)$). On obtient

$$\begin{aligned} t_1 & \longmapsto \vec{u}_1 \\ t_2 & \longmapsto \vec{u}_2 \\ t_2 \circ t_1 & \longmapsto \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif
isomorphe à $(\mathcal{T}, \circ)$

$$\begin{aligned} \rho_1 & \longmapsto \hat{\theta}_1 \\ \rho_2 & \longmapsto \hat{\theta}_2 \\ \rho_2 \circ \rho_1 & \longmapsto \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif
isomorphe à $(O^+(\Pi), \circ)$

Cas particuliers

$$\text{Id}_P \longmapsto \vec{0}$$

$$\text{Id} \longmapsto \hat{0} \text{ angle nul}$$

$$h_{-1} \longmapsto \hat{P} \text{ angle plat}^{**}$$

$$P_1 \text{ de matrice } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{d} \text{ un angle droit}$$

$$P_2 \text{ de matrice } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{d}' \text{ l'autre angle droit}$$

* Les rotations vectorielles sont appelées isométries vectorielles positives

** On note h_{-1} l'homothétie vectorielle de rapport (-1) . C'est-à-dire

$$h_{-1} \begin{cases} \Pi & \longrightarrow & \Pi \\ \vec{u} & \longrightarrow & -\vec{u} \end{cases}$$

Propriétés

$$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \text{élément neutre}$$

$$\hat{0} + \hat{\theta} = \hat{\theta} + \hat{0} = \hat{\theta}$$

$$\hat{P} + \hat{P} = \hat{0} \text{ car } h_{-1} \circ h_{-1} = \text{Id}_{\Pi}$$

$$\hat{d} + \hat{d} = \hat{P} \text{ car } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{d}' + \hat{d}' = \hat{P} \text{ car } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{d}' = \hat{d}' \text{ car } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

coordonnées d'un vecteur

Définition :

On appelle cosinus et sinus d'un angle, le cosinus et le sinus de la rotation correspondante.

Formule de Chasles

$$\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$$

$(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif; c'est une structure algébrique simple d'emploi. On peut additionner les éléments de $\mathcal{A}$; alors qu'il est illusoire d'essayer d'ajouter, en toute généralité, des angles pensés comme angles de secteurs angulaires ou comme angle de paires de demi-droites (c'est-à-dire sans considération d'ordre).

Cela est une bonne raison pour parler des rotations aux enfants le plus tôt possible ainsi que de l'angle d'une rotation même si l'on en a pas de définition (exactement comme on le fait pour la longueur d'un segment ou un nombre naturel).

4 - EXERCICE

Résolution de $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ avec $\hat{\alpha}$ inconnu

Une démonstration sans utiliser les mesures : (voir chap. 7 § III.7- une démonstration utilisant les mesures)

Résoudre $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{\beta}$

c'est résoudre

$\rho \circ \rho = \varphi$
 $\uparrow \qquad \uparrow$
 rotation vectorielle inconnue rotation vectorielle connue

ou encore :

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

en utilisant les matrices de ρ et φ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2x^2 = a + 1 \\ 2y^2 = 1 - a \\ 2xy = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1+a}{2} \\ y^2 = \frac{1-a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Comme $a^2 \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq a \leq 1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{1+a}{2}} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\frac{1-a}{2}} \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon \text{ et } \varepsilon' \text{ valant } 1 \text{ ou } (-1)$$

(on vérifie que la 3ème équation est alors vérifiée)

si $b > 0$, on veut $\varepsilon\varepsilon' > 0$, d'où 2 matrices solutions

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = -M_1$$

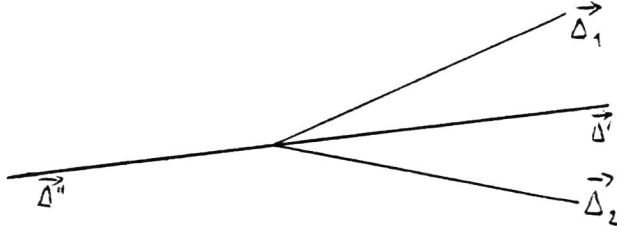
si $b < 0$, on veut $\varepsilon\varepsilon' < 0$ d'où 2 matrices solutions

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & \sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = -M_1$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{si } b = 0 & \text{si } a = 1 & \begin{array}{l} x = \varepsilon \\ y = 0 \end{array} & M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = -M_1 \\
 & \text{si } a = -1 & \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \varepsilon' \end{array} & M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = -M_1
 \end{array}$$

Dans tous les cas il y a 2 solutions en matrices opposées;
cela correspond à deux solutions en rotations ρ_1 et $\rho_2 = h_{-1} \circ \rho_1$,
cela correspond à deux solutions en angles $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{p}$

5 - BISSECTRICE D'UN COUPLE DE DEMI-DROITES VECTORIELLES



On cherche une demi-droite vectorielle $\vec{\Delta}$ telle que $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}_2)$ (1)

on sait que

$$(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}) + (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}_2) = (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2) \text{ (Chasles)}$$

compte tenu de (1) cela devient

$$(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}) + (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$$

inconnu connu

On sait que cette équation a deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_0 + \hat{p}$, soit 2 demi-droites :

$$\begin{aligned}
 (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}') &= \hat{\alpha}_0 \text{ et } (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}'') = \hat{\alpha}_0 + \hat{p} \\
 \text{d'où} \quad (\vec{\Delta}', \vec{\Delta}'') &= (\vec{\Delta}', \vec{\Delta}_1) + (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}'') \\
 &= -\hat{\alpha}_0 + (\hat{\alpha}_0 + \hat{p}) \\
 &= \hat{p}
 \end{aligned}$$

Donc $\vec{\Delta}'$ et $\vec{\Delta}''$ sont 2 demi-droites vectorielles opposées

Définition : $\vec{\Delta}' \cup \vec{\Delta}''$ est appelée la bissectrice du couple $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$.
C'est donc une droite.

6 - LES ANGLES DROITSRésolution de $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{p}$

Cette équation a deux solutions notées $\hat{d}$ et $\hat{d}'$, ce sont les angles droits.

$$\begin{aligned} (\hat{d} + \hat{d}') + (\hat{d} + \hat{d}') &= (\hat{d} + \hat{d}) + (\hat{d}' + \hat{d}') \\ &= \hat{p} + \hat{p} \\ &= \hat{0} \end{aligned}$$

Donc $\hat{d} + \hat{d}' = \hat{0}$ ou $\hat{d} + \hat{d}' = \hat{p}$ (les 2 solutions de $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{0}$)

Or $\hat{d} + \hat{d} = \hat{p}$ donc $\hat{d} + \hat{d}' = \hat{0}$ car $\hat{d} \neq \hat{d}'$

et si on avait $\hat{d} + \hat{d}' = \hat{p}$ on aurait $\hat{d} + \hat{d}' = \hat{d} + \hat{d}'$ et par suite $\hat{d}' = \hat{d}$

7 - ABSENCE DE RELATION D'ORDRE ...

Il est impossible de munir l'ensemble $\mathcal{A}$ d'une relation d'ordre total compatible avec l'addition. En effet, si une telle relation existait, en notant $<$ la relation d'ordre strict associée, on aurait

$$\left\{ \begin{array}{l} p < \hat{0} \\ \text{ce qui entraînerait} \\ \hat{p} + \hat{p} < \hat{0} \\ \text{c'est-à-dire} \\ \hat{0} < \hat{0} \\ \text{ce qui est impossible.} \end{array} \right. \quad \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{0} < \hat{p} \\ \text{ce qui entraînerait} \\ \hat{0} < \hat{p} + \hat{p} \\ \text{c'est-à-dire} \\ \hat{0} < \hat{0} \\ \text{ce qui est impossible} \end{array} \right.$$

Remarque : Cependant on parle souvent, dans des usages professionnels ou en cours de mathématiques de rotations d'angles positifs ou négatifs, de petits angles. Ce faisant on utilise implicitement non pas l'angle lui-même, mais sa détermination comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ (le plus souvent). Ce glissement de langage a l'avantage de faire naître à peu de frais une image mentale de référence, mais elle n'est pas sans risque pour un élève qui prendrait ce discours au pied de la lettre

VII - ANGLE D'UNE ROTATION PONCTUELLE; ANGLE D'UN COUPLE DE DEMI-DROITES AFFINES

1 - DEFINITIONS

Soit P un plan affine euclidien de plan vectoriel associé Π .

Définition 1 : On appelle rotation ponctuelle de P une application r de P dans P telle que :

- il existe un point Ω de P et une rotation vectorielle ρ sur Π vérifiant

. Ω est invariant par r , c'est-à-dire $r(\Omega) = \Omega$

- pour tout Π élément de P on a :

. $M' = r(M)$ si et seulement si $\rho(\vec{\Omega M}) = \vec{\Omega M'}$

Définition 2 : On appelle angle de la rotation r , celui de ρ .

Définition 3 : Etant donné deux demi-droites $[Ax$ et $[By$ de P de directions respectives $\vec{\Delta}(\vec{u})$ et $\vec{\Delta}(\vec{v})$, on appelle angle du couple (Ax, Ay)

l'angle du couple $(\vec{\Delta}(\vec{u}), \vec{\Delta}(\vec{v}))$

On note $(\widehat{Ax, Ay}) = (\widehat{\vec{\Delta}(\vec{u}), \vec{\Delta}(\vec{v})}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

ou encore $(\widehat{Ax, Ay}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

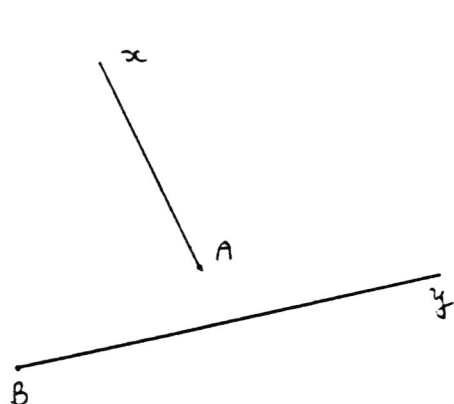


Illustration de la situation dans P

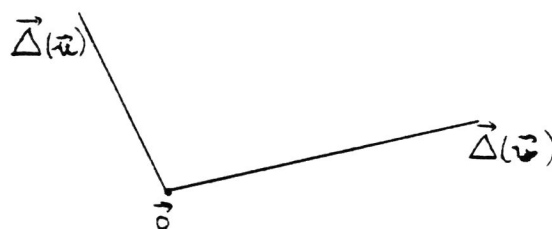
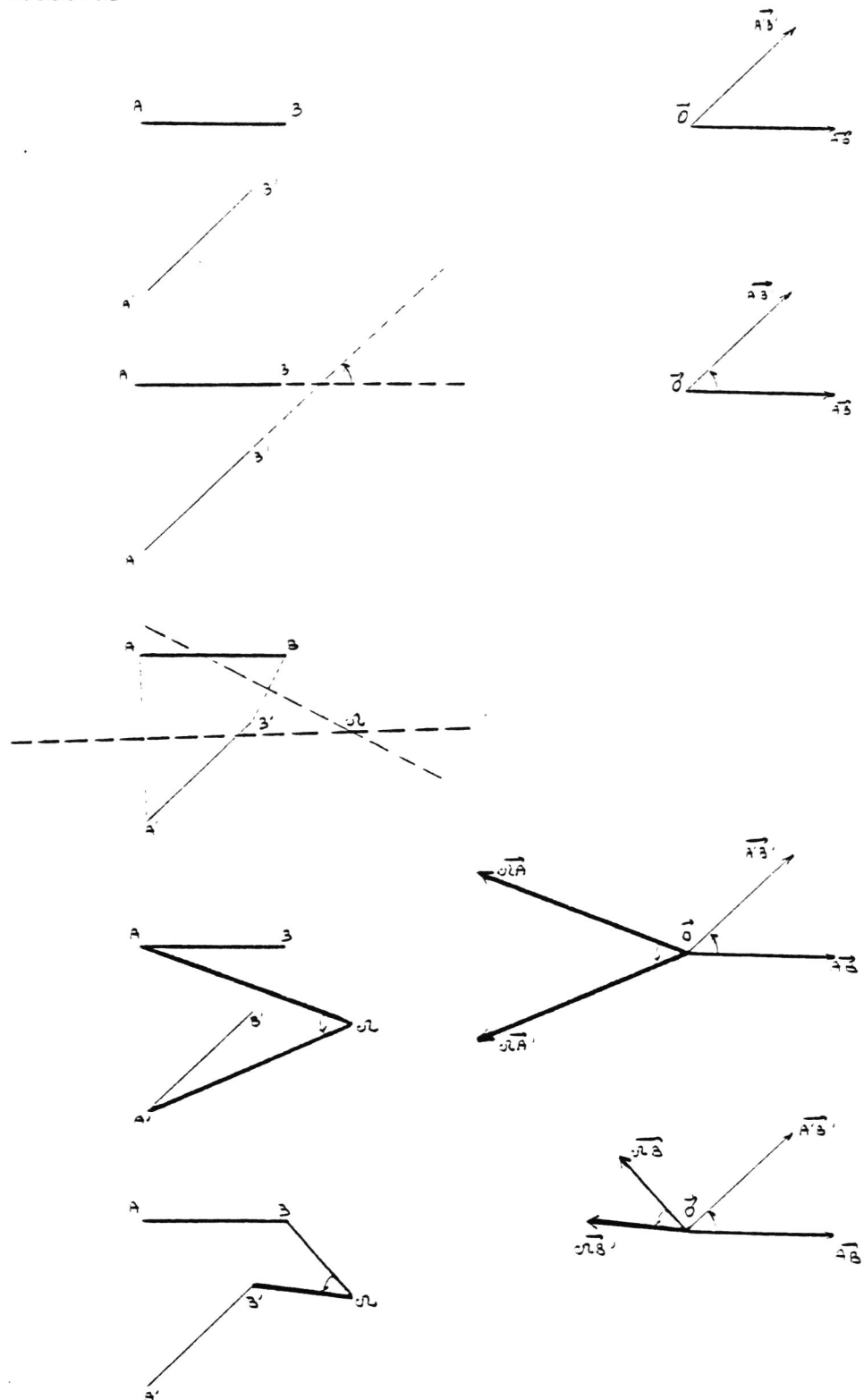


Illustration de la situation correspondante dans Π .

2 - REMARQUE SUR LES ROTATIONS PONCTUELLES

Deux segments de même longueur AB et $A'B'$ étant donnés, il existe une rotation et une seule transformant A en A' et B en B' (sauf si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$). La suite des dessins ci-dessous illustre la construction de Ω et la rotation vectorielle associée.



VIII - ANGLES DE PAIRES DE DEMI-DROITES

1 - INTRODUCTION

Le concept d'angle de couples de demi-droites est indispensable lorsqu'on veut additionner des angles, ou lorsqu'on veut repérer une demi-droite par rapport à une autre. On est souvent dans un de ces cas. Il arrive cependant qu'on n'ait aucune raison de privilégier une demi-droite par rapport à une autre; on pourra alors utiliser le concept *angle de paires de demi-droites*.

C'est cette notion qui figure au programme de la classe de 3ème; elle a porté de nom d'angle géométrique au cours des années 70; depuis la rentrée 80 on parle d'angle de deux demi-droites.

2 - DEFINITION

Etant donné deux demi-droites affines A_x et B_y de vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on posera

$$\widehat{A_x, B_y} = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

il nous reste à définir $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

2.1 - Première forme de la définition

Considérons la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ du sous-chapitre VI; sauf cas particulier ($\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{O}$ ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{p}$), le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ et le couple $(\vec{v}, \vec{u})$ ne sont pas dans une même classe d'équivalence pour la relation R

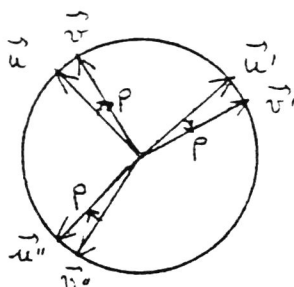
On veut fabriquer une nouvelle relation dans $\Pi_1 \times \Pi_1$ telle que la classe de $(\vec{u}, \vec{v})$ contienne

- tous les couples $(\vec{u}', \vec{v}')$ en relation avec $(\vec{u}, \vec{v})$ pour R
- le couple $(\vec{v}, \vec{u})$
- tous les couples en relation avec $(\vec{v}, \vec{u})$ pour R

. Cette relation pourrait être définie par :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mathcal{R}' (\vec{u}', \vec{v}') \text{ signifie :}$$

$$\exists \rho \text{ rot. vect. de } \Pi \text{ telle que } \rho(\vec{u}) = \vec{v} \text{ et } [\rho(\vec{u}') = \vec{v}' \text{ ou } \rho(\vec{v}') = \vec{u}']$$



. elle pourrait être encore $\mathcal{F}'$ où

$(\vec{u}, \vec{v}) \mathcal{F}' (\vec{u}', \vec{v}')$ signifie :

$\exists f$ isométrie vectorielle de Π telle que

$f(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}'$

Pour le dessin ci-contre :

f serait une rotation si on regardait $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$

f serait une symétrie si on regardait $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}'', \vec{v}'')$

. dans les deux cas la classe de $(\vec{u}, \vec{v})$ est la même.

On pose alors $\widehat{\{\vec{u}, \vec{v}\}} = \text{classe de } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ pour } \mathcal{F} \text{ (ou } \mathcal{F}')$

2.2 - Deuxième forme de la définition:

$$\widehat{\{\vec{u}, \vec{v}\}} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \cup \widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$$

C'est une description plus rapide des classes d'équivalence; mais elle met moins bien en évidence la signification de la relation d'équivalence.

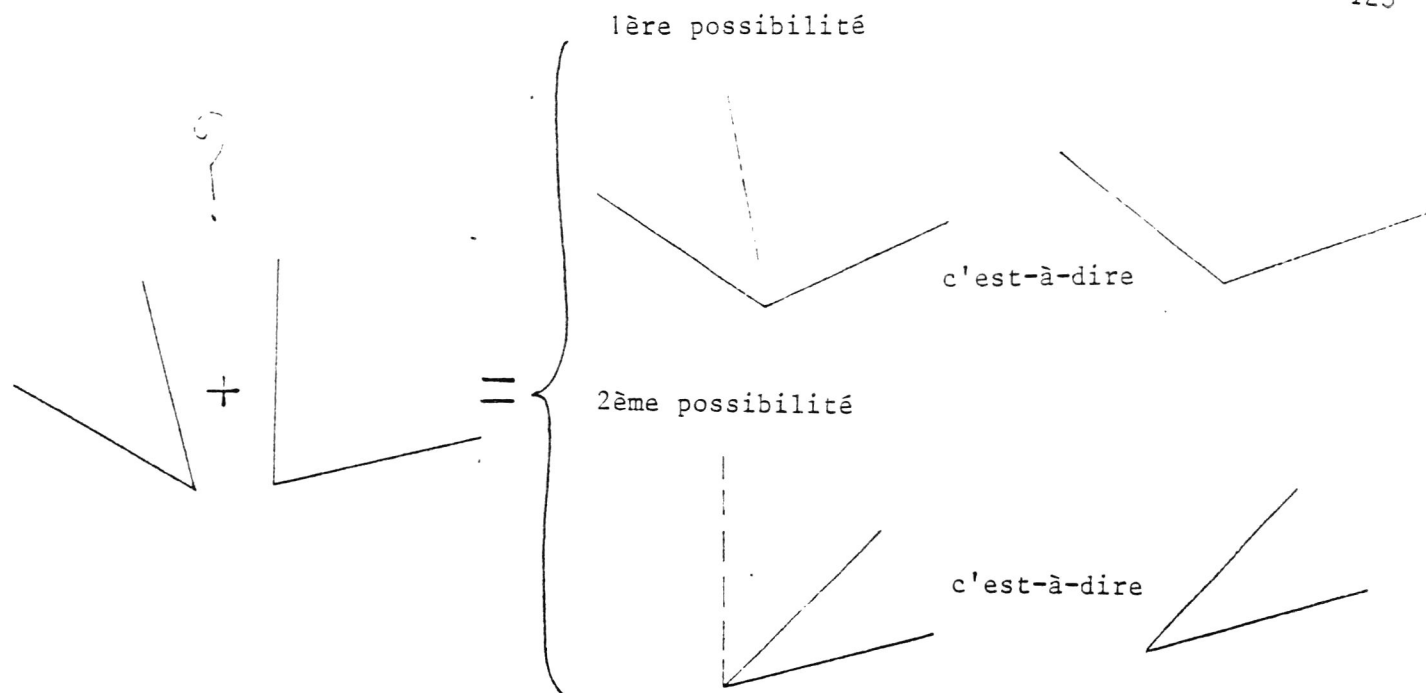
3. ABSENCE D'ADDITION

On ne peut donner aucune signification à une écriture telle que

$$\widehat{\{\vec{u}, \vec{v}\}} + \widehat{\{\vec{w}, \vec{n}\}}$$

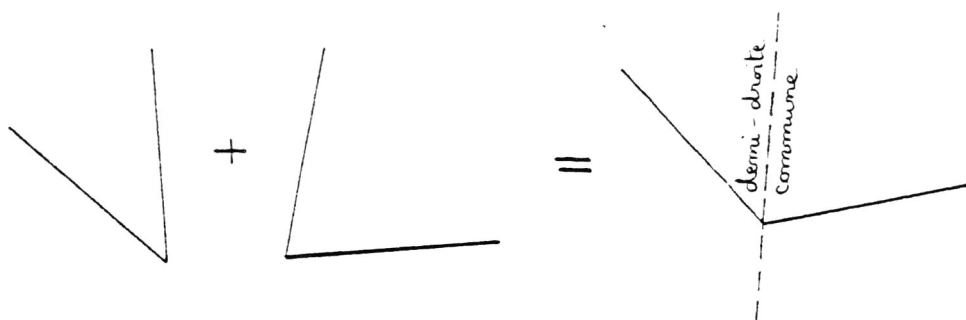
Les dessins qui suivent expliquent pourquoi.

Les figures dessinées sont des représentantes des angles considérés dont on change selon les besoins.

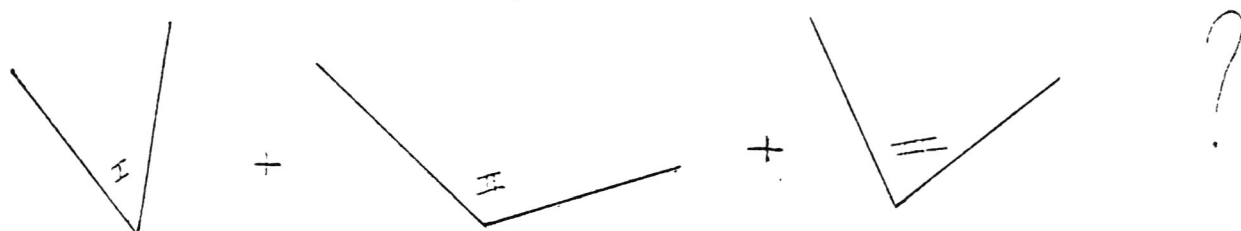


Toute autre possibilité se ramène à l'une de ces 2 là ; il suffit d'essayer pour s'en convaincre. On peut alors tenter d'éliminer une des possibilités en fixant une règle pour placer des représentants en position adjacents !

Par exemple : le côté commun laisse les 2 autres dans 2 demi-plans distincts. Dans ce cas :

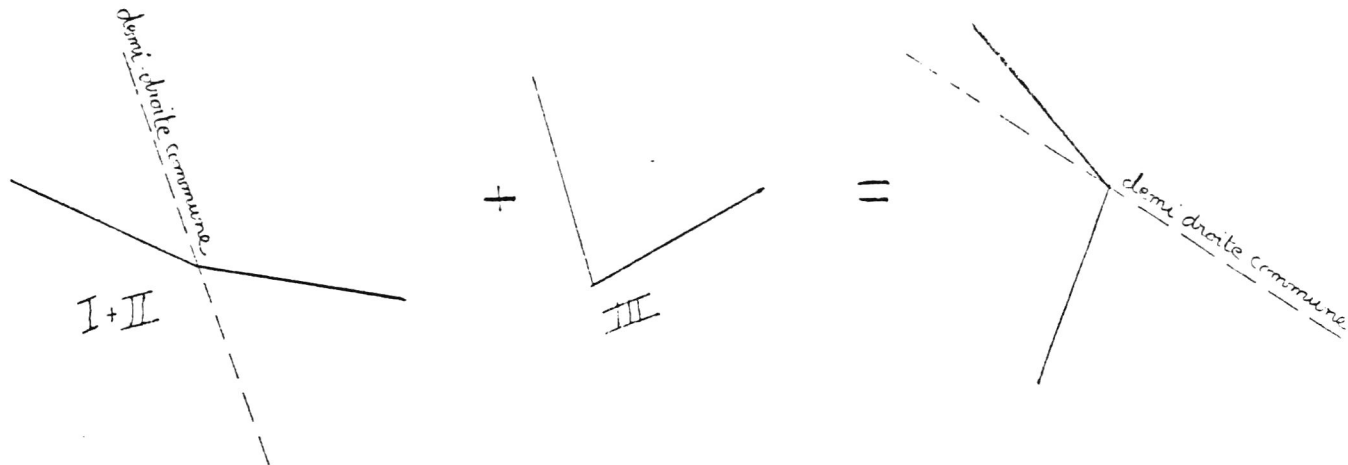


On a ainsi défini une opération sans ambiguïté , mais cette opération n'est pas associative. Pour le montrer il suffit d'exhiber un contre exemple.

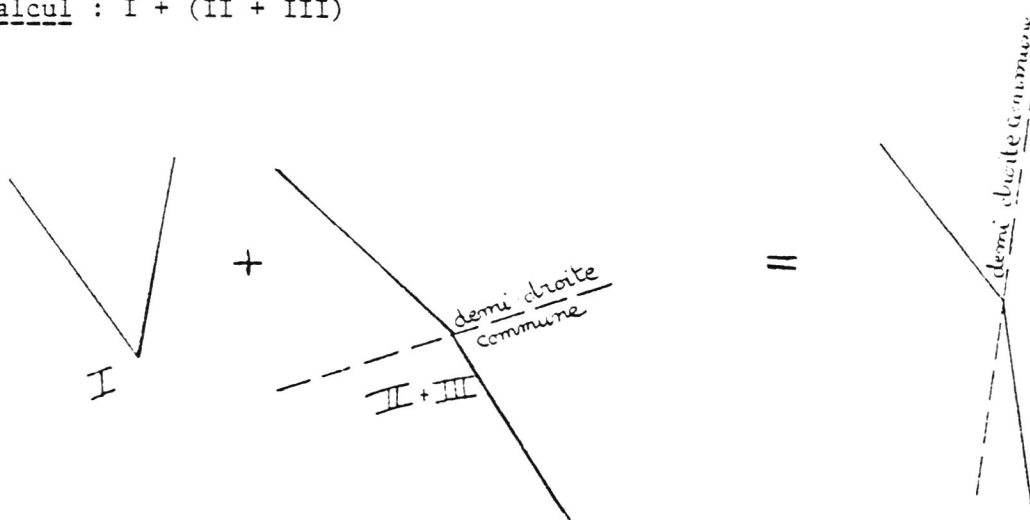


Si le lecteur le souhaite, il peut prendre un calque pour suivre les schémas suivants :

1er Calcul : $(I + II) + III$



2ème calcul : $I + (II + III)$



On peut constater à vue d'oeil, ou avec un calque que ces deux calculs ne conduisent pas à la même réponse. L'opération qu'on a définie ci-dessus ne peut pas être baptisée ^{*} addition car elle n'est pas associative.

* L'usage actuel est de réserver le terme d'addition pour des opérations partout définies, associatives et commutatives.

Remarque : Les dessins précédents sont l'illustration du calcul théorique suivant:

Si on note $\hat{\alpha}$ l'angle de paires $\hat{\alpha} \cup (-\hat{\alpha})$

et $\hat{\beta}$ l'angle de paires $\hat{\beta} \cup (-\hat{\beta})$

On peut considérer les sommes

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} \quad \text{ou} \quad \hat{\alpha} + (-\hat{\beta}) \quad \text{ou} \quad (-\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \quad \text{ou} \quad (-\hat{\alpha}) + (-\hat{\beta})$$

ce qui permet de définir 2 angles de paires

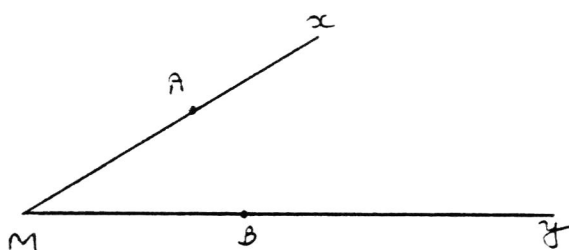
$$[(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \cup -(\hat{\alpha} + \hat{\beta})] \quad \text{ou} \quad [(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) \cup -(\hat{\alpha} - \hat{\beta})]$$

sans raison d'en privilégier un.

4 - NOTATION

On pourra aussi noter

$\widehat{AMB}$ au lieu de $\widehat{Mx, My}$ pour la situation suivante.



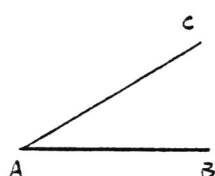
CHAPITRE 6

LES SECTEURS ANGULAIRES

I - INTRODUCTION

La notion de secteur angulaire est sans doute la notion qui apparaît le plus anciennement dans l'enseignement français sous le vocable angle. On trouve au siècle dernier dans le programme du baccalauréat

Angle : Génération des angles par la rotation d'une droite autour d'un de ses points



Cependant la "définition" suivante extraite d'un manuel de 1868^{*}

On exprime une idée claire pour tous les esprits, lorsqu'on dit que deux droites AB et AC qui se rencontrent forment un angle : c'est là une notion fondamentale qui comme celle de la ligne droite ne saurait être définie c'est-à-dire ramenée à une autre plus simple montre une confusion entre figure et classe de figures.

C'est pour lever cette confusion qu'on enseigne maintenant les secteurs angulaires. Mais les définitions les plus fréquentes dans les manuels (intersection ou réunion de demi-plans) masquent un peu le rôle fondamental des bords.

Il semble que la démarche suivie expérimentalement en classe de 6ème (cf chapitre 2) qui consiste à partir de secteurs circulaires pour effacer les bords circulaires, considérer des bords rectilignes de longueur arbitraire et finalement des demi-droites, permet d'insister sur le rôle des côtés.

Le secteur angulaire apparaît alors comme un concept unificateur, en ce sens que son introduction permet de résoudre une classe de problèmes.

II - REFLEXION SUR LES DEFINITIONS POSSIBLES DES SECTEURS ANGULAIRES

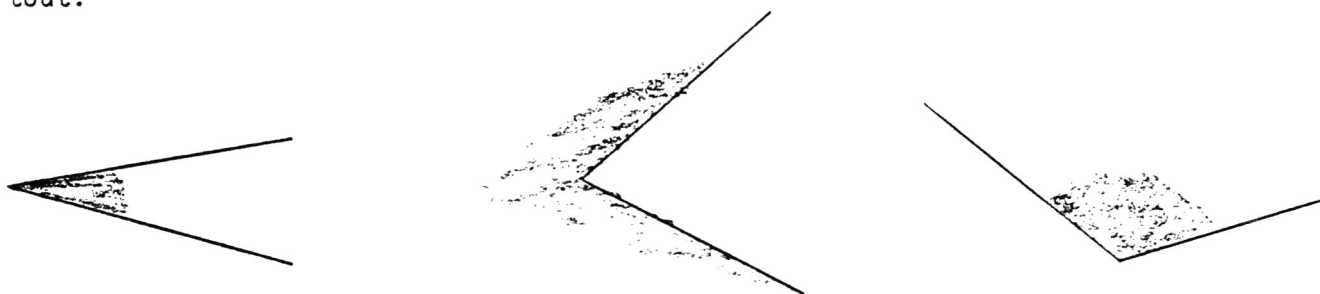
1 - A PROPOS DES DEFINITIONS RENCONTREES DANS LES MANUELS DE 6ème

On trouve dans les manuels diverses définitions des secteurs angulaires. Chacun d'eux introduit aussi des notations pour les désigner et un vocabulaire pour en parler (sommets, côtés, bords ...)

* Par J.A. SERRET - Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à la Faculté des Sciences de PARIS.

1.1 - Les définitions les plus simplistes (si l'on peut encore parler de définitions!) sont les suivantes :

Quelques dessins de secteurs angulaires comme ci-dessous et c'est tout.



L'auteur espère, sans aucun doute qu'à partir de ces quelques exemples l'élève comprendra ce qu'il entend, lui, par secteur angulaire et évite soigneusement de se poser le problème, d'en donner une définition.

1.2 - De nombreux manuels introduisent les secteurs angulaires à partir d'intersections et de réunions de demi-plans et ceci les amène à distinguer deux races de secteurs angulaires : les saillants et les rentrants.

Voici un exemple de telle définition:

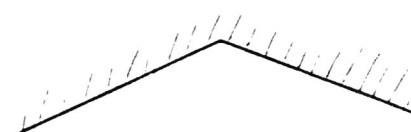
- *un secteur angulaire saillant est l'intersection de deux demi-plans (fermés) dont les bords sont sécants.*
- *un secteur angulaire rentrant est la réunion de deux demi-plans (fermés) dont les bords sont sécants.*

"fermé" veut dire : "contenant sa droite frontière". Nous l'avons mis entre parenthèses car ce n'est pas toujours précisé.

Suivent, en général, des dessins comme ceux-ci :



secteur angulaire saillant



secteur angulaire rentrant

Cette définition appelle quelques remarques:

- chaque secteur angulaire ainsi défini apparaît muni d'un sommet et de deux bords. Ce sommet et ces bords font partie de la portion de plan qu'il détermine. Ce ne serait pas le cas si l'on considérait des demi-plans ouverts c'est-à-dire ne contenant pas leur droite frontière.

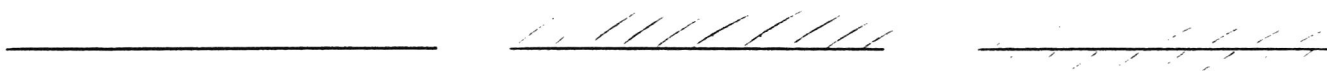
- Par contre, les secteurs nuls, plats et pleins :



qui sont des états limites des secteurs définis ci-dessus ne sont pas des secteurs angulaires au sens de la définition donnée. C'est regrettable!

- Dans certains manuels, on a tenté d'améliorer la définition en proposant:
 - . *un secteur angulaire rentrant est la réunion de deux demi-plans fermés dont les bords sont sécants ou confondus*
 - . *un secteur angulaire saillant est l'intersection de deux demi-plans fermés dont les bords sont sécants ou confondus.*

On récupère ainsi des individus qui ressemblent aux secteurs nuls plats et plans :



mais tous les points de la droite frontière commune aux demi-plans peuvent jouer le rôle de sommets de ces secteurs angulaires, il n'y a pas de sommet bien défini.

1.3 - Remarque de bon sens

Il ne s'agit pas pour le maître de donner aux élèves une définition des secteurs angulaires, puis de se lancer dans de longues explications visant à montrer ce qu'elle a d'imparfait, d'essayer ensuite de l'améliorer en l'alourdissant, pour aboutir enfin à un énoncé peut-être *cohérent* mais incompréhensible et sûrement inutilisable par les élèves.

Mais il se doit d'être conscient, lui, des imperfections des définitions proposées dans les manuels, comme de celles qui lui seront proposées par ses élèves à partir de l'expérimentation. Ainsi, si les enfants soulèvent d'eux-mêmes les problèmes liés à ces définitions, il sera parfaitement conscient de la nature de leurs difficultés et pourra les aider efficacement.

1.4 - D'autres manuels préfèrent définir le secteur angulaire comme *l'une quelconque des deux portions de plan comprises entre deux demi-droites de même origine* parfois en faisant référence à la notion d'angle de vue.

Des élèves soucieux de purisme pourront se demander dans quel sens doit être entendu le mot *comprise* : les deux demi-droites font-elles partie des deux secteurs angulaires qu'elles déterminent, d'un seul des deux mais alors duquel ou bien ne font-elles partie d'aucun des deux ? Mais si cela ne les préoccupe pas, nous ne pensons pas que l'enseignant doive s'efforcer d'attirer leur attention sur ces questions.

On rencontre d'ailleurs exactement les mêmes problèmes lors de l'introduction de la mesure des longueurs :

- . si l'on découpe une bande de papier, que deviennent les extrémités ?
 - . si l'on itère un découpage en deux, qu'advient-il en fin de compte ?
- et au niveau du modèle mathématique sur quel ensemble définit-on la mesure : segments du plan ? intervalles ouverts ? intervalles semi-ouverts ?

Remarque : Certains manuels précisent dans la définition qu'il s'agit uniquement de *demi-droites de supports distincts*.

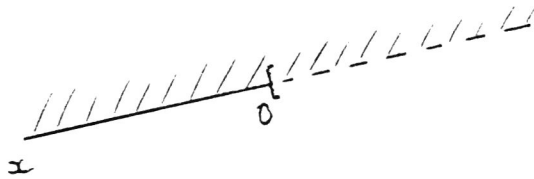
Ce faisant, ils perdent pas mal de l'intérêt de cette définition par rapport aux précédentes puisqu'ils vont eux aussi devoir faire un sort particulier aux secteurs nuls, plats et pleins.

1.5 - Une définition des secteurs angulaires à partir de la notion de drapeau est présentée dans le paragraphe suivant. Elle est uniquement destinée aux enseignants. Elle veut être une définition complète à l'aide du vocabulaire affine seul.

2 - DEFINITION A PARTIR DES DRAPEAUX

2.1 - Définition 1

On appelle drapeau la réunion d'un demi-plan ouvert et de l'une des demi-droites ouvertes ayant pour support sa frontière.



O est appelé le sommet du drapeau

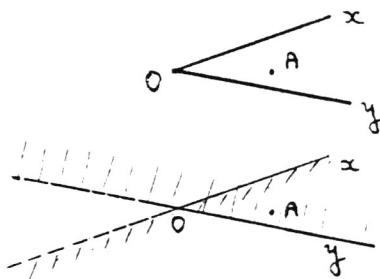
Ox sa hampe

2.2 - Observation :

Comment peut-on fabriquer un secteur donné avec des drapeaux ?

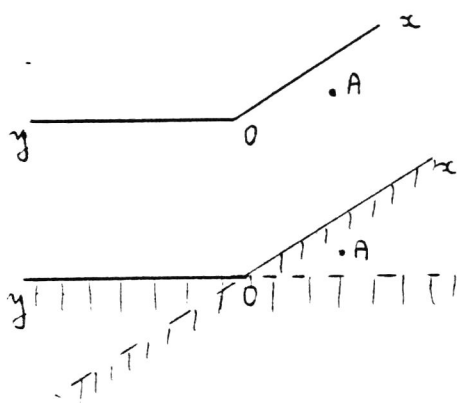
Voici un exemple :

Nous voulons obtenir le secteur de bords Ox et Oy contenant un point A donné.



Dans ce cas de figure, considérons le drapeau de hampe Ox contenant A et celui de hampe Oy contenant A .

Leur intersection est le secteur cherché.



Dans ce cas de figure, il faudrait considérer le drapeau de hampe Ox contenant A et celui de hampe Oy ne contenant pas A .

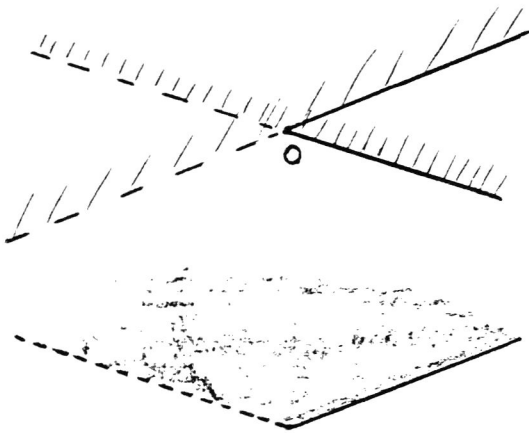
Leur réunion est le secteur cherché.

2.3 - Définition 2

On appelle secteur angulaire toute intersection ou réunion de deux drapeaux de même sommet.

exemple 1 :

Voici 2 drapeaux de même sommet



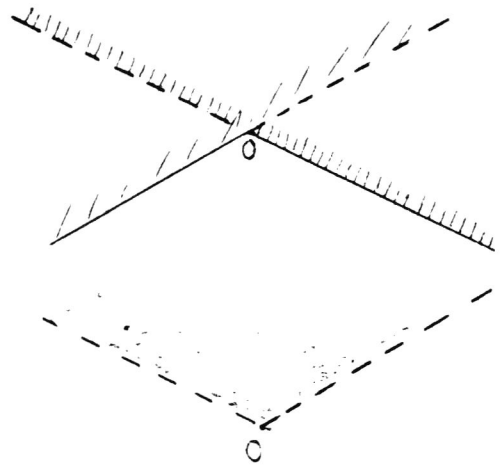
leur intersection



et leur réunion

exemple 2 :

Voici deux autres drapeaux de même sommet



leur intersection



et leur réunion

Remarques :

- les demi-droites frontières du secteur angulaire sont appelées les bords du secteur angulaire

- les secteurs angulaires ainsi définis ne contiennent pas leur sommet.
Suivant les cas ils contiennent un de leurs bords ou les deux ou aucun

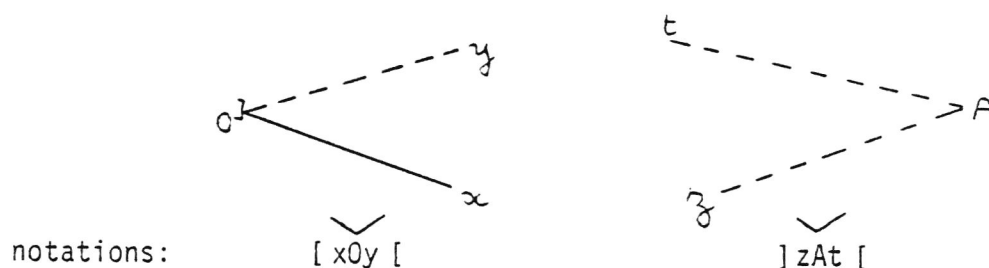
- deux demi-droites Ox et Oy étant données, nous parlerons comme pour les intervalles sur la droite de secteurs fermés, ouverts, semi-ouverts (deux demi-droites distinctes déterminent 8 secteurs angulaires différents!) et nous utiliserons ici des notations abrégées rappelant celles utilisées par les intervalles* :

$[\widehat{xOy}]$ $] \widehat{xOy} [$ $[\widehat{xOy} [$ $] \widehat{xOy}]$ pour les quatre secteurs saillants

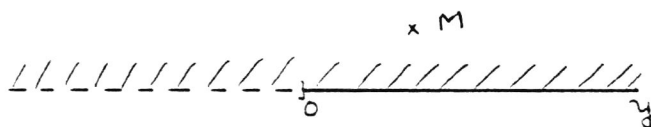
déterminés par les demi-droites Ox et Oy ;

$[\widehat{xOy}]$ $] \widehat{xOy} [$ $[\widehat{xOy}]$ $] \widehat{xOy} [$ pour les quatre secteurs rentrants

déterminés par les demi-droites Ox et Oy



Cette convention est sans ambiguïté si l'on n'a pas affaire à un secteur plat. Pour un secteur plat, on lèvera l'ambiguïté en précisant par exemple: *le secteur angulaire plat $[\widehat{xOy}]$ contenant le point M.*



- les secteurs nuls, plats et pleins rentrent bien dans le cadre de cette définition

* voir chapitre 10 : Notations

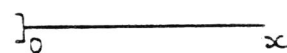
Par exemple:

à partir des drapeaux

on obtient:



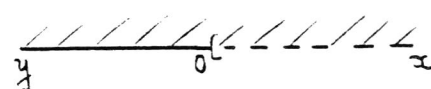
par intersection



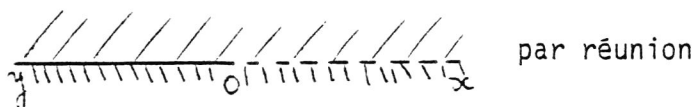
$[\widehat{x0x}]$: secteur angulaire
nul fermé



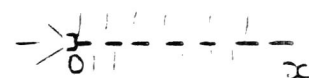
par réunion ou
intersection



$]\widehat{x0y}]$: secteur angulaire
plat semi-ouvert



par réunion



$]\widehat{x0x}[$: secteur angulaire
plein ouvert

- Comme nous avons dit que le sommet d'un secteur ne lui appartenait pas, aucun saillant $\widehat{x0y}$ n'est complémentaire d'un rentrant correspondant. Certains auteurs mentionnent une telle propriété : c'est absurde car cela oblige à se poser le problème de l'appartenance des bords (et du sommet car alors il faudrait faire un choix différent du nôtre).

Nous laissons au lecteur le soin de chercher, s'il le désire, des drapeaux permettant d'obtenir les autres cas limites.

2.4 - Dans les classes :

Si l'on ne s'intéresse pas à toutes ces distinctions subtiles, on pourra se borner à noter

secteur $\widehat{x0y}$ pour un saillant

secteur $\frown x0y$ pour un rentrant*

sans préciser ce qui se passe aux bords. Ce n'est que si des élèves posent des questions qu'on parlera de ce problème.

*Voir chapitre 10: Notations

III - ANGLES DE SECTEURS

1 - DEFINITION

Il est possible de donner une définition ensembliste des angles de secteurs. On définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des secteurs du plan en disant, par exemple, que les secteurs S_1 et S_2 sont équivalents si les 2 secteurs fermés de même bord sont isométriques^{*}

Cette démarche est sans intérêt :

- 1) Du point de vue théorique, elle est inutile
- 2) Du point de vue pédagogique, elle est impraticable

2 - DANS LES CLASSES

On peut dire que deux secteurs isométriques ont même angle

On utilise la notation $\widehat{xOy}$ pour parler de l'angle de l'un quelconque des secteurs saillants $[\widehat{xOy}]$, $] \widehat{xOy} [$, $] \widehat{xOy}]$, $[\widehat{xOy} [$.

la notation $\frown xOy$ pour parler de l'angle de l'un quelconque des secteurs rentrants $[\frown xOy]$, $] \frown xOy [$, $] \frown xOy]$, $[\frown xOy [$.

Remarque :

Dans cette démarche, on ne cherche pas à donner une définition ensembliste des angles de secteurs comme classes d'équivalence, pas plus qu'on ne cherche à donner une définition ensembliste des nombres entiers naturels comme classes d'équivalence quand on parle d'ensembles ayant même nombre d'éléments.

^{*} Il faudrait encore faire un sort particulier au secteur plein.

3 - LIEN AVEC LES ANGLES DE PAIRES DE DEMI-DROITES

Etant donné deux demi-droites Ox et Oy on peut définir d'une part, l'angle de paires de demi-droites, d'autre part, les deux angles de secteurs rentrant et saillants.

On confond souvent l'angle de paires de demi-droites avec l'angle de secteur saillant, confusion renforcée par des notations voisines ou identiques. Cette confusion explique certainement les tentatives d'addition des angles de paires de demi-droites.

4 - ESSAI DE DEFINITION A L'AIDE DU LANGAGE VECTORIEL

Soit P un plan affine euclidien de plan vectoriel directeur $\vec{I}$. Soient deux demi-droites de même origine $[Ax, et [Ay]$. Supposons que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient leurs directions. On dit aussi que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont des vecteurs directeurs. On a :

$$[Ax] = \{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{U} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

$$[Ay] = \{M \in P / \vec{AM} = \mu \vec{V} \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}_+\}$$

1er cas : $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont linéairement indépendants :



On peut à l'aide des deux demi-droites définir plusieurs secteurs. En voici quelques-uns :

saillant fermé $\widehat{[x]Ay]} = \{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)\} - \{A\}$

saillant ouvert $\widehat{[x]Ay]} = \{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)\}$

rentrant ouvert $\widehat{[x]Ay]} = \{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in [(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)]\}$

rentrant fermé $\widehat{[x]Ay]} = \{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in [(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)] - \{A\}\}$

- Nous avons préféré retirer le sommet A du secteur dans tous les cas ceci pour plusieurs raisons :
- nous voulons pouvoir parler de secteurs de mêmes sommets disjoints
 - lorsque nous parlerons d'un secteur plein fermé, nous voulons pouvoir savoir quel est son sommet!

Cela revient à considérer des secteurs de sommet A comme parties de $P - \{A\}$

En tout, les 2 demi-droites Ax et Ay définissent 3 secteurs

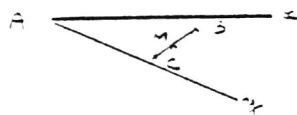
4 saillants (un fermé, un ouvert, 2 semi-ouverts) :

1 rentrants (" " ")

On peut facilement démontrer que les secteurs saillants sont convexes

* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont évidemment différents du vecteur nul.

Exemple : $[\widehat{xAy}]$ est convexe



Soit alors M un point de $[B, C]$

$$(\lambda, \mu) \in (R_+ \times R_+) \cup (R_+ \times R_-) \quad \vec{AM} = \frac{\lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}}{\lambda + \mu}$$

$$\text{On a alors } \vec{AM} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \vec{AB} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \vec{AC}$$

$$\text{Soit } \vec{AM} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b \right) \vec{u} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a' + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b' \right) \vec{v}$$

λ et μ étant de même signe, $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ sont positifs

$$\text{donc } \vec{AM} = k\vec{u} + n\vec{v} \text{ avec } (k, n) \in R_+ \times R_+$$

$$\text{donc } M \in [\widehat{xAy}]$$

Des démonstrations analogues (avec des précautions techniques particulières) montreraient que les 3 autres secteurs saillants $[\widehat{x\bar{A}y}]$, $[\widehat{x\bar{A}\bar{y}}]$ et $[\widehat{\bar{x}A\bar{y}}]$ sont convexes.

2ème cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants

$$a) \quad \vec{u}(\vec{u}) = \vec{u}(\vec{v}) \text{ ou encore } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ avec } \lambda \text{ dans } R_+^*$$



Ax et Ay définissent alors 4 secteurs puisque $Ay = Ax$

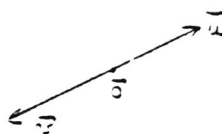
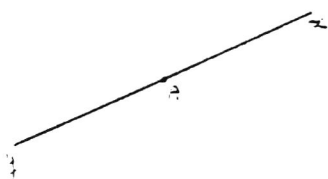
Secteur nul ouvert $\emptyset$

Secteur nul fermé Ax

Secteur plein ouvert $P - Ax$

Secteur plein fermé $P - \{A\}$ avec A comme sommet

$$b) \quad \vec{u}(\vec{u}) = \vec{u}(-\vec{v}) \text{ ou encore } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ avec } \lambda \text{ dans } R_+^*$$



Ax et Ay définissent alors des secteurs qui sont des demi-plans de frontière $D = Ax \cup Ay$. Combien ?

Soit un point B de $P - D$, soit $\vec{w} = \vec{AB}$

Les secteurs peuvent être définis par

- demi-plan ouvert de frontière D contenant B :

$$\{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in (R \times R_+^*)\}$$

- demi-plan fermé contenant B :

$$\{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in (R \times R_+^*)\}$$

- demi-plan semi-ouvert du côté de Ax contenant B.

$$\{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in [(R \times R_+^*) - (R_+^* \times \{0\})]\}$$

- demi-plan semi-ouvert du côté de Ay contenant B :

$$\{M \in P / \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in [(R \times R_+^*) - (R_+^* \times \{0\})]\}$$

On peut de même définir 4 secteurs ne contenant pas B.

CHAPITRE 7

LA "MESURE" DES ANGLES

I - PRESENTATION DU PROBLEME

1 - Au sens le plus vague du terme, *mesurer* c'est associer des objets et des nombres, si possible de sorte que l'addition sur les nombres corresponde à une manipulation sur les objets. Lorsqu'on ne sait pas donner de correspondance manipulative à l'addition on parle de grandeur repérable.

Progressivement le terme mesure a été réservé aux cas où la relation entre l'ensemble des objets et l'ensemble des nombres est une application du premier dans le second. Il en est ainsi pour les secteurs angulaires de même sommet.

2 - Si au secteur plein on associe le nombre $2a^*$ on a fixé une unité de mesure. Alors à un secteur on sait attribuer un nombre réel unique de $[0, 2a]$. Par contre à un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ on ne peut pas associer un nombre unique, mais toute une famille de nombres de la forme $(\alpha + nx2a)^{**}$ une fois un sens positif de rotation choisi, c'est-à-dire une fois le plan orienté.

Peut-on se contenter d'un nombre réel pour mesurer un angle $(\vec{u}, \vec{v})$?

On pourrait imaginer ne conserver, par exemple, que le nombre compris entre 0 et $2a$.

Supposons alors que, en degrés :

140	corresponde à $(\vec{u}, \vec{v})$
260	corresponde à $(\vec{v}, \vec{w})$
alors $(140 + 260)$	correspond à $(\vec{u}, \vec{w})$
soit 400	correspond à $(\vec{u}, \vec{w})$
ou encore $(400 - 360)$	correspond à $(\vec{u}, \vec{w})$
soit 40	correspond à $(\vec{u}, \vec{w})$

* ($a=180$ en degrés; $a=200$ en grades; $a=\pi$ en radians)

** en 6ème les élèves ont dit $n \in \mathbb{N}$ et ont distingué deux cas: les nombres de la forme $\alpha + nx2a$ obtenus quand on tourne dans le sens positif et les nombres de la forme $2a - \alpha + nx2a$ obtenus quand on tourne dans le sens négatif; en affectant ces derniers du signe - on obtient tous les nombres de la forme $\alpha + nx2a$ ou $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{En résumé, on aurait : } & \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} & \longrightarrow 140 \\
 & \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} & \longrightarrow 260 \\
 & \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} & \longrightarrow 40
 \end{array}$$

L'addition sur les angles ne correspondrait pas à l'addition sur les nombres correspondants !

On ne peut donc pas définir une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle l'addition sur les nombres corresponde à quelque chose.

3 - On peut, par contre, définir une infinité d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ qui respecte les additions.

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A} \\ x \longrightarrow \hat{\alpha} \end{cases}$$

Nous reproduisons ci-dessous un extrait du document d'accompagnement de l'émission de la radio télévision scolaire *Mesure-des-angles* réalisée au moment de l'introduction des *angles-rotations* dans les programmes du second cycle (1970)

II - "MESURE DES ANGLES DE COUPLES DE VECTEURS - PRESENTATION THEORIQUE

Émission 8

Mesure-des-angles

...

Il existe cependant une relation entre $\mathcal{A}$ et $\mathbb{R}$, laquelle est plus précisément une application :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A} ;$$

cette application n'est pas une mesure au sens habituel de ce mot. Néanmoins elle est traditionnellement appelée :

Mesuredesangles,

(ce graphisme insolite, afin de bien dissocier cette question de celle d'une *vraie* mesure). Plus raisonnable cependant est l'écriture :

« Mesure-des-angles »,

ou encore :

Mesure-des-angles,

c'est le titre de l'émission !

Le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles est isomorphe, par définition, au groupe orthogonal direct $\mathcal{O}^+(E)$ du plan vectoriel euclidien E ; $\mathcal{O}^+(E)$ est aussi le groupe des rotations $\mathcal{R}$ de E .
L'isomorphisme :

$$[8.0.1.] \quad \mathcal{R} = \mathcal{O}^+(E) \rightarrow \mathcal{A}$$

associe à toute rotation r de $\mathcal{R}$ son angle θ , et à la composée $r \circ r'$ de deux rotations, la somme $\theta + \theta'$ de leurs angles.

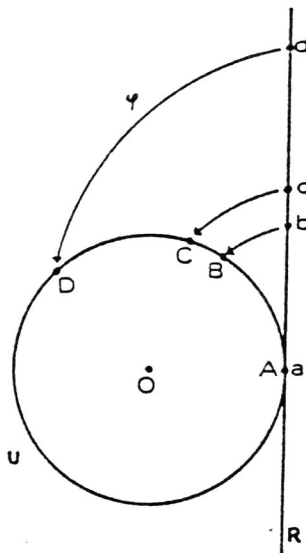
Le groupe $\mathcal{A}$ est aussi isomorphe au groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1; les complexes étant représentés dans le plan vectoriel euclidien orienté, de base orthonormée directe $(1, i)$, l'isomorphisme :

$$[8.0.2.] \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$$

applique l'angle θ sur le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta = z$, et associe à la somme des angles $\theta + \theta'$ le produit $z z'$ des nombres complexes correspondants. L'isomorphisme réciproque applique le complexe z sur $\text{Arg } z$ — considéré comme un angle et non pas comme une mesure d'angle (cf. émission 6) —.

« Mesurer » les angles de $\mathcal{A}$ revient donc à « mesurer » les complexes de module 1 du groupe multiplicatif $\mathcal{U}$.

8.1. Les données de l'intuition



On peut mesurer de façon concrète le cercle $\mathcal{U}$ en enroulant un fil sur ce cercle (le fil représentant $\mathcal{R}$); on réalise ainsi une application de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}$$

que nous allons essayer de caractériser sous une forme mathématique.

Observons tout d'abord que si quatre points a, b, c, d de $\mathcal{R}$ définissent deux vecteurs égaux $\vec{ab}$ et $\vec{cd}$, alors les quatre points correspondants A, B, C, D de $\mathcal{U}$ définissent des angles égaux $(\vec{OA}, \vec{OB})$ et $(\vec{OC}, \vec{OD})$:

$$\vec{ab} = \vec{cd} \rightarrow (\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) ;$$

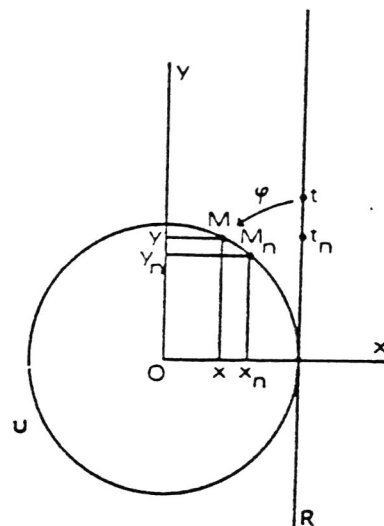
il est aisé de voir que cette implication est équivalente à :

$$\vec{ad} = \vec{ab} + \vec{bc} \rightarrow (\vec{OA}, \vec{OD}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) ;$$

Si A est l'origine $(0,1)$ de $\mathcal{U}$, et si a est l'origine O de $\mathcal{R}$, cette condition additive exprime que :

[8.1.1.] L'application $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$ doit être un homomorphisme de groupes, puisqu'à la somme de deux angles correspond le produit des nombres complexes associés à ces angles.

L'opération d'enroulement jouit également d'une propriété intuitive de continuité que l'on peut exprimer de la manière suivante :



Si une suite t_n de nombres réels a pour limite t , la suite des points correspondants $M_n = \varphi(t_n)$ a pour limite le point $M = \varphi(t)$; cette dernière limite étant relative à la topologie induite sur U par celle de C : M_n de coordonnées (x_n, y_n) a pour limite M de coordonnées (x, y) si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Nous retiendrons donc la condition nécessaire :

[8.1.2.] L'application $\varphi : R \rightarrow U$ doit être continue

Un autre fait d'expérience évident est que chaque point de U reçoit par enroulement au moins un point du « fil » R (et même beaucoup plus !); ce qui se traduit mathématiquement par :

[8.1.3.] L'application $\varphi : R \rightarrow U$ doit être surjective.

Enfin, pour que deux « points » t et t' de R occupent, après l'enroulement, la même position $\varphi(t) = \varphi(t')$ sur le cercle U , il faut et il suffit que la « longueur » $|t - t'|$ du fil qui les sépare soit multiple de la longueur l du cercle; d'où la quatrième condition portant sur φ : Il existe un nombre réel positif l tel que :

[8.1.4.] $\varphi(t) = \varphi(t') \iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad t - t' = nl$

($\mathbb{Z}$ étant l'anneau des entiers).

Remarque :

S'il existe une application φ de R sur U ayant les quatre propriétés [8.1.1.], [8.1.2.], [8.1.3.] et [8.1.4.], il est alors aisé de vérifier que :

$$t \mapsto \varphi(kt)$$

possède les mêmes propriétés. Cela correspond aux possibilités pratiques de remplacer U par des cercles de rayons différents ou d'enrouler le fil dans un autre sens (si $k < 0$), ou de changer l'unité sur la droite.

8.2. Une étude mathématique du problème

U étant muni de la topologie définie au paragraphe précédent, il s'agit de trouver une (au moins une) application :

$$R \xrightarrow{\varphi} U$$

qui satisfasse aux conditions suivantes :

$$[8.2.1.] \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \varphi \text{ est continue,} \\ 2^\circ \varphi \text{ est un homomorphisme de groupes :} \\ \quad \varphi(t + t') = \varphi(t) \varphi(t'), \\ 3^\circ \varphi \text{ est surjective,} \\ 4^\circ \text{ Il existe un réel positif } l \text{ tel que} \\ \quad \varphi(t) = \varphi(t') \iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad t - t' = nl \end{array} \right.$$

C'est un problème d'analyse dont nous donnerons — en esquisse — une solution.

Pour z complexe, la série entière :

$$1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$$

est absolument convergente; sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ définit une fonction notée e^z (fonction exponentielle) :

$$z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

continue, dérivable :

$$\frac{d}{dz} (e^z) = e^z,$$

jouissant de la propriété fonctionnelle fondamentale :

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

de plus $e^0 = 1$, et le conjugué de e^z est $e^{\bar{z}}$ ($\bar{z}$ conjugué de z).

Considérons plus particulièrement l'application φ de R dans C

$$t \xrightarrow{\varphi} e^{it}$$

composée de $t \mapsto it$ et de l'application exponentielle $z \mapsto e^z$; φ est appelée la fonction exponentielle imaginaire.

φ est continue et dérivable (puisque composée de deux applications continues et dérivables), vérifie la relation fonctionnelle :]

$$\varphi(t + t') = \varphi(t) \varphi(t')$$

et prend ses valeurs dans U car :

$$|e^{it}|^2 = e^{it} e^{-it} = e^0 = 1;$$

φ satisfait aux deux premières conditions [8.2.1.].

Son caractère surjectif peut s'établir de la manière suivante. Définissons les applications c et s de $\mathbb{R}$ dans le segment $[-1, +1]$, par :

$$\begin{aligned} c(t) &= \Re(e^{it}), \text{ partie réelle de } e^{it}, \\ s(t) &= \Im(e^{it}), \text{ partie imaginaire de } e^{it}, \\ e^{it} &= c(t) + is(t) \end{aligned}$$

Ces fonctions c et s sont développables en séries entières dont le rayon de convergence est infini :

$$[8.2.2.] \quad \begin{cases} c(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \dots, \\ s(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \dots \end{cases}$$

Elles sont dérivables :

$$c'(t) = -s(t) \quad s'(t) = c(t)$$

et vérifiant :

$$[8.2.3.] \quad (c(t))^2 + (s(t))^2 = 1$$

Pour $t = 0$, les développements [8.2.2.] donnent : $c(0) = 1, s(0) = 0$. Observons d'autre part que :

$$c(2) = 1 - 2 + \frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{6}2^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n} + \dots$$

est < 0 ; en effet les trois premiers termes ont pour somme :

$$1 - 2 + \frac{1}{4}2^4 = -\frac{1}{3},$$

et les autres termes peuvent être sommés deux à deux en sommes partielles négatives.

La fonction continue $c(t)$ s'annule donc dans l'intervalle $[0, 2]$. Appelons $\frac{\pi}{2}$ la plus petite valeur > 0 de t pour laquelle $\cos t = 0$ (c'est une définition du nombre réel π !) ; la variation de $s(t)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se déduit du signe de $s'(t) = c(t)$, et sa valeur $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ se détermine à l'aide de [8.2.3.] :

t	0	$\frac{\pi}{2}$
s'	1 +	0 -
s	0 ↗	1 ↘

La fonction s étant continue monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ admet dans cet intervalle une fonction réciproque $\sigma : \left[0, 1\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est continue et monotone ; d'autre part, on vérifie aisément que :

$$t \mapsto \sqrt{1-t^2} + it$$

est une application biunivoque continue de $[0, 1]$ sur :

$$\Gamma_1 = \{z = x + iy ; |z| = 1, x \geq 0, y \geq 0\} ;$$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ étant compact, l'application $\nu \circ s = \varphi$ est un homéomorphisme (i.e. bijective et bicontinue) de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur Γ_1

$$\begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma_1 \\ \searrow s & \nearrow \nu & \\ [0, 1] & & \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\left(\frac{\pi}{2}\right) + is\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \end{cases}$$

Pour $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$, en composant avec la translation $t \mapsto t - \frac{\pi}{2}$ et la multiplication $z \mapsto iz$, on obtient le diagramme « commutatif » :

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma_2 = \{z = x + iy ; |z| = 1, x \leq 0, y \geq 0\} \\ \tau \downarrow & & \uparrow \mu \\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma_1 \end{array}$$

ce qui montre que φ est aussi un homéomorphisme de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sur Γ_2 , avec $\varphi(\pi) = (\mu \circ \varphi \circ \tau)(\frac{\pi}{2}) = ie^{i(\pi - \frac{\pi}{2})} = i\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; mêmes conclusions pour $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, avec $\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$ et $\varphi(2\pi) = 1$.

Ainsi :

$$[8.2.3.] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } 0 \leq t < 2\pi, e^{it} \text{ prend une fois et} \\ \text{une seule toute valeur complexe } z \text{ de } \mathbb{U}. \end{array} \right.$$

La surjectivité de $\varphi : t \mapsto e^{it}$ en résulte ; mais nous obtenons beaucoup plus :

$\varphi(2\pi) = 1$ et [8.2.3.] montrent que $\varphi(2\pi + t) = \varphi(2\pi)\varphi(t) = \varphi(t)$, et plus précisément que :

$$[8.2.4.] \quad \varphi(t) = \varphi(t') \iff \varphi(t - t') = 1 \iff \begin{matrix} \exists n \in \mathbb{Z} \\ t - t' = 2n\pi. \end{matrix}$$

[8.2.5.] Les quatre conditions imposées en [8.2.1.] sont bien réalisées par φ . Nous avons aussi établi que, pour chaque t_0 de $\mathbb{R}$, φ est un homéomorphisme de $]t_0, t_0 + 2\pi[$ sur $U - \{\varphi(t_0)\}$.

D'après la remarque du paragraphe 8.1., toute application :

$t \mapsto \varphi(kt)$, avec k réel non nul, a toutes les propriétés de φ (2π étant remplacé par $\frac{2\pi}{|k|}$). En fait, on obtient ainsi tous les homomorphismes continus non triviaux de $\mathbb{R}$ sur U (cf. par exemple [1]), ce qui exprime en quelque sorte l'unicité de la solution du problème de la mesure-des-angles.

Si nous retenons comme solution l'homomorphisme $\varphi : t \mapsto e^{it}$, nous appellerons **mesure de l'angle** (de rotation) θ l'un des nombres réels t tel que $\varphi(t) = z$, z étant le complexe de module 1 et d'argument θ .

ou encore,

$$c(t) + i s(t) = \varphi(t) = e^{it} = z = \cos \theta + i \sin \theta$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} c(t) = \cos \theta = \cos(\widehat{\text{Arg } \varphi(t)}), \\ s(t) = \sin \theta = \sin(\widehat{\text{Arg } \varphi(t)}). \end{cases}$$

Ainsi s'explique l'abus de langage qui consiste à nommer « cosinus du nombre t » la valeur $c(t)$.

Une distinction analogue s'impose à propos de l'argument d'un nombre complexe $z \neq 0$:

$\widehat{\text{Arg } z}$ représente l'angle de rotation bien déterminé associé à l'élément $\frac{z}{|z|}$ au moyen de l'isomorphisme [8.0.2.] de U sur le groupe $\mathcal{C}$ des angles.

$\text{Arg } z$ représente l'un des nombres réels qui mesure $\frac{z}{|z|}$ au moyen de l'homomorphisme φ , i.e.

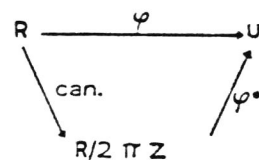
$$\varphi(\text{Arg } z) = \frac{z}{|z|} ;$$

$z \mapsto \text{Arg } z$ est alors une fonction multiforme.

Pour éviter le caractère multiforme de la mesure d'un angle (ou de $\text{Arg } z$) on peut remplacer $\mathbb{R}$ par l'ensemble des classes $\dot{t}$:

$$\dot{t} = \{t + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\} ;$$

φ est alors constante sur chacune de ces classes, a pour noyau le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$, et définit un isomorphisme φ^* du groupe des classes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur le groupe U



φ^* est même bicontinu pour une topologie naturelle issue de celle de $\mathbb{R}$, définie $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ compatible avec sa structure de groupe, appelée « topologie quotient ».

Il est remarquable que le problème de la mesure-des-angles conduise à cet isomorphisme bicontinu dont la signification mathématique est très profonde.

Le lecteur désireux de s'informer plus complètement sur ce problème pourra consulter à cet effet :

- H. CARTAN [2], paragraphe 3 du chapitre I.
- J. DIEUDONNE [5], paragraphe 5 du chapitre IX.
- J. DIEUDONNE [4], Annexe I.
- G. CHOQUET [3], paragraphe 2 du chapitre VII.
- N. BOURBAKI [1], paragraphe 2 du chapitre VIII.

III - "MESURE" DES ANGLES DE COUPLES DE VECTEURS; PRESENTATION EN CLASSE

1 - THEOREME FONDAMENTAL

Dans le document précédent a été démontré le théorème suivant:

Théorème : soit un réel positif a

Il existe une application $\theta_a : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathcal{U}_a, +)$ telle que

$$1) \quad \theta_a(a) = \hat{p}$$

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \quad \theta_a(x+x') = \theta_a(x) + \theta_a(x')$$

3) La restriction de θ_a à $[0, 2a[$ est une bijection

4) La fonction $\sin_a \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(\theta_a(x)) \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 - COMMENTAIRE SUR LE THEOREME FONDAMENTAL

2.1 - Le nombre a tel que $\sin_a$ ait pour nombre dérivé 1 en $x = 0$, est le nombre π . Les applications θ_π et $\sin_\pi$ sont usuellement notées θ et $\sin$.

2.2 - Si $a = \pi$, on dit que l'unité choisie est le radian.

Si $a = 180$ on dit que l'unité choisie est le degré.

Si $a = 200$, on dit que l'unité choisie est le grade.

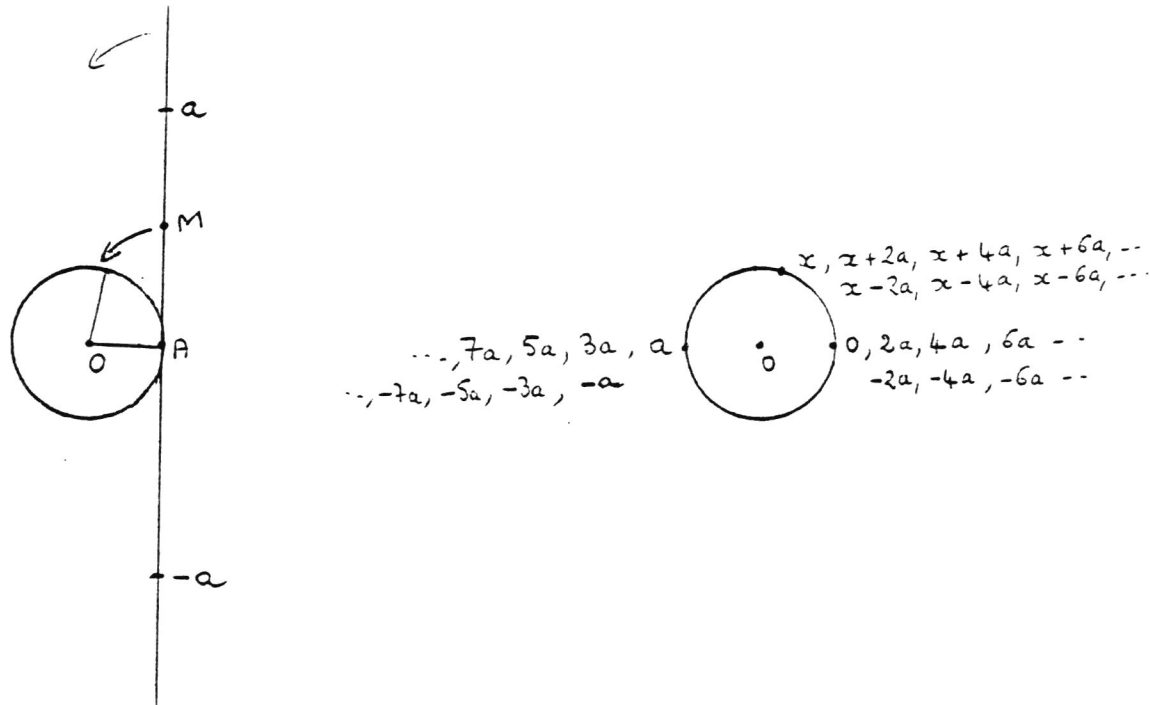
2.3 - θ_a n'est pas une mesure au sens véritable du terme. On dira malgré tout que θ_a nous permet de *mesurer* les angles.

2.4 - θ_a est surjective, mais non injective car tout angle a une infinité d'antécédents

2.5 - Le théorème fondamental est énoncé en classe de 1ère C, mais il ne peut pas être démontré à ce niveau. Il l'est, en général, en classe de mathématiques spéciales ou à l'université ... en utilisant les exponentielles complexes !

3 - PRESENTATION INTUITIVE

Les activités faites en 6ème ont conduit à l'approche de ce résultat. On peut également imaginer une ficelle graduée régulièrement qu'on enroule autour d'un cercle.



OA étant fixée, à chaque angle de couple correspond une demi-droite OM donc un point d'un cercle de centre O

Une infinité de points de la ficelle viennent coïncider avec un point du cercle.

Si on change de cercle en gardant la même graduation sur la droite, cela revient à changer d'unité.

Si on change la graduation sur la droite en gardant le même cercle, cela revient aussi à changer d'unité.

Le fait que θ_a soit un morphisme (i.e $\theta_a(x + x') = \theta_a(x) + \theta_a(x')$) est assez intuitive avec cette représentation.

La dérivabilité de $\sin_a$ est moins intuitive

4 - QUELQUES AIDES A L'INTUITION

On peut cependant renforcer l'intuition par une ébauche de démonstration.

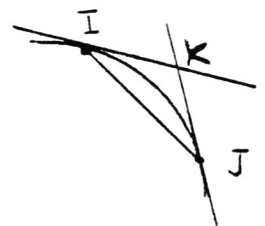
On peut s'appuyer sur la propriété suivante (démontrée en 5)

Etant donné un cercle $\mathcal{C}$, P un polygône inscrit dans $\mathcal{C}$ et Q un polygône circonscrit à $\mathcal{C}$, la longueur de P est inférieure à la longueur de Q .

L'ensemble des longueurs des polygones inscrits dans $\mathcal{C}$ est donc majoré par la longueur de n'importe quel polygône circonscrit et la longueur de $\mathcal{C}$ est la borne supérieure de cet ensemble.

. Ce qui est vrai pour le cercle tout entier est valable pour tout arc de cercle, c'est-à-dire que (voir croquis ci-contre)

$\text{long} (IKJ) > \text{long} (\text{arc } IJ) > \text{long} (\text{corde } IJ)$



. On en déduit que sur un cercle la longueur d'un arc est supérieure à la longueur de la corde sous-tendue.

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et AB un arc de longueur x sur le cercle trigonométrique.

On a $\text{long} (\text{segment } AB) < x$

De plus

$2x = \text{long} (\text{arc } AC) < \text{long} (CTA) = 2 \text{ long} (AT)$

$\text{long} (BH) < \text{long} (\text{segment } BA)$ dans le triangle rectangle HAB

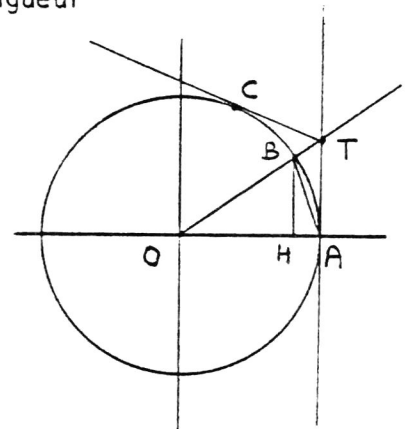
$\sin x = BH$

$\text{tg} x = AT$

On en déduit $\sin x < x < \text{tg} x$

ou encore $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$



Remarque

C'est en appliquant le résultat énoncé au 1) pour des polygones de 96 côtés qu'Archimède a obtenu l'encadrement

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

5 - DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE UTILISEE EN 4

Si certains points de contact de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{Q}$ ne sont pas sommets de P , on considère le polygône convexe P' dont l'ensemble des sommets est la réunion de l'ensemble des sommets de P et de l'ensemble de ces points de contact. P' a un périmètre supérieur à celui de P puisqu'on a remplacé certains côtés de P tels que AB par deux côtés de P' tels que AI et IB .

Il suffit de comparer les périmètres de P' et de $\mathcal{Q}$.

Soient I et J deux points de contact consécutifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{Q}$; soient M_1, M_2, M_3 etc... les sommets de P' situés dans le triangle KIJ .

Les droites IM_1, M_1M_2, M_2M_3 etc ...

coupent KJ aux points N_1, N_2, N_3

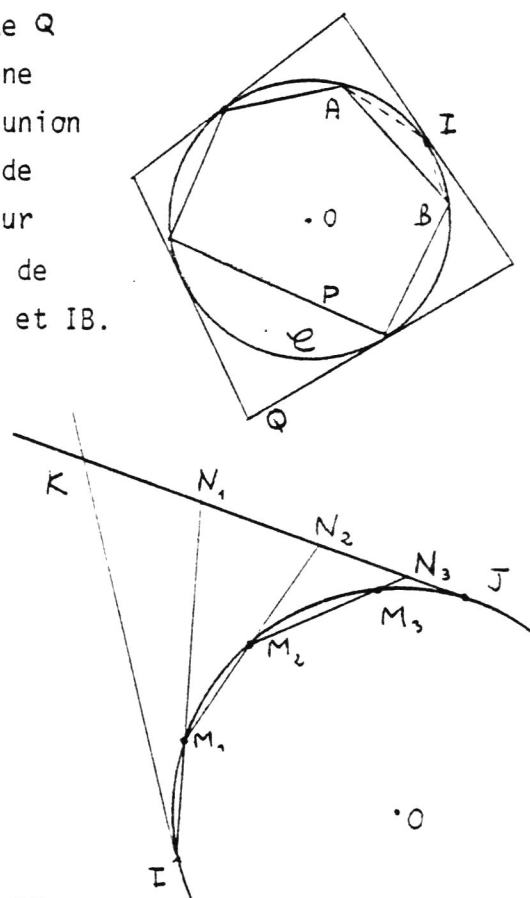
respectivement, tous compris entre K et J

(puisque le cercle est une courbe convexe et

que KI et KJ sont tangentes au cercle). En utilisant l'inégalité triangulaire successivement dans les triangles $IKN_1, M_1N_1N_2, M_2N_2N_3$... on obtient une suite d'inégalités telle que

$$\text{long } (IKJ) > \text{long } (IN_1J) > \text{long } (IM_1N_2J) > \text{long } (IM_1M_2N_3J) > \text{long } (IM_1M_2M_3J)$$

On a ainsi obtenu le résultat annoncé.



6 - LES DIVERSES DETERMINATIONS D'UN ANGLE - UTILISATION DANS LA PRATIQUE

On peut déduire des points 1. et 2. du théorème fondamental que si un nombre x a pour image $\hat{\alpha}$ par θ_a , l'ensemble des nombres ayant même image est $\{x + k.2a/k \in \mathbb{Z}\}$

Définition : Tout antécédent d'un angle $\hat{\alpha}$ de $\mathcal{A}$ pour θ_a , est appelé une détermination de $\hat{\alpha}$ pour l'unité correspondante.

En degrés l'ensemble des déterminations d'un angle $\hat{\alpha}$ est de la forme : $\{x + 360 k/k \in \mathbb{Z}\}$

En grades cet ensemble serait : $\{y + 400 k/k \in \mathbb{Z}\}$

En radians " " : $\{z + 2 k \pi/k \in \mathbb{Z}\}$

Définition : L'ensemble des déterminations d'un angle $\hat{\alpha}$ pour une unité donnée est appelé mesure de $\hat{\alpha}$ avec cette unité.

Remarque : Là encore le mot *mesure* n'est pas utilisé dans son sens strict car à un angle on a fait correspondre un ensemble de nombres réels et non pas un nombre^{*}. Les ensembles de nombres de la forme $\{x + 2ka/k \in \mathbb{Z}\}$ sont les classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo $2a$: x est congru à y modulo $2a$ signifie $(y-x)$ est un multiple de $2a$ dans $\mathbb{Z}$.

Le fait que θ_a soit un homomorphisme permet de dire que si x est une détermination de $\hat{\alpha}$ et y une détermination de $\hat{\beta}$ alors $x + y$ est une détermination de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$. Cette compatibilité des additions sur les angles et sur les nombres permet, en pratique, de parler d'un angle $\hat{\alpha}$, en utilisant sa mesure $\{x + kx2a/k \in \mathbb{Z}\}$ ou même une de ses déterminations (celle qui nous arrange!)

Exemple : Pour parler de $\hat{d}$ on dit $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{2}$ ou $\frac{-3\pi}{2}$ ou ... La présence de la lettre π apporte l'information qu'on a utilisé l'application θ_π . Par contre si on dit 90, l'interlocuteur n'a pas les moyens de savoir qu'il s'agit de $\hat{d}$ par référence à θ_{180} . C'est pourquoi, on note 90° feignant de croire qu'il s'agit d'une véritable mesure et que le degré est l'unité.

* On trouve fréquemment le mot mesure utilisé dans le sens de détermination

7 - EXERCICERésolution de $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ Une démonstration en utilisant les mesures (il faut avoir orienté le plan)Soit β_0 une détermination de $\hat{\beta}$. Soit α une détermination de $\hat{\alpha}$.On doit avoir $2\alpha = \beta_0 + 2k\pi$ soit $\alpha = \frac{\beta_0}{2} + k\pi$

Il y a donc 2 solutions

$$\hat{\alpha}_1 \text{ et } \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{p}$$

On retrouve ici avec un appareil mathématique moins compliqué le résultat déjà démontré au chapitre 5 avec les matrices de rotation.

IV - LA "MESURE" DES ANGLES DE PAIRES DE DEMI-DROITESI - MESURE DE $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ Si l'ensemble des déterminations de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\{\alpha + 2ka/k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des déterminations de $(\vec{v}, \vec{u})$ est $\{-\alpha + 2k'a/k' \in \mathbb{Z}\}$ Alors dans l'ensemble $\{\alpha + 2ka/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2ka/k \in \mathbb{Z}\}$

il existe un unique nombre appartenant à $[0, a]$ (à démontrer). Ce nombre permet de déterminer $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ car on a ainsi défini une application de l'ensemble des angles de paires de demi-droites dans $[0, a]$. On peut remarquer que c'est une bijection.

Exemples :

Unité	Déterminations de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$	Déterminations de $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$ si besoin	Mesure de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$
Degré	$60 + 360 k (k \in \mathbb{Z})$ $240 + 360 k (k \in \mathbb{Z})$	$- 240 + 360 k' (k' \in \mathbb{Z})$	60 120
Grade	$110 + 400 k (k \in \mathbb{Z})$ $280 + 400k (k \in \mathbb{Z})$	$- 280 + 400 k' (k' \in \mathbb{Z})$	110 120
Radian	$\frac{2\pi}{3} + 2 k \pi (k \in \mathbb{Z})$ $\frac{7\pi}{5} + 2 k \pi (k \in \mathbb{Z})$	$-\frac{7\pi}{5} + 2 k' \pi (k' \in \mathbb{Z})$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{5}$

Une fois de plus on n'a pas affaire à une véritable mesure. En effet, nous avons vu qu'il n'y a pas d'addition sur l'ensemble des angles de paires de demi-droites. Par contre, il est possible d'interpréter ce qui précède en termes de distance

2 - DISTANCE DE DEUX DEMI-DROITES VECTORIELLES

L'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ensemble des couples} \\ \text{de demi-droites} \\ \text{vectorielles} \\ (\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\delta} [0, a] \\ \longrightarrow \text{la mesure de } \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ pour} \\ \text{l'unité choisie} \end{array}$$

est une distance.

En effet : 1) $\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) = 0$ ssi $\Delta(\vec{u}) = \Delta(\vec{v})$

2) $\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) = \delta(\Delta(\vec{v}), \Delta(\vec{u}))$

3) $\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{w})) \leq \delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) + \delta(\Delta(\vec{v}), \Delta(\vec{w}))$

Démonstrations:

- 1) immédiat
- 2) immédiat
- 3) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Ax
 $\vec{v}$ " " de By
 $\vec{w}$ " " de Cz

Supposons que $\alpha = \delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v}))$ et $\beta = \delta(\Delta(\vec{v}), \Delta(\vec{w}))$

On sait que $0 \leq \alpha \leq a$ et $0 \leq \beta \leq a$.

1er cas : $a < \alpha + \beta$

alors $\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{w})) \leq a < \alpha + \beta = \delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) + \delta(\Delta(\vec{v}), \Delta(\vec{w}))$

2ème cas : $0 \leq \alpha + \beta \leq a$

Faisons un tableau pour recenser les différentes situations possibles:

Détermination de $(\vec{u}, \vec{v})$	Détermination de $(\vec{v}, \vec{w})$	Détermination de $(\vec{u}, \vec{w})$ par Chasles	$\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{w}))$
α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha + \beta$
α	$-\beta$	$\alpha - \beta$	$ \alpha - \beta $
$-\alpha$	β	$\beta - \alpha$	$ \beta - \alpha $
$-\alpha$	$-\beta$	$-(\alpha + \beta)$	$\alpha + \beta$

Remarque : Les résultats de la dernière colonne des lignes 2 et 3 ont été obtenus en remarquant que :

$$0 \leq \alpha \leq a \quad (1) \quad \text{donc} \quad -a \leq -\alpha \leq 0 \quad (3)$$

$$0 \leq \beta \leq a \quad (2) \quad \text{donc} \quad -a \leq -\beta \leq 0 \quad (4)$$

donc $-a \leq \alpha - \beta \leq a$ en "additionnant" 1 et 4

et $-a \leq \beta - \alpha \leq a$ " 2 et 3

En définitive on voit dans tous les cas que

$$\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{w})) \leq \delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{v})) + \delta(\Delta(\vec{v}), \Delta(\vec{w})) \quad \text{car}$$

$$\delta(\Delta(\vec{u}), \Delta(\vec{w})) \leq \alpha + \beta$$

La distance de deux demi-droites vectorielles ne dépend que des deux demi-droites et non de l'ordre dans lequel on les considère

3 - ECART DE DEUX DEMI-DROITES AFFINES

Définition : On appelle écart de deux demi-droites affines, la distance de leurs directions. Notons e cet écart

Les propriétés de e se déduisent de celles de δ

2) et 3) sont inchangées

1) se décompose en

i) si $D = D'$, alors $e(D, D') = 0$

ii) si $e(D, D') = 0$ alors D et D' ont même direction.

Remarque : Le concept d'angle de paires de demi-droites est suffisant pour définir cet écart (baptisé *écart angulaire* dans le programme de 3ème des années 1972-1980).

V - MESURE DES SECTEURS

Supposons que $\vec{u}$ (respectivement $\vec{v}$) soit un vecteur directeur unitaire de Ox (respectivement Oy)

Soit P l'unique rotation vectorielle de Π (dans Π)

telle que $P(\vec{u}) = \vec{v}$

Alors $P^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}$

Supposons que a soit une détermination de l'angle plat et x une détermination de $(\vec{u}, \vec{v})$

On sait alors que $\{x + 2ka/k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des déterminations de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $\{-x + 2ha/h \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des déterminations de $(\vec{v}, \vec{u})$

Si je considère alors la famille

$$A_{\widehat{xoy}} = \{x + 2ka/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 2ha/h \in \mathbb{Z}\}$$

$A_{\widehat{xoy}} \cap [0, a[$ est un singleton, soit $\{\alpha\}$

On dira alors que α est la mesure dans l'unité choisie du saillant $\widehat{xoy}$ considéré^{*}. Notons ce nombre $m(\widehat{xoy})$

Remarquons $m(\widehat{xoy}) = \delta(ox, oy)$

Le nombre $(2a - \alpha)$ sera alors la mesure de chaque rentrant de bords Ox et Oy . Notons le $m(\widetilde{xoy})$.

Remarquons que : $m(\widetilde{xoy}) = 2a - \delta(ox, oy)$

Théorème : L'ensemble des réunions finies de secteurs angulaires de somme A est un clan. Le procédé exposé ci-dessus permet de définir une mesure sur ce clan^{**}. Notons-la m .

Il nous faut montrer :

- ① A tout secteur est associé un nombre et un seul
- ② $m(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ = secteur nul ouvert)
- ③ Si S_1 et S_2 sont disjoints, $m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2)$
- ④ Si S_1 et S_2 sont isométriques : $m(S_1) = m(S_2)$

- ① et ② sont immédiates à démontrer
- ④ se montre bien
- ③ est techniquement assez délicat à mettre au point car il y a beaucoup de cas à étudier.

Conclusion : L'étude des secteurs est une première approche expérimentale intéressante et importante, mais il ne nous semble pas très utile de la mettre en théorie bien que ce soit possible.

* Les 4 saillants de même bord ont même mesure

** voir annexe 3: *Qu'est-ce qu'une mesure ?*

CHAPITRE 8

LES ANGLES DE DROITES

I - UNE FACON D'ABORDER LES ANGLES DE COUPLES DE DROITES (par Nelly Roussignol)

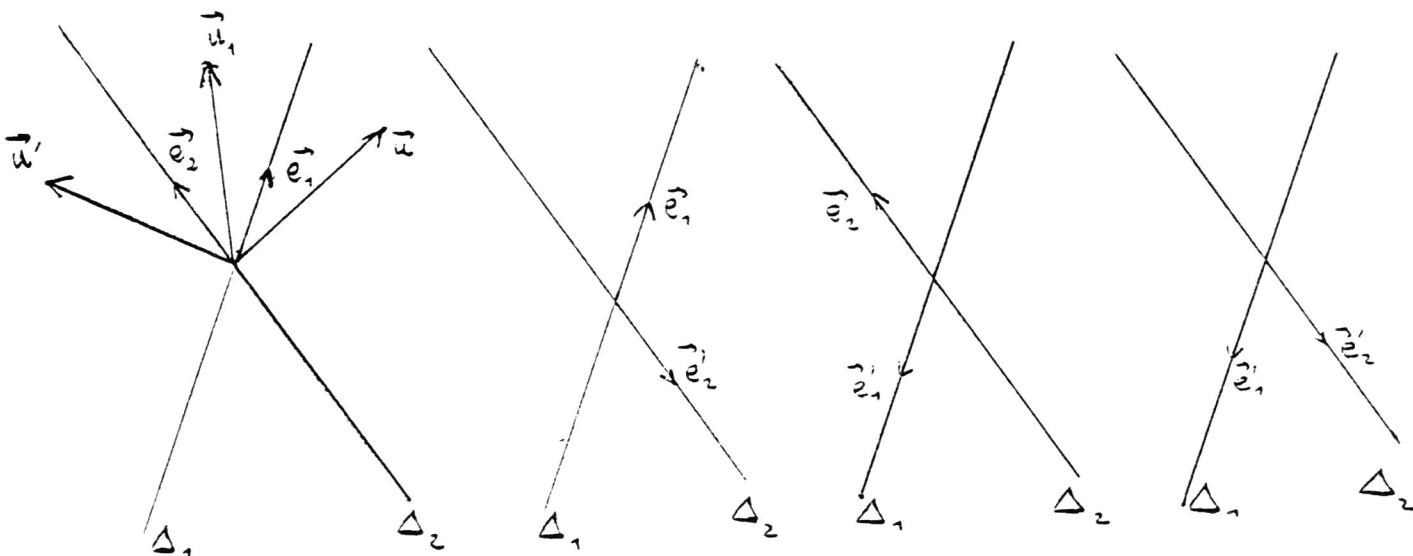
1. CAS DES DROITES VECTORIELLES

Pour ce chapitre je me placerai dans le cadre du programme de T_C que je pratique. Pendant plusieurs années, j'ai relégué les angles de droites en fin d'année, comme complément (voir le programme officiel de la classe), sans oser m'en servir avant et sans en avoir le temps après.

Dorénavant je considère qu'il est préférable de s'y prendre comme suit :

1.1 - Introduction

Lorsqu'on étudie une composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites (en dim 2) se pose naturellement le problème de l'angle de la rotation obtenue (voir Chapitre 5 - §.V1). Travaillons avec les symétries vectorielles σ_{Δ_1} et σ_{Δ_2} . On peut choisir comme vecteur directeur unitaire de Δ_1 , $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}'_1$ et comme vecteur directeur unitaire de Δ_2 , $\vec{e}_2$ ou $\vec{e}'_2$.



A priori l'angle de la rotation $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ ne dépend que des droites Δ_1 et Δ_2 et non des vecteurs unitaires choisis arbitrairement sur Δ_1 et Δ_2 , c'est ce que nous confirme le calcul suivant

Si $\sigma_{\Delta_1}(\vec{u}) = \vec{u}_1$ et $\sigma_{\Delta_2}(\vec{u}_1) = \vec{u}'$ alors $(\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1})(\vec{u}) = \vec{u}'$

L'angle cherché est donc $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$

$$\begin{aligned} \text{Or } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} &= \widehat{(\vec{u}, \vec{u}_1)} + \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}')} \\ &= 2 \widehat{(\vec{e}_1, \vec{u}_1)} + 2 \widehat{(\vec{u}_1, \vec{e}_2)} \\ &= 2 \widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \end{aligned}$$

$$\text{De même } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = 2 \widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}'_2)} = 2 \widehat{(\vec{e}'_1, \vec{e}_2)} = 2 \widehat{(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)}$$

Or si on note α l'angle $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$ on a

$$\widehat{(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)} = \hat{\alpha} \text{ et } \widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}'_2)} = \widehat{(\vec{e}'_1, \vec{e}_2)} = \hat{\alpha} + \hat{p}$$

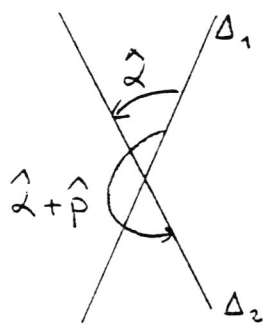
Il existe deux rotations p et p' qui transforment Δ_1 en Δ_2 . Si l'une a pour angle $\hat{\alpha}$, l'autre a pour angle $\hat{\alpha} + \hat{p}$ et dans les 2 cas $p^2 = p'^2 = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$.

Comme on ne peut pas se fixer une règle de choix entre les deux angles $\hat{\alpha}$ et $(\hat{\alpha} + \hat{p})$, on est amené à poser la définition suivante:

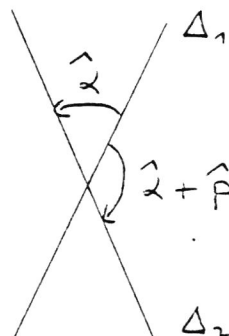
On appelle angle du couple (Δ_1, Δ_2) la paire $\{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\}$ d'angles de demi-droites et on note $\star$ $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\} = \star$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles ainsi définis.

On peut illustrer $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ par



ou



* On trouve cette notation dans le livre de géométrie de terminale C des éditions Gamma

En langage imagé, mais incorrect, on peut dire que l'angle de la rotation $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ est le double de l'angle du couple (Δ_1, Δ_2) . Pour donner une signification à la phrase précédente nous pouvons introduire l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{L}' & \longrightarrow \mathcal{L} \\ \overline{\alpha} & \longrightarrow 2\hat{\alpha} \end{cases}$$

sachant que

$$\overline{\alpha} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\}$$

Cette application est une bijection; elle est compatible avec l'addition sur $\mathcal{L}'$ définie plus loin.

1.2 - Remarque

Si α admet $\frac{\pi}{5}$ comme détermination j'ai noté $\overline{\alpha} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\} = \frac{\overline{\pi}}{5}$ pour plus de commodité. Dans ce contexte, j'ai suggéré aussi de noter $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{5}$; ceci n'est pas en contradiction avec ce que nous avons signalé auparavant dans cette brochure. En effet, nous avons dit que la notation $\frac{\pi}{5}$ désignait sans ambiguïté un angle de couples de demi-droites dont $\frac{\pi}{5}$ est une détermination. Mais dans un contexte où on travaille simultanément sur des angles de droites et de demi-droites, j'ai pensé que cela aiderait les élèves de préciser $\frac{\hat{\pi}}{5}$ ou $\frac{\overline{\pi}}{5}$. J'ai constaté également que ces notations permettaient d'alléger sensiblement les rédactions des exercices portant sur ces questions

Exemple : Si $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\overline{\pi}}{12}$, alors

$$\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1} = p_{\hat{\alpha}} \text{ où } \hat{\alpha} = \psi\left(\frac{\overline{\pi}}{12}\right) = \frac{\hat{\pi}}{6}. \text{ De même}$$

$$\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2} = p_{\hat{\alpha}'} \text{ où } \hat{\alpha}' = \psi\left(\frac{-\overline{\pi}}{12}\right) = \frac{-\hat{\pi}}{6}$$

2 - CAS DES DROITES AFFINES

Bien naturellement on définira l'angle d'un couple (D_1, D_2) de droites affines comme l'angle du couple (Δ_1, Δ_2) de leurs directions. On notera

$$\overline{(D_1, D_2)} = \overline{(\Delta_1, \Delta_2)}$$

Exercice : Soit une droite D et un point Ω de D dans un espace affine. Chercher la droite D_1 telle que : $\mathcal{F}_D \circ \mathcal{R}(\Omega, \frac{3\pi}{5}) = \mathcal{F}_{D_1}$. ($\mathcal{F}_D$ et $\mathcal{F}_{D_1}$ désignent les symétries orthogonales par rapport aux droites D et D_1)

Une résolution : $\mathcal{F}_D \circ (\mathcal{F}_D \circ \mathcal{R}(\Omega, \frac{3\pi}{5})) = \mathcal{F}_D \circ \mathcal{F}_{D_1}$

donc... $\mathcal{R}(\Omega, \frac{3\pi}{5}) = \mathcal{F}_D \circ \mathcal{F}_{D_1}$

soit $\overline{(D_1, D)} = \frac{3\pi}{10}$

ou encore $\overline{(D, D_1)} = \frac{-3\pi}{10}$ ce qui permet de connaître D_1 ,

si l'on connaît D , sachant par ailleurs que D_1 passe par Ω .

Remarque : $\frac{3\pi}{10} = \psi^{-1}(\frac{3\pi}{5})$. On peut l'écrire ou non au cours du raisonnement précédent.

3 - SOMME DE DEUX ANGLES DE COUPLES DE DROITES

Il reste pour les besoins courants à définir la somme de 2 angles de droites

$$\text{Si } \overline{\alpha_1} = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1 + \hat{p}\} \text{ et } \overline{\alpha_2} = \{\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\}$$

$$\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = \{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\}$$

Cela est légitime (voir plus loin)

Il faut noter (voir également plus loin) que la relation de Chasles s'applique encore:

$$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} + \overline{(\Delta_2, \Delta_3)} = \overline{(\Delta_1, \Delta_3)}$$

4 - CONCLUSION

Les élèves ont pu au cours de plusieurs exercices sur les transformations apprendre à se débrouiller avec cette nouvelle notion.

En fin d'année, j'ai distribué quelques pages polycopiées pour compléter, et j'ai traité en cours le théorème sur la condition nécessaire et

suffisante pour que 4 points soient cocycliques où l'on se sert aussi de cette notion. Ce théorème reste, peut-être à tort, très marginal actuellement par rapport au programme. Voici un exercice qui le met en oeuvre.

5 - EXERCICE

5.1 - Enoncé

- 1) Soit Γ un cercle A.B.M et P quatre points de Γ

Montrer que les projetés orthogonaux de P sur les droites AB, BM et MA sont alignés.

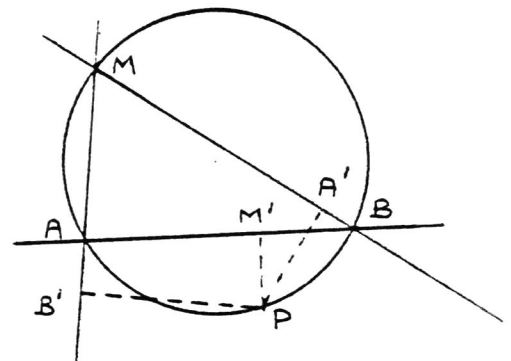
- 2) A et B étant fixés, notons $D_P(M)$ la droite précédente. On définit de même $D_Q(M)$ pour un autre point Q de Γ . On note $K(M)$ le point commun à $D_P(M)$ et $D_Q(M)$.

- Montrer que $K(M)$ existe
- Quel est l'ensemble : $\{K(M)/M \in \Gamma\}$

5.2 - Une résolution :

- 1) Notons M', A', B' les projetés respectifs de P sur les droites AB, BM et MA.

Evaluons successivement $\overline{(M'B', M'A)}$ et $\overline{(M'A', M'B)}$



Les 4 points $AM'PB'$ sont cocycliques car $\overline{(AM', M'P)} = \overline{(AB', B'P)} = \overline{x}$

Donc $\overline{(M'B', M'A)} = \overline{(PB', PA)} = \overline{(PB', MA)} + \overline{(MA, PA)}$

$$= \frac{\pi}{2} + \overline{(MA, PA)}$$

De même $\overline{(M'A', M'B)} = \frac{\pi}{2} + \overline{(MB, PB)}$

Or $\overline{(MA, PA)} = \overline{(MB, PB)}$ car les points A, B, M, P sont cocycliques.

Donc $\overline{(M'B', M'A)} = \overline{(M'A', M'B)}$

C'est-à-dire $\overline{(M'B', AB)} = \overline{(M'A', AB)}$

Les droites $M'B'$ et $M'A'$ font le même angle avec AB , elles ne sont donc qu'une.

- 2) Notons maintenant P' le projeté de P sur AB , et Q' le projeté de Q sur AB .

On sait que $D_P(M)$ est la droite passant par P' , telle que

$$\overline{(D_P(M), AB)} = \frac{\pi}{2} + \overline{(MA, PA)}$$

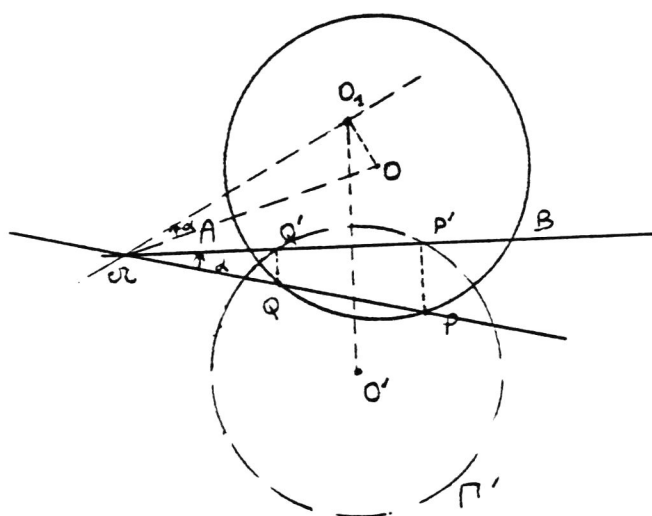
De même $D_Q(M)$ est la droite passant par Q' et telle que

$$\overline{(D_Q(M), AB)} = \frac{\pi}{2} + \overline{(MA, QA)}$$

Calculons $\overline{(D_P(M), D_Q(M))}$.

$$\begin{aligned} \overline{(D_P(M), D_Q(M))} &= \overline{(D_P(M), AB)} - \overline{(D_Q(M), AB)} \\ &= \left[\frac{\pi}{2} + \overline{(MA, PA)} \right] - \left[\frac{\pi}{2} + \overline{(MA, QA)} \right] \\ &= \overline{(QA, PA)} \end{aligned}$$

$\overline{(D_P(M), D_Q(M))}$ étant constant, le point $K(M)$ décrit un cercle Γ' passant par P' et Q' . Pour tout point N de ce cercle, $\overline{(NP', NQ')} = \overline{(K(M)P', K(M)Q')}$
 $= \overline{(AQ, AP)}$



Donc on passe de la figure (Γ, P, Q) à la figure (Γ', P', Q') par une similitude indirecte

Cette similitude est en général

$$\mathcal{I}_{AB} \circ \mathcal{H}\left(\Omega, \frac{AQ'}{AQ}\right) \circ \mathcal{R}(\Omega, \alpha)$$

où Ω est le point d'intersection des droites $P'Q'$ et PQ (si il existe),

l'angle (AQ, AQ') et $\mathcal{I}_{AB}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite AB .

II - LA THEORIE :

I - DEFINITION

Voici deux manières ensemblistes de définir les angles de couples de droites vectorielles

- soit en mettant une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de droites vectorielles

$(\Delta_1, \Delta_2) \sim (\Delta'_1, \Delta'_2)$ signifie : il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(\Delta_1) = \rho' \Delta'_1$ et $\rho(\Delta_2) = \Delta'_2$
(en fait s'il existe une telle ρ , il en existe deux)

- soit en mettant une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de couples de demi-droites vectorielles

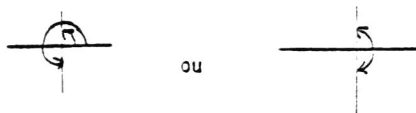
$\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ signifie : $\hat{\beta} - \hat{\alpha} \in \{\hat{0}, \hat{p}\}$

On appelle alors ensemble $\mathcal{A}'$ des angles de couples de droites vectorielles l'ensemble quotient obtenu.

Ce n'est pas le même ensemble dans chacun des cas, mais les deux ensembles obtenus sont isomorphes (pour les structures additives quotients. Dans le deuxième cas, $\mathcal{A}'$ se présente comme le quotient du groupe $\mathcal{A}$ par le sous-groupe $\{\hat{0}, \hat{p}\}$. Mais il n'est pas indispensable de parler de structure quotient aux élèves. On peut donner directement la définition $\hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\}$ en s'appuyant sur le fait que lorsqu'on se donne deux droites il existe deux rotations transformant la 1ère en la seconde et que si $\hat{\alpha}$ désigne l'angle de la première, $\hat{\alpha} + \hat{p}$ est l'angle de la seconde. On note $\mathcal{A}'$ l'ensemble des angles de droites obtenu :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \{\hat{\alpha} / \hat{\alpha} \in \mathcal{A}\} \\ \hat{0} &= \{\hat{0}, \hat{p}\} = \hat{p} \\ \hat{\alpha} &= \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha}'\} \end{aligned}$$

L'angle plat de droites est l'angle nul de droites. Il n'y a qu'un angle droit de droites ce qu'on peut illustrer par



II - ADDITION

Nous voulons maintenant définir une addition dans l'ensemble des angles de droites.

Soit $\hat{\alpha}_1 = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1 + \hat{p}\}$ et $\hat{\alpha}_2 = \{\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\}$

Il y a quatre sommes possibles sur les représentants

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 &= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 + (\hat{\alpha}_2 + \hat{p}) &= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + \hat{p} \\ (\hat{\alpha}_1 + \hat{p}) + \hat{\alpha}_2 &= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + \hat{p} \\ (\hat{\alpha}_1 + \hat{p}) + (\hat{\alpha}_2 + \hat{p}) &= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + (\hat{p} + \hat{p}) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \end{aligned}$$

Les résultats sont les éléments de $\{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\}$

On notera $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$ l'angle de droites ainsi obtenu

Ainsi en posant

$$\{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1 + \hat{p}\} + \{\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\} = \{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{p}\}$$

on définit une loi de composition interne sur $\mathcal{A}'$

On montre facilement que

- . cette loi est associative et commutative
- . L'élément neutre est $\{\hat{0}, \hat{p}\}$ noté $\hat{0}$
- . Le symétrique de $\hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\}$ est $\{-\hat{\alpha}, -(\hat{\alpha} + \hat{p})\}$ encore égal à $\{-\hat{\alpha}, -(\hat{\alpha} + \hat{p})\}$. On le notera $-\hat{\alpha}$

Conclusion : $(\mathcal{A}', +)$ est un groupe commutatif.

3 - HOMOMORPHISME DE $(\mathcal{A}', +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}' &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \hat{\alpha} &\longmapsto \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \quad \text{pour } \hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p}\} \end{aligned}$$

La définition est légitime car $(\hat{\alpha} + \hat{p}) + (\hat{\alpha} + \hat{p}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}$

$$\begin{aligned}
 \psi(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) &= \psi(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{p}) \\
 &= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \\
 &= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \text{ grâce à l'associativité et la commutativité} \\
 &= \psi(\tilde{\alpha}_1) + \psi(\tilde{\alpha}_2)
 \end{aligned}$$

ψ est bien un morphisme.

Mais de plus ψ est bijective comme nous allons le montrer

On doit montrer $\forall \hat{\alpha} \in \mathcal{U} \exists ! \tilde{\alpha} \in \mathcal{U}' \quad \psi(\tilde{\alpha}) = \hat{\alpha}$

soit $\forall \hat{\alpha} \in \mathcal{U} \exists ! \tilde{\alpha} \in \mathcal{U}' \quad \hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{0}$

Or l'équation $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{0}$ a deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_0 + \hat{p}$

$$\begin{aligned}
 \text{Comme } \tilde{\alpha}_0 &= (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0 + \hat{p}) \text{ et } (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{p}) = (\hat{\alpha}_0 + \hat{p}, (\hat{\alpha}_0 + \hat{p}) + \hat{p}) \\
 &= (\hat{\alpha}_0 + \hat{p}, \hat{\alpha}_0) \\
 &= \tilde{\alpha}_0
 \end{aligned}$$

on a montré que l'équation $\psi(\tilde{\alpha}) = \hat{\alpha}$ a une et une seule solution.

Théorème : L'application $\psi : (\mathcal{U}', +) \longrightarrow (\mathcal{U}, +)$
 $\tilde{\alpha} \longmapsto \hat{\alpha} + \hat{\alpha}$
 est un isomorphisme de groupes.

4 - RELATION DE CHASLES POUR LES ANGLES DE COUPLES DE DROITES VECTORIELLES

Soient 3 droites vectorielles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et 3 vecteurs directeurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de ces droites. La relation de Chasles entre angles de couples de vecteurs

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + (\vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_1, \vec{u}_3)$$

conduit par passage au quotient à la relation de Chasles entre angles de couples de droites

$$(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2) + (\tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3) = (\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_3)$$

5 - RESOLUTION DE L'EQUATION $\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$

On montre, en utilisant l'isomorphisme ψ , que cette équation en $\tilde{\alpha}$, a deux solutions qui diffèrent de $\tilde{d}$

6 - MESURE D'UN ANGLE DE COUPLE DE DROITES VECTORIELLES*

(dans un plan vectoriel euclidien orienté)

Soit $\tilde{\alpha} = (\hat{\alpha}, \hat{\alpha} + \hat{p})$

Si on note $\text{mes}(\hat{\alpha})$ l'ensemble des déterminations en radian de $\hat{\alpha}$ (c'est-à-dire $\{x + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$)

l'ensemble $\text{mes}(\hat{\alpha} + \hat{p})$ est $\{(x + \pi) + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

Alors on appelle mesure de $\tilde{\alpha}$ et on note $\text{mes}(\tilde{\alpha})$

$$\text{mes}(\tilde{\alpha}) = \text{mes}(\hat{\alpha}) \cup \text{mes}(\hat{\alpha} + \hat{p})$$

c'est-à-dire $\text{mes}(\tilde{\alpha}) = \{x + h\pi/h \in \mathbb{Z}\}$

si on note de même $\text{mes}(\tilde{\beta}) = \{y + h'\pi/h' \in \mathbb{Z}\}$

on a $\text{mes}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = \{x + y + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

De plus $\text{mes}(\tilde{0}) = \{h\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{mes}(\tilde{d}) = \{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

* On doit apporter à l'utilisation du mot mesure les mêmes réserves que dans le cas des angles de couples de demi-droites.

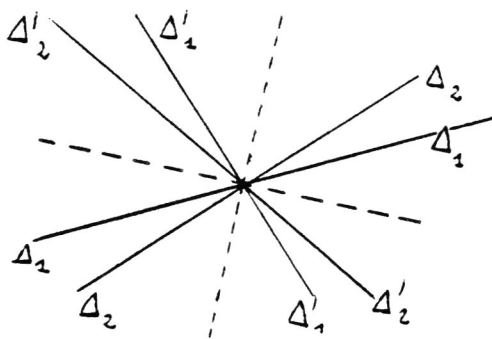
III - CE QU'ON PEUT FAIRE AVEC DES ANGLES DE COUPLES DE DROITES

- On peut les additionner
- On peut utiliser la relation de Chasles
- A chaque angle, on peut associer une famille de réels modulo π
(en radians)
- On ne peut pas les ordonner

IV - LES ANGLES DE PAIRES DE DROITES

I - DEFINITION

Travaillons dans le cadre vectoriel, le passage à l'anneau se faisant comme précédemment.



Supposons qu'il existe une isométrie transformant la figure $\Delta_1 \cup \Delta_2$ en $\Delta'_1 \cup \Delta'_2$. Il en existe alors quatre : dans le cas du dessin deux rotations qui transforment Δ_1 en Δ'_1 et Δ_2 en Δ'_2 et deux symétries qui transforment Δ_1 en Δ'_2 et Δ_2 en Δ'_1 .

D'un point de vue ensembliste on pourrait définir l'angle $\overline{\{\Delta_1, \Delta_2\}}$ de la paire $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ comme ensemble des couples (Δ'_1, Δ'_2) tels que $\Delta'_1 \cup \Delta'_2$ soit isométrique à $\Delta_1 \cup \Delta_2$, ce qui revient à rassembler les deux angles $\overline{(\Delta_1, \Delta_2)}$ et $\overline{(\Delta_2, \Delta_1)}$, ou encore 4 angles de couples de demi-droites.

On peut aussi écrire plus vite

$$\overline{\{\Delta_1, \Delta_2\}} = \{\overline{(\Delta_1, \Delta_2)}, \overline{(\Delta_2, \Delta_1)}\}$$

2 - PROPRIETES

Quoiqu'il en soit :

- on peut *mesurer* $\overline{\{\Delta_1, \Delta_2\}}$, en prenant pour mesure l'unique détermination de $(\overline{\Delta_1, \Delta_2})$ ou $(\overline{\Delta_2, \Delta_1})$ qui appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'application : $(\Delta_1, \Delta_2) \longmapsto \text{mes } \overline{\{\Delta_1, \Delta_2\}}$ est une distance

- on ne peut pas définir d'addition dans l'ensemble des angles de paires de demi-droites, qui soit partout définie et associative.

On peut à la rigueur additionner de tels angles tant que la somme des mesures ne dépasse pas $\frac{\pi}{2}$ en radians.

- on peut les comparer grâce à leur *mesure*.

CHAPITRE 9

LA TRIGONOMETRIE

I - INTRODUCTION

1 - L'importance des fonctions trigonométriques tient au fait qu'elles interviennent dans plusieurs secteurs des mathématiques et des sciences. Mais ces fonctions, sinus et cosinus, par exemple, ne sont pas les mêmes selon les domaines considérés. C'est pour prendre en charge cette diversité que l'on a vu fleurir dans les manuels du second degré, au cours des années soixante dix, des notations variées telles que $\cos x$, $\cos_k (E_k(\widehat{xoy}))$, $\cos_k x$, $\cos \widehat{xoy}$, $\text{Cos } \widehat{xoy}$, $\text{Cos } p$, $\text{Cos } (\theta(\alpha))$, $\cos 13^\circ$, etc.... et des notations analogues pour les fonctions sinus

2 - Il y a en fait deux grandes catégories de fonctions cosinus, celles qui sont des applications d'un ensemble d'êtres géométriques (angles d'un type ou d'un autre, rotations, arcs) dans $\mathbb{R}$, et celles qui sont des applications de $\mathbb{R}$ (ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$.

Dans certaines utilisations (en physique, en mécanique, dans le travail d'un géomètre ou d'un astronome, etc....) la nature géométrique du concept est évidente même si, par le biais des mesures, des tableés de valeurs numériques ou des calculatrices, on travaille avec des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans d'autres cas (acoustique, étude des phénomènes périodiques, séries de Fourier, résolution de certaines équations différentielles, somme de certaines séries entières etc..) l'aspect géométrique est gommé. Ce sont alors les propriétés des fonctions qui jouent le plus grand rôle, la périodicité en particulier.

3 - NOTATIONS

Traditionnellement, toutes étaient notées $\cos$ et $\sin$. Dans les programmes 70 de 1ère C ... il est demandé de noter Cos et Sin les fonctions définies sur des ensembles géométriques en réservant les notations $\cos$ et $\sin$ aux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En 3ème dans les instructions des programmes de 1972 $\cos$ désignait une application de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, et $\cos_k$ une application de $[0, k]$ dans $\mathbb{R}$ ($k = 180$ ou 200 en pratique). Les commentaires suggéraient divers abus :

$\cos 45^\circ$ pour $\cos_{180} 45$

$\cos 17\text{gr}$ pour $\cos_{200} 17$

$\cos \widehat{xAy}$ pour $\cos E(\widehat{xAy})$ où $E(\widehat{xAy})$ désignait l'écart

angulaire de $\widehat{xAy}$.

Les 3 abus signalés sont en fait le même si on considère que 45° , ou 17 gr désigne un angle au même titre que $\widehat{x\hat{A}y}$. Cela revient alors à conserver la notation $\cos$ pour une application d'un ensemble géométrique dans $\mathbb{R}$.

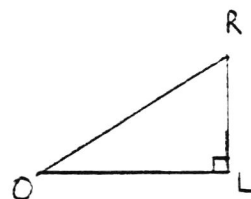
Il serait plus intéressant en lère de faire réfléchir les élèves à ces abus de langage pour mieux comprendre ce qu'ils cachent plutôt que d'imposer définitivement une nouvelle habitude d'écriture apparemment réservée à certaines classes de mathématiques de lère et terminale.

II - DEFINITIONS DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1 - CAS DU TRIANGLE RECTANGLE - FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DEFINIES SUR $[0, \frac{\pi}{2}]$

Soit un triangle ORL rectangle en L

$$\begin{aligned} 1.1 - \text{Définition :} \quad \cos \widehat{LOR} &= \frac{OL}{OR} \\ \sin \widehat{LOR} &= \frac{LR}{OR} \end{aligned}$$



1.2 - Remarques :

1) $\cos \widehat{LOR}$ et $\sin \widehat{LOR}$ sont des rapports de longueur. Ce sont donc des nombres réels positifs. Ces nombres sont plus précisément compris entre 0 et 1.

2) $\widehat{LOR}$ désigne au choix, un angle de secteur saillant ou un angle de paire de demi-droite.

3) Si on désigne par α la mesure en radians de $\widehat{LOR}$, β sa mesure en degrés et γ sa mesure en grades

$$\cos \widehat{LOR} = \cos(\alpha \text{rd}) = \cos(\beta^\circ) = \cos(\gamma \text{gr})$$

4) Les égalités précédentes permettent de définir trois applications

$$\alpha \longmapsto \cos(\alpha \text{rd}) \quad \text{de } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\beta \longmapsto \cos(\beta^\circ) \quad \text{de } [0, 90] \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\gamma \longmapsto \cos(\gamma \text{gr}) \quad \text{de } [0, 100] \text{ dans } \mathbb{R}$$

5) On note par abus $\alpha \longrightarrow \cos \alpha$ l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessus

6) Ainsi on a : $\cos 0 = 1$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ etc}$$

$$\cos 1 \simeq 0,5403 \text{ à } 5.10^{-5} \text{ près}$$

$$\text{alors que } \cos 1^\circ \simeq 0,9998 \text{ à } 5.10^{-5} \text{ près}$$

7) On peut faire les remarques analogues à 3) 4) 5) et 6) pour le sinus.
En fait $\sin \widehat{LOR} = \cos \widehat{ORL}$

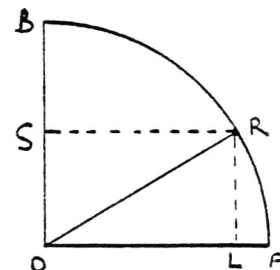
1.3 - Si dans le triangle rectangle LOR, OR est l'étalon de longueur, $\cos \widehat{LOR}$ est la mesure de OL et $\sin \widehat{LOR}$ est la mesure de OS.

Si dans ce cas on complète la figure ainsi

le nombre α est la mesure de la longueur de l'arc $\widehat{AR}$

Si on note S la projection orthogonale de R sur OB

$$\begin{cases} \cos \widehat{AOR} = \text{mes (OL)} \\ \sin \widehat{AOR} = \text{mes (OS)} \end{cases}$$

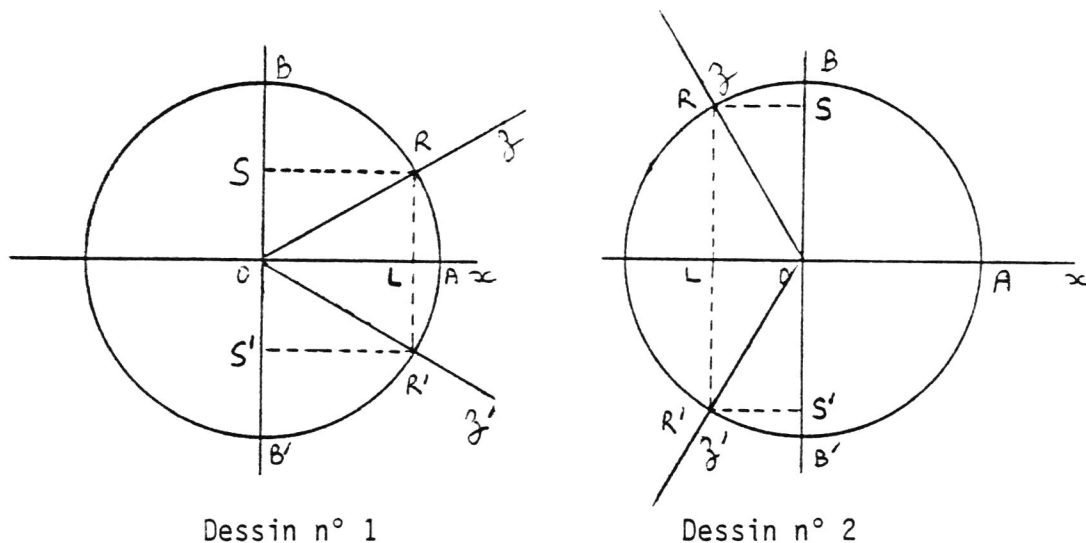


2 - COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE DE PAIRES DE DEMI-DROITES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DEFINIES SUR $[0, \pi]$

2.1 - Définitions

Etant donné une demi-droite Ox , et un angle $\hat{a}$ de paires de demi-droites, il existe 2 demi-droites Oz et Oz' telles que les deux paires $\{Ox, Oz\}$ et $\{Ox, Oz'\}$ soient des représentants de l'angle donné. On sait que Oz et Oz' sont symétriques par rapport à la droite support de Ox .

Complétons la figure par le cercle de centre O et de rayon unité



Dans le dessin n° 1, la demi-droite OL est égale à Ox ; on retrouve la situation du triangle rectangle. Il n'en est pas de même dans le dessin n°2 où les demi-droites OL et Ox sont opposées.

Définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \hat{a} = \overline{OL} \text{ sur l'axe de repère } (O,A) \\ \sin \hat{a} = \text{mes}(OS) = \text{mes}(OS') \end{array} \right.$$

2.2 - Remarques :

1) L est la projection orthogonale commune de R et R' sur la droite OA . OL est le rapport de projection orthogonale de l'axe de repère (O,R) sur l'axe de repère (O,A) . C'est aussi le rapport de projection orthogonale de l'axe de repère (O,R') sur l'axe de repère (O,A) . On voit ainsi que ce qui a été noté $\cos \hat{a}$ ne dépend que de l'angle $\hat{a}$ et non du représentant choisi.

2) $\sin \hat{a}$ peut aussi être considéré comme un rapport de projection orthogonale à condition de choisir l'axe dont le support est perpendiculaire à la droite OA en fonction du représentant de $\hat{a}$.

Pour obtenir OS il faut associer l'axe de repère (O,B) à l'axe de repère (O,R) et pour obtenir OS' il faut associer l'axe de repère (O,B') à l'axe de repère (O,R') . Dans les deux cas on considère des points d'un même demi-plan dont le bord est la droite OA .

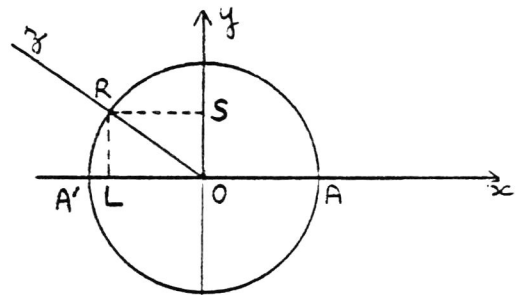
En pratique, on choisit arbitrairement un des demi-plans pour travailler.

3) Grâce à ces définitions on peut prolonger les applications cos et sin du paragraphe 1 à $[0, \pi]$, mais le cosinus et le sinus jouent des rôles dissymétriques (voir définition). Par ailleurs, l'application cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, mais sinus est une application non injective de $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$.

3 - COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE DE COUPLE DE DEMI-DROITES. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DEFINIES SUR $\mathbb{R}$

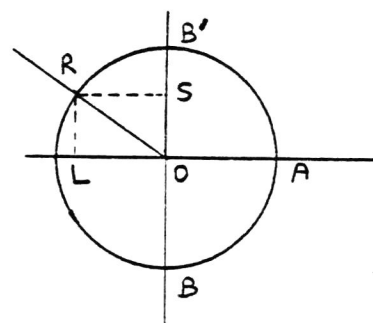
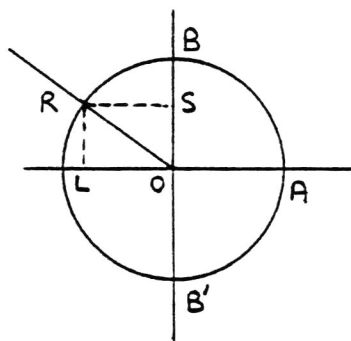
3.1 - Etant donné une demi-droite Ox et un angle $\hat{\alpha}$ de couple de demi-droites, il existe une unique demi-droite Oz telle que le couple (Ox, Oz) soit un représentant de l'angle donné.

Complétons la figure ci-contre par le cercle de centre O et de rayon 1.



Comme dans le cas précédent, on peut définir $\cos \hat{\alpha} = \overline{OL}$ sur l'axe de repère (O, A) . S est la projection orthogonale de R sur la droite perpendiculaire en O et OA . Si l'on veut définir le sinus de $\hat{\alpha}$ comme un rapport de projection, on doit orienter cette droite. Il y a deux possibilités d'orientation qui conduiraient à deux fonctions sinus opposées.

On convient habituellement d'appeler B le point de cette droite auquel on attribue l'abscisse 1. Cette convention s'applique aussi bien à chacun des 2 dessins suivants



L'usage retient, en général, le dessin de gauche comme dessin de référence. Remarquons qu'on pourrait tout aussi bien développer ce qui suit en se référant à l'autre dessin.

3.2 - Définition :

$$\begin{aligned}\cos \hat{\alpha} &= \overline{OL} && \text{sur l'axe de repère } (O,A) \\ \sin \hat{\alpha} &= \overline{OS} && \text{sur l'axe de repère } (O,B)\end{aligned}$$

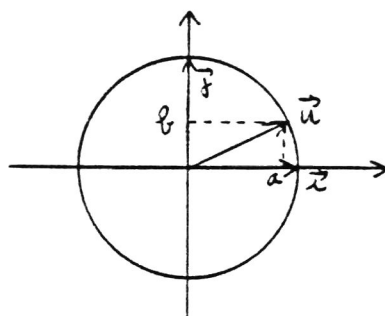
3.3 - Remarques:

1) $\cos \hat{\alpha}$ est le rapport de projection orthogonale de l'axe de repère (O,R) sur l'axe de repère (O,A)

$\sin \hat{\alpha}$ est le rapport de projection orthogonale de l'axe de repère (O,R) sur l'axe de repère (O,B)

2) Dans les programmes de 1ère C 70, on aboutit aux mêmes définitions de la façon suivante :

On se place dans le plan vectoriel euclidien. On oriente Π par $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée.



Soit $\hat{\alpha}$ un angle, soit alors $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = \hat{\alpha}$

Supposons $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ($a^2 + b^2 = 1$)

La rotation vectorielle telle que $\rho(\vec{i}) = \vec{u}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

On appelle $\cos \hat{\alpha} = \cos (\vec{i}, \vec{u}) = \cos \rho = a$

$\sin \hat{\alpha} = \sin (\vec{i}, \vec{u}) = \sin \rho = b$

4 - FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$

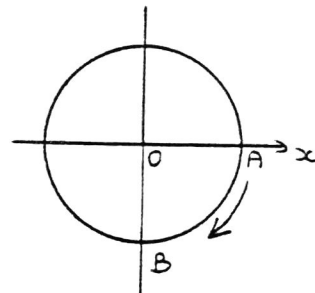
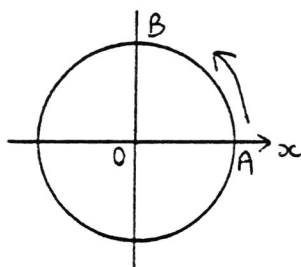
4.1 - On peut associer à chaque angle $\hat{\alpha}$ l'ensemble de ses mesures soit d'une manière élémentaire en enroulant une ficelle de A à R (dans un sens ou dans l'autre et en faisant un nombre arbitraire de tours), soit d'une manière théorique en utilisant l'application θ (voir chapitre 7)

De même en utilisant le radian, il y a dans la méthode élémentaire deux ensembles de mesures possibles pour un angle $\hat{\alpha}$ suivant le sens de l'enroulement. Par exemple pour $(\vec{OA}, \vec{OB})$ on peut prendre $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. On décide par convention de prendre $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Cette convention n'est pas une convention de dessin (comme l'était celle du dessin de référence); c'est une convention théorique qui s'exprime par le fait qu'on a choisi θ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Cette convention peut s'exprimer dans chacun des deux dessins par des flèches indiquant le sens positif choisi sur le cercle



4.2 - Définition :

Si x est une mesure en radians de $\hat{\alpha}$

$$\cos x = \cos \hat{\alpha}$$

$$\sin x = \sin \hat{\alpha}$$

4.3 - Remarques :

1) Comme on l'a déjà dit dans ces égalités on note par abus d'écriture $\cos x$ pour $\cos(x \text{ rd})$ et $\sin x$ pour $\sin(x \text{ rd})$

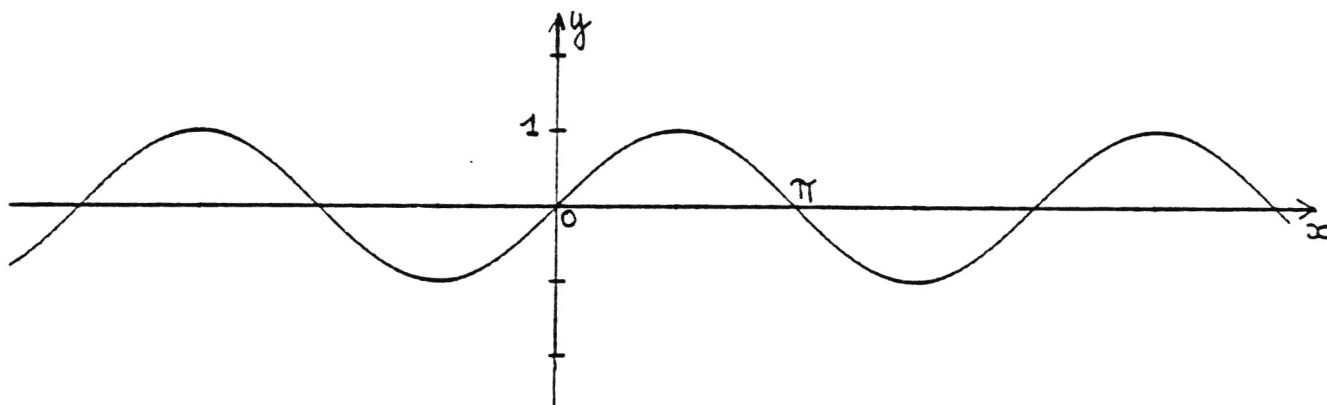
Par exemple : $\cos 30 \simeq 0,1543$ à $5 \cdot 10^{-5}$ près
 alors que $\cos 30^\circ \simeq 0,8660$ à $5 \cdot 10^{-5}$ près

2) Pour éviter cet abus de langage les programmes 70 de 1ère demandent d'écrire $\widehat{\text{Cos } \alpha}$ au lieu de $\cos \alpha$ et $\widehat{\text{Sin } \alpha}$ au lieu de $\sin \alpha$ pour réserver les notations $\cos$ et $\sin$ pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme composées de θ par Cos et Sin .

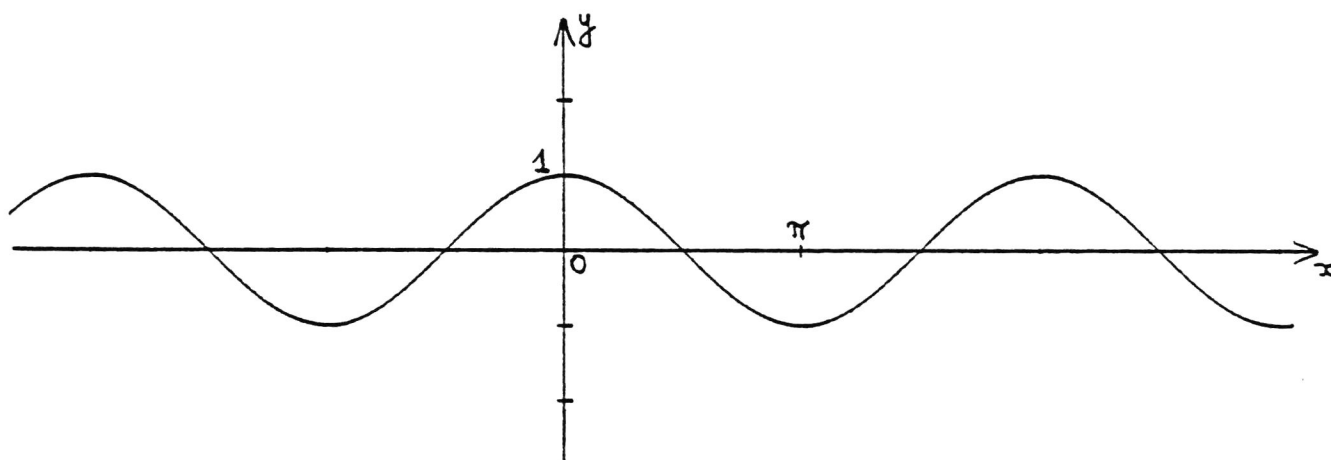
4.5 - Propriété : Comme θ est périodique de période 2π , les fonctions cosinus et sinus sont aussi périodiques de période 2π

Représentations graphiques : en repère orthonormé

Représentation graphique de sinus

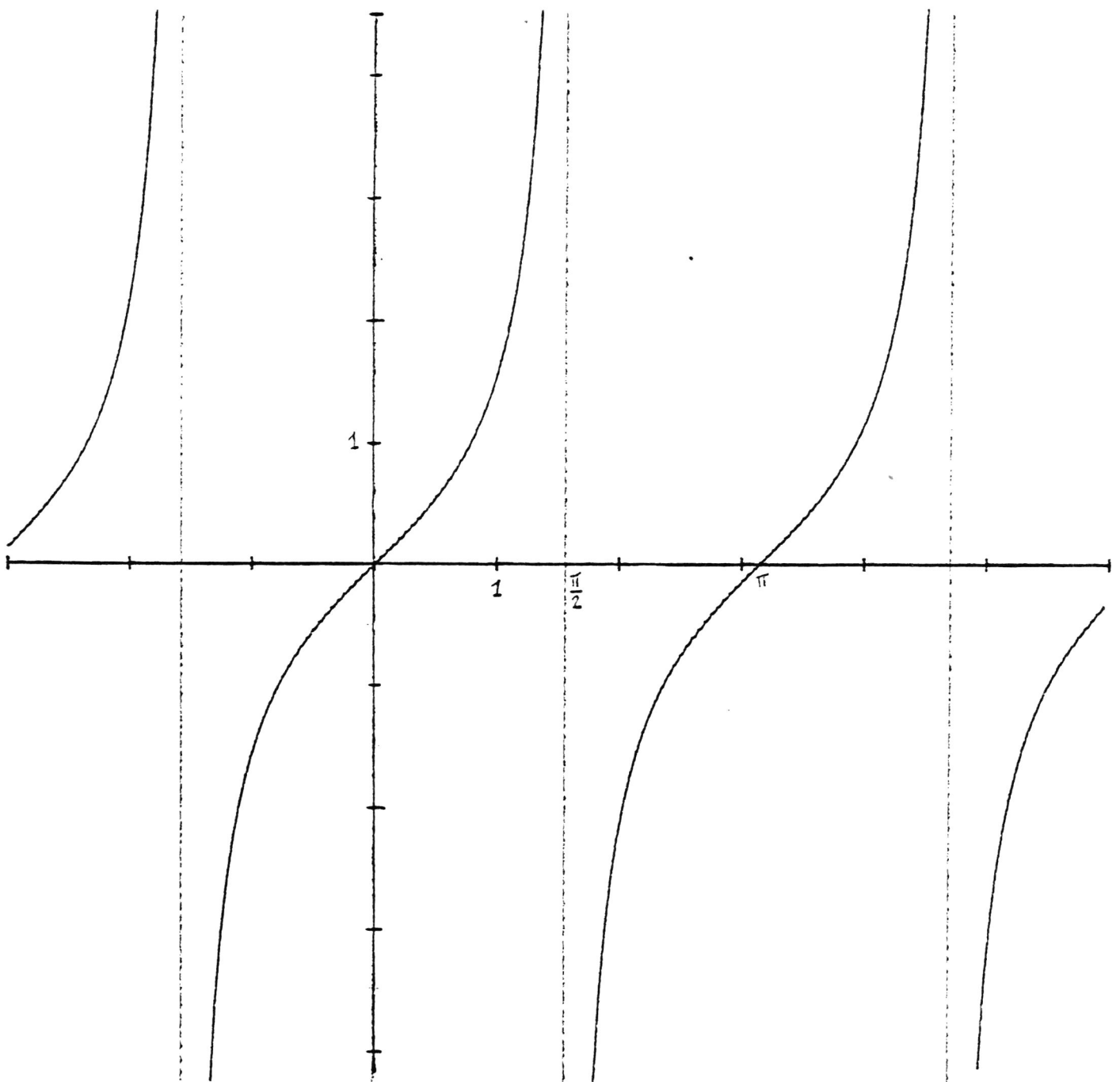


Représentation graphique de cosinus

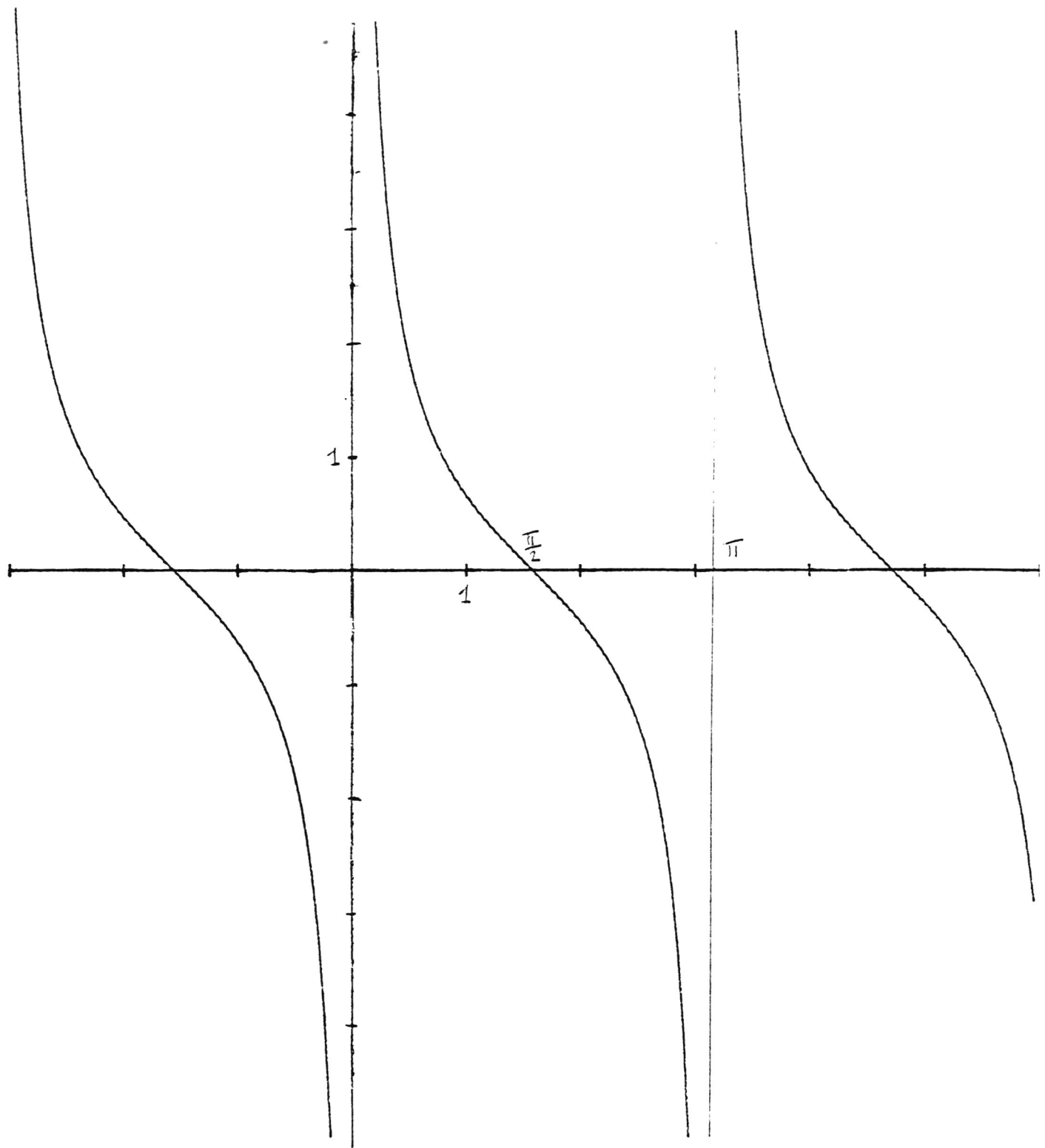


4.6 - Il ne reste plus qu'à tracer les courbes représentatives des fonctions tangente et cotangente définies par

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



la fonction tangente



la fonction cotangente

5 - COMPLEMENTS : LIEN ENTRE DES DEFINITIONS PRECEDENTES ET CAS DES ANGLES DE DROITES

5.1 - On peut retrouver les définitions relatives aux angles d'un triangle rectangle ou aux angles de paires de demi-droites à partir de celles relatives aux angles de couples de demi-droites.

a) Cas des angles de paires de demi-droites : Un angle de paires de demi-droites étant donné, il lui correspond 2 angles opposés de demi-droites. Ces angles ont même cosinus et des sinus opposés. On a retenu pour l'angle de paires la valeur commune du cosinus et la valeur absolue des sinus. En fait, ces 2 nombres sont le cosinus et le sinus de celui des angles de couple de demi-droites dont une détermination est comprise entre 0 et π .

b) Cas du triangle rectangle :

C'est un cas particulier d'angle de paire de demi-droite pour laquelle le cosinus est positif (voir aussi § 4.3)

5.2 - Cas des angles de couples de droites

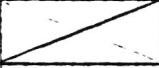
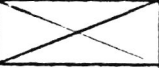
A un angle de couple de droite correspond deux angles de couple de demi-droites dont la différence est un plat. Ces deux angles de demi-droites ont donc des cosinus opposés, des sinus opposés et même tangente. La tangente d'un angle de couples de droite est bien définie. Il n'y a pas de définition consacrée par l'usage pour sinus et cosinus. On aurait pu le faire en choisissant l'angle de couples de demi-droites dont une détermination est dans $[0, \pi[$ par exemple, ou bien dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ou dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ etc

5.3 - Cas des angles de paires de droites

A un angle de paires de droites, correspond 2 angles de couple de droites opposés, soit encore 4 angles de couples de demi-droites dont les sinus ont même valeur absolue; il en est de même pour les cosinus et les tangentes. Ces trois valeurs absolues sont en fait les sinus, cosinus et tangentes de celui des quatre angles de couple de demi-droites dont une détermination est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

5.4. - Comment caractériser un angle à l'aide de lignes trigonométriques ?

a) Peut-on connaître un angle d'un type donné connaissant seulement la valeur d'une de ses lignes trigonométriques, et quelle restriction doit-on imposer à cette valeur

angle	sinus.	cos.	tg.
couple de demi-droites	non	non	non
paire de demi-droites	> 0 non	oui	oui
couple de droites			oui
paire de droites	> 0 oui	> 0 oui	> 0 oui

b) Dans le cas des angles de couple de demi-droites seule la donnée simultanée de sinus et cosinus permet de connaître l'angle. Si l'on excepte les angles plat, nul et droit, la donnée simultanée de sinus et tangente ou de cosinus et tangente est également suffisante

III - LES FORMULES TRIGONOMETRIQUES

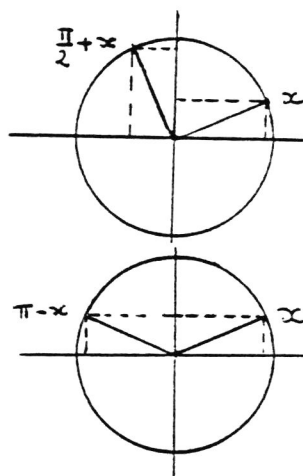
1 - LES FORMULES ELEMENTAIRES

Certaines propriétés de la figure nous donnent quelques formules par simple lecture du dessin

Exemple :
$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = - \sin x \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos (\pi - x) = - \cos x \\ \sin (\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

etc ...



Remarque : On peut bien sûr démontrer ces formules dans la théorie en utilisant les matrices de rotations; mais en pratique c'est avec un dessin que l'on s'en souviendra.

2 - LES FORMULES DE TRANSFORMATION

Elles sont toutes conséquence des formules d'addition

$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	avec a et b
$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	dans $\mathbb{R}^2$

Pour démontrer ces formules trois méthodes sont à notre disposition

2.1 - Méthode utilisant le calcul matriciel (en 1ère C)

On se souvient des correspondances suivantes entre $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels), $\mathcal{A}$ (ensemble des angles de couples de droites) et $\mathcal{R}$ (ensemble des rotations vectorielles).

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} & \longmapsto & \mathcal{A} & \longmapsto & \mathcal{R} \\
 a & \longmapsto & \theta(a) & \longmapsto & \rho_{\theta(a)} \\
 b & \longmapsto & \theta(b) & \longmapsto & \rho_{\theta(b)} \\
 a + b & \longmapsto & \theta(a+b) & \longmapsto & \rho_{\theta(b)} \circ \rho_{\theta(a)}
 \end{array}$$

On sait que dans une base orthonormée directe, $\rho_{\theta(a)}$ et $\rho_{\theta(b)}$ ont pour matrices respectives

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

la matrice de $\rho_{\theta(b)} \circ \rho_{\theta(a)}$ est donc

$$\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

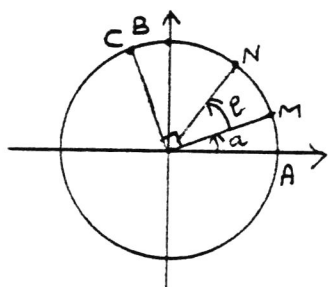
$$\text{soit} \begin{pmatrix} \cos b \cos a - \sin b \sin a & -\cos b \sin a - \sin b \cos a \\ \sin b \cos a + \cos b \sin a & -\sin b \sin a + \cos b \cos a \end{pmatrix}$$

Elle est d'autre part égale à

$$\begin{pmatrix} \cos (a+b) & -\sin (a+b) \\ \sin (a+b) & \cos (a+b) \end{pmatrix}$$

On obtient en identifiant les deux dernières matrices les formules cherchées.

2.2 - Méthode utilisant les changements de repère (sans matrices) (vue dans un livre de B.E.P. industriel 2ème année)



Soit M le point du cercle tel que a mesure $(\widehat{OA, OM})$. Soit N le point du cercle tel que b mesure $(\widehat{OM, ON})$. Alors $(a+b)$ mesure $(\widehat{OA, ON})$. Soit $(0; \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé direct du plan tel que $\vec{i} = \vec{OA}$ et $\vec{j} = \vec{OB}$. Soit $(0; \vec{i}', \vec{j}')$ le repère orthonormé direct tel que $\vec{i}' = \vec{OM}$ et $\vec{j}' = \vec{OC}$

Exprimons $\vec{ON}$ à l'aide de ses composantes

$$\text{i) dans la base } (\vec{i}', \vec{j}'): \vec{ON} = \cos b \cdot \vec{i}' + \sin b \cdot \vec{j}' \quad (1)$$

$$\text{ii) dans la base } (\vec{i}, \vec{j}) : \vec{ON} = \cos (a+b) \cdot \vec{i} + \sin (a+b) \cdot \vec{j} \quad (2)$$

$$\text{D'autre part } \vec{i}' = \vec{OM} = \cos a \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j} \quad (3)$$

$$\text{et } \vec{j}' = \vec{OC} = \cos (a + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{i} + \sin (a + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{j}$$

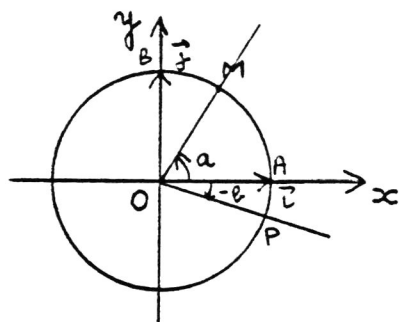
$$\text{c'est-à-dire } \vec{j}' = (-\sin a) \cdot \vec{i} + \cos a \cdot \vec{j} \quad (4)$$

En remplaçant dans (1), $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ par leurs expressions écrites en (4) et (5) on obtient

$$\vec{ON} = \cos b [\cos a \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j}] + \sin b [(-\sin a) \cdot \vec{i} + \cos a \cdot \vec{j}]$$

$$\vec{ON} = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \vec{i} + (\sin a \cos b + \sin b \cos a) \vec{j}$$

En comparant cette dernière expression à (2) on obtient les formules cherchées.

2.3. - Méthode utilisant le produit scalaire

Soit M le point du cercle tel que a mesure $(\widehat{OA, OM})$.

Soit P le point du cercle tel que $(-b)$ mesure $(\widehat{OA, OP})$.

$$\text{Alors} \quad \vec{OM} = \cos a \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j}$$

$$\vec{OP} = \cos(-b) \cdot \vec{i} + \sin(-b) \cdot \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \vec{OM} \cdot \vec{OP} &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \vec{OM} \cdot \vec{OP} &= \|\vec{OM}\| \|\vec{OP}\| \cos(\widehat{OM, OP}) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{OM, OP}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme} \quad (\widehat{OM, OP}) &= (\widehat{OA, OP}) - (\widehat{OA, OM}) \\ &= (-b) - (a) \text{ mesure } (\widehat{OM, OP}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \vec{OM} \cdot \vec{OP} &= \cos(\widehat{OM, OP}) \\ &= \cos(-a - b) \\ &= \cos(a + b) \end{aligned}$$

En comparant les deux écritures de $\vec{OM} \cdot \vec{OP}$ on obtient

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

En particulier on obtient :

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin a \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin a$$

$$\text{Soit encore} \quad \sin a = -\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{par suite } \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(a + \pi) = \cos a$$

Cela permet de calculer $\sin(a + b)$

$$\begin{aligned}
 \sin \left(a + b \right) &= - \cos \left(a + b + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= - \cos \left[a + \left(b + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= - \left[\cos a \cdot \cos \left(b + \frac{\pi}{2} \right) - \sin a \sin \left(b + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \cos a \cdot \sin b + \sin a \cos b
 \end{aligned}$$

En résumé on a montré

$$\begin{aligned}
 \cos (a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
 \sin (a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) &= - \sin x \\
 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) &= \cos x
 \end{aligned}$$

IV - LES EQUATIONS OU INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

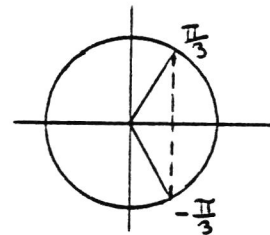
I - QUELQUES EXEMPLES

1.1 - Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$

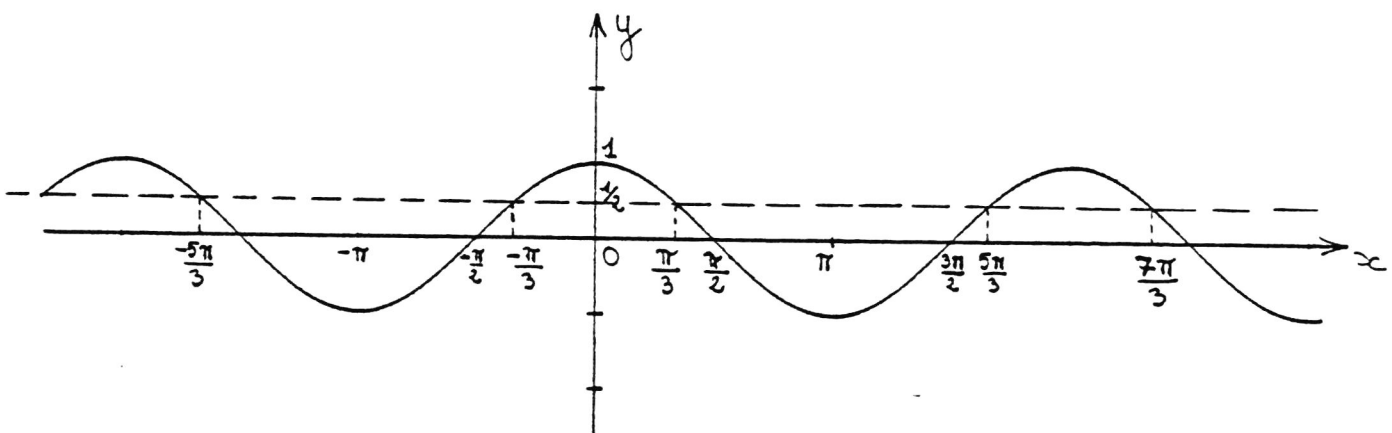
a) Avec le cercle trigonométrique

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$



b) Connaissant les variations de la fonction cosinus :



Sur $[0, 2\pi]$ $\cos x = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

Comme la fonction cosinus est périodique de période 2π , les solutions sont $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

ou bien

Sur $[-\pi, \pi]$ $\cos x = \frac{1}{2}$ a pour solutions $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

Comme la fonction cosinus est périodique de période 2π , les solutions sont $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

1.2 - Résoudre $\cos x < \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$

a) Avec le cercle trigonométrique

Un intervalle solution est $]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$

L'ensemble des solutions est donc

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi[$$

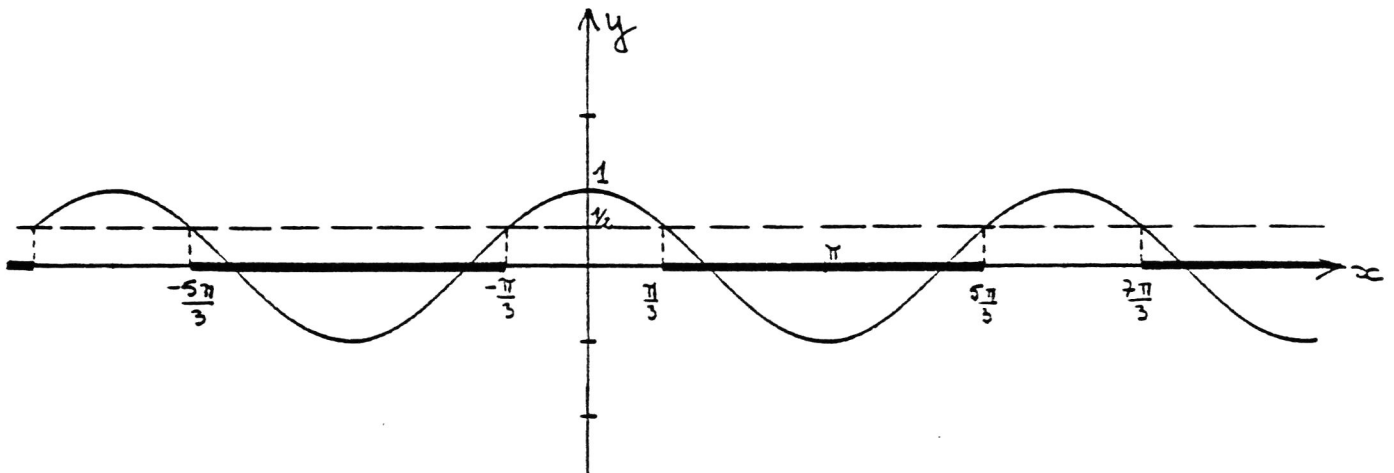
ou bien

Pour les x d'un intervalle particulier $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

Pour n'importe quel $x \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$

b) Connaissant les variations de la fonction



Tous les intervalles solutions se déduisent de $] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} [$ dans une translation de vecteur $2k\pi \vec{i} (k \in \mathbb{Z})$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de Ox

1.3 Résoudre

$$\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

Comme $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ ce système a des solutions. Il n'y a qu'une solution dans $[0, 2\pi[$

Si on dispose d'une calculatrice scientifique on trouve

$$\begin{cases} \alpha = \text{inv. cos} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \simeq 2,6780 \text{ à } 5 \cdot 10^{-5} \text{ près} \\ \beta = \text{inv. sin} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \simeq -0,4636 \text{ à } 5 \cdot 10^{-5} \text{ près} \end{cases}$$

La solution cherchée entre 0 et 2π est

$$x_0 = -\alpha + 2\pi = -\beta + \pi$$

$$x_0 \simeq 3,6052 \text{ à } 5 \cdot 10^{-5} \text{ près}$$

(obtenu en tronquant les décimales données par la calculatrice)

2 - NOTE SUR LES "FONCTIONS INVERSES" DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

2.1 - inversion du cosinus

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{cases} \quad \text{n'est ni surjective, ni injective}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, +1] \\ x \longmapsto \cos x \end{cases} \quad \text{est surjective, mais n'est pas injective}$$

$$\begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-1, +1] \\ x \longmapsto \cos x \end{cases} \quad \text{est bijective}$$

C'est l'inverse de cette dernière application qui est notée $\cos^{-1}$ ou inv. cos suivant les calculatrices, et Arc cos par les mathématiciens

2.2 - Inversion du sinus

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{array} \right. \quad \text{n'est ni surjective, ni injective}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, +1] \\ x \longmapsto \sin x \end{array} \right. \quad \text{est surjective, mais n'est pas injective}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, +1] \\ x \longmapsto \sin x \end{array} \right. \quad \text{est bijective}$$

C'est l'inverse de cette dernière application qui est notée $\sin^{-1}$ ou inv. sin suivant les calculatrices et Arc sin par les mathématiciens.

2.3 - Inversion de la tangente

De même c'est l'inverse de l'application

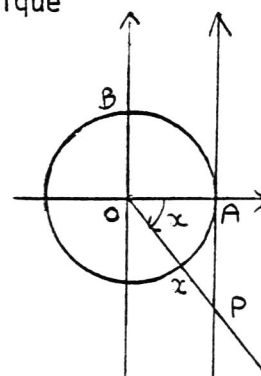
$$\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{tg} x \end{array} \right.$$

qui est notée tg^{-1} ou inv.tg suivant les calculatrices et Arc tg par les mathématiciens.

2.4 - Remarque :

Nous avons considéré dans tout ce qui suit la fonction tangente comme rapport des fonctions sinus et cosinus mais son interprétation graphique directe est importante.

$$\text{tg} x = \overline{AP}$$



CHAPITRE 10

LES NOTATIONS

I - INTRODUCTION

Il nous semble impossible de trouver un système de notations qui lève toute ambiguïté. Nous devons donc nous résigner à utiliser parfois la même notation pour plusieurs notions différentes, sachant que le contexte nous éclaire. Mais nous ne pensons pas qu'un glissement non explicité de signification pour une même notation soit un moyen de dégager un nouveau concept.

D'autre part, beaucoup de professionnels ont des habitudes de notation que nous ne pouvons leur demander d'abandonner.

L'important dans une classe est d'apprendre aux élèves à voir de quel type d'angle ils parlent, plutôt que de leur imposer un système trop rigide de notations.

Nous allons seulement dans ce chapitre faire une synthèse partielle de notations qui nous semblent raisonnables.

II - NOTATIONS QUI NE FONT PAS INTERVENIR DE MESURE

1 - LES SECTEURS ANGULAIRES

Voici deux systèmes complets de notations

$\widehat{xOy}$	$\widehat{xOy}$	$\widehat{xOy}$	$\widehat{xOy}$	pour les saillants
$\widetilde{xOy}$	$\widetilde{xOy}$	$\widetilde{xOy}$	$\widetilde{xOy}$	pour les rentrants

ou bien

$\widehat{Ox,Oy}$	$\widehat{Ox,Oy}$	$\widehat{Ox,Oy}$	$\widehat{Ox,Oy}$	pour les saillants
$\widetilde{Ox,Oy}$	$\widetilde{Ox,Oy}$	$\widetilde{Ox,Oy}$	$\widetilde{Ox,Oy}$	pour les rentrants

Ces deux types de notations ont l'avantage de préciser si les bords appartiennent ou non au secteur considéré (le deuxième type de notation est calqué sur la notation des intervalles et porte sur l'ensemble des demi-droites d'origine 0), mais elles ont l'inconvénient d'être lourdes et d'obliger à se poser le problème des bords, ce qui n'est pas souhaitable avec les jeunes élèves.

C'est pourquoi nous préconisons

"secteur $\widehat{xOy}$ " pour un saillant

"secteur $\frown xOy$ " pour un rentrant

ou bien

"secteur saillant xOy " et "secteur rentrant xOy " tant qu'aucun élève ne se pose le problème des bords, tout en conservant à l'esprit, nous enseignants que nous ne savons pas exactement de quelle région du plan nous parlons.

Remarque : Si l'on veut réserver les chapeaux pour noter les angles au lieu de $[Ox, Oy]$ pour le secteur fermé saillant de bords Ox et Oy , on peut noter secteur saillant $[Ox, Oy]$ et les notations analogues pour les autres secteurs. Le chapeau a l'avantage de pouvoir distinguer facilement les secteurs rentrants des secteurs saillants.

2 - LES ANGLES DE SECTEURS

L'angle d'un secteur de bords Ox et Oy peut être noté

$\widehat{xOy}$ pour l'angle de secteur saillant

et $\frown xOy$ pour l'angle de secteur rentrant*

De même si A est un point de Ox , et si B est un point de Oy ,

on peut noter

$\widehat{AOB}$ pour $\widehat{xOy}$

et $\frown AOB$ pour $\frown xOy$

Cas particulier : angles d'un triangle

On peut noter $\widehat{A}$ pour $\widehat{BAC}$
 $\widehat{B}$ pour $\widehat{ABC}$
 $\widehat{C}$ pour $\widehat{BCA}$

* Il semble préférable de réserver la notation la plus simple pour les angles, car c'est celle qui sera le plus utilisée; en cas de risque de confusion et au début par exemple il est toujours possible de préciser angle $\widehat{xOy}$ ou angle $\frown xOy$.

3 - LES ANGLES DE PAIRE DE DEMI-DROITES (appelé aussi *angles géométriques* ou *angles non orientés de demi-droites*)

L'angle de paire de deux demi-droites Ox et Oy est en fait l'angle d'un secteur saillant de bords Ox et Oy . Pour cette raison on peut le noter $\widehat{xOy}$ sans problème. Par contre deux demi-droites (d'origines distinctes O et O') Ox et $O'y$ définissent un angle de paires de demi-droites, mais ne définissent pas de secteur. Nous proposons alors la notation $\{Ox, O'y\}$

C'est pourquoi nous pouvons aussi noter $\{Ox, Oy\}$ pour $\widehat{xOy}$

Remarque : Si, dans cette dernière notation, les demi-droites sont confondues, on obtient $\{Ox, Ox\}$. Cette notation représente l'angle nul de paires de demi-droites et doit être considéré comme globale car évidemment $\{Ox, Ox\}$ n'est pas une paire. Cet inconvénient ne nous semble pas très grand, par contre cette notation nous tire d'affaire pour les cas (assez rares peut-être, mais existant) où les demi-droites ne sont pas de même origine. De toute façon $\{Ox, Ox\}$ peut aussi être écrit $\widehat{xOx}$.

4 - LES ANGLES DE COUPLE DE DEMI-DROITES (appelés aussi *angles orientés de demi-droites*)

L'angle du couple (Ox, Oy) est habituellement noté $(\widehat{Ox, Oy})$

On sait qu'on parle aussi bien d'un angle de couple de vecteurs que de l'angle du couple des demi-droites qu'ils engendrent.

De même l'angle du couple $(\vec{AB}, \vec{CD})$ est habituellement noté $(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}})$

5 - LES ANGLES DE COUPLE DE DROITES (ou angle orienté de droites)

Nous suggérons de noter

$\widehat{(D, D')}$ pour l'angle du couple (D, D') de deux droites D et D'
ou $\widehat{(MA, MB)}$ pour l'angle du couple (MA, MB) des droites MA et MB .

6 - LES ANGLES DE PAIRE DE DROITES (ou angle non orienté de droites)

Nous suggérons de noter

$\{D, D'\}$ pour l'angle non orienté de D avec D'
 $\{MA, MB\}$ pour l'angle non orienté des droites MA et MB

On peut bien sûr faire la même remarque qu'au paragraphe 3 pour le cas où $D = D'$ (ou $MA = MB$) dans ces notations.

III - NOTATIONS FAISANT INTERVENIR LES MESURES

1 - GENERALITES

Tout comme nous notons 50 cm pour la longueur dont la mesure est 50 en centimètres, nous aurions envie de noter 45° pour *l'angle dont la mesure est 45 en degré*. Nous nous heurtons malheureusement à deux difficultés :

1) Il y a des angles de plusieurs types qui admettent 45 pour mesure en degré.

2) Certains angles ont plusieurs mesures en degré.

C'est le cas des angles orientés de demi-droites, ou de droites. C'est pourquoi nous ne pouvons énoncer la phrase en italique ci-dessus.

Nous pouvons à la rigueur dire :

Nous noterons 45° pour l'angle d'un type donné dont la ou une mesure est 45 en degré.

Cet usage s'avère commode. Il présente l'inconvénient que 45° n'a pas un sens défini, mais plusieurs sens possibles. Mais comme pour deux homonymes dans le vocabulaire français, c'est le contexte qui nous aidera à comprendre le sens.

Si dans le contexte on utilise deux types différents d'angles, il nous faudra prendre plus de précautions.

2 - LES SECTEURS

Si un secteur $\widehat{xOy}$ mesure 45 en degrés on pourra noter $\widehat{xOy} = 45^\circ$.

Remarquons que les deux membres de l'égalité désignent des angles. Ici le contexte nous dit que 45° désigne un angle de secteur saillant.

Si un secteur de bords Oz et Ot mesure 200 en degrés on peut noter $\sphericalangle zOt = 200^\circ$. On sait alors que 200° désigne un angle de secteur rentrant.

3 - LES ANGLES DE PAIRE DE DEMI-DROITES

Si on note $\{Ax, By\} = 45^\circ$, 45° désigne ici l'angle de paire de demi-droites dont la mesure en degré est 45

4 - LES AUTRES UNITES D'ANGLE

Les grades et les degrés conduisent à des écritures analogues.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Exemples : } \widehat{xOy} = 45^\circ & \sphericalangle xOy = 215^\circ \\
 & = 50 \text{ gr} \\
 & = \frac{\pi}{4} \text{ rd} \\
 & = \frac{7\pi}{4} \text{ rd} \\
 \widehat{\{Ax, By\}} = 45^\circ & \\
 & = 50^\circ \\
 & = \frac{\pi}{4} \text{ rd}
 \end{array}$$

Remarques : En mathématiques, on a en général l'habitude d'utiliser les degrés et les grades pour des angles de secteurs ou des angles non orientés de demi-droites, et d'utiliser les radians pour les angles orientés de demi-droites et de droites.

D'ailleurs dans d'autres disciplines, ou professions, on utilise les degrés ou les grades également pour les angles orientés.

L'habitude signalée ci-dessus n'est bien sûr pas une obligation mais c'est pourquoi dans les paragraphes suivants nous donnerons des exemples avec des mesures en radians.

5 - LES ANGLES DE COUPLES DE DEMI-DROITES

Si $\frac{\pi}{6}$ est une mesure en radians de $\widehat{(Ox, Oy)}$ on peut noter

$$\begin{array}{ll}
 \widehat{(Ox, Oy)} = \frac{\pi}{6} \text{ rd} & \\
 = \frac{13\pi}{6} \text{ rd} & \left(\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \right) \\
 = \frac{25\pi}{6} \text{ rd} & \left(\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi \right) \\
 = \frac{-11\pi}{6} \text{ rd} & \left(\frac{-11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\pi \right) \\
 = \frac{-35\pi}{6} \text{ rd} & \left(\frac{-35\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 6\pi \right)
 \end{array}$$

etc....

Si $\widehat{1}$ est une mesure en radians de $(\widehat{Oz}, \widehat{Ot})$ on peut noter

$$\begin{aligned}\widehat{(Oz, Ot)} &= 1 \text{ rd} \\ &= (1 + 2\pi) \text{ rd} \\ &= (1 - 4\pi) \text{ rd} \\ &\text{etc...}\end{aligned}$$

L'usage oublie souvent d'indiquer rd dans de telles expressions (surtout orales). Cet abus ne présente aucun inconvénient dans certaines utilisations. Mais il devrait sans doute être évité dès que des difficultés apparaissent pour les élèves.

En particulier avec nos conventions et dans le contexte de ce para-

graphe $\frac{\pi}{6} \text{ rd} = \frac{13\pi}{6} \text{ rd}$

alors que $\frac{\pi}{6} \neq \frac{13\pi}{6}$

Cette situation montre bien que l'abus n'est pas toujours possible.

6 - LES ANGLES DE COUPLE DE DROITES

Si $\frac{\pi}{6}$ est une mesure en radians de $(\overline{D}, \overline{D'})$ on a

$$\begin{aligned}\overline{(D, D')} &= \frac{\pi}{6} \text{ rd} \\ &= \frac{7\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi) \\ &= \frac{13\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi) \\ &= \frac{19\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{19\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 3\pi) \\ &= \frac{5\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{-5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \pi) \\ &= \frac{-11\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{-11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\pi) \\ &= \frac{-17\pi}{6} \text{ rd} & (\frac{-17\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 3\pi)\end{aligned}$$

etc ...

On peut remarquer que dans le contexte de ce paragraphe $\frac{\pi}{6} \text{ rd} = \frac{7\pi}{6} \text{ rd}$ alors que ce serait faux dans le contexte du paragraphe 5

7 - QUE FAIRE QUAND ON TRAVAILLE SIMULTANEMENT AVEC PLUSIEURS TYPES D'ANGLES ?

1er_cas : Si on a besoin simultanément d'angles de couples de droites et de demi-droites comme lorsqu'on étudie une rotation composée de deux symétries, droites, on doit pouvoir distinguer l'angle orienté de demi-droites dont une mesure $\frac{\pi}{6}$ en radians et l'angle orienté de droites dont une mesure est $\frac{\pi}{6}$ en radians.

Nous suggérons de noter

$\hat{\frac{\pi}{6}}$ pour l'angle de demi-droites
 et $\times \frac{\pi}{6}$ pour l'angle de droites

Remarques :

1) On doit prendre conscience du fait que le chapeau $\hat{}$ ou la croix $\times$ porte sur le réel $\frac{\pi}{6}$; l'écriture $\hat{\frac{\pi}{6}}$ n'aurait aucun sens car on ne sait pas prendre *le sixième* de l'angle $\hat{\pi}$ (qui lui existe : c'est l'angle plat de couple de demi-droites)

$$2) \quad \times \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad \text{mais} \quad \hat{\frac{\pi}{6}} \neq \frac{7\pi}{6}$$

2ème_cas : Si on a besoin de travailler simultanément avec des angles orientés de demi-droites et avec des angles non orientés de demi-droites, on peut, par exemple, réserver " $\frac{\pi}{6} \text{ rd}$ " pour l'angle non orienté dont la mesure est $\frac{\pi}{6}$ en radians et $\hat{\frac{\pi}{6}}$ pour l'angle orienté dont une mesure est $\frac{\pi}{6}$ en radians.

On peut bien sûr imaginer ce qu'on veut suivant la situation où on se trouve.

8 - LES ANGLES DE PAIRES DE DROITES :

On pourra noter $\overline{\{D, D'\}} = 20^\circ$ ou $\overline{\{D, D'\}} = \frac{20\pi}{180}$ rd si la mesure de $\{D, D'\}$ est 20 en degré.

Souvenons-nous qu'un tel angle a sa mesure comprise entre 0 et 90 en degrés ou entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ en radians.

Dans le contexte de ce paragraphe 20° désigne un angle de paires de droites.

IV - CONCLUSION

Certains types d'angles n'ont pas été examinés dans ce chapitre tout comme dans le reste de la brochure. On trouvera toujours des solutions à chaque utilisation, la seule contrainte étant d'être très explicite vis-à-vis de son lecteur ou de son auditeur.

CHAPITRE 11

LES ANGLES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

(d'après une observation menée par Régine DOUADY)

I - PRESENTATION

Dans les manuels de l'enseignement élémentaire, il n'est question que de secteurs angulaires. Mais dans le vécu de l'enfant, même très jeune, existent des situations qui relèvent de la notion d'angle mais pas du concept de secteur angulaire :

. Lorsqu'allongé ou debout en gymnastique, il essaie de reproduire une position, par exemple, les bras levés ou les jambes écartées de telle ou telle façon, il ne va pas considérer ces deux positions comme équivalentes



. Dans un mouvement d'ensemble en gymnastique, *faire un demi-tour à droite* et *faire un demi-tour à gauche* ne sont pas des mouvements équivalents et si l'on ne précise pas droite ou gauche l'harmonie de l'ensemble s'en ressentira.

Il nous paraît donc indispensable que des activités à l'école primaire, outre celles menées à propos des secteurs angulaires et en liaison avec elles, portent sur les différents constituants de la conception de l'angle qu'ont les enfants et leurs relations. Il n'est pas question de développer à l'école primaire une théorie des isométries planes, par exemple, mais de prendre en compte à travers des activités expérimentales l'expérience globale des enfants.

Voici l'exemple d'une activité répondant à ces objectifs qui a été menée dans un CM₂ de Montrouge.

II - CHRONIQUE D'UNE CLASSE DE CM₂

Nous avons proposé aux enfants la situation suivante :

On dessine par terre un polygone quelconque, on marche au bord en portant une lampe de mineur sur le front et on s'intéresse aux parties éclairées.

Nous avons l'intention en proposant cette situation de leur faire prendre conscience de l'existence de polygones convexes et non convexes, de leur faire mettre en correspondance bijective un angle et un arc de cercle; ensuite grâce à cette correspondance, nous avons l'intention de leur faire caractériser les polygones réguliers, puis de leur faire trouver ceux qui pavent le plan et ceux qui le pavent pas (en étant conscient que les enfants ne connaissaient aucun résultat sur les angles d'un polygone, en particulier, que la somme des angles d'un triangle est 180°).

Il y a eu sur ce thème quatre séances :

II.1 - 1ère Séance

Elle a été très informelle : le maître avait dessiné par terre, sous le préau, des lignes fermées parmi lesquelles des polygones. Après discussion la classe a décidé qu'il s'agissait de routes en bordure de lac, sur lesquelles on se promenait en automobile la nuit, et a d'abord choisi de chercher si l'eau était éclairée au cours du trajet ou non. Très vite les élèves se sont aperçus qu'il y avait deux sortes de lacs :

- ceux pour lesquels, on n'éclaire jamais l'eau
- ceux pour lesquels, on éclaire parfois l'eau

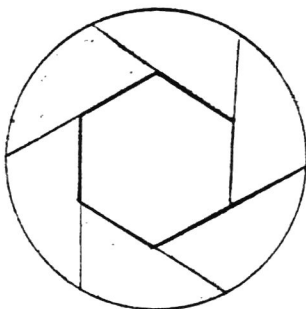
Ils ont donc trié les figures en convexes et non convexes.

Ensuite dans le cas des polygones convexes, ils se sont intéressés aux zones que l'on éclaire. Ils ont fait remarqué que lorsque l'on se déplace sur un côté, on éclaire toujours le même endroit, mais que lorsqu'on tourne au virage, on balaie d'un seul coup une grande zone.

II.2 - 2ème Séance

Le maître distribue, au début de la séance, des feuilles polycopiées aux enfants. Sur ces feuilles polycopiées, le maître a dessiné des polygones réguliers (triangles équilatéraux, carrés, pentagones, hexagones, heptagones, octogones). Ces polygones ont été tracés à l'intérieur d'un cercle de façon que le centre de symétrie du polygone soit le centre du cercle. Le maître demande aux enfants de hachurer ou de colorier les zones qu'ils éclairent en se déplaçant le long des côtés d'un polygone.

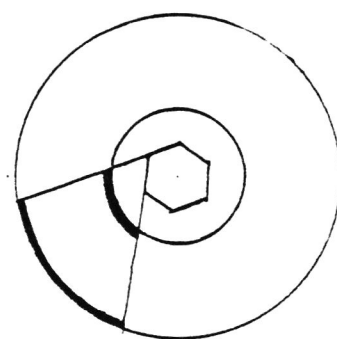
La réalisation ne pose aucun problème aux enfants qui fournissant tous les dessins de ce type :



Une discussion collective s'instaure pour savoir si l'on doit commencer le trajet à partir d'un sommet ou du milieu d'un côté. En effet, les enfants ont remarqué qu si l'on partait d'un sommet, il y avait une partie du cercle que l'on n'éclairait pas, sauf si l'on se replaçait au sommet dans la direction de départ, alors que si l'on part du milieu d'un côté on éclaire tout le cercle.

Ensuite les enfants font remarquer qu'il y a autant de sommets, que de côtés, que de zones éclairées.

Valérie remarque que pour l'hexagone, à chaque virage on éclaire $\frac{1}{6}$ de cercle. Pierre l'interrompt pour faire remarquer que $\frac{1}{6}$ de cercle c'est plus grand que $\frac{1}{6}$ d'hexagone, quand on lui demande de venir expliquer ce qu'il veut dire, il dessine : (voir dessin ci-contre)



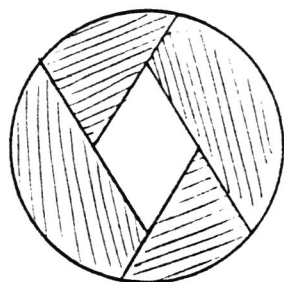
et explique sur le second cercle c'est plus long que sur le premier, mais dans les deux cas on a toujours tourné d' $\frac{1}{6}$ de tour. Le maître demande alors comment ils pourraient organiser leurs résultats. Une discussion collective s'engage où sont recensées toutes les découvertes :

- les côtés d'un même polygone ont même longueur
- il y a autant de zones éclairées que de côtés, que de sommets.
- on éclaire à chaque virage une même portion de cercle

La question est alors posée de nommer ce morceau de cercle éclairé; des enfants proposent des périphrases qui expliquent que c'est la zone éclairée pendant un virage. Le maître leur demande s'ils ont tourné d'un tour complet à chaque virage, un enfant répond qu'ils ont tourné d'une fraction de tour et c'est le vocabulaire qui va être dorénavant employé. Les enfants proposent au maître de consigner tous leurs résultats dans un tableau que le maître va dessiner sous la dictée des enfants:

Formes	Nbre de côtés	Nbre de sommets	Nbre de parties éclairées	Fraction de tour
triangle	3	3	3	1/3
carré	4	4	4	1/4
pentagone	5	5	5	1/5
hexagone	6	6	6	1/6
heptagone	7	7	7	1/7
octogone	8	8	8	1/8

Pierre propose au maître de dessiner un losange et ensuite de hachurer les zones éclairées, c'est ce qu'il fait :



Il paraît bien évident à tous que, pour les losanges, les zones éclairées sur le cercle n'ont pas toutes la même longueur; ils tiennent alors une caractérisation des polygones réguliers qui sera utilisée pour donner les consignes par la suite.

Pierre fait alors remarquer que si le losange est au centre du cercle alors il y a 2 petites zones éclairées de longueur égale et 2 grandes zones de longueur égale. Aucun enfant n'avait fait de remarque sur la place du polygone régulier à l'intérieur du cercle ni ne s'était rendu compte des conditions de validité de la correspondance *angle-arc de cercle* qu'ils avaient utilisées. Ils n'ont éprouvé le besoin de le faire que dans le cas du losange qui a l'oeil nu est beaucoup moins régulier. Les enfants n'ont ensuite plus reparlé de la place du polygone à l'intérieur du cercle, comme si, une bonne fois pour toutes, ils avaient décidé que seul le cas où le polygone était au centre, était digne d'intérêt.

Toujours à propos du losange, Philippe fait remarquer que pour le carré on tourne chaque fois d' $1/4$ de tour parce que le carré a 4 angles droits et que si pour le losange on ne tourne pas d' $1/4$ de tour c'est que le losange n'a pas d'angle droit (c'est le seul moment où apparaît dans le discours des enfants le mot angle). Irène, Babette qui ont à coeur de trouver les fractions de tour pour le losange, expliquent que pour les petites zones éclairées, on tourne d' $1/6$ de tour et de $1/3$ de tour pour les grandes zones éclairées. La séance se termine là-dessus.

II.3 - 3ème Séance

Les enfants savent maintenant caractériser les polygones réguliers grâce aux zones éclairées et à la longueur des côtés et le maître va leur demander de chercher avec quels polygones réguliers ils peuvent paver le plan.

Cette séance est très informelle et les enfants peuvent se lancer dans la direction de leur choix.

Nombre d'entre eux connaissent déjà des pavages et les redessinent. Tous connaissent les quadrillages, mais peu les citent, car c'est un pavage complètement dénué d'intérêt à leurs yeux. Ensuite ils pavent avec des triangles équilatéraux (approximatifs), puis avec des hexagones (approximatifs). Ils remarquent alors presque tous qu'il est normal que l'on puisse paver avec des hexagones lorsque l'on peut paver avec des triangles équilatéraux; en effet, on peut paver chaque hexagone avec 6 triangles équilatéraux.

Ensuite ils essaient de paver avec des octogones (qu'ils dessinent vraiment très mal). Beaucoup concluent que les octogones pavent le plan, parce que le pavage octogones-carrés leur est familier, agréable à l'oeil, ils oublient donc la consigne et admettent l'octogone dans les polygones qui pavent le plan.

Cette séance s'arrête là : en effet, dessiner des polygones réguliers prend beaucoup de temps aux enfants qui ne connaissent aucune technique pour les terminer. Certains essaient de dessiner des octogones en reportant des arcs de cercle de longueur égale, mais leur méthode par essais, erreurs, est assez décevante quant au résultat obtenu.

II.4 - 4ème Séance

On reprend les pavages et le maître demande aux enfants de s'organiser de façon plus systématique et chaque enfant complète le tableau suivant :

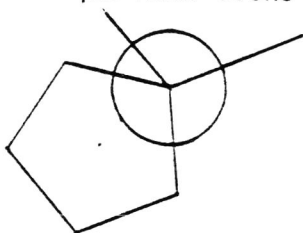
Formes	Nbre de côtés	Nbre de sommets	Nbre de zones	Nbre de formes au croisement	Fractions de tours	Pavage
Triangle équilatéral	3	3	3	6	1/3	oui
carré	4	4	4	4	1/4	oui
pentagone	5	5	5	3	1/5	
hexagone	6	6	6	3	1/6	oui
heptagone	7	7	7	2	1/7	
octogone	8	8	8	2	1/8	

La plupart des enfants tâtonnent et s'ils donnent correctement le nombre de formes à chaque croisement, c'est le résultat de leurs tâtonnements et de leurs dessins pourtant assez inexacts. Presque tous ont la conviction que l'on ne peut pas paver avec les polygones à 5, 7 ou 8 côtés mais ils ne savent pas expliquer pourquoi.

Le maître trouvant qu'il avait passé déjà beaucoup de temps sur ces polygones a décidé d'arrêter là cette activité.

III - COMMENTAIRES

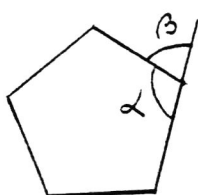
On peut avoir l'impression en lisant cette chronique que les élèves n'ont pas réinvesti la notion d'angle apparue avec les zones éclairées. En fait cela est faux comme nous avons pu nous en convaincre en étudiant leurs dessins. Voici un essai que nous avons retrouvé à propos du pentagone



Ce dessin laisse penser qu'une discussion collective aurait permis de résoudre les problèmes en suspens.

D'abord le problème technique de la reproduction du même angle plusieurs fois autour d'un point. Une fois dessiné un cercle entier en ce point, il est possible de reporter la corde avec le compas et leurs dessins prouvent que certains élèves l'avaient fait.

Le deuxième problème était plus ardu : calculer la fraction de tour dont on a tourné.



Il leur restait à faire un calcul du type

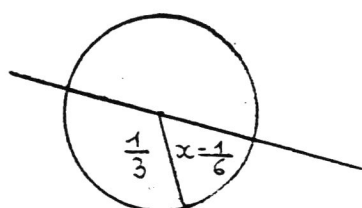
$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{5} \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

en remarquant que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} < 1$$

et $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} > 1$. Donc on ne peut pas paver avec le pentagone.

Nous pensons que les enfants étaient capables de mener à bien un tel calcul, car on a trouvé dans le travail de Marie-Anne le dessin et le calcul suivant:



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + x$$

Il aurait donc fallu donner une séance supplémentaire aux enfants pour leur permettre d'exprimer, en discussion collective leurs découvertes et nous pensons qu'ils auraient pu aboutir à des démonstrations (en fait, ce n'est que notre conviction puisque cette dernière séance n'a pas eu lieu).

IV - ESSAI D'ANALYSE

L'étude de cette situation physique, même incomplètement menée a été quand même fructueuse. Elle a permis aux enfants :

- de caractériser les polygones convexes et non convexes
- de caractériser les polygones réguliers (en montrant que la condition côtés de longueur égale, n'est pas suffisante)
- de mettre en bijection des angles de polygone (secteurs angulaires), des arcs de cercles (zones éclairées) et des angles de rotation : fractions de tour.

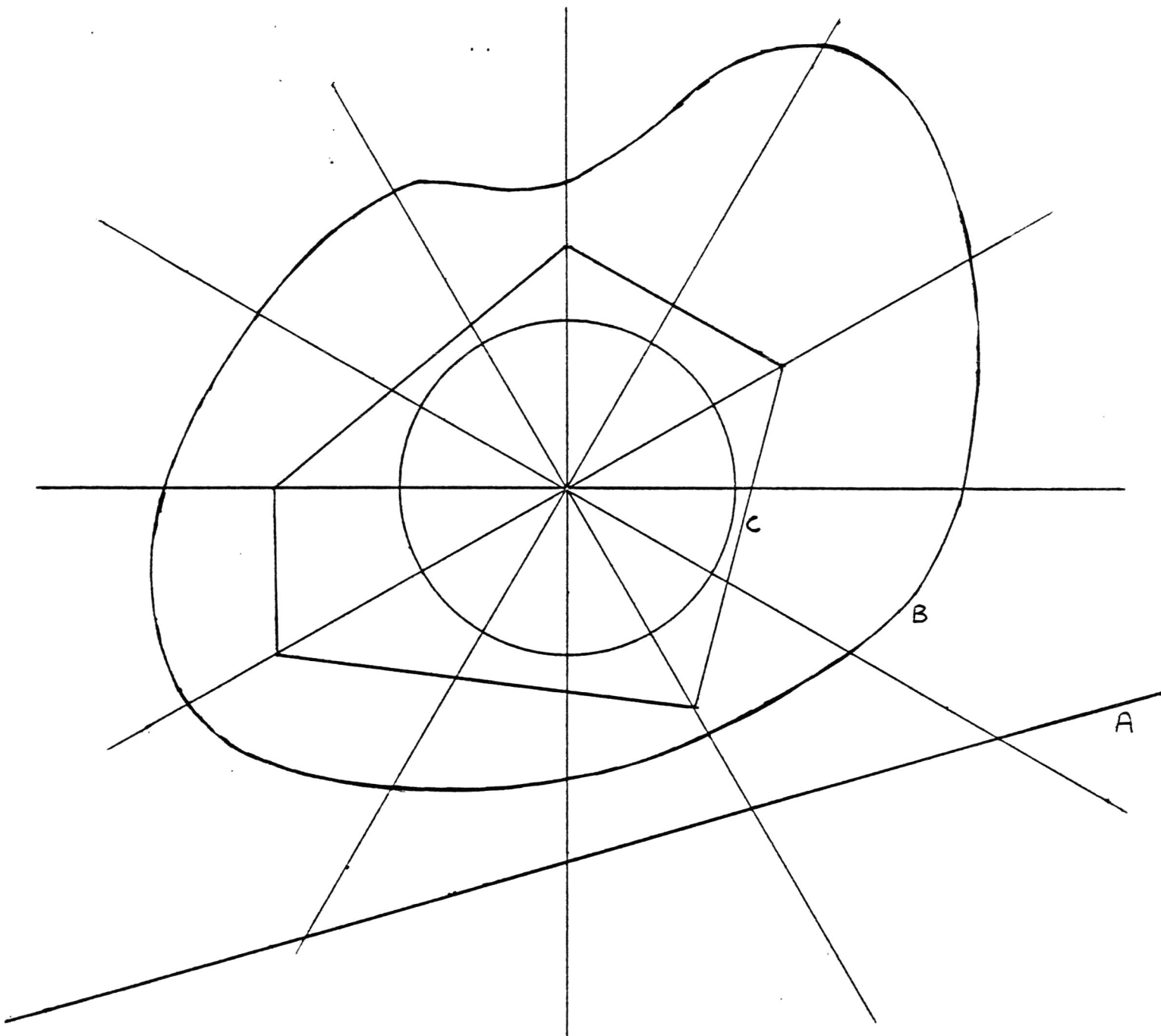
Pour ce qui est des angles, cette situation est particulièrement riche pour l'enseignement primaire puisqu'on y trouve à la fois plusieurs "types d'angles" en correspondance bijective.

Notre expérience écourtée ne le prouve pas, mais nous avons quand même de bonnes raisons de penser que cette situation est très propice au maniement des angles et à des démonstrations par le calcul sur les angles en utilisant les fractions de tour, outil connu des élèves.

ANNEXE 1 - LES ANGLES COMME SOURCE DE SITUATIONS DE PROPORTIONNALITE

Considérons un faisceau de demi-droites d'origine O et une courbe fermée entourant le point O , les intersections des demi-droites avec la courbe définissent une graduation sur celle-ci. En général, on ne peut pas avoir en même temps régularité du faisceau (même angle entre deux demi-droites consécutives) et régularité de la graduation (même longueur d'arc de courbe entre deux points consécutifs).

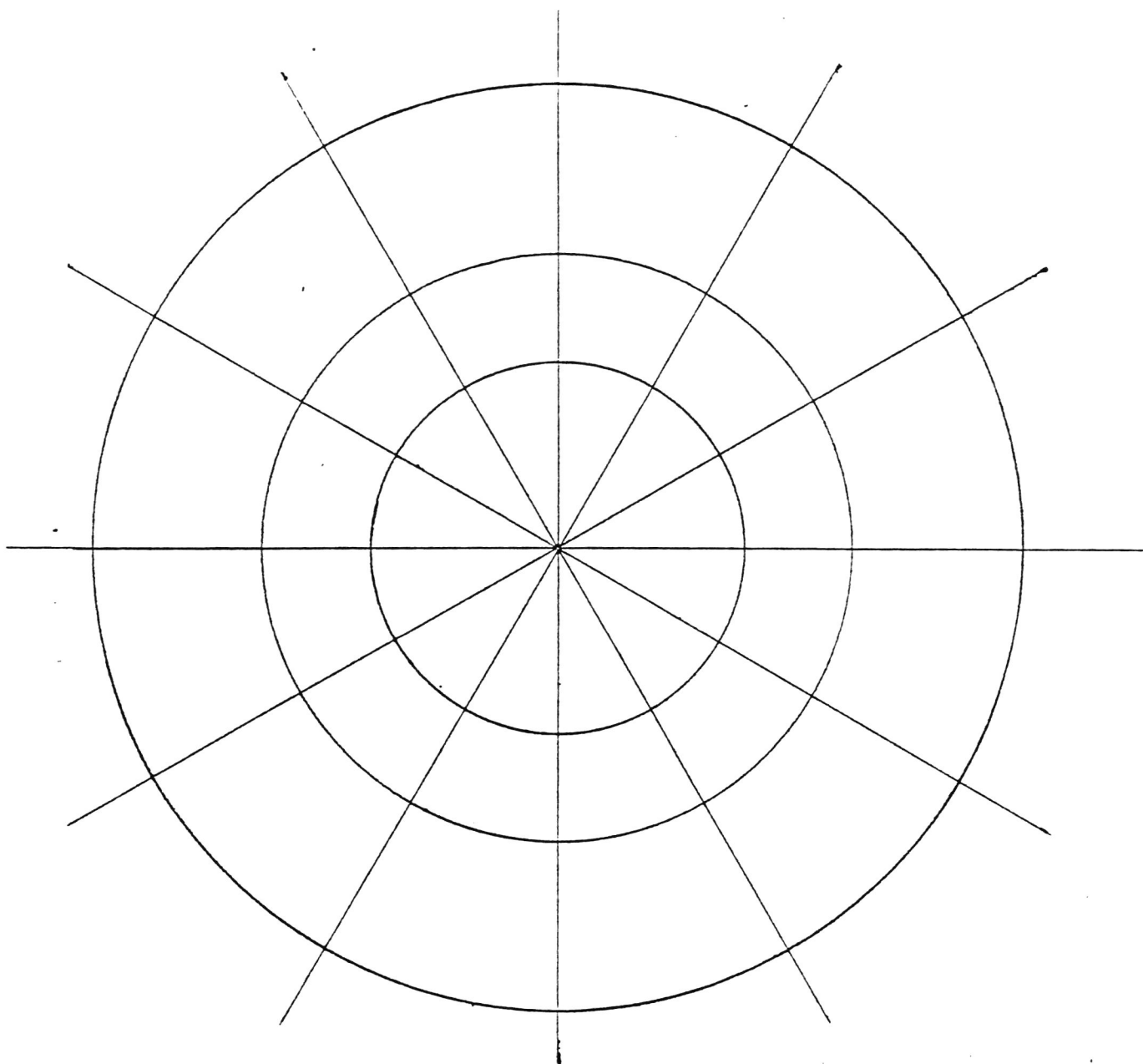
Dans la figure ci-dessous, le faisceau est régulier mais les graduations ne le sont pas sur la droite A , ni sur la courbe B , ni sur le polygone C .



Il en résulte que si l'on veut "partager" en intercalant de nouvelles demi-droites dans le faisceau et de nouveaux points dans la graduation (cf ch. II et III problème de la montre), on n'obtiendra pas en général la double régularité même si l'on est parti d'une figure régulière (par exemple un polygone régulier connexe ou étoilé centré en O).

Le seul cas où la régularité du faisceau est équivalente à la régularité de la graduation est celui où la courbe est un cercle de centre O . De telles figures sont des mines de relation de proportionnalité.

Voici à nouveau un faisceau de douze demi-droites écartées régulièrement autour d'un point



Tous les arcs de cercles de cette figure mesurent 1 douzième de tour, mais ils n'ont pas la même longueur.

La longueur d'un arc dépend de deux paramètres de façon proportionnelle :

- le rayon du cercle
- leur mesure en unité d'angle.

On pourra avantageusement travailler ces différentes proportionnalités pour arriver à une bonne maîtrise de ces notions.

Remarques

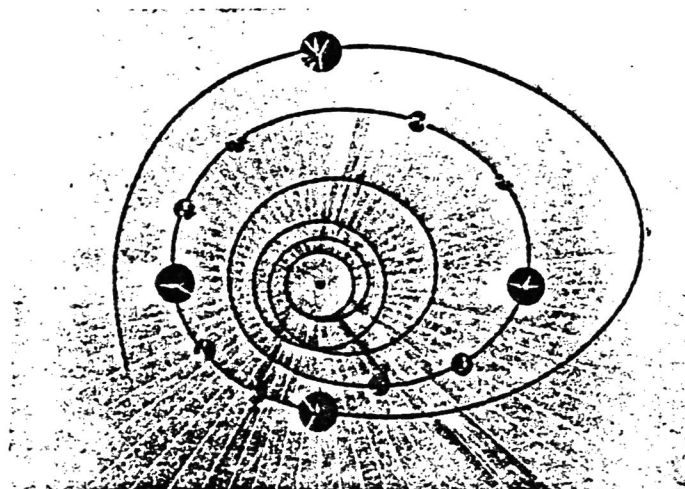
1) On peut graduer une montre sur n'importe quelle courbe qui fasse au moins un tour, même si elle ne se referme pas. En effet, il suffit de tracer douze demi-droites formant un faisceau régulier.

Certains se souviendront peut-être de l'horloge de la télévision des années soixante.

2) Autres idées mettant en jeu les mêmes concepts que la montre :

- Rose des vents
- Certains plans de ville
- Une roue de bicyclette, un pédalier
- Un éventail, un parapluie

3) Ces notions interviennent également en cinématique lorsqu'on utilise la vitesse angulaire et la vitesse linéaire (ceci était au programme de technologie de 4ème).



positivement vers le zénith, négativement vers le nadir (on regarde l'arc $A'A$ pour l'angle (TA', TA)). On désigne ainsi cet angle à l'aide de sa détermination en degrés comprise entre -90 et $+90$.

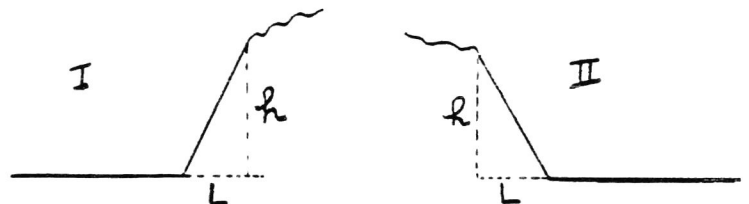
Remarque : A travers ces 2 situations on vient de voir différentes façons de désigner un angle dit orienté, ou angle de couple de demi-droites

- a) Avec des nombres positifs auxquels on adjoint Nord ou Sud pour la latitude
- b) Avec des nombres relatifs (positifs et négatifs) pour la hauteur.
En utilisant des nombres négatifs on n'a rien de plus que si l'on adjoignait Zénith ou Nadir à des nombres positifs.
- c) Avec des nombres de 0 à 360 en précisant dans quel sens on va à partir de la demi-droite de référence (ici TS) pour l'azimuth

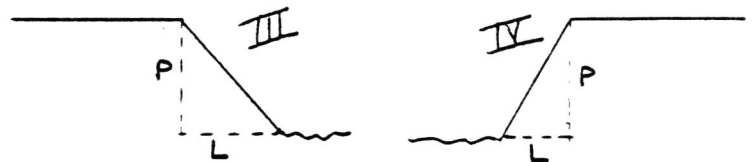
1.2 - Dans les travaux publics

Les professionnels des travaux publics caractérisent les remblais ou déblais par un nombre.

Pour un remblai
ce nombre est le
rapport $\frac{h}{L}$

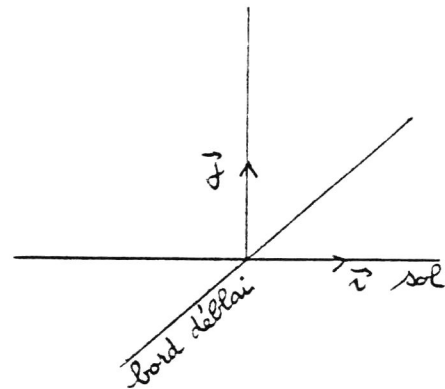
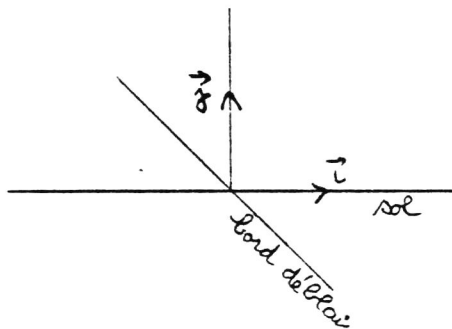
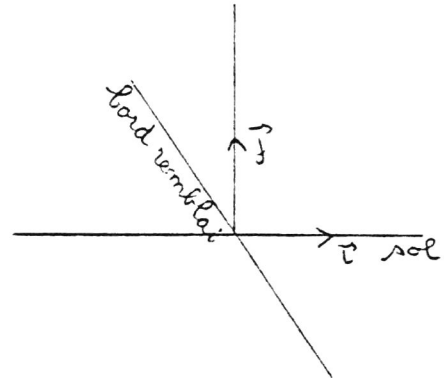
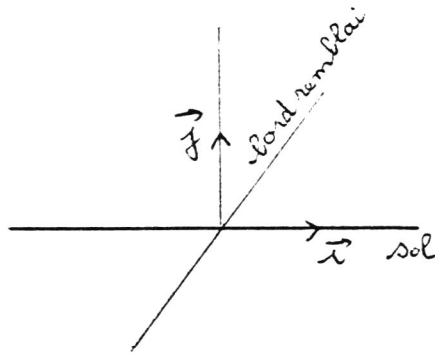


Pour un déblai.
ce nombre est le
rapport $\frac{P}{L}$



Les croquis sont faits dans un plan vertical perpendiculaire à l'arête du remblai. ou du déblai . Notons $\mathcal{S}$ ce plan.

Si on considère $\mathcal{S}$ comme plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé



le rapport $\frac{h}{L}$ ou $\frac{P}{L}$ est égal à la valeur absolue de la pente du bord et caractérise l'angle de paires des droites "bord" et "horizontale", soit encore l'angle de paire des plans horizontal et bord.

L'intérêt pratique de ce rapport est que pour chaque matériau il ne doit pas dépasser une valeur limite pour que le remblai ou le déblai tienne.

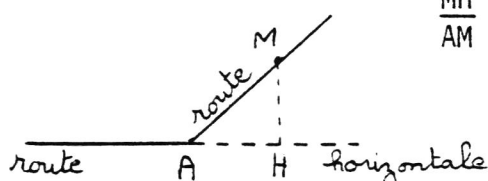
I.3 - Sur la route

On retrouve un tel angle de paire (de droites ou de plans) dans le cas d'une route.

Mais attention lorsqu'on voit le panneau



sur la route



$$\frac{MH}{AM} = \frac{10}{100}$$

Il s'agit d'un sinus et non plus d'une tangente comme dans l'exemple précédent.

II - REMARQUES

Avec tous les types d'angles étudiés dans la brochure, on peut sans doute traiter la plupart des situations de type angulaire. On peut parfois hésiter sur le modèle à choisir dans une situation d'autant plus que dans certaines circonstances semblables à beaucoup de point de vue, le modèle efficace ne sera pas nécessairement le même. Voici deux exemples :

II.1 - Hauteur d'un astre

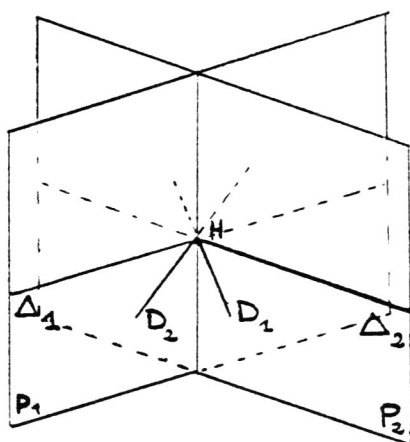
La hauteur d'un astre peut être "positive" ou "négative", mais lorsqu'un marin fait le point il vise un astre bien visible qui, en pratique, a une hauteur "positive". Dans sa manière de faire il oublie l'orientation et donne ainsi l'impression d'utiliser des angles de paires de demi-droites. Il en va de même assez généralement en optique géométrique (voir p. 97).

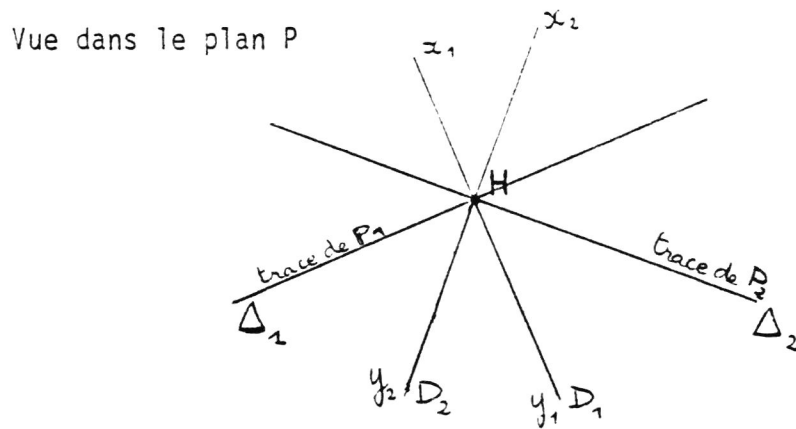
II.2 - Angle de 2 plans dans l'espace

Etant donnés 2 plans P_1 et P_2 sécants.

Soit P un plan perpendiculaire à P_1 et P_2 .

Soit D_1 la droite de P orthogonale à P_1 , et D_2 la droite de P orthogonale à P_2 (Ce sont les normales aux plans)





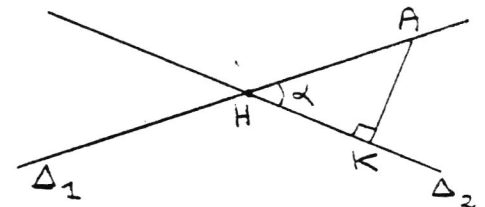
On peut prendre pour angle de la paire $\{P_1, P_2\}$

- soit l'angle de la paire $\{D_1, D_2\}$ des deux normales
- soit l'angle d'une paire de demi-droites (on dit alors qu'on a orienté les normales). On voit dans ce cas qu'il y a 2 choix d'angles possibles

$$\widehat{Hx_1, Hx_2} = \widehat{Hy_1, Hy_2} \text{ ou } \widehat{Hx_1, Hy_2} = \widehat{Hy_1, Hx_2}$$

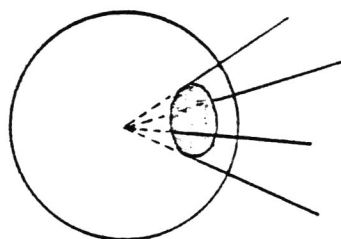
- soit l'angle $\widehat{KHA}$ du triangle rectangle en K, AKH.

On utilise ce modèle lors d'une projection orthogonale de P_1 sur P_2 par exemple.

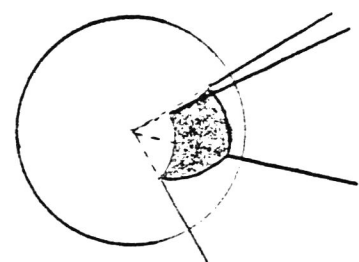


III - SITUATIONS NON MODELISABLES PAR UN ANGLE DU PLAN

Pour des situations de l'espace non modélisables par un angle "plan", on peut souvent utiliser le concept d'angle solide



angle solide de contour conique



angle solide de contour polyédrique (la surface découpée sur la sphère s'appelle un polygone sphérique).

L'angle solide joue dans l'espace un rôle analogue à celui du secteur angulaire dans le plan.

On peut mesurer un angle solide en mesurant l'aire de la surface découpée sur la sphère de rayon 1, centrée au sommet de l'angle solide.

L'unité de mesure est alors le stéradian. L'angle solide plein mesure 4π en stéradian puisque l'aire d'une sphère est donnée par $\mathcal{A} = 4\pi R^2$

On peut modéliser par un angle solide des phénomènes comme un pinceau lumineux, un champ visuel, l'angle mort dans une voiture....

IV - ESSAI DE CLASSIFICATION

Les angles dans les cours de mathématiques de l'enseignement secondaire

secteur angulaire	angle de paires de demi-droites	angle de couples de demi-droites	angle de paires de droites	angle de couples de droites
vu en 6ème la 1ère fois	en 3ème la 1ère fois La somme des angles d'un triangle est l'angle plat L'ensemble des points M tels que $\{\vec{MA}, \vec{MB}\}$ est constant, est constitué de deux arcs de cercles (arcs capables) Lorsqu'on parle de l'angle d'une rotation vectorielle ou ponctuelle d'axe non orienté en dimension 3	en 1ère la 1ère fois Lorsqu'on parle de l'angle d'une rotation vectorielle ou ponctuelle en dimension 2 L'ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB})$ est constant, est un arc de cercle et un seulement Lorsqu'on parle de l'angle d'une rotation vectorielle ou ponctuelle d'axe orienté en dimension 3 Argument d'un nombre complexe	en T_F la 1ère fois Pour définir l'angle de paires de plans (vectoriels ou affines) en dimension 3 on utilise l'angle de paires des normales ou un angle de triangle rectangle. En T_F, ou B.T.S., angle des tangentes au point d'intersection de 2 courbes	en T_C la 1ère fois Quatre points A,B,C,D sont cocycliques ssi $(\overset{\times}{CA}, \overset{\times}{CB}) = (\overset{\times}{DA}, \overset{\times}{DB})$ L'ensemble des points M tels que $(\overset{\times}{MA}, \overset{\times}{MB})$ est constant, est un cercle. Pente d'une droite (caractérisée par sa tangente) nommée aussi coefficient directeur de cette droite

Des angles utilisés dans diverses branches professionnelles techniques ou scientifiques

Secteurs angulaires	Angles de paires de demi-droites	Angles de couples de demi-droites	Angles de paires de droites	Angles de couples de droites
Une part de tarte Différentes sections d'un cadran solaire		<u>VIE COURANTE</u> lecture d'une montre à aiguilles		
Les secteurs d'un rapporteur plein Les différents angles d'une équerre Gabarit	Rapporteur à dièdre appelé aussi équerre mobile Angle optique Angle de vue	<u>INSTRUMENTS DE MESURE DES ANGLES</u> sextant <u>EN OPTIQUE</u> Angle d'incidence Angle de réfraction <u>POUR SE DEPLACER</u> Angle de route Angle de marche <u>EN GEOGRAPHIE</u> Latitude Longitude <u>POUR LES ASTRONOMES OU LES MARINS (lorsqu'ils font le point)</u> hauteur d'un astre et azimuth (sur la sphère locale dans le système de coordonnées horizontales) déclinaison et angle horaire (sur la sphère locale dans le système de coordonnées horaires) déclinaison et ascension droite (sur la sphère des fixes dans un système de coordonnées équatoriales) Détermination d'une position à l'aide de repères terrestres (intersection d'arcs capables) <u>POUR LES PONTS ET CHAUSSEES</u> <u>POUR UN GEOMETRE</u> Angle horizontal ou azimuth Angle vertical ou distance zénithale Gisement		Boîte à onglets Angle dont a tourné un miroir à double face utile pour évaluer l'angle dont a tourné l'image
			Angle du talus	

ANNEXE 3 - QU'EST-CE QU'UNE MESURE ?

I - INTRODUCTION : QUE VEUT-ON MODELISER ?

La manipulation du rapporteur pour mesurer les secteurs angulaires repose sur l'idée implicite que cette manipulation permet d'associer à chaque secteur angulaire un nombre réel positif. Dans la pratique, quelle que soit la finesse de la graduation ce nombre n'est connu qu'avec une certaine incertitude. C'est le problème général de la métrologie de réduire le plus possible cette incertitude.

La théorie mathématique de la mesure ne prend pas, au départ, ce problème en considération même si elle fournit un cadre dans lequel il peut être étudié ultérieurement. Elle suppose donc ce problème résolu (c'est-à-dire qu'à chaque objet considéré on sait associer un nombre réel positif) et fournit un modèle mettant en évidence les propriétés de l'application ainsi définie. Ce modèle est bien adapté aux mesures extensives à caractère géométrique telles que longueurs, aires, volumes, secteurs angulaires, masses

Une mesure sur un ensemble E apparaît comme une application m d'un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de E (qualifiées de mesurables) dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant certaines propriétés que nous allons examiner :

- Assemblage : si A et B sont deux parties mesurables disjointes la réunion $A \cup B$ est mesurable et sa mesure est la somme des mesures.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

- Partage : si A et B sont deux parties mesurables et si B est inclus dans A le morceau qui reste quand on enlève B de A noté $A - B$ a pour mesure la différence des mesures.

$$m(A - B) = m(A) - m(B) \quad \text{si } B \subset A$$

- Par contre si A et B ne sont pas disjoints $m(A) + m(B)$ n'est pas égal à $m(A \cup B)$ mais on a

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)^*$$

* Cette relation fait penser aux cardinaux des ensembles finis. Si A et B sont deux ensembles finis

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

II - DEFINITION

Pour transcrire en langage mathématique les manipulations que l'on fait sur les objets on est amené à utiliser les opérations de réunion, intersection et différence ensembliste. En fait, les propriétés évoquées ci-dessus ne sont pas indépendantes; certaines d'entre elles peuvent se déduire des autres. Pour donner une définition on est amené à faire un choix parmi ces propriétés. La définition usuelle est la suivante :

m est une mesure sur un ensemble E muni d'un clan signifie :

Données : Un ensemble $\mathcal{C}$ non vide de parties de E .

Une application m de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R}^+$ (ensemble des réels positifs)

Axiomes : 1) $\mathcal{C}$ est un clan, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{C} \quad A \cup B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad A - B \in \mathcal{C}$$

2) m est additive, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{C} \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Remarques :

1) Dans cette définition la différence ensembliste $(A - B)$ est définie même si B n'est pas inclus dans A par $A \cap \underset{E}{\left[B \right]}$

2) $\emptyset \in \mathcal{C}$ car si $A \in \mathcal{C}$, $A - A = \emptyset$ et $m(\emptyset) = 0$ car

$$m(A) = m(A \cup \emptyset) = m(A) + m(\emptyset)$$

3) Si A et B sont éléments de $\mathcal{C}$, $A \cap B$ est élément de $\mathcal{C}$ car $A - (A - B) = A \cap B$

4) Il est possible de construire l'intersection à partir de la différence mais l'inverse n'est pas possible, ce qui explique le choix de la différence dans la définition d'un clan.

5) Par récurrence, on démontre que si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{C}$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ et $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ sont des éléments de $\mathcal{C}$.

6) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont disjoints deux à deux

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n)$$

7) Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{C}$ non nécessairement disjoints en écrivant

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

et en remarquant que les parties intervenant dans chacune de ces écritures sont 2 à 2 disjointes, on obtient

$$\begin{array}{c} m(A \cup B) \qquad + \qquad m(A \cap B) \\ \underbrace{m(A - B) + m(A \cap B)}_{m(A)} + \underbrace{m(B - A) + m(A \cap B)}_{m(B)} \end{array}$$

8) Si $B \subset A$ on peut écrire $A = B \cup (A - B)$. B et $(A - B)$ étant disjoints on a $m(A) = m(B) + m(A - B)$ d'où $m(A - B) = m(A) - m(B)$.

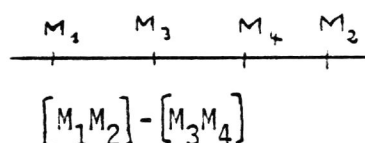
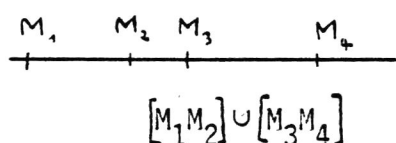
III - QUELQUES EXEMPLES DE MESURE

1) Mesure de dénombrement :

Soit E un ensemble quelconque, on note $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble des parties finies de E . $\mathcal{P}_f(E)$ est un clan. L'application de $\mathcal{P}_f(E)$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à toute partie finie fait correspondre le nombre de ses éléments est additive. C'est une mesure.

2) Longueur :

Soit D une droite euclidienne. A tout segment M_1M_2 de D on associe le nombre $|x_1 - x_2|$ (indépendant du repère euclidien choisi sur la droite) qu'on appelle sa longueur. L'ensemble des segments ne forme pas un clan car une réunion ou une différence de deux segments n'est pas nécessairement un segment.



Pour obtenir un clan; il faut adjoindre à cet ensemble toutes les réunions finies d'intervalles bornés (ouverts, fermés ou semi-ouverts). L'application longueur se prolonge à cet ensemble par additivité. Ainsi dans la figure 1

$$m(M_1M_2 \cup M_3M_4) = |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4|$$

C'est ce que l'on fait en pratique, lorsqu'on a besoin de connaître la longueur du grillage à acheter pour une clôture en plusieurs morceaux.

3) Secteurs angulaires de sommet donné (voir chapitre 7 § V)

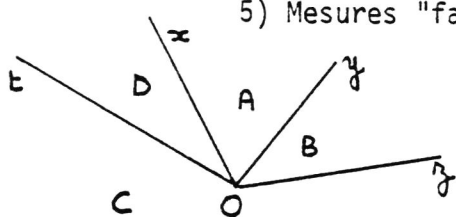
Ici le clan devra contenir outre les secteurs angulaires de sommet 0 les parties du plan réunions finies de tels secteurs.

Remarque : Les mesures géométriques ont une propriété supplémentaire qui n'apparaît pas dans la définition générale donnée plus haut. Chacune d'elle est invariante par un groupe d'isométries (les translations et symétries points pour les longueurs, les rotations de centre le sommet commun pour des secteurs angulaires de même sommet. Ceci veut dire que

- a) l'image par une isométrie d'un élément du clan est un élément du clan
- b) ces deux éléments ont même mesure.

4) La notion de mesure fournit également des modèles dans des domaines autres que géométriques ou physiques comme les probabilités ou les statistiques.

5) Mesures "fabriquées à la main"



Traçons quatre demi-droites de même origine O, Ox, Oy, Oz et Ot qui déterminent les quatre secteurs angulaires A, B, C, D indiqués sur la figure.

Décidons d'associer à	A	le nombre 1
	B	3,5
	C	2
	D	π

Ces données permettent de construire une mesure m dont le clan contient 16 éléments (toutes les réunions possibles des parties ABCD) mais qui n'est pas invariante par le groupe des rotations de centre O.

Le tableau suivant définit m :

$\mathcal{C}$	$\emptyset$	A	B	C	D	A $\cup$ B	A $\cup$ C	A $\cup$ D	B $\cup$ C	B $\cup$ D	C $\cup$ D	A $\cup$ B $\cup$ C	-----	A $\cup$ B $\cup$ C $\cup$ D
$\mathbb{R}^+$	0	1	3,5	2	Π	4,5	3	1+ Π	5,5	Π +3,5	2+ Π	6,5	-----	Π +6,5

IV - REMARQUES EN GUISE DE CONCLUSION

1) Les mesures que l'on vient de définir sont parfois appelées étendues de manière à réserver le nom de mesure à des applications ayant une propriété plus forte, nécessaire dans certaines branches : l'additivité dénombrable (c'est-à-dire l'additivité appliquée à des réunions de parties mesurables deux à deux disjointes en infinité dénombrable, alors que pour une étendue on n'envisage jamais qu'un nombre fini de parties mesurables à la fois). En même temps on remplace les clans par des tribus qui sont stables par réunion dénombrable.

2) Les mesures sur un clan ou une tribu sont des modèles bien adaptés pour la mesure des secteurs angulaires (de même sommet), les probabilités, la mesure des longueurs sur une droite, des aires dans le plan ou des volumes dans l'espace. Par contre elles conviennent mal pour la mesure des longueurs dans le plan ou l'espace, et celle des aires dans l'espace. Pour résoudre ces problèmes diverses théories ont été élaborées telles que intégration, variétés différentiables,

CONCLUSION

Nous avons passé en revue un certain nombre de notions mathématiques qui relèvent toutes du concept d'angle.

Chacune de ces notions est présentée sous forme de modèle : un langage spécialisé permettant de décrire les relations entre les objets manipulés et de faire des prévisions sur le résultat de nouvelles manipulations. Le niveau d'abstraction de ces modèles varie, d'une part, avec le nombre et la nature des intermédiaires entre les manipulations et la théorie; d'autre part, avec la complexité de la réalité visée.

Le problème principal est celui de la cohérence entre ces divers modèles du point de vue mathématique et du point de vue didactique.

Du point de vue mathématique nous avons vu que la théorie des angles de rotations permet de rendre compte des autres modèles; cette théorie est celle du programme de première C des années 70 dans lequel il reste cependant une lacune (l'existence de la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$) qui ne peut être comblée que par l'utilisation d'une autre théorie (par exemple : les exponentielles complexes).

Du point de vue didactique (sans doute le plus important pour les enseignants) les questions suivantes se posent :

- Quel ordre adopter pour la présentation des différentes notions? L'ordre traditionnel "secteur angulaire, angles de paires de demi-droites", angles de rotation n'est peut-être pas le meilleur.

- Quelles relations les élèves peuvent-ils faire entre ces notions? Actuellement il semble que la plupart des élèves entrevoient très mal ces relations et qu'au total le concept d'angle n'ait aucune unité pour eux. Ceci n'est guère étonnant car l'enseignement mathématique ne se préoccupe pas de cette question.

- Comment peut-on utiliser le concept d'angle ? Quels sont les différents points d'ancrage de chaque modèle dans la réalité ? Quelle interférence y a-t-il

entre les modèles quand il s'agit de traduire un problème en langage mathématique et de guider le traitement de ce problème dans une théorie donnée? Comment peut-on isoler dans une figure compliquée quelques éléments permettant de reconnaître des figures de référence plus simples associées à un ou plusieurs modèles? Comment choisir entre ces modèles? Comment décider, par exemple, qu'on utilisera des angles de couples de demi-droites plutôt que des angles de paires de demi-droites. Le choix d'un modèle n'est pas facile à enseigner car au cours de la recherche heuristique d'un problème, une personne un peu expérimentée navigue souvent entre plusieurs modèles sans toujours en avoir clairement conscience et ce n'est qu'au moment de la mise en forme du raisonnement que le choix est explicite. Comment donner droit de cité à un tel flou? Inversement, comment les élèves peuvent-ils interpréter un discours sur les angles à l'aide d'images mentales de référence? Comment de telles images mentales peuvent-elles servir de moyens mémotechniques (pour la trigonométrie par exemple)? Comment conduire un enseignement pour donner aux élèves la possibilité de mémoriser et de mobiliser à bon escient de telles références?

Certaines de ces questions seulement ont été abordées au cours de cette brochure, et les quelques éléments de réponses apportés sont bien évidemment insuffisants. Cette brochure aura rempli son office si elle suscite chez le lecteur outre la réflexion, la contestation et le désir de discussion.

Toute correspondance au sujet de cette brochure pourra être adressée à l'IREM de PARIS VII, à l'attention de F. COLMEZ ou de N. ROUSSIGNOL.

PUBLICATIONS DE L'IREM DE PARIS VII

- 3 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 4 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 1
- 7 - PAVAGES ET COLORIAGES
- 9 - DES CHIFFRES ET DES NOTES (3/80)
- 10 - CALCUL MENTAL (3/80)
- 11 - CALCUL 1
- 12 - CALCUL 2 (3/80)
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 2
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERS
- 17 - COLORIAGES GEOMETRIQUES
- 19 - COCOTTES, DRAPEAUX ET GEOMETRIE
- 20 - QUI COURT ?
- 21 - ALMANACH
- 22 - FRISES
- 23 - RECURRENCE
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - LES FORCES EN STATIQUE
- 26 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 27 - LE NOMBRE D'OR
- 28 - ROTATIONS ANGLES EN SECONDE
- 29 - LA VITESSE
- 30 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 31 - FONCTIONS ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 32 - LES ANGLES
- 33 - L'INFORMATIQUE/L'ENSEIGNEMENT
- 34 - METROLOGIE
- 35 - ESPACE (1er cycle)
- 36 - AU PAYS DES CYCLOIDES
- 37 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES
- GAZETTE INFORMATIQUE N° 4

Reproduction de textes anciens

- I - DISME (1585)
- II - GEOMETRIE ELEMENTAIRE F. KLEIN (1896)

Editeur : I.R.E.M.

Directeur/Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage : 300 ex.

Dépôt légal : 2-86612 - 003-5 - Nov. 1981
I.R.E.M. PARIS VII - Tour 55/56 - 3ème Etage - 2 Place Jussieu 75005 PARIS.