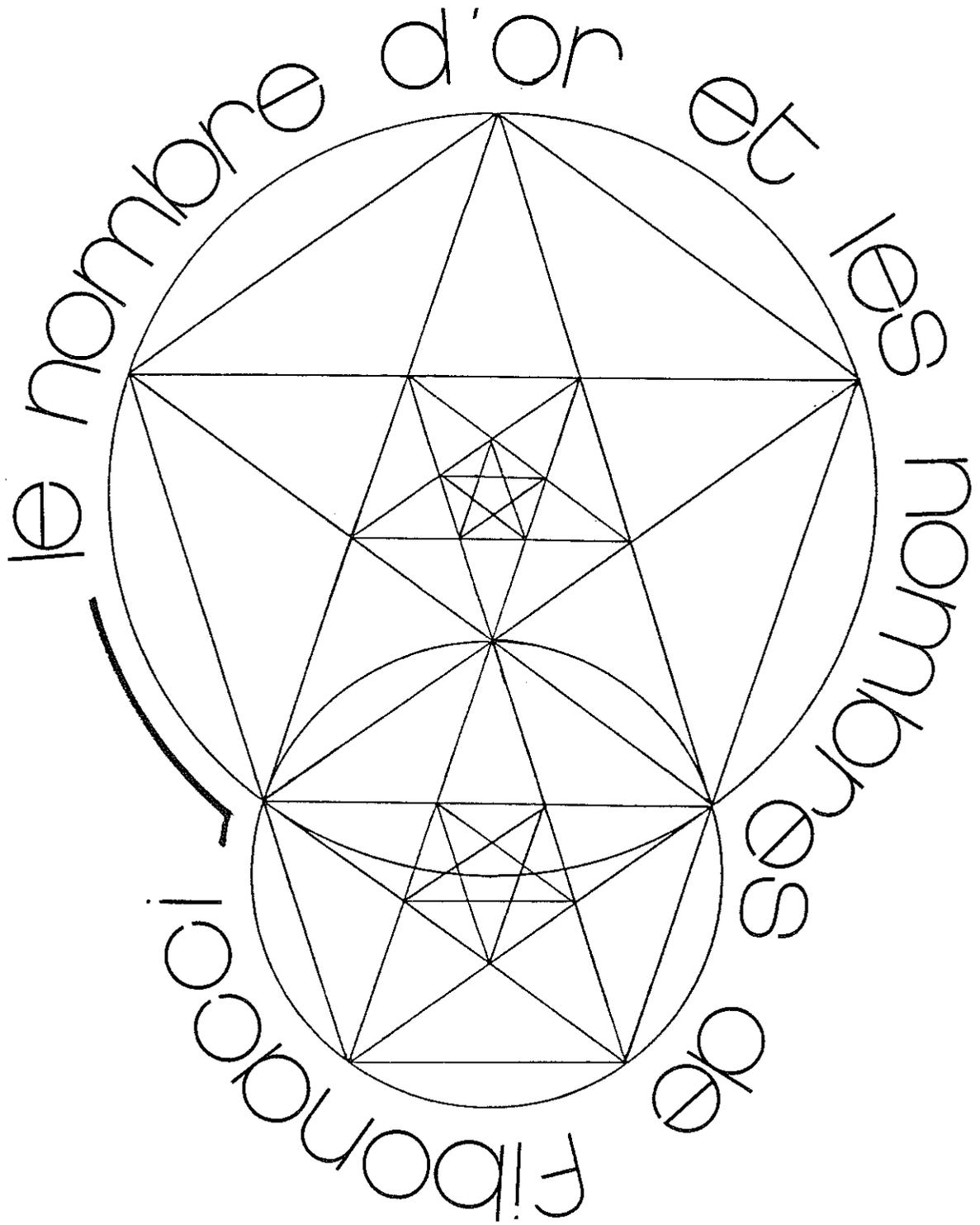


par { A. Meyer
C. Steyaert

<u>NIVEAU</u>	Second cycle / classes préparatoires
<u>PUBLIC</u>	Elèves / Enseignants
<u>SUJET</u>	Propriétés du nombre d'or et des nombres de Fibonacci
<u>OBJECTIF</u>	Réunir des informations sur le sujet



par { A. Meyer
C. Steyaert

S O M M A I R E

Aperçu historique	p. 1
PROPRIETES NUMERIQUES	p. 7
- Quelques propriétés des nombres de Fibonacci	p. 8
- Suite de Fibonacci et nombre d'or	p. 11
- Nombres de Lucas	p. 14
- Démonstrations géométriques	p. 16
- Décomposition de Φ en fractions continues	p. 20
- Φ , $\bar{\Phi}$ et les calculateurs	p. 23
- Représentation des nombres entiers	p. 27
- Les nombres de Fibonacci et le triangle de Pascal	p. 32
- Divisibilité des nombres de Fibonacci	p. 34
- Calculs amusants	p. 40
GEOMETRIE	p. 45
- Construction de sections dorées	p. 47
- Rectangle d'or	p. 50
- Triangle d'or	p. 54
- Pentagone régulier	p. 59
- Autres polygones contenant des sections dorées	p. 71
- Constructions approchées	p. 74
- Polyèdres	p. 77
LES JEUX	p. 93
- Le jeu de Nim Whytoff	p. 94
- Le jeu de la pile de jetons	p.102
- Le jeu de la pile de jetons et des nombres de Lucas	p.109
LA NATURE ET LES ARTS	p.117
- Le nombre d'or en physique	p.119
- Botanique	p.121
- Arbre généalogique d'une abeille mâle	p.124
- Le nombre d'or dans le corps humain	p.125
- Les formes où intervient le nombre d'or	p.139

- Le nombre d'or chez les égyptiens	p. 146
- Le parthénon	p. 153
- Quelques instruments pour la construction de triangles et rectangles dorés	p. 164
- Cathédrale de Poitiers	p. 175
- Notre Dame du port à Clermont-Ferrand	p. 176
- La cathédrale de Reims	p. 179
- Boticelli	p. 189
- Le Titien	p. 198
- Dürer	p. 201
- Mondrian	p. 209
- Le Corbusier	p. 215
En guise de conclusion	p. 226
Bibliographie	p. 229

Aperçu historique

La découverte empirique du nombre d'or remonte à l'Antiquité. Les premiers textes écrits traitant des propriétés de ce nombre n'apparaissent qu'avec les Grecs mais on a de sérieuses raisons de penser que les Egyptiens le connaissaient : on trouve dans des monuments ou oeuvres d'art de l'Egypte ancienne des figures géométriques se rattachant au nombre d'or.

Dans l'Antiquité grecque, le nombre d'or apparaît comme un nombre irrationnel lié au problème classique de la division en moyenne et extrême raison, aux propriétés des décagones et pentagones réguliers, et aux propriétés des dodécaèdres et des icosaèdres réguliers.

L'essentiel de ces propriétés se trouve dans les Eléments d'Euclide. Il ne semble pas, toutefois qu'Euclide porte un intérêt privilégié à ce nombre. Il ne lui donne pas de nom particulier.

Euclide fait figure de savant positif, détaché des préoccupations mystiques. Mais les mystiques existaient à son époque - comme ils existent à notre époque - et ces derniers ont pu attacher leur faveur au nombre d'or en raison de sa présence dans le pentagone étoilé, le pentacle, auquel les Grecs attribuaient une valeur symbolique.

La géométrie d'Euclide a permis de perfectionner l'usage du compas et de servir à des constructions géométriques.

Ces techniques se sont transmises principalement par tradition orale et certaines ont probablement été oubliées.

Au XIII^e siècle les Eléments d'Euclide font l'objet d'une large diffusion en Europe occidentale, grâce à une traduction en latin due au mathématicien Campanus de Novare.

En 1509, le moine franciscain Luca Pacioli publie à Venise un ouvrage intitulé Divina Proportione, la proportion en question étant celle du nombre d'or. Cet ouvrage, illustré par Léonard de Vinci, a immédiatement un grand retentissement, puis sombre dans l'oubli les siècles suivants.

Parmi les relations de Luca Pacioli, on peut citer le peintre mathématicien Piero della Francesca, Léonard de Vinci, Albert Dürer.

Pour qualifier le nombre d'or, Luca Pacioli utilise le terme de "divine proportion". Peu après, Kepler qualifie la "sectio divina" de "joyau précieux".

Léonard de Vinci utilise l'expression de "sectia aurea".

Oublié semble-t-il, pendant plus de 200 ans, le nombre d'or est redécouvert par l'Allemand Zysing vers 1850.

Depuis un siècle, le nombre d'or a suscité de nombreuses recherches d'ordre essentiellement psychologique et esthétique.

L'expression "nombre d'or" serait entrée dans l'usage à l'époque contemporaine.

La notation usuelle de ce nombre est : ϕ

Son conjugué, seconde racine de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sera noté $\bar{\phi}$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Léonard de Pise (1170 env. -1250 envi.) plus connu sous le nom de Fibonacci (fils de Bonaccio) est né à Pise. Son père, marchand de la ville de Pise, fut envoyé en mission à Bougie où il appela Léonard afin de l'initier aux affaires et aux méthodes commerciales, et en particulier aux calculs. Fibonacci étudia sous la direction d'un maître arabe et voyagea dans tout le monde méditerranéen. De toutes les méthodes de calcul, il jugea que les méthodes hindoues étaient les meilleures.

En 1202, il publie *Liber abaci* où il expose le système de numération indo-arabe - notre arithmétique de position - ainsi que la plupart des résultats connus des Arabes en algèbre et en arithmétique (opérations sur les entiers, preuve par 7, par 9, par 11 ; décomposition des entiers en facteurs premiers ; caractères de divisibilité par 2,3,4,...13 ; fractions ; racines carrées et racines cubiques ; équations du premier et du second degré).

En 1220, il publie *Practica Geometriae* (calcul d'aires, démonstrations du théorème de Pythagore au moyen des triangles semblables ; formule de Héron donnant l'aire du triangle en fonction des longueurs des trois côtés ; racine cubique et problème de duplication du cube ; calcul des volumes ; utilisation du carré géométrique ou quadrant dans la détermination de distances et de hauteurs sur le terrain ; problèmes théoriques sur le pentagone et le dodécagone réguliers ; résolution dans les rationnels de l'équation $x^2 + 5 = y^2$).

Il publie aussi en 1225, *Fleur de solutions de certaines questions relatives au nombre et à la géométrie*, une *Epistola leonardi ad magistrum Theodorum Philosophum domini Imperatoris* et le *Liber Quadratorum* ou *Livre des Carrés* où il traite de la résolution du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + u = y^2 \\ x^2 - u = z^2 \end{cases}$$

les inconnues étant des nombres rationnels.

Le célèbre problème du Liber abaci est le suivant :

"Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ?"

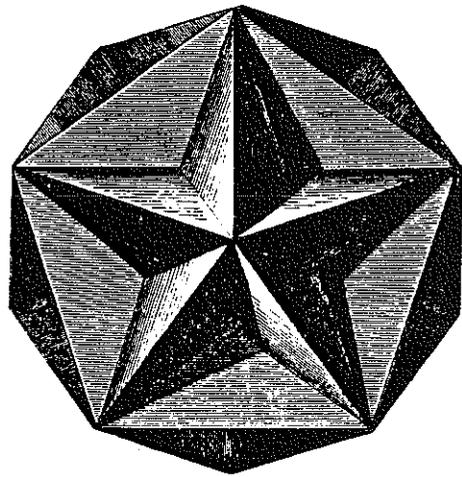
Soit un couple de lapins nés à la date 1. Il donne naissance à la date 3 à un nouveau couple de lapins. A la date 4, seul le premier couple donne naissance à un couple de lapins ; on a donc alors trois couples. A la date 5, les deux premiers couples donnent naissance à deux nouveaux couples ; on a au total cinq couples. Etc...

DATE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
NOMBRE DE COUPLES	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

On peut généraliser et considérer la suite dite suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Les nombres de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci.



PROPRIETES NUMERIQUES

QUELQUES PROPRIETES DES NOMBRES DE FIBONACCI

$$1^{\circ}) F_0 + F_1 = 1 = F_3 - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 4 = F_5 - 1$$

Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 = F_4$$

$$F_1 + F_3 + F_5 = F_6$$

Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_0 + F_2 + F_4 = F_5 - 1$$

$$F_0 + F_2 + F_4 + F_6 = F_7 - 1$$

Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

$$F_1 - F_2 + F_3 = F_2 + 1$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = -F_3 + 1$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 = F_4 + 1$$

Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$$

$$2^{\circ}) \forall k \in \mathbb{N}^* \quad F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k^2$$

On en déduit :

$$F_0^2 + F_1^2 = F_1 F_2$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 = F_2 F_3$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

$$3^\circ) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N} \quad F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{2n} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1})$$

(F_{2n} est donc divisible par F_n)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+4}^3 = 3 F_{n+3}^3 + 6 F_{n+2}^3 - 3 F_{n+1}^3 - F_n^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1^3 + F_2^3 + \dots + F_n^3 = \frac{1}{10} (F_{3n+2} + (-1)^{n+1} \times 6 F_{n-1} + 5)$$

4°) On peut étendre les nombres de Fibonacci à des indices négatifs :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et

$$\forall (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$$

$$F_n F_m - F_{n-k} F_{m+k} = (-1)^{n-k} F_k F_{m+k-n}$$

$$5^\circ) F_3^2 = F_2 F_4 + 1$$

$$F_4^2 = F_3 F_5 - 1$$

$$F_5^2 = F_4 F_6 - 1$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{2n} F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

$$6^\circ) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n F_1 + (n-1) F_2 + (n-2) F_3 + \dots + F_n = F_{n+4} - (n+3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_1 + 2 F_2 + 3 F_3 + \dots + n F_n = n F_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

Trouvez d'autres formules !!!

SUI TE DE FIBONACCI ET NOMBRE D'OR

$$1^\circ) \forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(formule de Binet)

En posant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or)

et $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \bar{\phi}^n)$$

$$2^\circ) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \phi^n = F_n \phi + F_{n-1} \quad \text{car} \quad \phi^2 = \phi + 1$$

3°) Le nombre F_n de la suite de Fibonacci est l'entier le plus proche du nombre $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

					$E\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right)$
F0 =	0	N=	0		0
F1 =	1	N=	1		1
F2 =	1	N=	2		1
F3 =	2	N=	3		2
F4 =	3	N=	4		3
F5 =	5	N=	5		5
F6 =	8	N=	6		8
F7 =	13	N=	7		13
F8 =	21	N=	8		21
F9 =	34	N=	9		34
F10 =	55	N=	10		55
F11 =	89	N=	11		89
F12 =	144	N=	12		144
F13 =	233	N=	13		233
F14 =	377	N=	14		377
F15 =	610	N=	15		610
F16 =	987	N=	16		987
F17 =	1597	N=	17		1597
F18 =	2584	N=	18		2584
F19 =	4181	N=	19		4181
F20 =	6765	N=	20		6765
F21 =	10946	N=	21		10946
F22 =	17711	N=	22		17711
F23 =	28657	N=	23		28657
F24 =	46368	N=	24		46368
F25 =	75025	N=	25		75025

4°) Un encadrement de F_n

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\phi^{n-\frac{1}{n}}}{5} < F_n < \frac{\phi^{n+\frac{1}{n}}}{5}$$

5°) Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \phi$$

On peut étendre ces propriétés :

La suite de Fibonacci définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

vérifie la formule de Binet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

Considérons d'une manière générale la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{P}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{P}}{2}\right)^n}{\sqrt{P}} \quad \text{où } P \text{ est un entier positif quelconque.}$$

$\frac{1+\sqrt{P}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{P}}{2}$ sont les racines de l'équation $x^2 - x - \frac{P-1}{4} = 0$

On démontre les propriétés suivantes :

$$(v_n) \text{ vérifie } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad v_{n+1} = v_n + \left(\frac{P-1}{4}\right) v_{n-1} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \cdot v_{n+2} - v_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \left(\frac{P-1}{4}\right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1 + \sqrt{P}}{2}$$

QUELQUES SERIES

=====

$$\forall x \quad |x| < \frac{1}{\phi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1} F_{n+1}} = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1} F_{n+1}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Arctg} \frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{\phi}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}$$

(résultat dû à D. H Lehmer)

NOMBRES DE LUCAS

Les nombres de Lucas sont définis par :

$$\begin{cases} L_1 = 1 \\ L_2 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \end{cases}$$

Quelques propriétés des nombres de Lucas :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3$$

$$L_{n+2} L_n - L_{n+1}^2 = 5 \times (-1)^n$$

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$$L_{n+2} + L_n = 5 F_{n+1}$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$L_n^2 - 5 F_n^2 = 4 \times (-1)^n$$

$$L_{2n} L_{2n+2} - 1 = 5 F_{2n+1}^2$$

$$L_n^2 = L_{2n} + 2 \times (-1)^n$$

$$L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$$

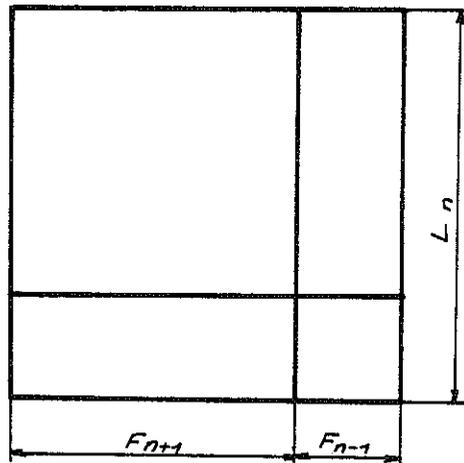
$$L_n = \phi^n + \bar{\phi}^n$$

Voici les premiers nombres de Lucas L_n et la suite (v_n) des rapports $\frac{L_{n+1}}{L_n}$

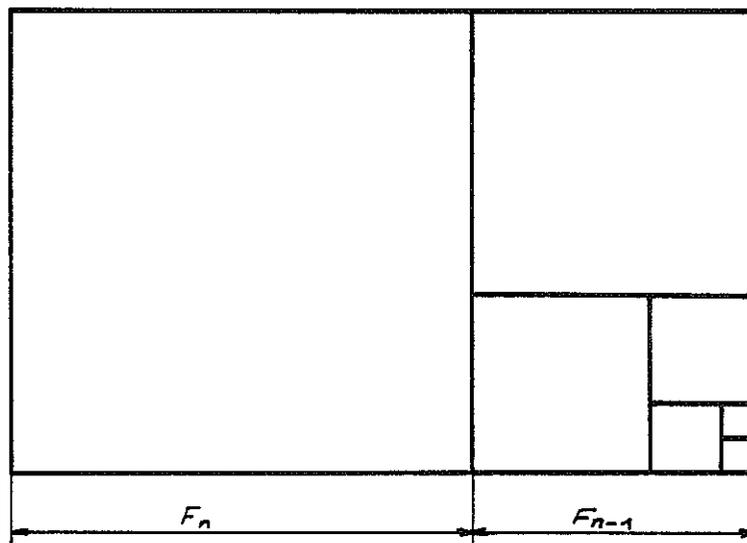
L1	=	1	V1	=	3
L2	=	3	V2	=	1.333333
L3	=	4	V3	=	1.750000
L4	=	7	V4	=	1.571429
L5	=	11	V5	=	1.636364
L6	=	18	V6	=	1.611111
L7	=	29	V7	=	1.620690
L8	=	47	V8	=	1.617021
L9	=	76	V9	=	1.618421
L10	=	123	V10	=	1.617886
L11	=	199	V11	=	1.618090
L12	=	322	V12	=	1.618012
L13	=	521	V13	=	1.618042
L14	=	843	V14	=	1.618031
L15	=	1364	V15	=	1.618035
L16	=	2207	V16	=	1.618034
L17	=	3571	V17	=	1.618034
L18	=	5778	V18	=	1.618034
L19	=	9349	V19	=	1.618034
L20	=	15127	V20	=	1.618034
L21	=	24476	V21	=	1.618034
L22	=	39603	V22	=	1.618034
L23	=	64079	V23	=	1.618034
L24	=	103682	V24	=	1.618034
L25	=	167761	V25	=	1.618034
L26	=	271443	V26	=	1.618034
L27	=	439204	V27	=	1.618034
L28	=	710647	V28	=	1.618034
L29	=	1149851	V29	=	1.618034
L30	=	1860498	V30	=	1.618034
L31	=	3010349	V31	=	1.618034
L32	=	4870847	V32	=	1.618034
L33	=	7881196			

On peut étendre la définition des nombres de Lucas à $L_0 = 2$, ainsi qu'aux indices négatifs.

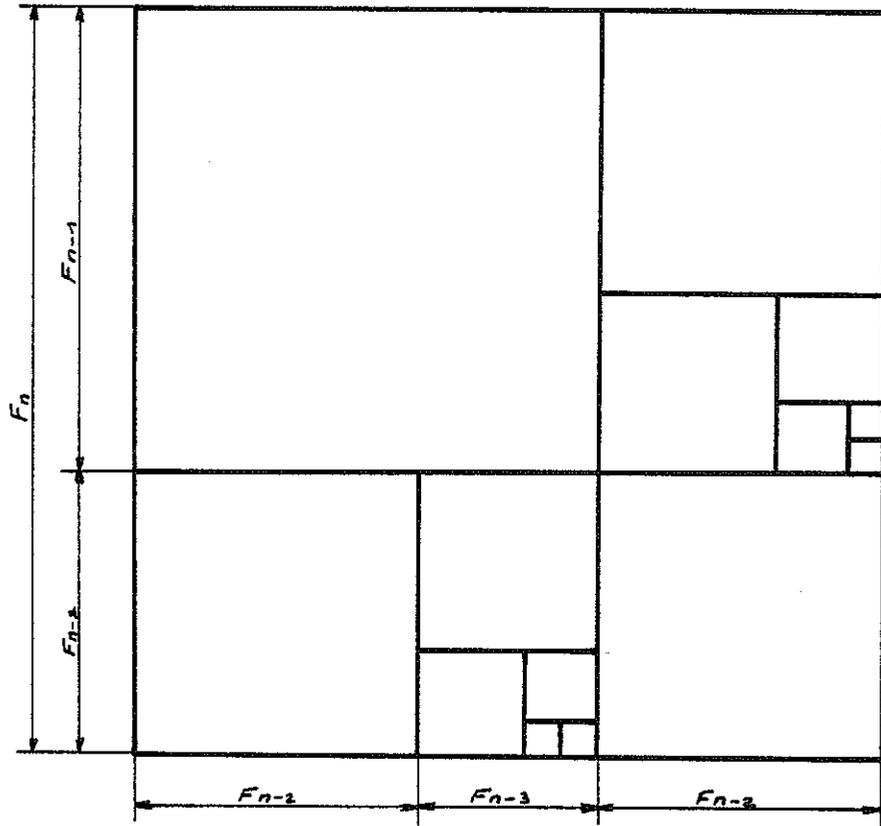
DEMONSTRATIONS GEOMETRIQUES



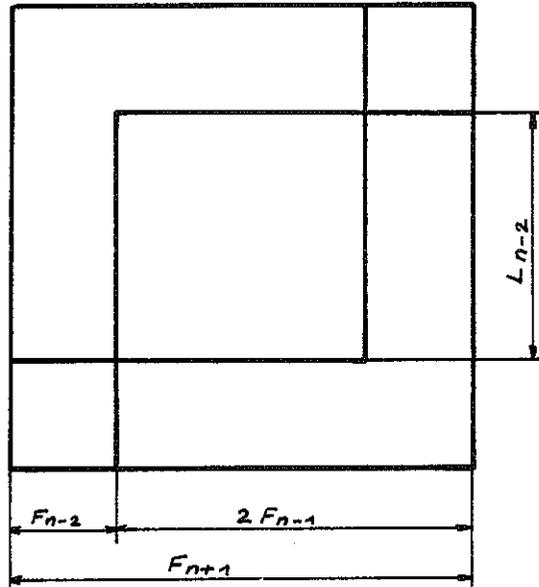
$$L_n^2 = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 + 2 F_{n+1} F_{n-1}$$



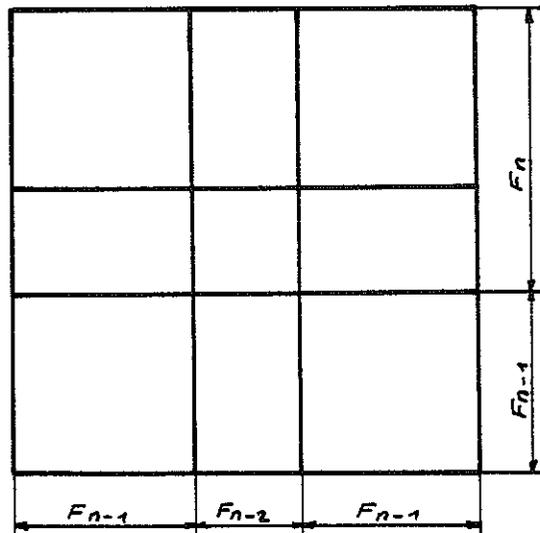
$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$$



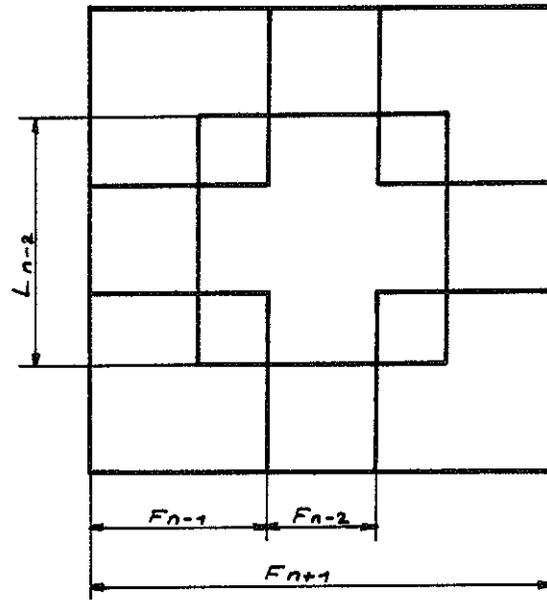
$$F_n^2 = F_{n-1}^2 + 3 F_{n-2}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-3} F_k^2$$



$$F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$$



$$F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$$



$$F_{n+1}^2 = 4 F_{n-1}^2 + 4 F_{n-2}^2 + L_{n-2}^2 - 4 F_{n-3}^2$$

DECOMPOSITION DE ϕ EN FRACTIONS CONTINUES

On cherche à exprimer le nombre d'or sous la forme :

$$\phi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

$a_0, a_1 \dots a_n \dots$ étant des nombres entiers

Notons $E(x)$ la partie entière du réel x

- Soit $a_0 = E(\phi)$ et $X_1 = \frac{1}{\phi - a_0}$ (si $a_0 \neq \phi$)

alors $X_1 > 1$ et $\phi = a_0 + \frac{1}{X_1}$

- Soit $a_1 = E(X_1)$ et $X_2 = \frac{1}{X_1 - a_1}$ (si $a_1 \neq X_1$)

alors $X_2 > 1$ et $\phi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{X_2}}$

- Soit $a_n = E(X_n)$ et $X_{n+1} = \frac{1}{X_n - a_n}$ (si $a_n \neq X_n$)

alors $X_n > 1$ et $\phi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \dots \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{X_{n+1}}}}}}$

En effectuant les calculs, on trouve

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 1$$

$$\text{Soit } \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

résultat que l'on pouvait obtenir immédiatement en écrivant :

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 &= 0 \Leftrightarrow \phi(\phi - 1) = 1 \\ \Leftrightarrow \phi &= 1 + \frac{1}{\phi} \end{aligned}$$

Comme $E(\phi) = 1$ on a la décomposition voulue et il suffit de remplacer à chaque fois ϕ par $1 + \frac{1}{\phi}$ dans le nombre de droite pour obtenir la décomposition complète.

Cette expression n'est qu'un cas particulier de la décomposition en fractions continues de la racine positive de l'équation :

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (m \in \mathbb{N})$$

qui s'écrit

$$x = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \dots}}}}$$

Calculons les réduites successives de ϕ :

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$r_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$r_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$r_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

$$r_6 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

$$r_7 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{21}{13}$$

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

où (F_n) est la suite de Fibonacci.

$\phi, \bar{\phi}$ ET LES CALCULATEURS

Reprenons la propriété de la suite de Fibonacci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Il est facile de la "vérifier" sur une calculatrice ou un ordinateur en faisant afficher les valeurs successives de $v_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$:

F0	=	0		
F1	=	1		
F2	=	1	V1	= 1.000000
F3	=	2	V2	= 2.000000
F4	=	3	V3	= 1.500000
F5	=	5	V4	= 1.666667
F6	=	8	V5	= 1.600000
F7	=	13	V6	= 1.625000
F8	=	21	V7	= 1.615385
F9	=	34	V8	= 1.619048
F10	=	55	V9	= 1.617647
F11	=	89	V10	= 1.618182
F12	=	144	V11	= 1.617978
F13	=	233	V12	= 1.618056
F14	=	377	V13	= 1.618026
F15	=	610	V14	= 1.618037
F16	=	987	V15	= 1.618033
F17	=	1597	V16	= 1.618034
F18	=	2584	V17	= 1.618034
F19	=	4181	V18	= 1.618034
F20	=	6765	V19	= 1.618034
F21	=	10946	V20	= 1.618034
F22	=	17711	V21	= 1.618034
F23	=	28657	V22	= 1.618034
F24	=	46368	V23	= 1.618034
F25	=	75025	V24	= 1.618034
F26	=	121393	V25	= 1.618034
F27	=	196418	V26	= 1.618034
F28	=	317811	V27	= 1.618034
F29	=	514229	V28	= 1.618034
F30	=	832040	V29	= 1.618034
F31	=	1346269	V30	= 1.618034
F32	=	2178309	V31	= 1.618034
F33	=	3524578	V32	= 1.618034
F34	=	5702887	V33	= 1.618034

Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \bar{\phi}$$

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

On démontre $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \bar{\phi}^n$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{\phi}$

Faisons calculer par la machine les valeurs successives de $w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

W0 = -0.6180339
 W1 = -0.6180344
 W2 = -0.6180332
 W3 = -0.6180363
 W4 = -0.6180282
 W5 = -0.6180494
 W6 = -0.6179938
 W7 = -0.6181393
 W8 = -0.6177585
 W9 = -0.6187556
 W10 = -0.616147
 W11 = -0.6229894
 W12 = -0.6051638
 W13 = -0.6524453
 W14 = -0.5326955
 W15 = -0.8772449
 W16 = -0.1399326
 W17 = -6.146297
 W18 = 0.8373004
 W19 = 2.194315
 W20 = 1.455723
 W21 = 1.686944
 W22 = 1.592788
 W23 = 1.62783
 W24 = 1.614315
 W25 = 1.619458
 W26 = 1.617491
 W27 = 1.618242
 W28 = 1.617955
 W29 = 1.618064
 W30 = 1.618022
 W31 = 1.618038
 W32 = 1.618033
 W33 = 1.618035
 W34 = 1.618034
 W35 = 1.618034
 W36 = 1.618034
 W37 = 1.618034
 W38 = 1.618034
 W39 = 1.618034
 W40 = 1.618034

La suite obtenue n'est pas la suite constante égale à $\bar{\phi}$ mais une suite convergeant vers ϕ .

La raison en est simple : la machine ne travaille pas dans \mathbb{R} mais dans un ensemble fini de nombres décimaux, et $\bar{\phi}$ n'appartient pas à cet ensemble.

A une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

on peut associer la suite (w_n) définie par :

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (\text{si } u_n \neq 0)$$

La suite (w_n) vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1 \quad w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n}$$

On démontre que :

- si $w_0 \neq \bar{\phi}$ la suite (w_n) converge vers ϕ
- si $w_0 = \bar{\phi}$ la suite est constante égale à $\bar{\phi}$

(voir l'illustration graphique page suivante)

Dans le cas précédent, théoriquement $w_0 = \bar{\phi}$, mais à cause de l'arrondi, la valeur w_0 de la machine est voisine de $\bar{\phi}$ mais différente : $w_0 = \bar{\phi} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \neq 0$, ε variant suivant les calculateurs.

REPRESENTATION DES NOMBRES ENTIERS

1°) Ecritures avec le nombre d'or

On peut écrire tous les nombres entiers à l'aide de ϕ et de la fonction partie entière. En notant $[X]$ la partie entière du nombre X , on obtient pour les premiers nombres :

$$1 = [\phi]$$

$$2 = [\phi^2]$$

$$3 = [\phi [\phi^2]]$$

$$4 = [\phi [\phi [\phi^2]]]$$

$$5 = [\phi^2[\phi^2]]$$

$$6 = [\phi [\phi [\phi [\phi^2]]]]$$

$$7 = [\phi^2[\phi [\phi^2]]]$$

Règle d'écriture

On peut décomposer un entier n de F_{n+1} ($n+1$ ème terme de la suite de Fibonacci) façons en sommes de 1 et de 2, l'ordre intervenant.

En recopiant pour chaque décomposition "[ϕ " au lieu de "1", "[ϕ^2 " au lieu de "2" et en fermant tous les crochets on obtient les écritures de tous les nombres entiers de 1 à F_{n+1}

Ainsi, en décomposant 6 :

1+1+1+1+1	$[\phi [\phi [\phi [\phi [\phi [\phi]]]]]] = [\phi] = 1$
1+1+1+1+2	$[\phi [\phi [\phi [\phi [\phi^2]]]]] = 9$
1+1+1+2+1	$[\phi [\phi [\phi [\phi^2[\phi]]]]] = [\phi [\phi [\phi [\phi^2]]]] = 6$
1+1+2+1+1	$[\phi [\phi [\phi^2[\phi [\phi]]]]] = [\phi [\phi [\phi^2]]] = 4$
1+2+1+1+1	$[\phi [\phi^2[\phi [\phi [\phi]]]]] = [\phi [\phi^2]] = 3$
2+1+1+1+1	$[\phi^2[\phi [\phi [\phi [\phi]]]]] = [\phi^2] = 2$
1+1+2+2	$[\phi [\phi [\phi^2[\phi^2]]]] = 12$
1+2+1+2	$[\phi [\phi^2[\phi [\phi^2]]]] = 11$
2+1+1+2	$[\phi^2[\phi [\phi [\phi^2]]]] = 10$

$$\begin{aligned}
1+2+2+1 & \quad [\phi [\phi^2[\phi^2[\phi]]]] = [\phi [\phi^2[\phi^2]]] = 8 \\
2+1+2+1 & \quad [\phi^2[\phi [\phi^2[\phi]]]] = [\phi^2[\phi [\phi^2]]] = 7 \\
2+2+1+1 & \quad [\phi^2[\phi^2[\phi [\phi]]]] = [\phi^2[\phi^2]] = 5 \\
2+2+2 & \quad [\phi^2[\phi^2[\phi^2]]] = 13
\end{aligned}$$

Ecriture des nombres de Fibonacci

$$\begin{aligned}
F_2 &= 1 = [\phi] \\
F_3 &= 2 = [\phi^2] \\
F_4 &= 3 = [\phi [\phi^2]] \\
F_5 &= 5 = [\phi^2[\phi^2]] \\
F_6 &= 8 = [\phi [\phi^2[\phi^2]]] \\
F_7 &= 13 = [\phi^2[\phi^2[\phi^2]]] \\
&\dots\dots\dots \\
F_{2n+1} &= [\underbrace{\phi^2[\phi^2[\dots[\phi^2]\dots]}_{n \text{ termes } \phi^2}] \\
F_{2n+2} &= [\phi [\underbrace{\phi^2[\dots[\phi^2]\dots]}_{n \text{ termes } \phi^2}]] \\
&(\text{car } F_{2k+2} = [\phi F_{2k+1}] \text{ et } F_{2k+3} = [\phi^2 F_{2k+1}])
\end{aligned}$$

Ecriture des nombres de Lucas

$$\begin{aligned}
L_2 &= 3 = [\phi [\phi^2]] \\
L_4 &= 7 = [\phi^2[\phi [\phi^2]]] \\
L_5 &= 11 = [\phi [\phi^2[\phi [\phi^2]]]] \\
L_6 &= 18 = [\phi^2[\phi^2[\phi [\phi^2]]]] \\
L_7 &= 29 = [\phi [\phi^2[\phi^2[\phi [\phi^2]]]]] \\
L_8 &= 47 = [\phi^2[\phi^2[\phi^2[\phi [\phi^2]]]]] \\
&\dots\dots\dots \\
L_{2n+2} &= [\underbrace{\phi^2[\phi^2[\dots[\phi^2[\phi [\phi^2]]]\dots]}_{n \text{ termes } \phi^2}] \\
L_{2n+3} &= [\phi [\underbrace{\phi^2[\phi^2[\dots[\phi^2[\phi [\phi^2]]]\dots]}_{n \text{ termes } \phi^2}]]
\end{aligned}$$

2°) Décomposition d'un nombre entier en somme de nombres de Fibonacci

Tout nombre entier se décompose en somme de nombres de Fibonacci distincts. De plus, la décomposition est unique si on interdit d'avoir dans la somme deux nombres de Fibonacci consécutifs et si on prend les nombres de Fibonacci à partir de F_2 .

La démonstration de cette propriété (Théorème de Zeckendorf) donne une construction de la décomposition.

On démontre par récurrence la propriété $P(n)$: Tout nombre entier inférieur strictement à F_n se décompose en somme de nombres de Fibonacci F_k , $k < n$

$P(2)$ et $P(3)$ sont évidemment vraies.

On suppose $P(k)$ vérifiée pour $k \leq n$ et on démontre $P(n+1)$.

Soit à décomposer un nombre x , $x < F_{n+1}$

Si $x < F_n$ la décomposition existe d'après l'hypothèse de récurrence.

Si $x \geq F_n$, on considère $x' = x - F_n$

$$F_n \leq x < F_{n+1} \Rightarrow 0 \leq x' < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

Si $x' = 0$ la décomposition est $x = F_n$

Si $x' \neq 0$ alors on sait décomposer x' d'après $P(n-1)$ et il suffit d'ajouter F_n à cette somme pour obtenir la décomposition de x .

L'unicité vient des conditions imposées.

Voici les décompositions des premiers nombres entiers en sommes de nombres de Fibonacci.

1 = 1	51 = 34 + 13 + 3 + 1
2 = 2	52 = 34 + 13 + 5
3 = 3	53 = 34 + 13 + 5 + 1
4 = 3 + 1	54 = 34 + 13 + 5 + 2
5 = 5	55 = 55
6 = 5 + 1	56 = 55 + 1
7 = 5 + 2	57 = 55 + 2
8 = 8	58 = 55 + 3
9 = 8 + 1	59 = 55 + 3 + 1
10 = 8 + 2	60 = 55 + 5
11 = 8 + 3	61 = 55 + 5 + 1
12 = 8 + 3 + 1	62 = 55 + 5 + 2
13 = 13	63 = 55 + 8
14 = 13 + 1	64 = 55 + 8 + 1
15 = 13 + 2	65 = 55 + 8 + 2
16 = 13 + 3	66 = 55 + 8 + 3
17 = 13 + 3 + 1	67 = 55 + 8 + 3 + 1
18 = 13 + 5	68 = 55 + 13
19 = 13 + 5 + 1	69 = 55 + 13 + 1
20 = 13 + 5 + 2	70 = 55 + 13 + 2
21 = 21	71 = 55 + 13 + 3
22 = 21 + 1	72 = 55 + 13 + 3 + 1
23 = 21 + 2	73 = 55 + 13 + 5
24 = 21 + 3	74 = 55 + 13 + 5 + 1
25 = 21 + 3 + 1	75 = 55 + 13 + 5 + 2
26 = 21 + 5	76 = 55 + 21
27 = 21 + 5 + 1	77 = 55 + 21 + 1
28 = 21 + 5 + 2	78 = 55 + 21 + 2
29 = 21 + 8	79 = 55 + 21 + 3
30 = 21 + 8 + 1	80 = 55 + 21 + 3 + 1
31 = 21 + 8 + 2	81 = 55 + 21 + 5
32 = 21 + 8 + 3	82 = 55 + 21 + 5 + 1
33 = 21 + 8 + 3 + 1	83 = 55 + 21 + 5 + 2
34 = 34	84 = 55 + 21 + 8
35 = 34 + 1	85 = 55 + 21 + 8 + 1
36 = 34 + 2	86 = 55 + 21 + 8 + 2
37 = 34 + 3	87 = 55 + 21 + 8 + 3
38 = 34 + 3 + 1	88 = 55 + 21 + 8 + 3 + 1
39 = 34 + 5	89 = 89
40 = 34 + 5 + 1	90 = 89 + 1
41 = 34 + 5 + 2	91 = 89 + 2
42 = 34 + 8	92 = 89 + 3
43 = 34 + 8 + 1	93 = 89 + 3 + 1
44 = 34 + 8 + 2	94 = 89 + 5
45 = 34 + 8 + 3	95 = 89 + 5 + 1
46 = 34 + 8 + 3 + 1	96 = 89 + 5 + 2
47 = 34 + 13	97 = 89 + 8
48 = 34 + 13 + 1	98 = 89 + 8 + 1
49 = 34 + 13 + 2	99 = 89 + 8 + 2
50 = 34 + 13 + 3	100 = 89 + 8 + 3

3°) Décomposition d'un nombre entier en somme de nombres de Lucas

Pour pouvoir décomposer tous les nombres en sommes de nombres de Lucas distincts, il faut considérer les nombres de Lucas à partir de $L_0 = 2$.

En considérant la suite $(L'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} L'_0 = 1 \\ L'_1 = 2 \\ \forall n \geq 2 \quad L'_n = L_n \end{cases}$$

et en utilisant l'algorithme précédent on trouve une décomposition de chaque entier en somme de nombres de Lucas distincts.

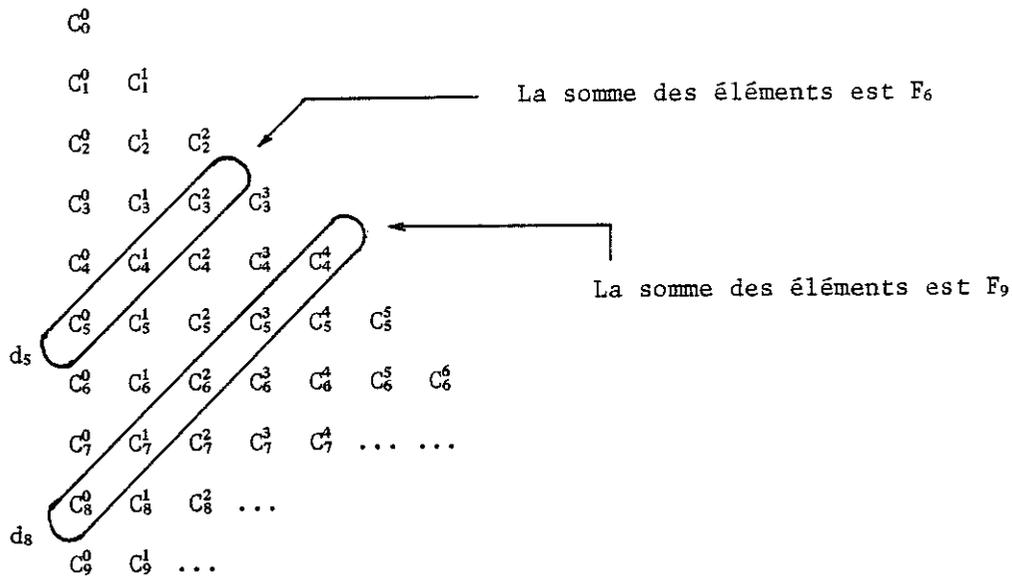
Mais la décomposition n'est plus unique car :

$$5 = L_3 + L_1 = L_2 + L_0$$

1 = 1	41 = 29 + 11 + 1
2 = 2	42 = 29 + 11 + 2
3 = 3	43 = 29 + 11 + 3
4 = 4	44 = 29 + 11 + 4
5 = 4 + 1	45 = 29 + 11 + 4 + 1
6 = 4 + 2	46 = 29 + 11 + 4 + 2
7 = 7	47 = 47
8 = 7 + 1	48 = 47 + 1
9 = 7 + 2	49 = 47 + 2
10 = 7 + 3	50 = 47 + 3
11 = 11	51 = 47 + 4
12 = 11 + 1	52 = 47 + 4 + 1
13 = 11 + 2	53 = 47 + 4 + 2
14 = 11 + 3	54 = 47 + 7
15 = 11 + 4	55 = 47 + 7 + 1
16 = 11 + 4 + 1	56 = 47 + 7 + 2
17 = 11 + 4 + 2	57 = 47 + 7 + 3
18 = 18	58 = 47 + 11
19 = 18 + 1	59 = 47 + 11 + 1
20 = 18 + 2	60 = 47 + 11 + 2
21 = 18 + 3	61 = 47 + 11 + 3
22 = 18 + 4	62 = 47 + 11 + 4
23 = 18 + 4 + 1	63 = 47 + 11 + 4 + 1
24 = 18 + 4 + 2	64 = 47 + 11 + 4 + 2
25 = 18 + 7	65 = 47 + 18
26 = 18 + 7 + 1	66 = 47 + 18 + 1
27 = 18 + 7 + 2	67 = 47 + 18 + 2
28 = 18 + 7 + 3	68 = 47 + 18 + 3
29 = 29	69 = 47 + 18 + 4
30 = 29 + 1	70 = 47 + 18 + 4 + 1
31 = 29 + 2	71 = 47 + 18 + 4 + 2
32 = 29 + 3	72 = 47 + 18 + 7
33 = 29 + 4	73 = 47 + 18 + 7 + 1
34 = 29 + 4 + 1	74 = 47 + 18 + 7 + 2
35 = 29 + 4 + 2	75 = 47 + 18 + 7 + 3
36 = 29 + 7	76 = 76
37 = 29 + 7 + 1	77 = 76 + 1
38 = 29 + 7 + 2	78 = 76 + 2
39 = 29 + 7 + 3	79 = 76 + 3
40 = 29 + 11	80 = 76 + 4

LES NOMBRES DE FIBONACCI ET LE TRIANGLE DE PASCAL

1°) Triangle de Pascal



La somme des éléments de d_n est F_{n+1}

2°) Propriétés des coefficients binomiaux

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^n C_n^i F_i = F_{2n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^n C_n^i F_{i+p} = F_{2n+p}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} C_{2n+1}^i F_{i+p}^2 = 5^n F_{2n+2p+1}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+2} C_{2n+2}^i F_{i+p}^2 = 5^n L_{2n+2p+2}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+2} C_{2n+2}^i L_{i+p}^2 = 5^{n+1} L_{2n+2p+2}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} C_{2n+1}^i F_{i-1+p} F_{i+p} = 5^n F_{2n+2p}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+2} C_{2n+2}^i F_{i-1+p} F_{i+p} = 5^n L_{2n+2p+1}$$

où L_n nombre de Lucas

3°) Les polynômes de Fibonacci

Les polynômes de Fibonacci sont définis par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} P_1(x) = 1 \\ P_2(x) = x \\ \forall n \geq 2 \quad P_{n+1}(x) = x P_n(x) + P_{n-1}(x) \end{cases}$$

Les premiers polynômes de Fibonacci :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 \\ P_2(x) &= x \\ P_3(x) &= 1 + x^2 \\ P_4(x) &= 2x + x^3 \\ P_5(x) &= 1 + 3x^2 + x^4 \\ P_6(x) &= 3x + 4x^3 + x^5 \\ P_7(x) &= 1 + 6x^2 + 5x^4 + x^6 \\ P_8(x) &= 4x + 10x^3 + 6x^5 + x^7 \\ P_9(x) &= 1 + 10x^2 + 15x^4 + 7x^6 + x^8 \\ P_{10}(x) &= 5x + 20x^3 + 21x^5 + 8x^7 + x^9 \end{aligned}$$

4°) Les coefficients des polynômes de Fibonacci

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
1	1											
2	0	1										
3	1	0	1									
4	0	2	0	1								
5	1	0	3	0	1							
6	0	3	0	4	0	1						
7	1	0	6	0	5	0	1					
8	0	4	0	10	0	6	0	1				
9	1	0	10	0	15	0	7	0	1			
10	0	5	0	20	0	21	0	8	0	1		
11	1	0	15	0	35	0	28	0	9	0	1	
12	0	6	0	35	0	56	0	36	0	10	0	1

Les "lignes" du Triangle
de Pascal

DIVISIBILITE DES NOMBRES DE FIBONACCI

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^*2 \quad F_{nk} \text{ est divisible par } F_n$$

Par exemple $F_5 = 5, F_{10} = 55, F_{15} = 610, F_{20} = 6765$

$$F_5 \text{ divise } F_{10}, F_{15}, F_{20}$$

$$F_{10} \text{ divise } F_{20}$$

Pour tout entier naturel n , il existe au moins un nombre de Fibonacci divisible par n parmi les $n^2 - 1$ premiers.

Par exemple $6 \text{ divise } F_{12}$

$$7 \text{ divise } F_8$$

$$11 \text{ divise } F_{20}$$

Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^*2 \quad \text{PGCD}(F_m, F_n) = F_{\text{PGCD}(m, n)}$$

Il en résulte :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^*2 \quad (F_m \text{ divisible par } F_n) \Leftrightarrow (m \text{ divisible par } n)$$

On en déduit :

$$F_n \text{ pair} \Leftrightarrow n \text{ divisible par } 3$$

$$F_n \text{ divisible par } 3 \Leftrightarrow n \text{ divisible par } 4$$

$$F_n \text{ divisible par } 5 \Leftrightarrow n \text{ divisible par } 5$$

$$F_n \text{ divisible par } 11 \Leftrightarrow n \text{ divisible par } 10$$

Etudions la suite de Fibonacci module 10

0 1 1 2 3 5 8 3 1 4 5 9

C'est une suite périodique de période 60

U'	1 =	1	U'	31 =	9	U'	61 =	1	U'	91 =	9
U'	2 =	1	U'	32 =	9	U'	62 =	1	U'	92 =	9
U'	3 =	2	U'	33 =	8	U'	63 =	2	U'	93 =	8
U'	4 =	3	U'	34 =	7	U'	64 =	3	U'	94 =	7
U'	5 =	5	U'	35 =	5	U'	65 =	5	U'	95 =	5
U'	6 =	8	U'	36 =	2	U'	66 =	8	U'	96 =	2
U'	7 =	3	U'	37 =	7	U'	67 =	3	U'	97 =	7
U'	8 =	1	U'	38 =	9	U'	68 =	1	U'	98 =	9
U'	9 =	4	U'	39 =	6	U'	69 =	4	U'	99 =	6
U'	10 =	5	U'	40 =	5	U'	70 =	5	U'	100 =	5
U'	11 =	9	U'	41 =	1	U'	71 =	9	U'	101 =	1
U'	12 =	4	U'	42 =	6	U'	72 =	4	U'	102 =	6
U'	13 =	3	U'	43 =	7	U'	73 =	3	U'	103 =	7
U'	14 =	7	U'	44 =	3	U'	74 =	7	U'	104 =	3
U'	15 =	0	U'	45 =	0	U'	75 =	0	U'	105 =	0
U'	16 =	7	U'	46 =	3	U'	76 =	7	U'	106 =	3
U'	17 =	7	U'	47 =	3	U'	77 =	7	U'	107 =	3
U'	18 =	4	U'	48 =	6	U'	78 =	4	U'	108 =	6
U'	19 =	1	U'	49 =	9	U'	79 =	1	U'	109 =	9
U'	20 =	5	U'	50 =	5	U'	80 =	5	U'	110 =	5
U'	21 =	6	U'	51 =	4	U'	81 =	6	U'	111 =	4
U'	22 =	1	U'	52 =	9	U'	82 =	1	U'	112 =	9
U'	23 =	7	U'	53 =	3	U'	83 =	7	U'	113 =	3
U'	24 =	8	U'	54 =	2	U'	84 =	8	U'	114 =	2
U'	25 =	5	U'	55 =	5	U'	85 =	5	U'	115 =	5
U'	26 =	3	U'	56 =	7	U'	86 =	3	U'	116 =	7
U'	27 =	8	U'	57 =	2	U'	87 =	8	U'	117 =	2
U'	28 =	1	U'	58 =	9	U'	88 =	1	U'	118 =	9
U'	29 =	9	U'	59 =	1	U'	89 =	9	U'	119 =	1
U'	30 =	0	U'	60 =	0	U'	90 =	0	U'	120 =	0

De même, la suite de Fibonacci modulo 2 est périodique
de période 3 : 0 1 1

La suite de Fibonacci modulo 3 est périodique
de période 8 : 0 1 1 2 0 2 2 1

La suite de Fibonacci modulo 4 est périodique
de période 6 : 0 1 1 2 3 1

La suite de Fibonacci modulo 5 est périodique
de période 20 : 0 1 1 2 3 0 3 3 1 4
0 4 4 3 2 0 2 2 4 1

La suite de Fibonacci modulo 6 est périodique
de période 24 : 0 1 1 2 3 5 2 1 3 4
1 5 0 5 5 4 3 1 4 5
3 2 5 1

La suite de Fibonacci modulo 7 est périodique
de période 16 : 0 1 1 2 3 5 1 6 0 6
6 5 4 2 6 1

La suite de Fibonacci modulo 8 est périodique
de période 12 : 0 1 1 2 3 5 0 5 5 2
7 1

Plus généralement, la suite de Fibonacci modulo k est périodique. Le tableau suivant donne la valeur de k en première colonne et la valeur de la période $T(k)$ en deuxième colonne.

1	1	26	84	51	72	76	18	101	50
2	3	27	72	52	84	77	80	102	72
3	8	28	48	53	108	78	168	103	208
4	6	29	14	54	72	79	78	104	84
5	20	30	120	55	20	80	120	105	80
6	24	31	30	56	48	81	216	106	108
7	16	32	48	57	72	82	120	107	72
8	12	33	40	58	42	83	168	108	72
9	24	34	36	59	58	84	48	109	108
10	60	35	80	60	120	85	180	110	60
11	10	36	24	61	60	86	264	111	152
12	24	37	76	62	30	87	56	112	48
13	28	38	18	63	48	88	60	113	76
14	48	39	56	64	96	89	44	114	72
15	40	40	60	65	140	90	120	115	240
16	24	41	40	66	120	91	112	116	42
17	36	42	48	67	136	92	48	117	168
18	24	43	88	68	36	93	120	118	174
19	18	44	30	69	48	94	96	119	144
20	60	45	120	70	240	95	180	120	120
21	16	46	48	71	70	96	48	121	110
22	30	47	32	72	24	97	196	122	60
23	48	48	24	73	148	98	336	123	40
24	24	49	112	74	228	99	120	124	30
25	100	50	300	75	200	100	300	125	500

$T(k)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \text{ premier} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(p^n) = p^{n-1} T(p)$$

si $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ décomposition en facteurs premiers de k

$$T(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \text{P.P.C.M.} (T(p_1^{\alpha_1}), T(p_2^{\alpha_2}), \dots, T(p_r^{\alpha_r}))$$

Soit la suite de Lucas

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 3$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

Etudions la suite de Lucas modulo 10. Elle est périodique de période 12.

U'	1 = 1	U'	13 = 1	U'	25 = 1	U'	37 = 1
U'	2 = 3	U'	14 = 3	U'	26 = 3	U'	38 = 3
U'	3 = 4	U'	15 = 4	U'	27 = 4	U'	39 = 4
U'	4 = 7	U'	16 = 7	U'	28 = 7	U'	40 = 7
U'	5 = 1	U'	17 = 1	U'	29 = 1	U'	41 = 1
U'	6 = 8	U'	18 = 8	U'	30 = 8	U'	42 = 8
U'	7 = 9	U'	19 = 9	U'	31 = 9	U'	43 = 9
U'	8 = 7	U'	20 = 7	U'	32 = 7	U'	44 = 7
U'	9 = 6	U'	21 = 6	U'	33 = 6	U'	45 = 6
U'	10 = 3	U'	22 = 3	U'	34 = 3	U'	46 = 3
U'	11 = 9	U'	23 = 9	U'	35 = 9	U'	47 = 9
U'	12 = 2	U'	24 = 2	U'	36 = 2	U'	48 = 2

De même, la suite de Lucas modulo 2 est périodique de période 3 : 1 1 0

La suite de Lucas modulo 3 est périodique de période 8 : 1 0 1 1 2 0 2 2

La suite de Lucas modulo 4 est périodique de période 6 : 1 3 0 3 3 2

La suite de Lucas modulo 5 est périodique de période 4 : 1 3 4 2

La suite de Lucas modulo 6 est périodique de période 24 : 1 3 4 1 5 0 5 5 4 3 1 4
5 3 2 5 1 0 1 1 2 3 5 2

La suite de Lucas modulo 7 est périodique de période 16 : 1 3 4 0 4 4 1 5 6 4 3 0 3 3 6 2

La suite de Lucas modulo 8 est périodique de période 12 : 1 3 4 7 3 2 5 7 4 3 7 2

Plus généralement, la suite de Lucas modulo k est périodique. Le tableau suivant donne la valeur de k et la valeur de la période $T'(k)$.

1	1	26	84	51	72	76	18	101	50
2	3	27	72	52	84	77	80	102	72
3	8	28	48	53	108	78	168	103	208
4	6	29	14	54	72	79	78	104	84
5	4	30	24	55	20	80	24	105	16
6	24	31	30	56	48	81	216	106	108
7	16	32	48	57	72	82	120	107	72
8	12	33	40	58	42	83	168	108	72
9	24	34	36	59	58	84	48	109	108
10	12	35	16	60	24	85	36	110	60
11	10	36	24	61	60	86	264	111	152
12	24	37	76	62	30	87	56	112	48
13	28	38	18	63	48	88	60	113	76
14	48	39	56	64	96	89	44	114	72
15	8	40	12	65	28	90	24	115	48
16	24	41	40	66	120	91	112	116	42
17	36	42	48	67	136	92	48	117	168
18	24	43	88	68	36	93	120	118	174
19	18	44	30	69	48	94	96	119	144
20	12	45	24	70	48	95	36	120	24
21	16	46	48	71	70	96	48	121	110
22	30	47	32	72	24	97	196	122	60
23	48	48	24	73	148	98	336	123	40
24	24	49	112	74	228	99	120	124	30
25	20	50	60	75	40	100	60	125	100

CALCULS AMUSANTS

1°) Division de x par $1 - x - x^2$ suivant les puissances croissantes.

x $x^2 + x^3$ $2x^3 + x^4$ $3x^4 + 2x^5$ $5x^5 + 3x^6$ $8x^6 + 5x^7$ $13x^7 + 8x^8$ $21x^8 + 13x^9$ \vdots	$1 - x - x^2$ $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 \dots$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------

On peut continuer ce processus indéfiniment.

Les coefficients du polynôme quotient sont les termes de la suite de Fibonacci.

$$\begin{array}{cccccccc}
 x & + & x^2 & + & 2x^3 & + & 3x^4 & + & 5x^5 & + & 8x^6 & + & 13x^7 & + & 21x^8 + \dots \\
 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \dots
 \end{array}$$

Ceci découle de la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

2°) Calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ $k \in \mathbb{N}^*$

Notons (F_n) la suite de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

Cette propriété permet une démonstration rapide et élégante de certaines propriétés des nombres de Fibonacci.

3°) Calcul de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^k$ _____ $k \in \mathbb{N}^*$

On démontre par récurrence

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k-1}^2 & F_{k-1} F_k & F_k^2 \\ 2F_{k-1} F_k & F_{k+1} - F_{k-1} F_k & 2F_k F_{k+1} \\ F_k^2 & F_k F_{k+1} & F_k^2 \end{pmatrix}$$

De plus, si $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$R^{n+1} + R^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} & F_{2n+1} \\ 2F_{2n} & 2F_{2n+1} & 2F_{2n+2} \\ F_{2n+1} & F_{2n+2} & F_{2n+3} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (R^{n+1} + R^n)(R + I) = \begin{pmatrix} L_{2n} & L_{2n+1} & L_{2n+2} \\ 2L_{2n+1} & 2L_{2n+2} & 2L_{2n+3} \\ L_{2n+2} & L_{2n+3} & L_{2n+4} \end{pmatrix}$$

4°) "Formule de Moivre" (qui n'est pas due à Moivre !)

$$\left(\frac{L_n + \sqrt{5} F_n}{2} \right)^p = \frac{L_{np} + \sqrt{5} F_{np}}{2}$$

5°)

$\forall u_0 \in [-1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

est convergente et a pour limite ϕ

$$\text{Or } u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + \sqrt{1 + u_0}}}}}$$

$$\text{donc } \phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

6°) Trigonométrie

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2\phi}$$

$$\sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\phi}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}\phi}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\phi}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^{n-k-1} \frac{\pi}{5} \sin^k \frac{\pi}{10}$$

7°) La progression d'or

Si a et b sont deux nombres tels que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ (on a donc $\frac{a}{b} = \frac{1}{\phi}$), la progression d'or est :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+2b} = \frac{a+2b}{2a+3b} = \frac{2a+3b}{3a+5b} = \dots = \frac{F_n a + F_{n+1} b}{F_{n+1} a + F_{n+2} b}$$

La progression d'or s'obtient en additionnant terme à terme deux rapports successifs.

8°) La permutation d'or

On considère les n couples $(i, i\phi - E(i\phi))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) où ϕ est le nombre d'or et où $E(i\phi)$ désigne la partie entière de $i\phi$. On classe ces couples par valeur croissante du deuxième terme. La suite des premiers termes ainsi obtenue s'appelle permutation d'or de $\{1, 2, \dots, n\}$.

1er exemple : $n = 10$. On obtient

LA PERMUTATION D'OR DES 10 PREMIERS ENTIERS EST :

5 10 2 7 4 9 1 6 3 8

LES DIFFERENCES ENTRE DEUX TERMES CONSECUTIFS SONT :

5 8 3

2ème exemple : $n = 20$. On obtient :

LA PERMUTATION D'OR DES 20 PREMIERS ENTIERS EST :

13 5 18 10 2 15 7 20 12 4 17 9 1 14 6 19 11 3 16
8

LES DIFFERENCES ENTRE DEUX TERMES CONSÉCUTIFS SONT :

8 13

3ème exemple : $n = 100$. On obtient

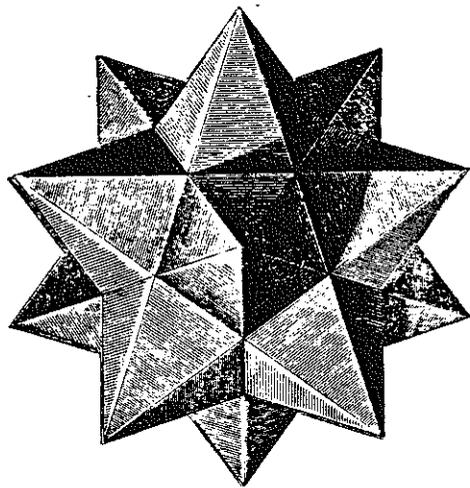
LA PERMUTATION D'OR DES 100 PREMIERS ENTIERS EST :

89 34 68 13 47 81 26 60 5 94 39 73 18 52 86 31 65 10 99
44 78 23 57 2 91 36 70 15 49 83 28 62 7 96 41 75 20 54 88
33 67 12 46 80 25 59 4 93 38 72 17 51 85 30 64 9 98 43 77
22 56 1 90 35 69 14 48 82 27 61 6 95 40 74 19 53 87 32 66
11 100 45 79 24 58 3 92 37 71 16 50 84 29 63 8 97 42 76 21
55

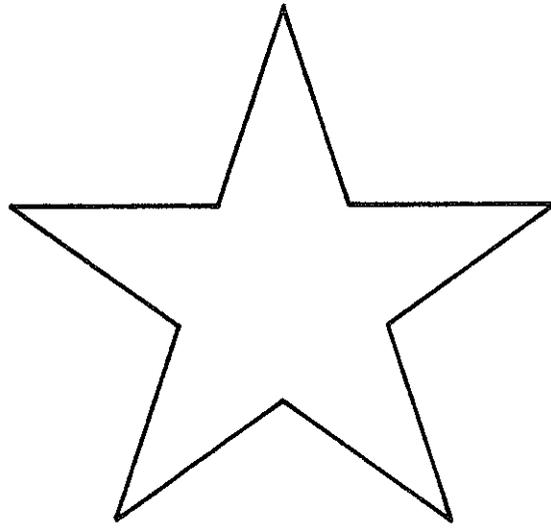
LES DIFFERENCES ENTRE DEUX TERMES CONSÉCUTIFS SONT :

55 34 89

Plus généralement, si on considère la permutation d'or des n premiers nombres, la différence entre deux termes consécutifs de cette permutation est toujours l'un des deux ou trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci immédiatement inférieurs à n .

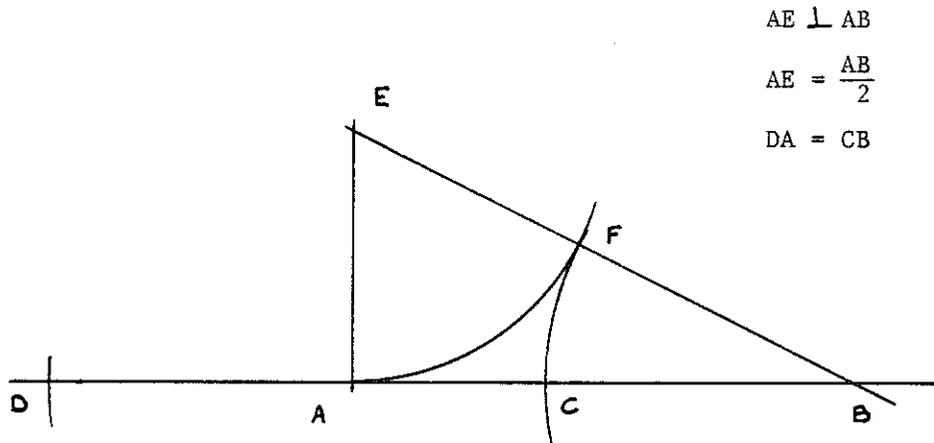


G E O M E T R I E



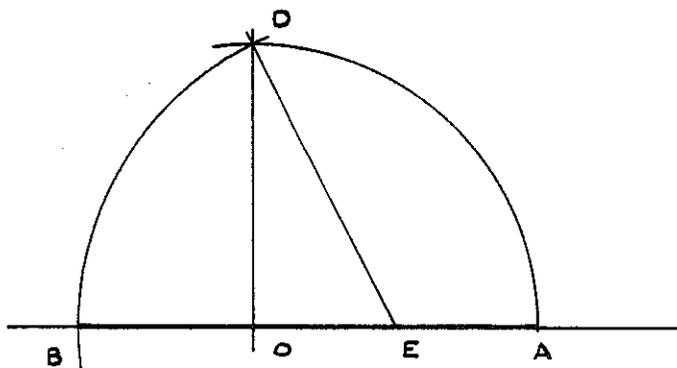
CONSTRUCTIONS DE SECTIONS DOREES

a) Constructions classiques



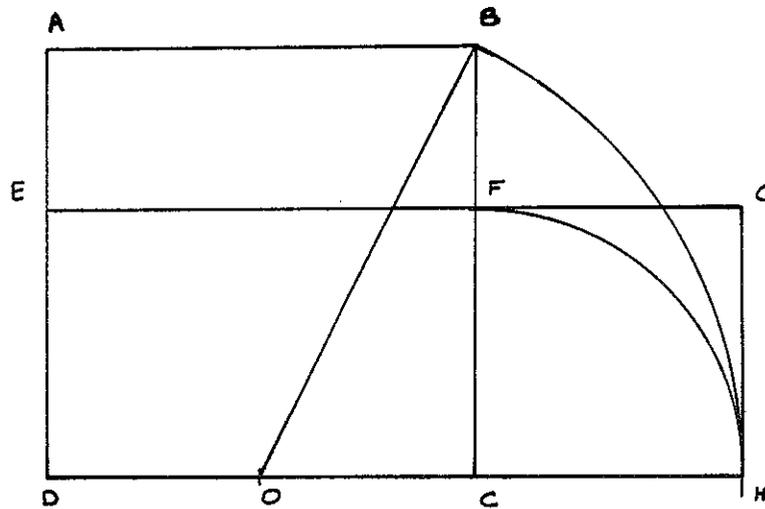
Construction des points C et D qui partagent le segment AB en extrême et moyenne raison

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \phi$$



Construction de ϕ :

si $OA = OD = 1$, et E milieu de OA, on a $AB = \phi$

b) Construction d'Euclide

Construction due à Euclide du point F sur BC tel que $\frac{CB}{CF} = \phi$

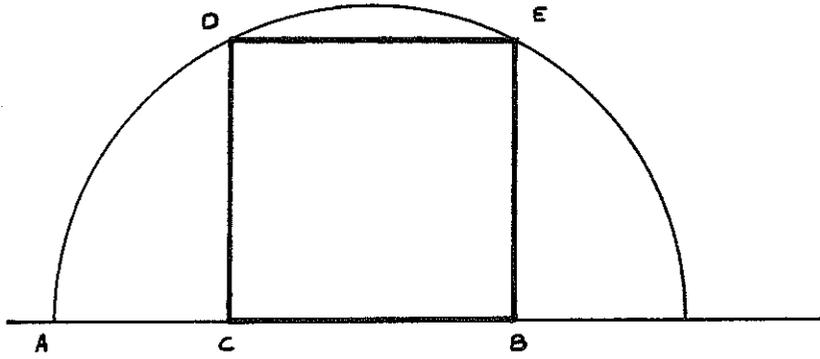
ABCD est un carré, O est le milieu de CD.

Le rectangle ABFE et le carré CFGH ont la même aire

$$AB \times BF = CF^2 \Leftrightarrow CB \times BF = CF^2$$

on a donc bien $\frac{CB}{CF} = \phi$

c) Carré inscrit dans un demi-cercle

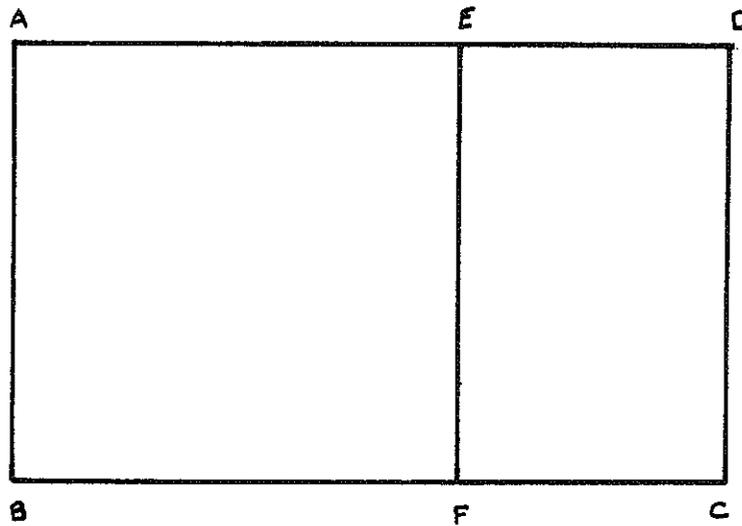


$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC} = \phi$$

RECTANGLE D'OR

C'est un rectangle tel que le rapport de la mesure de la longueur sur la mesure de la largeur est le nombre d'or ϕ

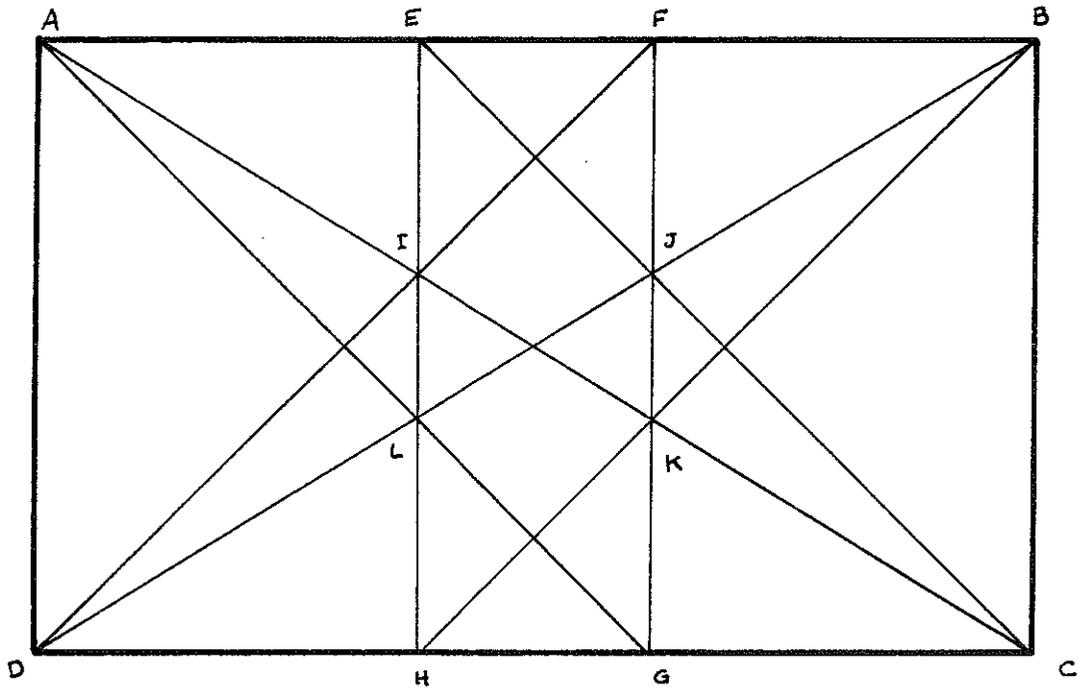
$$\frac{AD}{AB} = \phi$$



ABFE étant un carré :

ABCD rectangle d'or \Leftrightarrow DEFC rectangle d'or

ABCD rectangle d'or $\Leftrightarrow \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire ABFE}} = \phi$



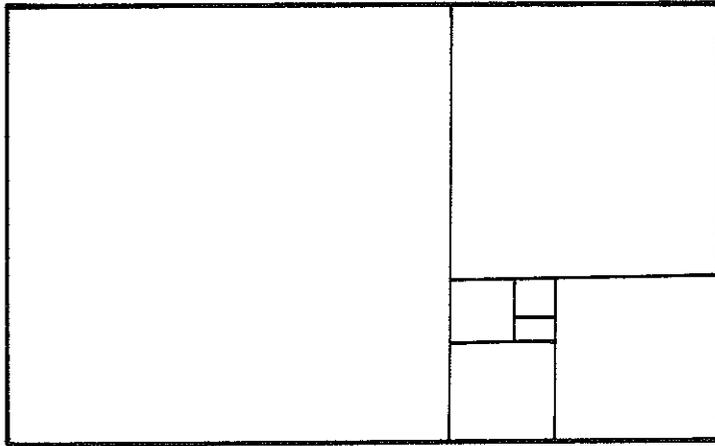
Dans un rectangle d'or, les diagonales du rectangle rencontrent les diagonales des carrés sur les sections d'or.

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AB}{BE} = \phi$$

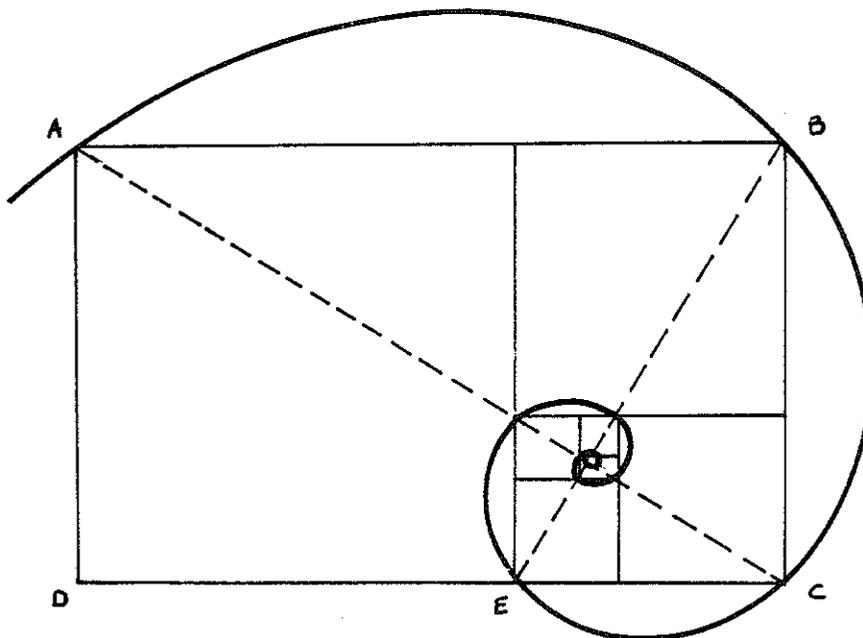
AC et BH se coupent sur FG.

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AK}{AI} = \phi$$

$$\frac{EH}{EL} = \frac{EL}{EI} = \phi$$



Une suite de rectangles d'or



Chaque rectangle d'or a trois de ses sommets sur une spirale logarithmique.

Le centre de la spirale ou point asymptote est le point d'intersection de AC et de BE.

Parallélépipède d'or

C'est une parallélépipède rectangle dont les mesures a, b, c des côtés sont proportionnelles à $\phi, 1, \phi^{-1}$

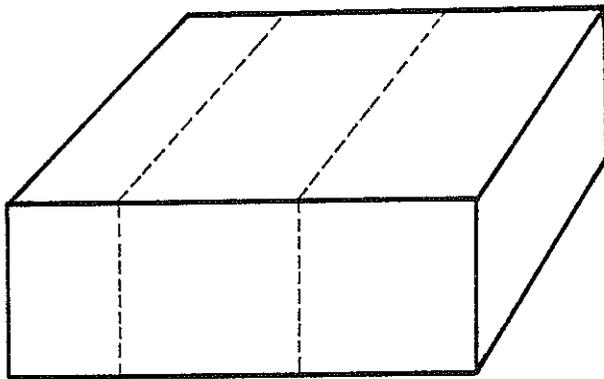
$$\frac{a}{\phi} = \frac{b}{1} = \frac{c}{\frac{1}{\phi}}$$

Quatre des six faces sont des rectangles d'or.

Les aires des faces sont proportionnelles à $\phi, 1, \phi^{-1}$

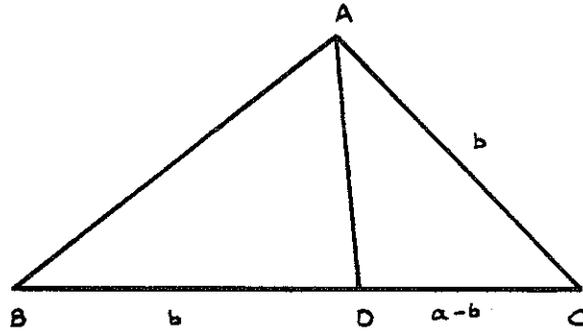
Soit un parallélépipède d'or tel que $a = \phi, b = 1, c = \phi^{-1}$;
si deux parallélépipèdes de dimensions $\phi^{-1} \times 1 \times \phi^{-1}$ sont retirés du parallélépipède d'or, le parallélépipède restant est encore un parallélépipède d'or.

Le volume du parallélépipède original est A , celui du parallélépipède restant est $\frac{1}{\phi^3}$, et le rapport des volumes est ϕ^3 .



TRIANGLE D'OR

C'est un triangle tel que le rapport des mesures de deux des côtés est le nombre d'or ϕ .



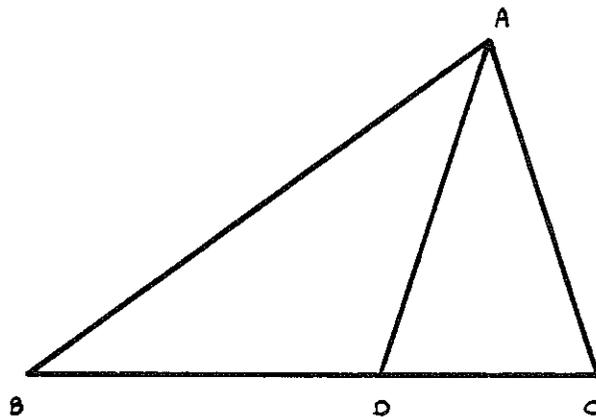
Les triangles ABC et DAC
sont semblables

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \phi$$

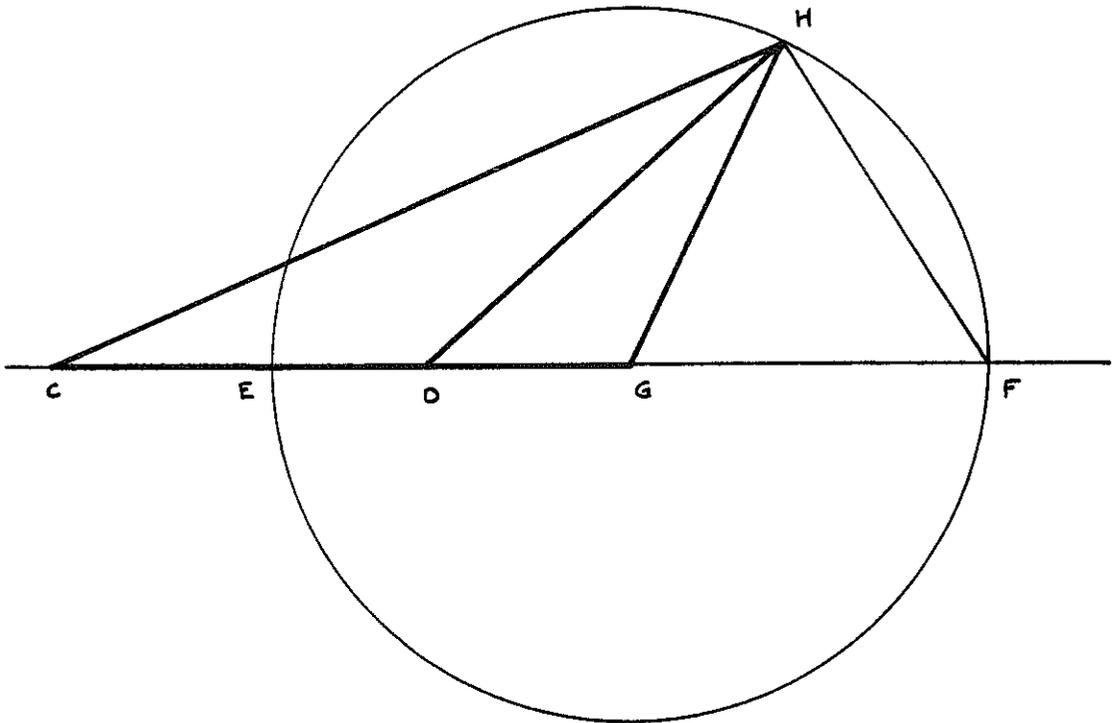
Les triangles ABC et DAC
sont semblables

$$\Leftrightarrow \frac{\text{aire ABC}}{\text{aire DBA}} = \phi$$

Un triangle isocèle est un triangle d'or si et seulement si l'angle au sommet mesure 36° .



Alors qu'il existe une seule forme pour le rectangle d'or, il en existe une infinité pour le triangle d'or.



Soit $CD = \phi$

L'ensemble des points H tels que $\frac{HC}{HD} = \phi$ est le cercle d'Apollonius relatif à CD pour le rapport ϕ .

Ce cercle rencontre la droite CD en E et F et on a :

CDH triangle d'or

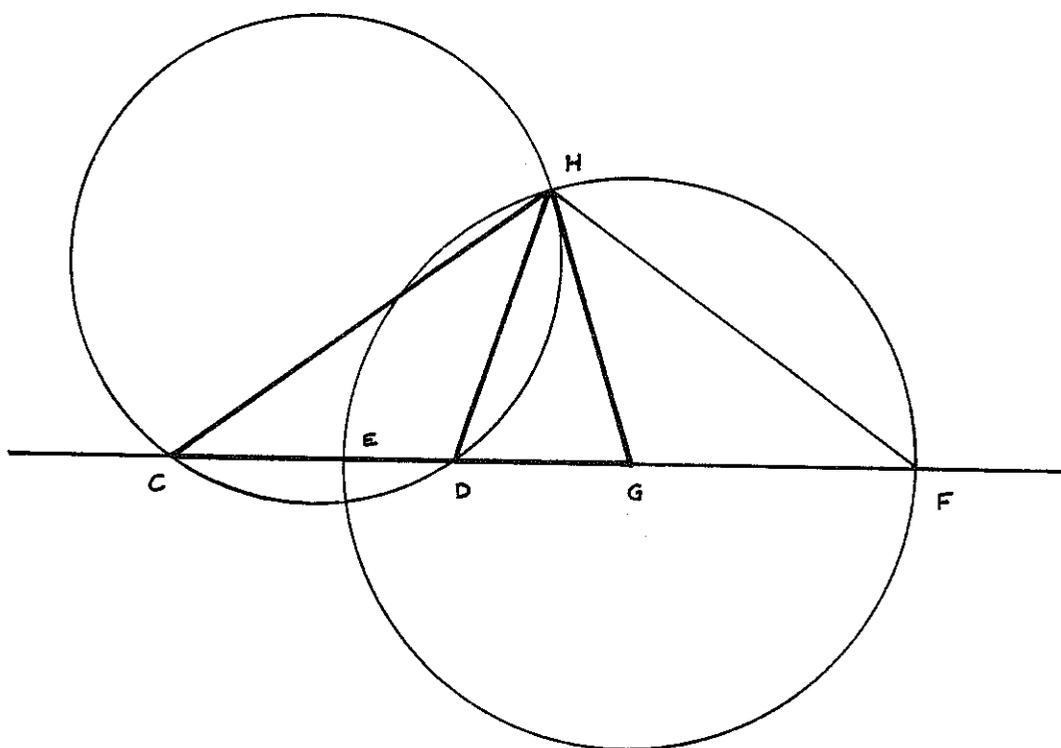
$$\overline{CD} = \overline{EG} = \overline{GF} = \phi$$

G centre du cercle d'Apollonius

$$\overline{CE} = 1$$

$$\frac{CG}{HG} = \frac{1 + \phi}{\phi} = \phi \text{ donc } CHG \text{ est un triangle d'or.}$$

Lorsque H décrit le cercle, les triangles CDH prennent toutes les formes de triangles d'or. De même pour les triangles CHG.

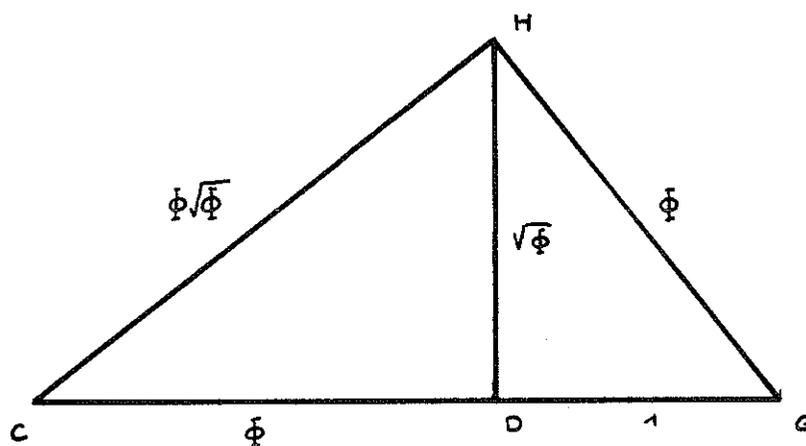


Si $CH = i + \phi$, le triangle d'or CHG est isocèle. Le cercle CDH est orthogonal au cercle d'Appolonius.

$$GH^2 = \phi^2 = 1 + \phi = \overline{GD} \cdot \overline{GC} \quad ,$$

GH est tangent au cercle CDH .

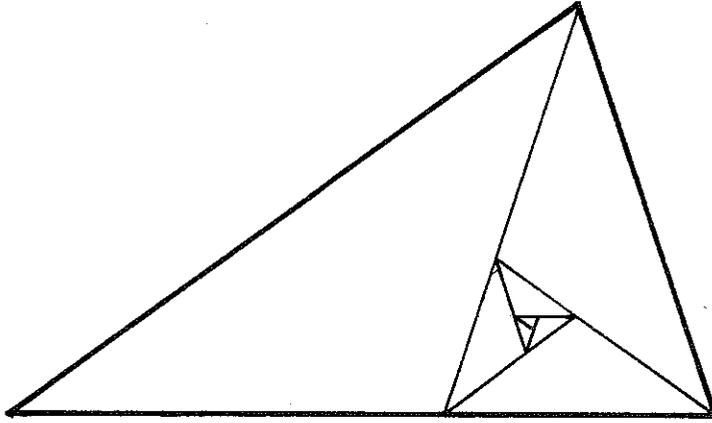
Un triangle d'or rectangle



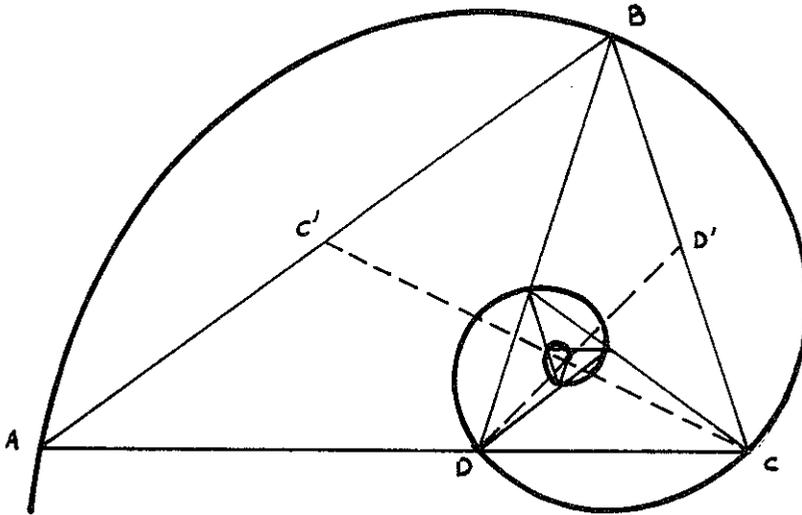
CGH est un triangle d'or rectangle en H

$$\frac{DG}{1} = \frac{CD}{\phi} = \frac{GH}{\phi} = \frac{CH}{\phi\sqrt{\phi}} = \frac{DH}{\sqrt{\phi}}$$

Les aires des triangles HDG, CDH, GHC sont proportionnelles à 1, ϕ , ϕ^2 , comme dans tous les triangles d'or.



Une suite de triangles d'or isocèles



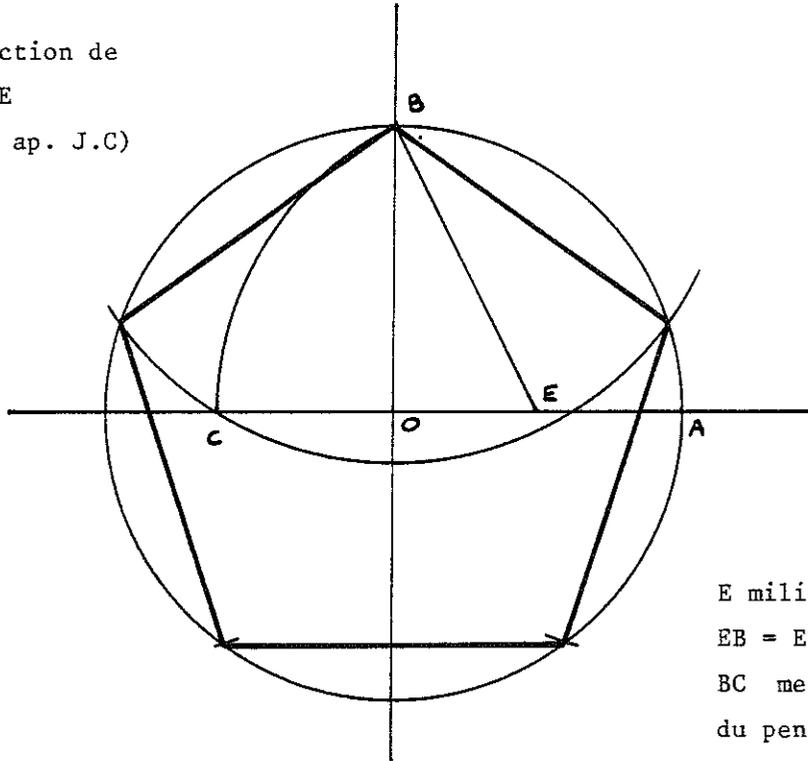
Chaque triangle d'or a ses sommets sur une spirale logarithmique.

Le centre de la spirale ou point asymptote est le point d'intersection de CC' et de DD' où C' est le milieu de AB et D' le milieu de BC .

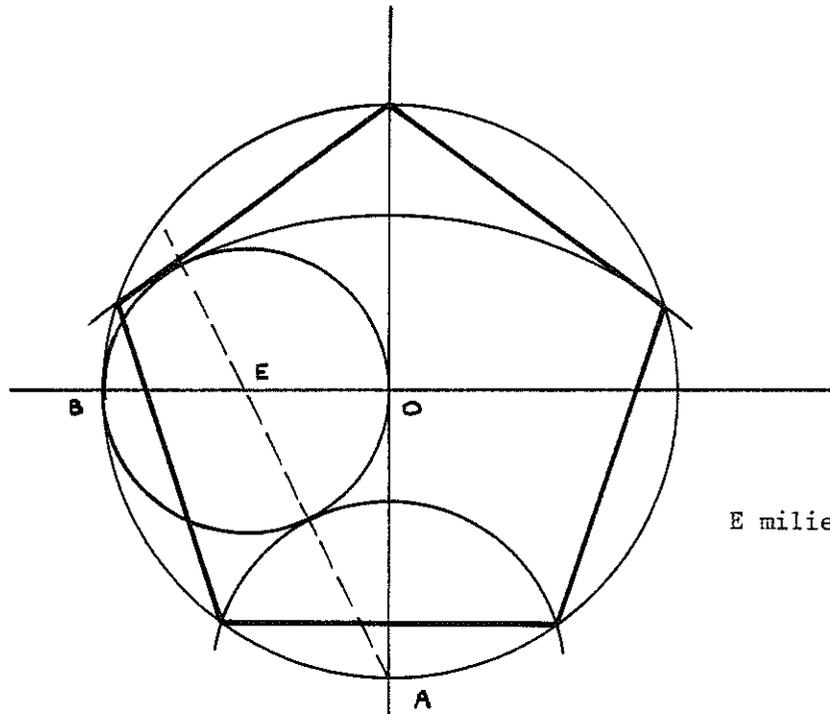
PENTAGONE REGULIER

1°) Deux constructions classiques du pentagone régulier

Construction de
PTOLEMEE
(85-165 ap. J.C)

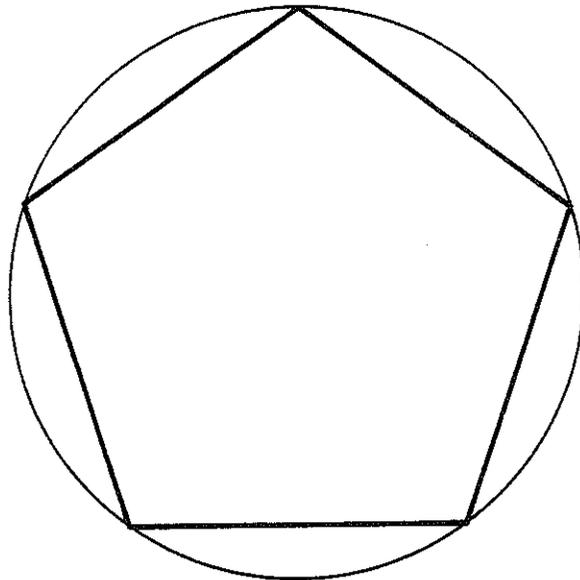


E milieu de OA
EB = EC
BC mesure le côté
du pentagone.



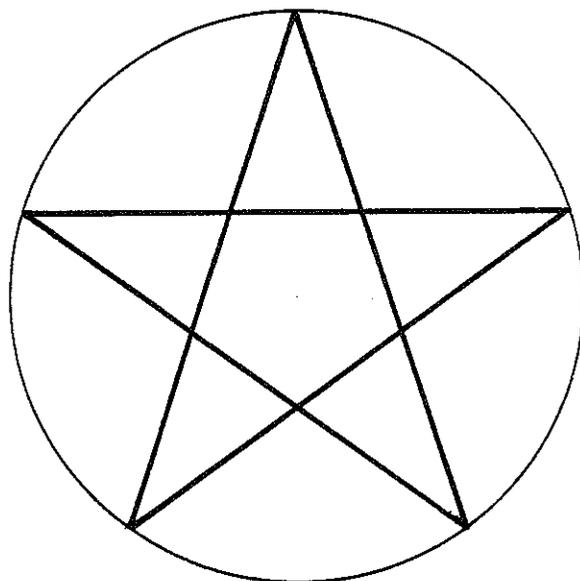
E milieu de OB

Les deux arcs de centre A, tangents au cercle de centre E de rayon EO, rencontrent le cercle de centre O et de rayon OB en quatre des sommets du pentagone.

2°) Les deux pentagones réguliers

Le pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle de rayon 1 a

pour côté $c_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$



Le pentagone régulier croisé inscrit dans un cercle de rayon 1 a pour

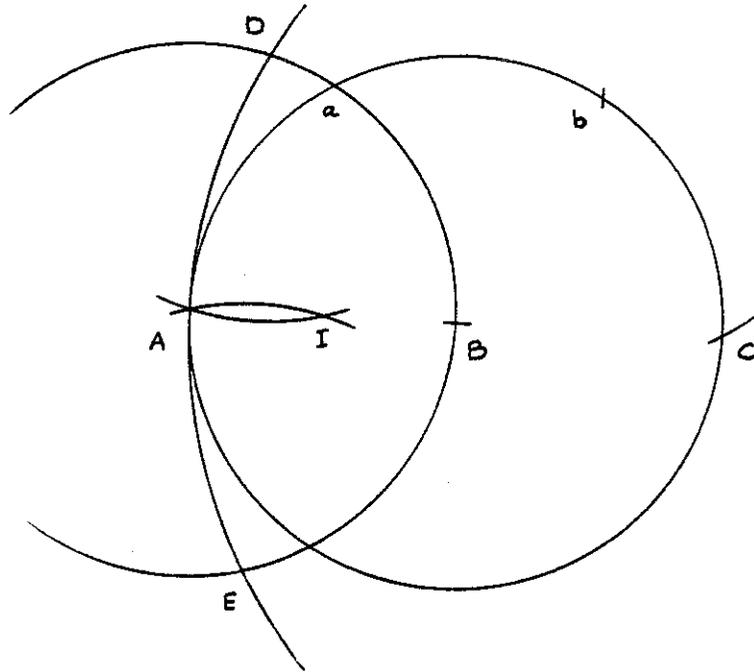
côté :

$$c'_5 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

On remarque que $\frac{c'_5}{c_5} = \phi$

3°) Construction du pentagone régulier à l'aide du compas seul.

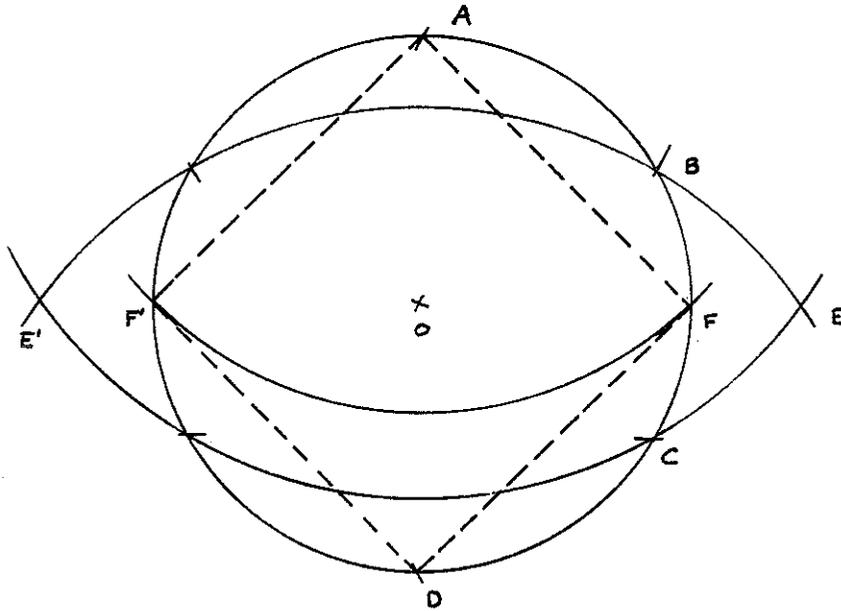
a) Construction au compas seul du milieu d'un bipoint



On cherche à construire le milieu I du bipoint (A,B).

On construit le cercle de centre B contenant A, puis à partir de A, et avec la même ouverture de compas, on construit quatre sommets consécutifs (A,a,b,C) d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle. C est donc le symétrique de A par rapport à B. Le cercle de centre A contenant B et le cercle de centre C contenant A se coupent en D et E. Les cercles de centres D et E contenant A se recoupent point I cherché.

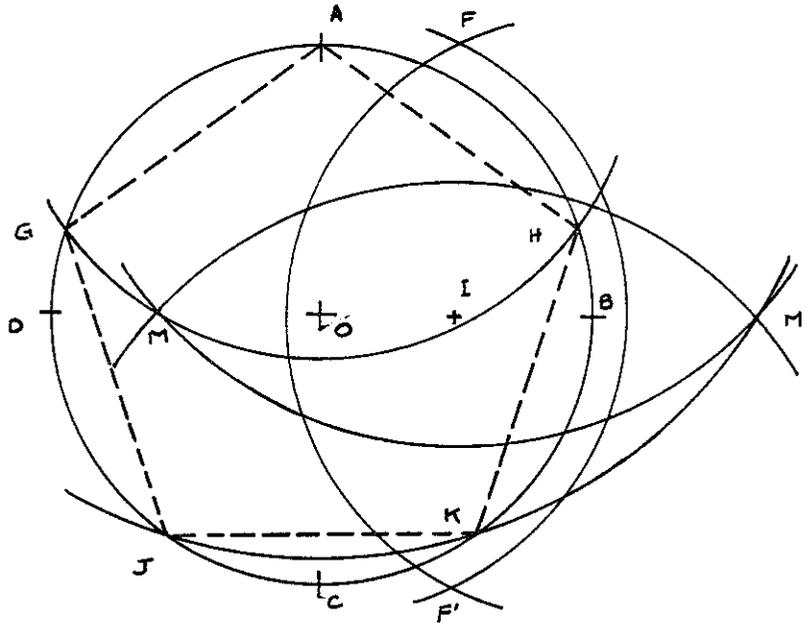
b) Construction au compas seul des sommets d'un carré



Soit (Γ) un cercle de centre O .

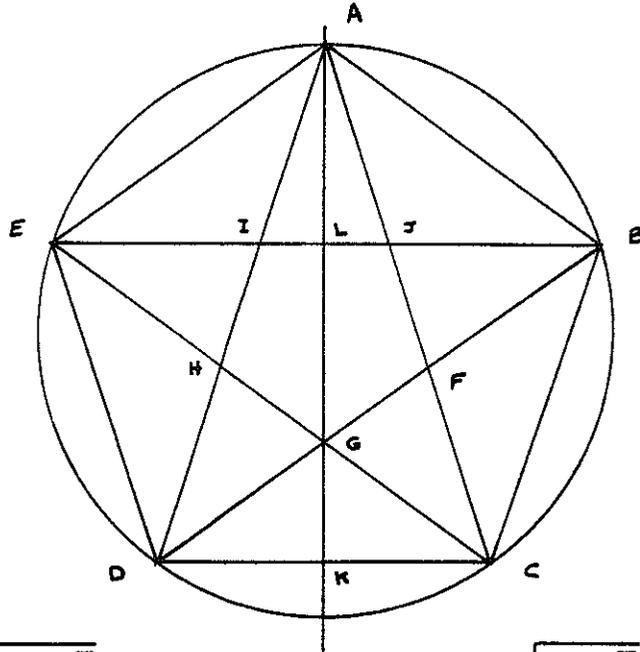
Soit A, B, C, D quatre sommets consécutifs d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle (Γ) ; le cercle de centre A contenant C et le cercle de centre D contenant B se coupent en E et E' . Le cercle de centre A et de rayon OE coupe le cercle (Γ) en deux points F et F' . $AFDF'$ est alors un carré.

c) Construction au compas seul du pentagone régulier.



On construit d'abord le carré inscrit ABCD (voir construction précédente) puis le milieu I du bipoint (O,B) (voir page 61)

On trace alors les cercles de centre O et B et de rayon AI, qui se coupent en F et F' ; puis les cercles de centre F et F' et de rayon DI qui se coupent en M et M'. Enfin on trace le cercle de centre A contenant M qui coupera le cercle (Γ) en deux points G et H ; on trace également le cercle de centre A contenant M' qui coupera (Γ) en J et K. A, G, H, J, K sont les sommets du pentagone cherché.

4°) Le nombre d'or dans le pentagone régulier

$$AB = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

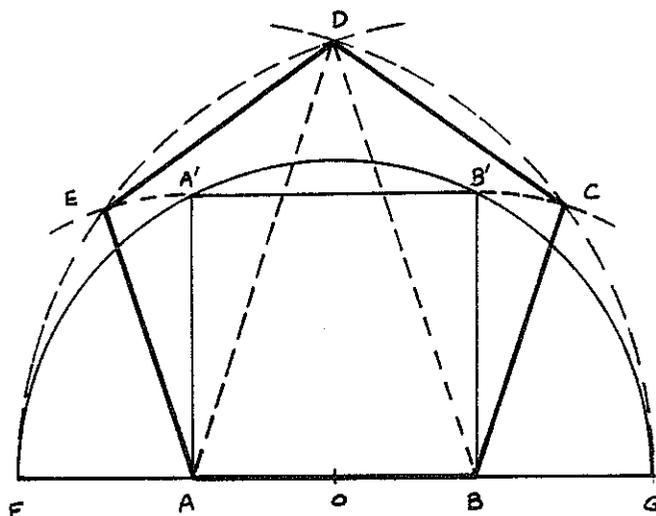
$$AC = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

Les triangles ACD, AJI, AFB, ABC, AJB, AFD sont des triangles d'or.

La figure contient 30 sections d'or :

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AC}{CJ} = \frac{AF}{AJ} = \frac{CJ}{CF} = \phi$$

$$\frac{AK}{LK} = \frac{LK}{LG} = \phi$$



AB est un côté du pentagone convexe.

On construit le carré $ABB'A'$, puis le demi-cercle de centre O (milieu de AB) contenant A' et B' . Les extrémités F et G du diamètre sont telles que

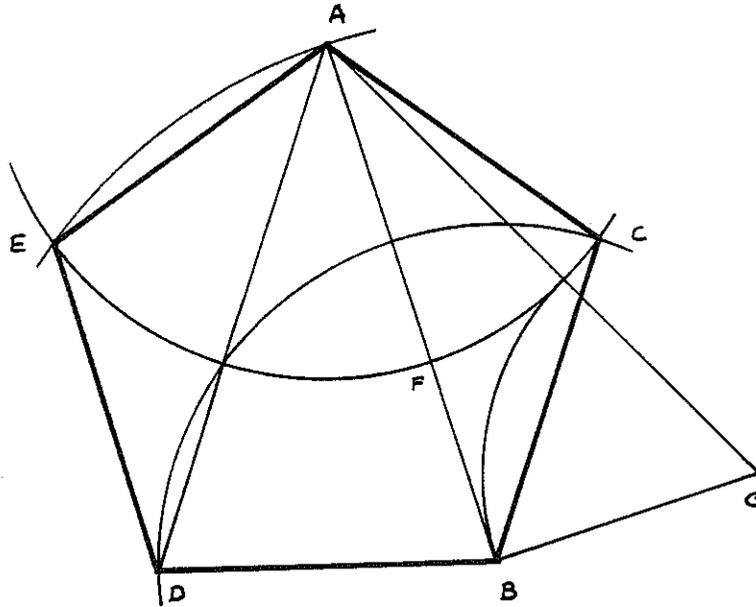
$$\frac{FB}{AB} = \frac{GA}{AB} = \phi .$$

FB mesure donc la diagonale du pentagone à construire.

D est tel que $AD = BD = BF$.

E et C sont tels que $BE = AC = BF$

et $AE = AA' = BB' = BC$.



Construction du pentagone par Euclide :

On se donne une diagonale AB et on construit F sur AB tel que

$$\frac{AB}{AF} = \phi$$

AF mesure le côté du pentagone régulier convexe.

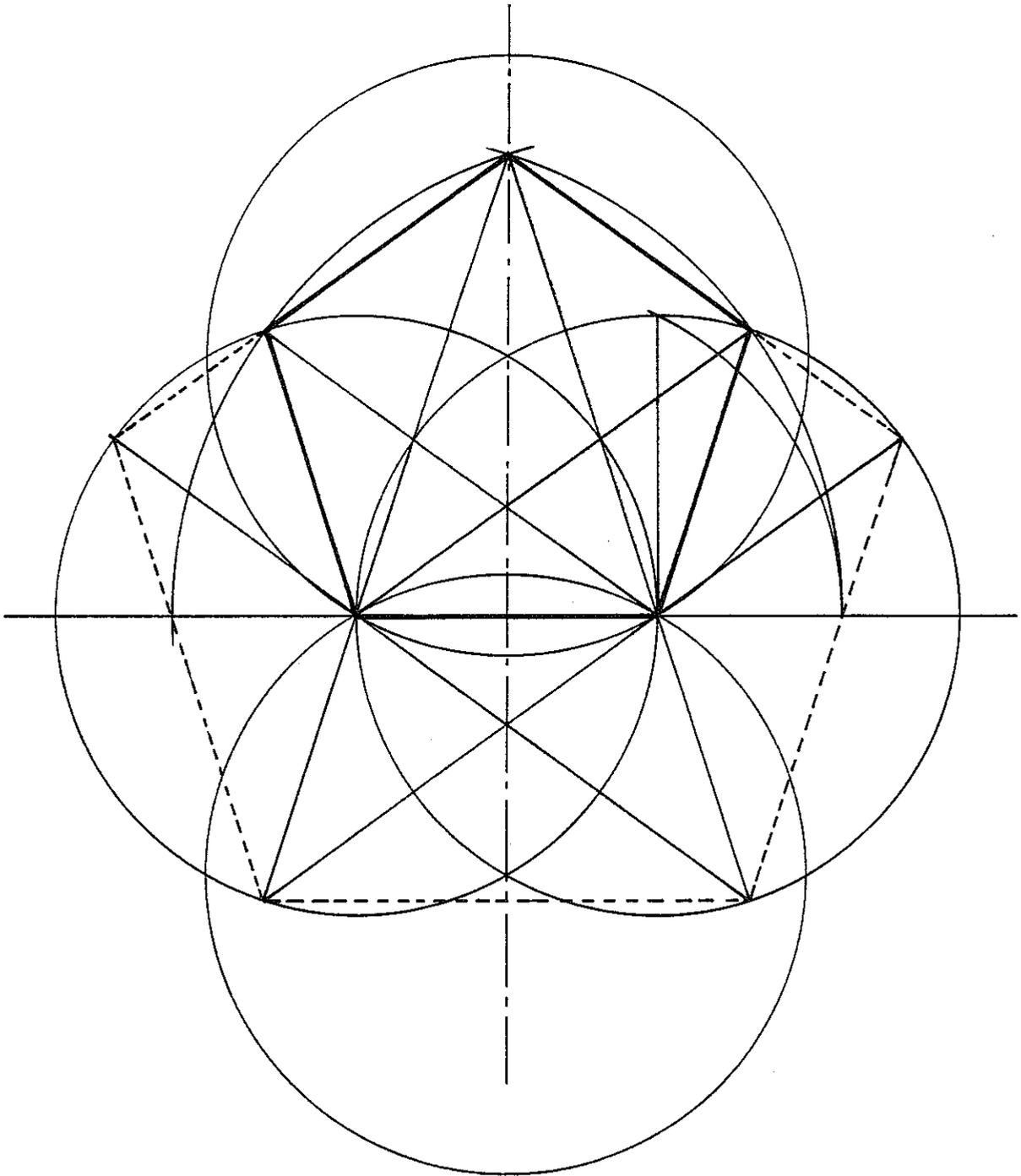
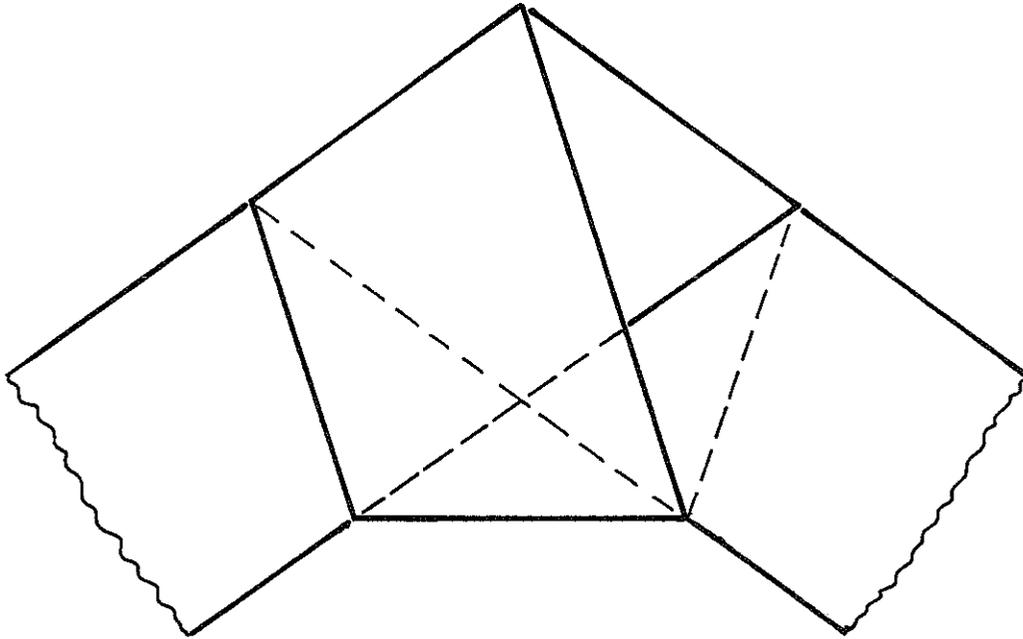


Diagramme d'Hippocrate

6°) Le noeud doré

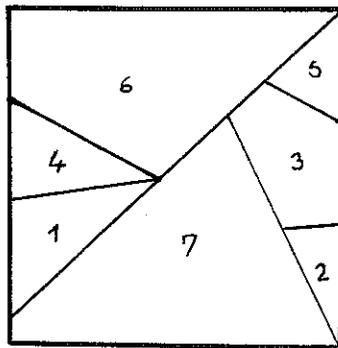
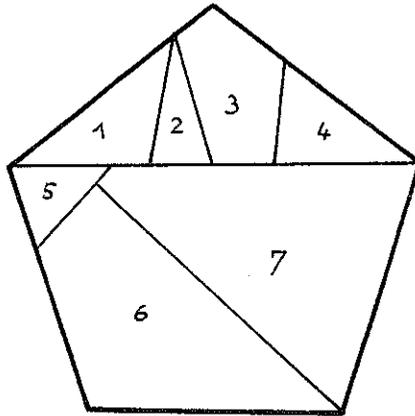
En pliant une bande de papier pour en faire un noeud plat, on obtient un pentagone régulier.

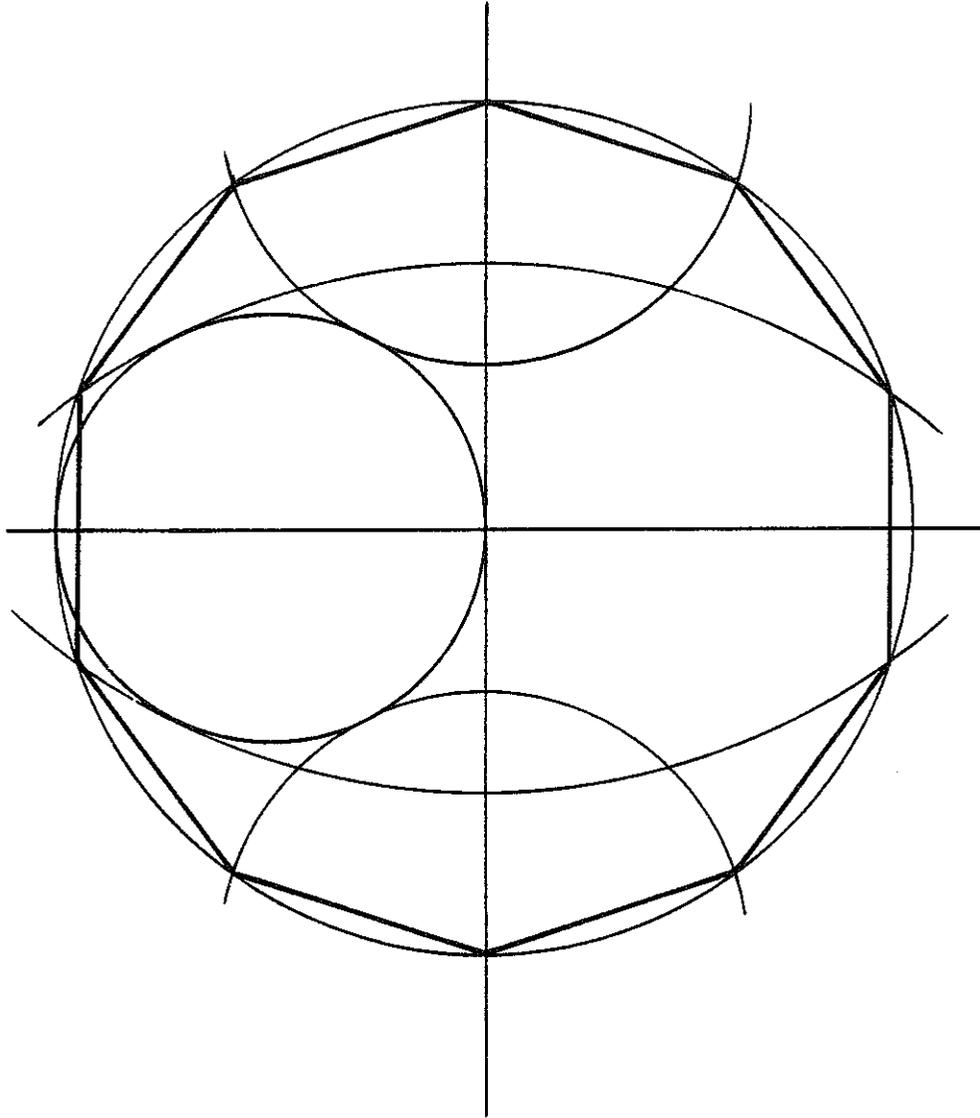
7°) Casse-tête :

Pouvez-vous décomposer un pentagone régulier en sept parties de manière qu'assemblées convenablement elles forment un carré ?

(Réponse page suivante).

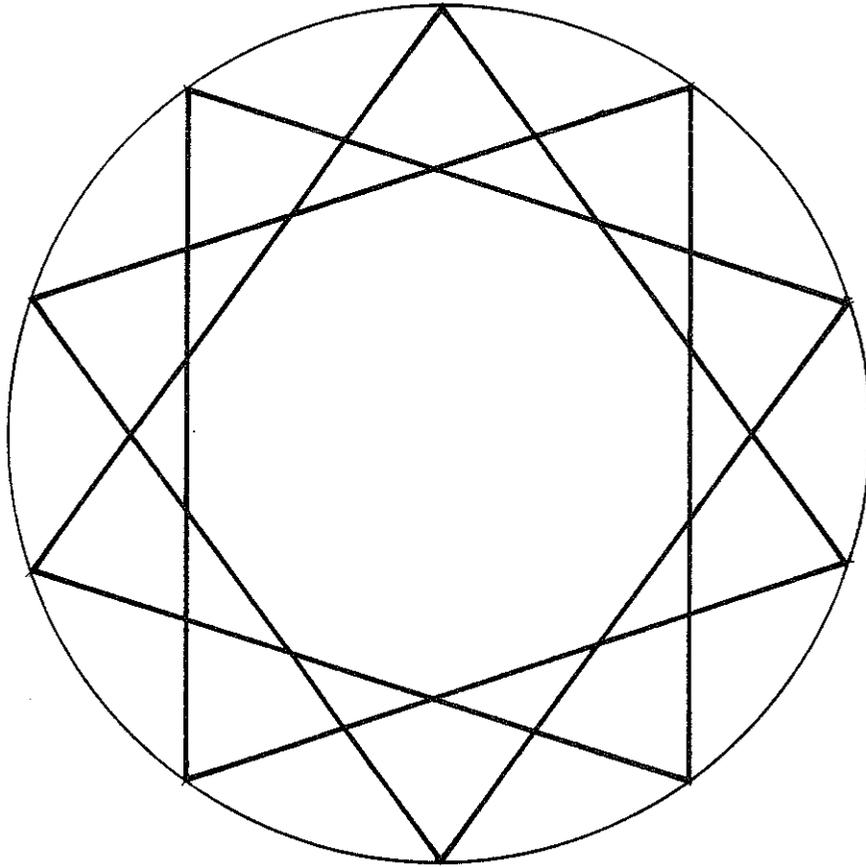
Réponse



1°) Construction du dodécagone

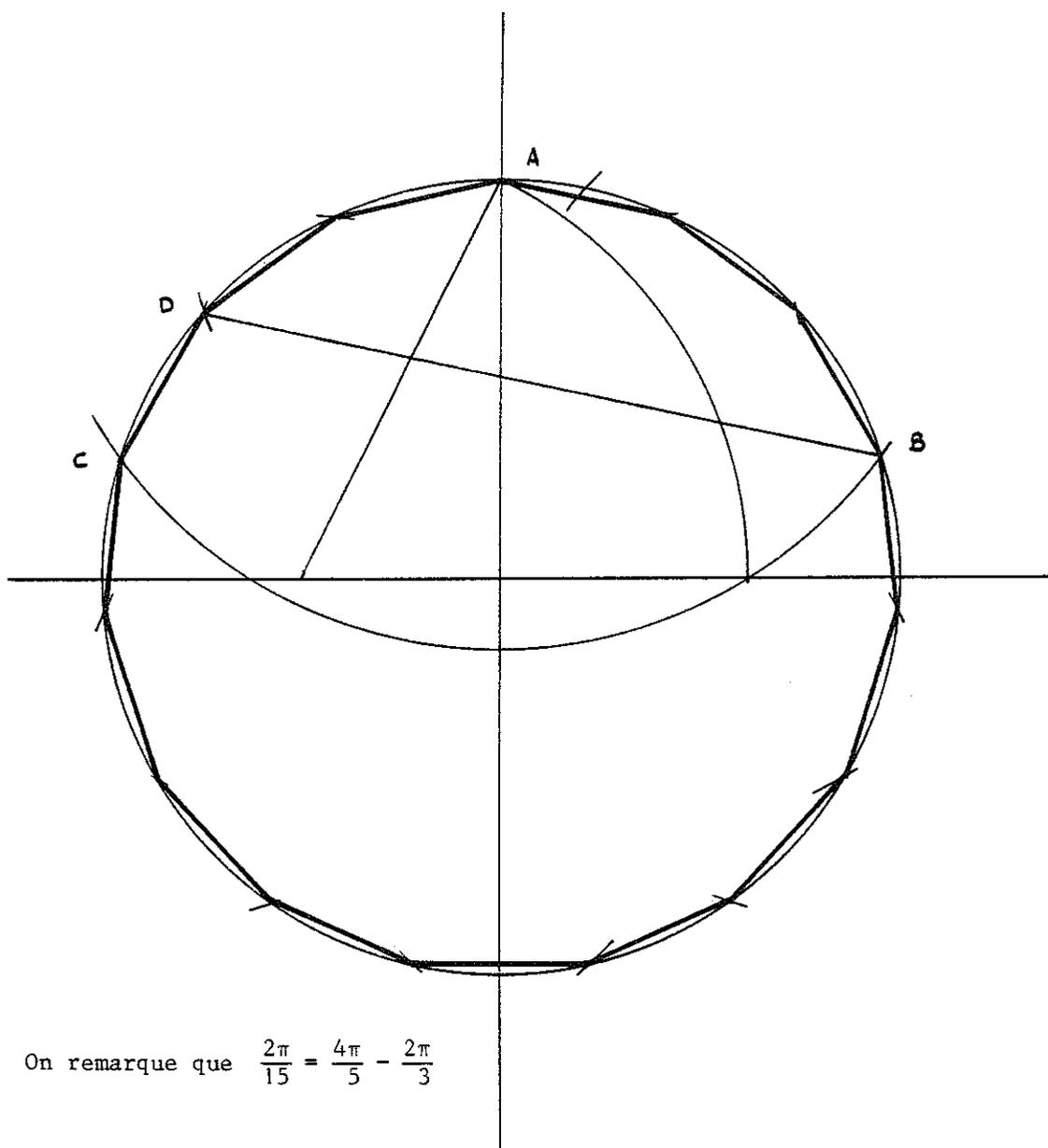
On construit les sommets de deux pentagones réguliers en utilisant la deuxième construction classique.

Le dodécagone croisé



Le dodécagone croisé contient cent sections dorées.

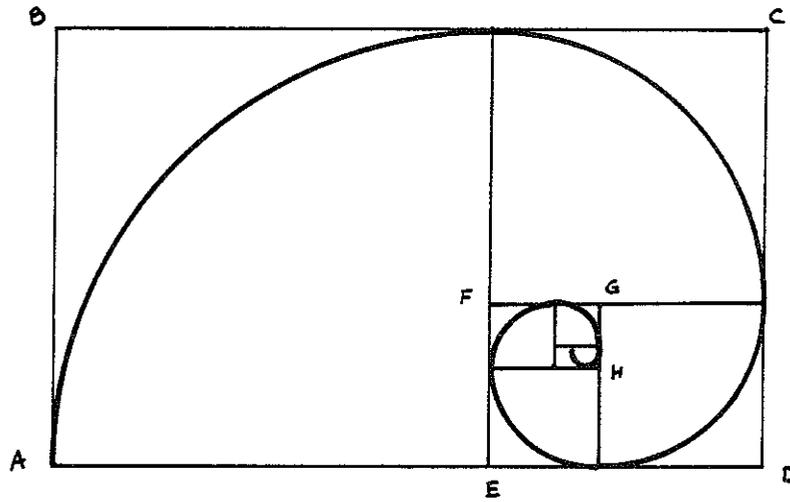
Polygone régulier convexe à 15 côtés



On remarque que $\frac{2\pi}{15} = \frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{3}$

On construit trois sommets consécutifs du pentagone régulier convexe (soit B,A,C), puis BD côté du triangle équilatéral inscrit. CD est le côté du polygone cherché.

CONSTRUCTIONS APPROCHEES



Construction approchée de la spirale
logarithmique

ABCD est un rectangle d'or.

On trace un quart de cercle de centre E de rayon EA, puis un quart de cercle de centre F, puis un quart de cercle de centre G, etc...

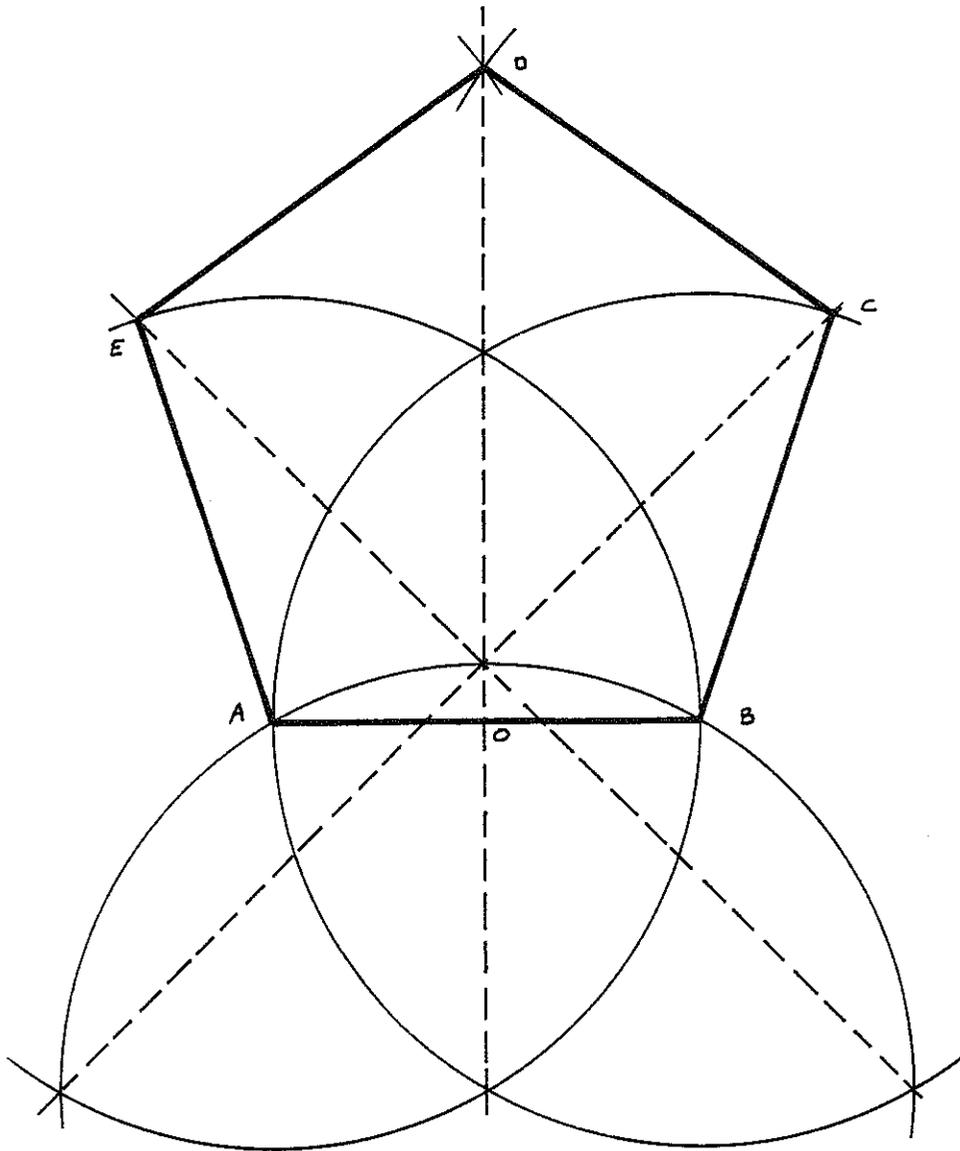
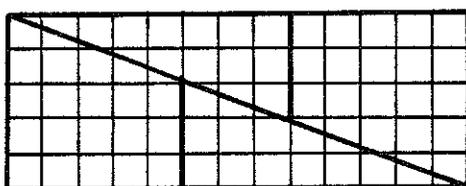
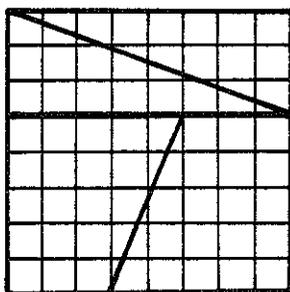


Diagramme de Dürer
(simplification du diagramme d'Hippocrate)

C'est une construction approchée du pentagone. Elle a l'avantage d'utiliser une seule ouverture de compas. Elle est "bonne" car l'angle ABC mesure $108,37^\circ$ au lieu de 108° soit une erreur relative inférieure à 0,004 et l'erreur relative sur OD est inférieure à 0,007.



Le paradoxe de Lewis Carroll : en découpant le carré et en disposant les morceaux de manière à obtenir un rectangle, on obtient $5 \times 13 = 8^2$ c'est-à-dire $65 = 64$.

En réalité les bords des morceaux ne coïncident pas exactement avec la diagonale mais déterminent un parallélogramme dont les angles mesurent respectivement $1,24$ degré et $178,76$ degré et dont la surface est celle du carré manquant.

On peut faire cette construction avec tous les triplets consécutifs de nombres de Fibonacci en prenant un carré de côté F_n et un rectangle de longueur F_{n+1} et largeur F_{n-1} , et on obtiendra $F_{n+1} \times F_{n-1} = F_n^2$

alors que $F_n^2 = F_{n+1} \times F_{n-1} + (-1)^{n+1}$.

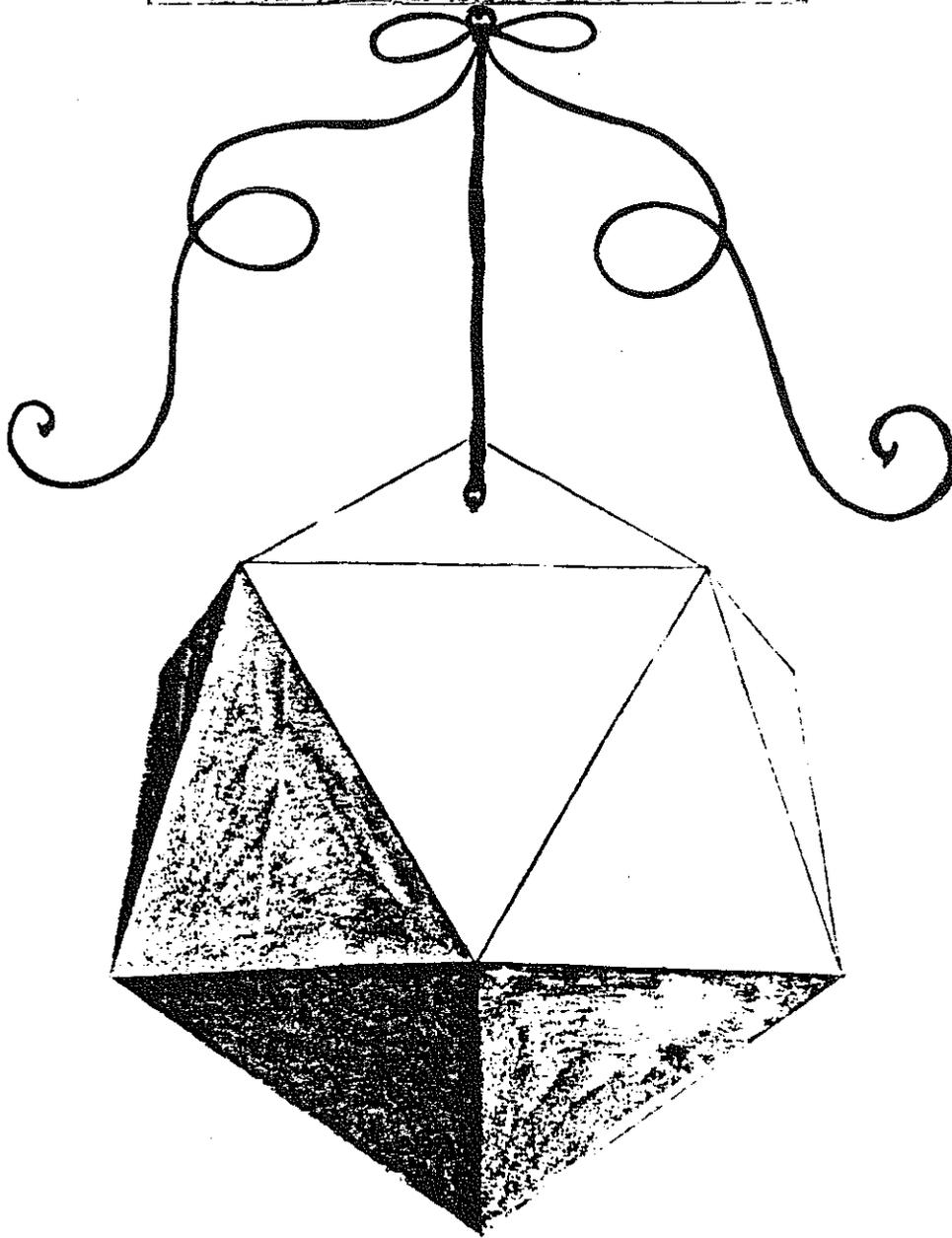
P O L Y E D R E S

Voici des polyèdres dessinés par Léonard de Vinci pour illustrer le livre de Luca Pacioli, "Divina proportione".

- icosaèdre plein
- icosaèdre vide
- icosaèdre étoilé plein
- icosaèdre étoilé vide
- dodécaèdre plein
- dodécaèdre vide
- dodécaèdre étoilé plein
- dodécaèdre étoilé vide
- icosaèdre tronqué plein
- icosaèdre tronqué vide
- dodécaèdre tronqué plein
- dodécaèdre tronqué vide
- dodécaèdre tronqué étoilé plein
- dodécaèdre tronqué étoilé vide.

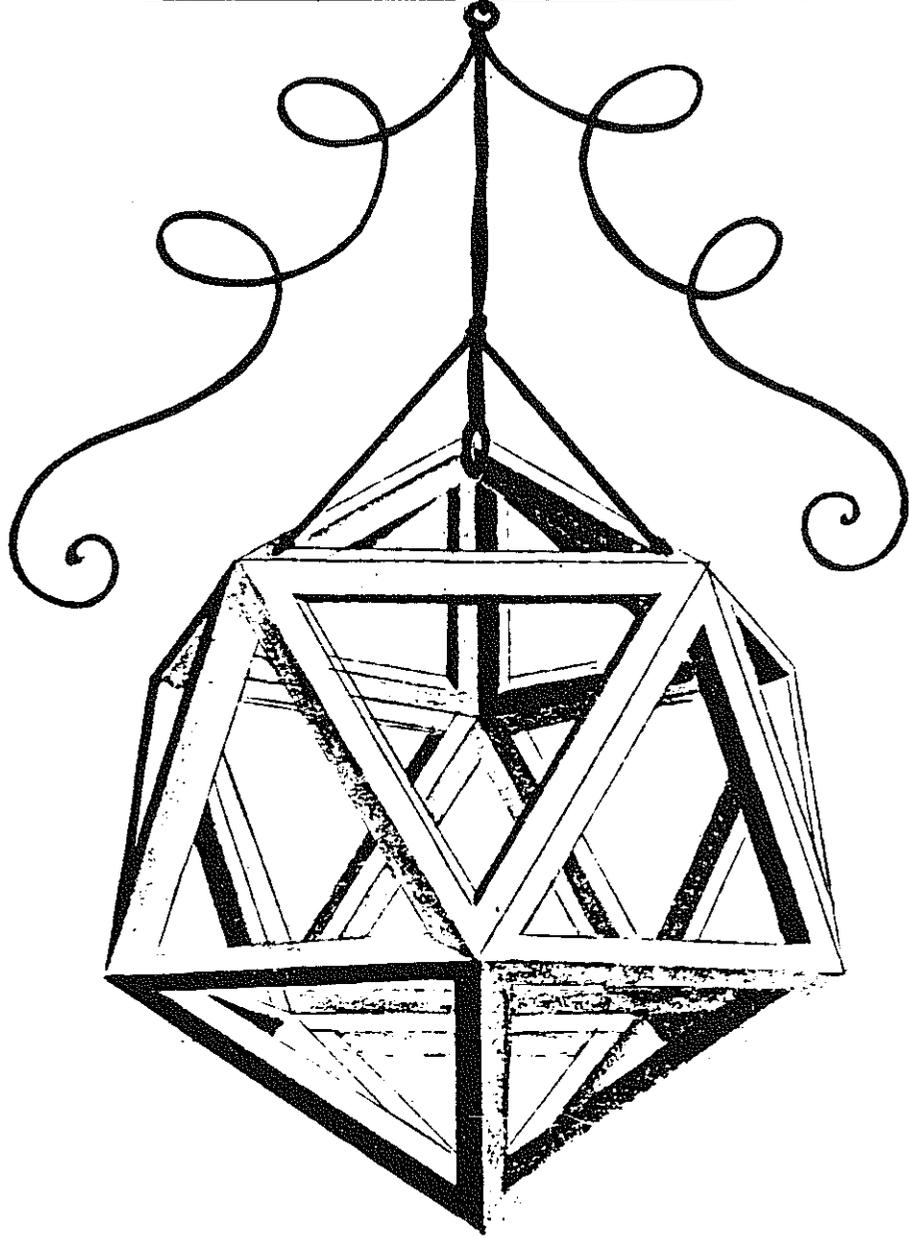
On retrouve dans ces polyèdres des pentagones et le nombre Φ .

YCOCEDRON PLANVS.
SOLIDVS.



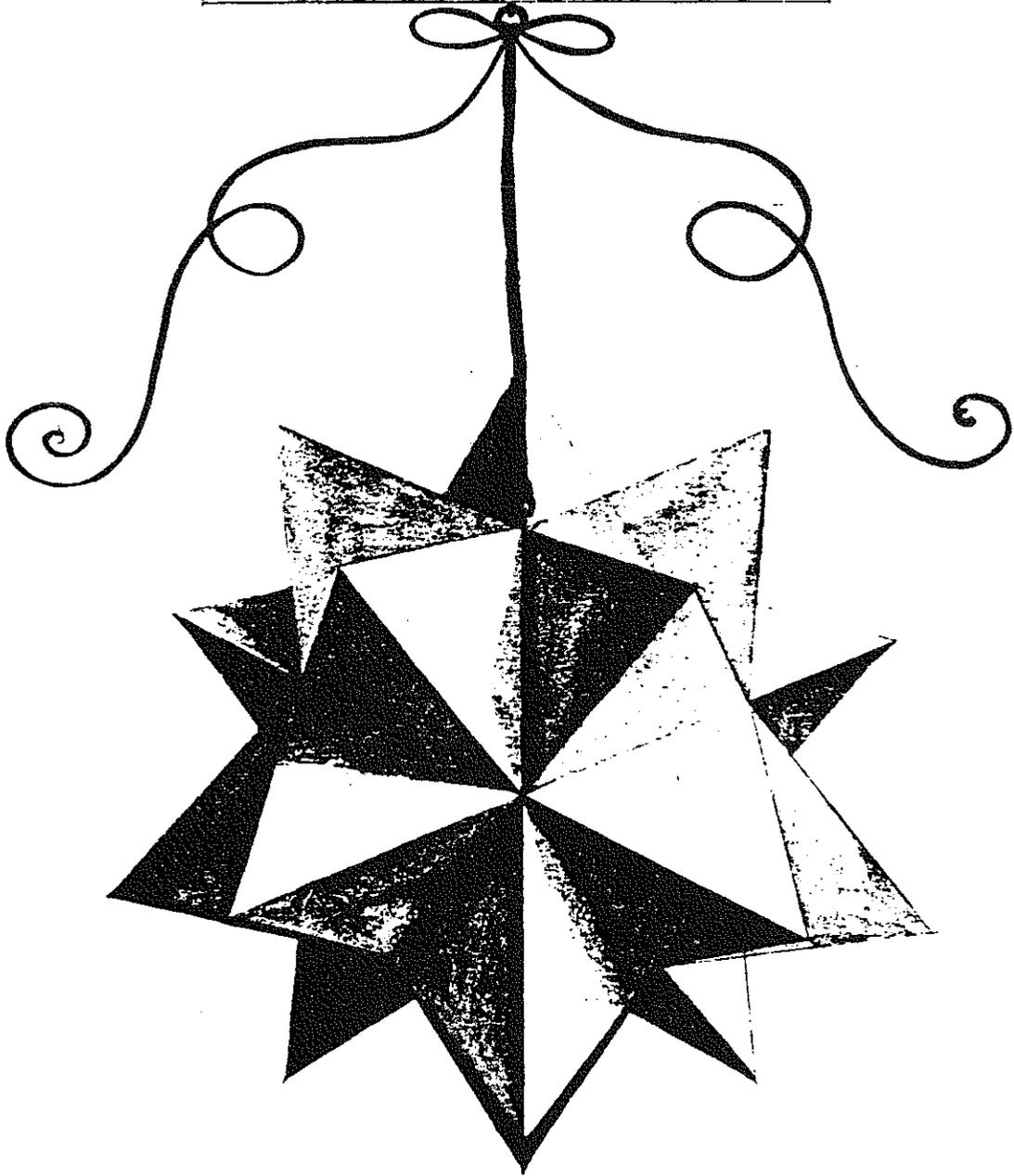
Engraved by G. Kneller.

ΥΠΟΚΕΔΡΟΝ ΠΛΑΝΟΝ
ΥΑΚΥΣΣΟΝ.



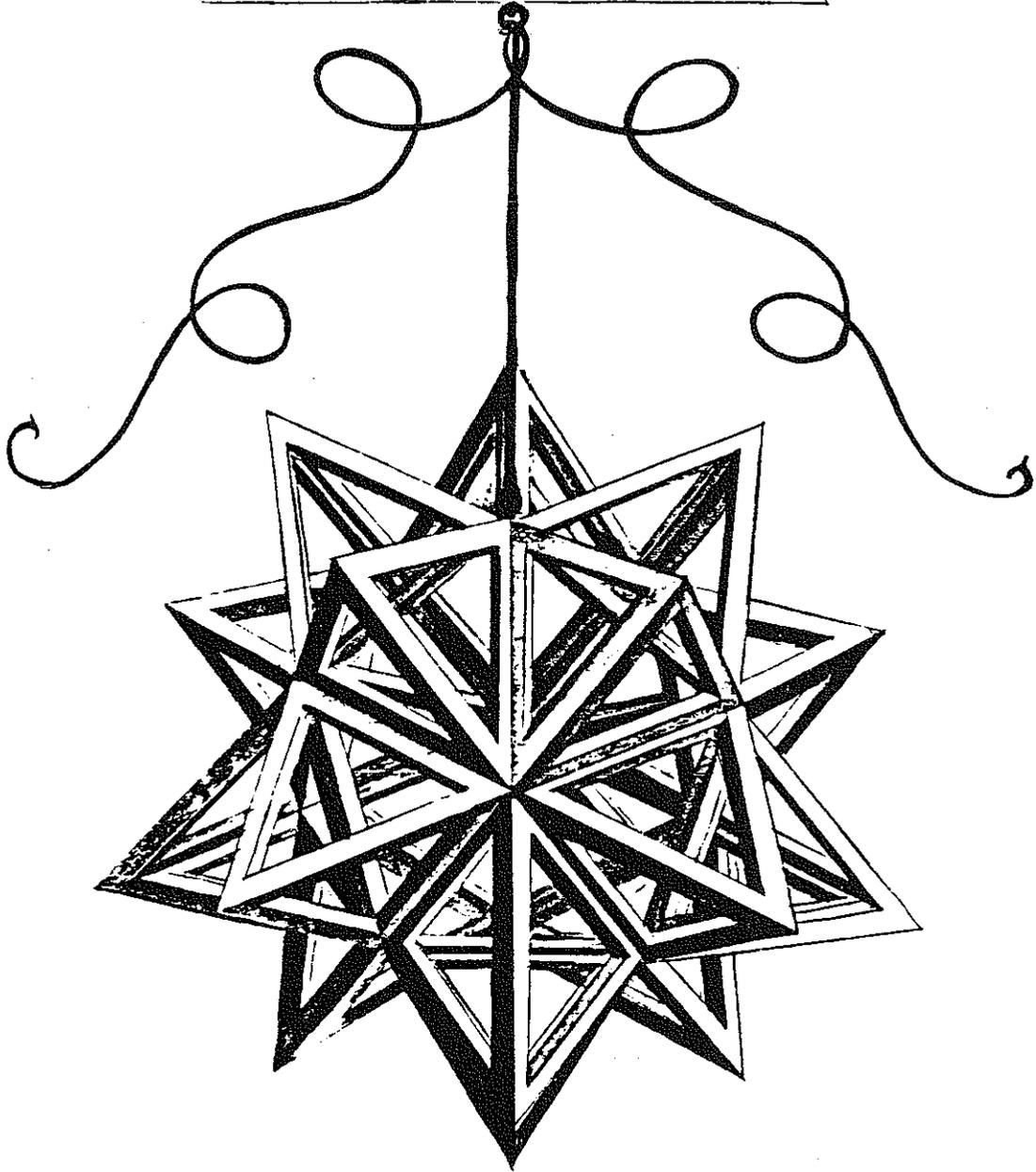
Εἶδος ὑποκεδρῶν ἐπιπέδων ὑακύσσοι.

ΥΚΟCΕΔΡΟΝ ΕΛΕΒΑ
ΤΥS SΟLΙΔΥS.



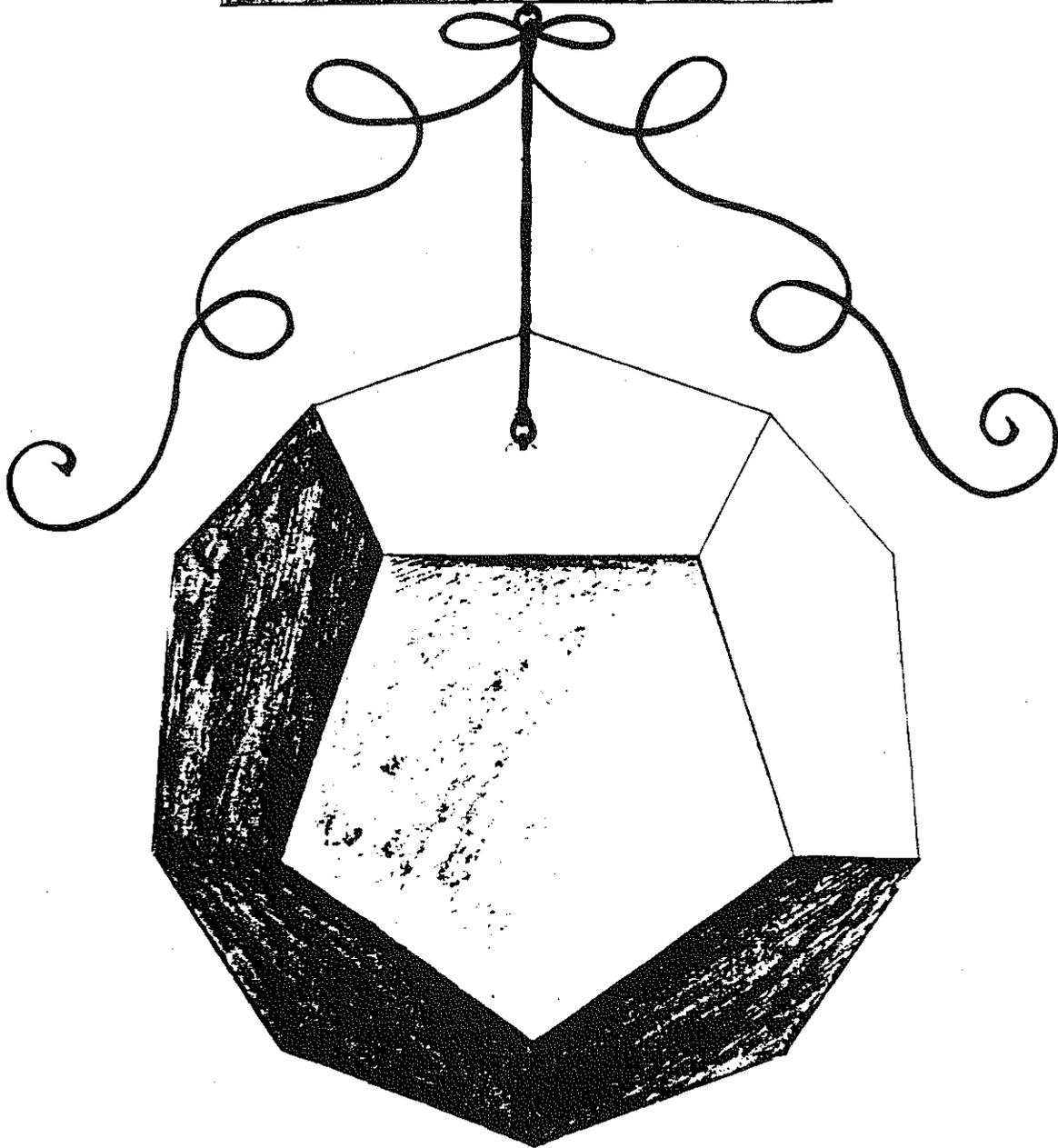
Εἰκοβέδρον ἑξήκοντα ἑξάρτηρον.

ΥCOCEDRON ELEVATVS
VACVVS.



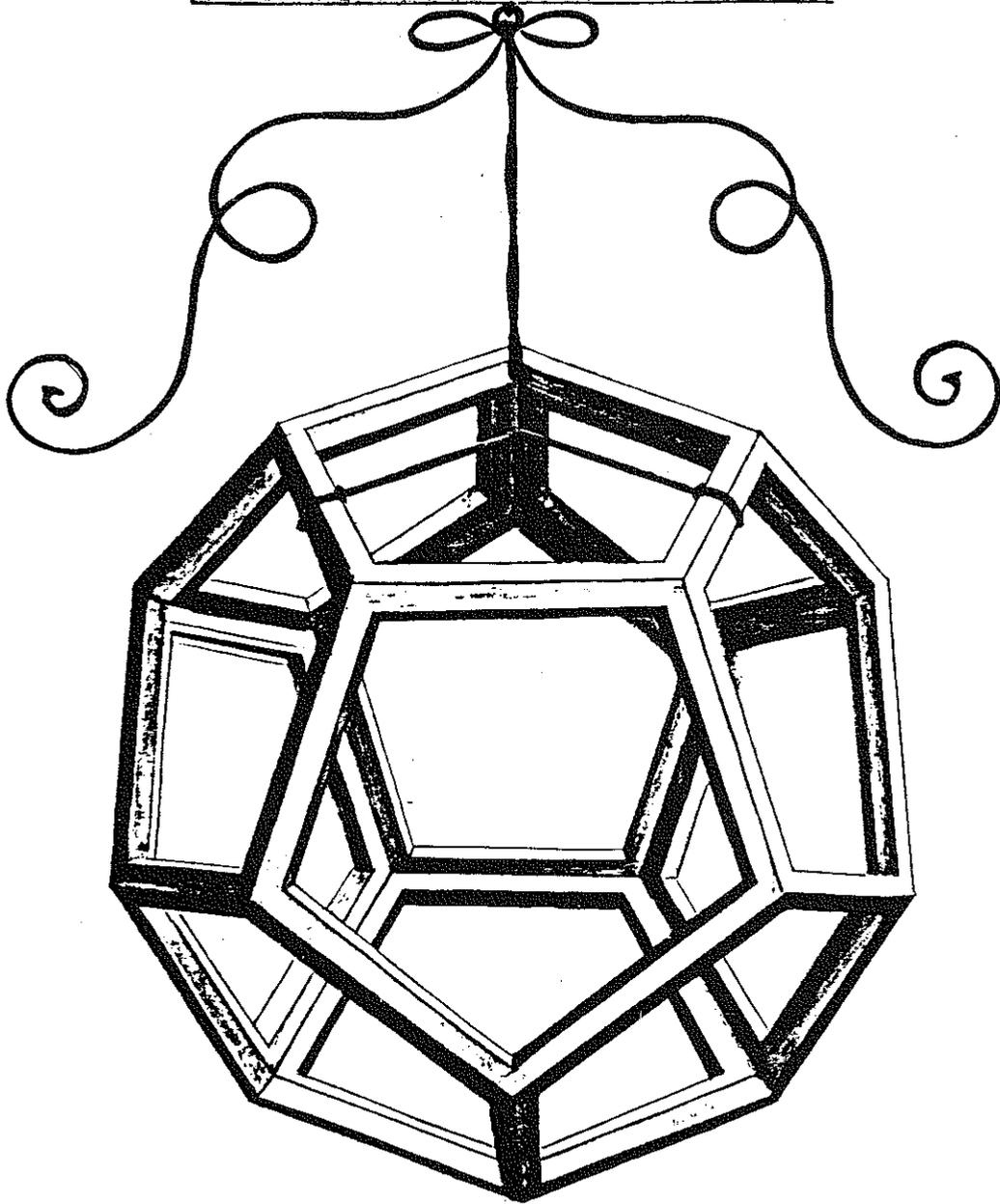
Εἰς τὸ ἑξῆς ἂν ἀποδείξω.

DVODECEDRON PLA.
NVS SOLIDVS.



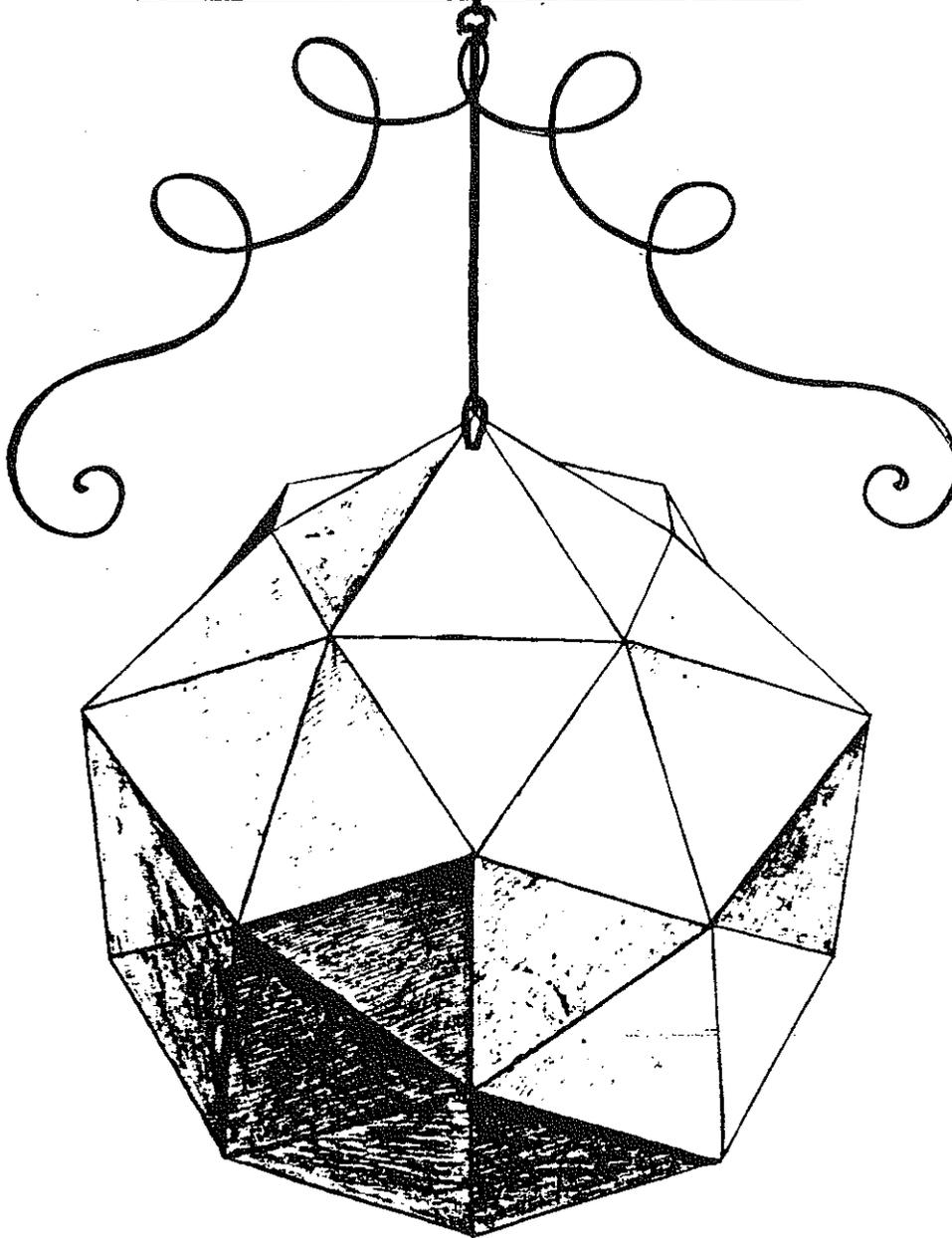
δωδεκάεδρον ἑξάγωνον

DVODECEDRON PLANVS
VACVVS.



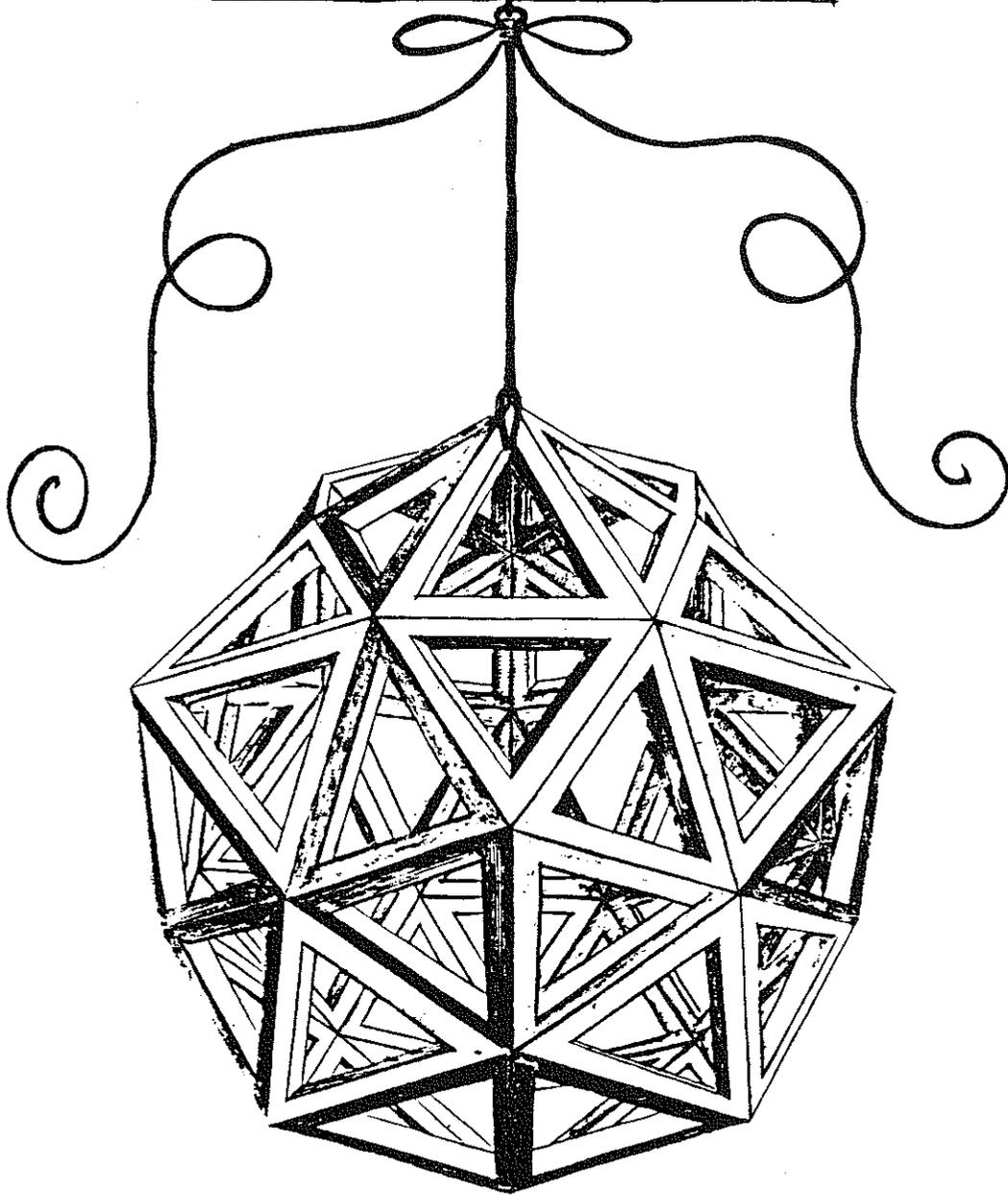
Δωδεκάεδρον ἰσοπέδιλον ἰσοκείμενον.

DVODECEDRON ELE
VATVS SOLIDVS



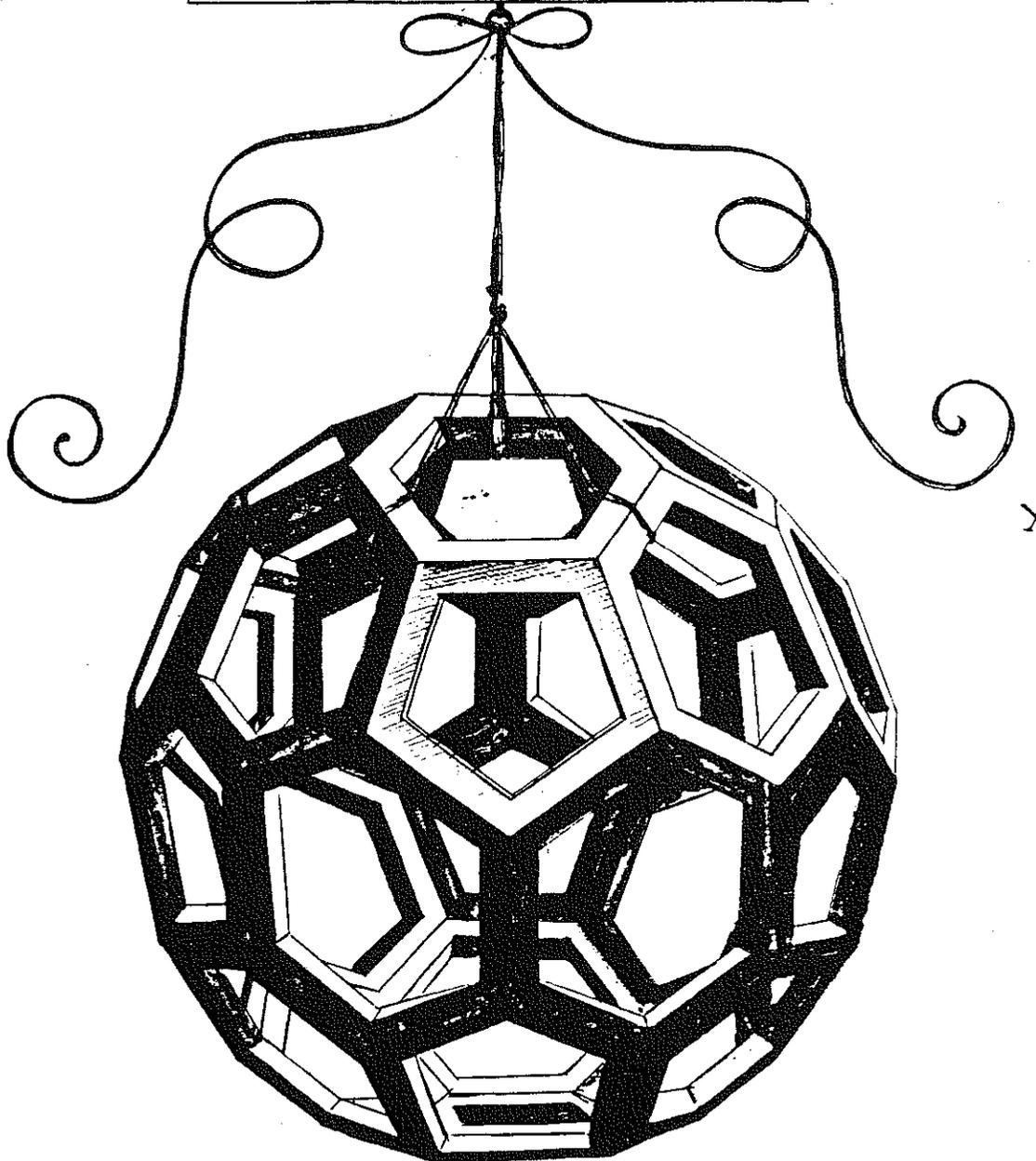
And called you to his rest.

DVODECEDRON ELEVA
TVS VACVVS



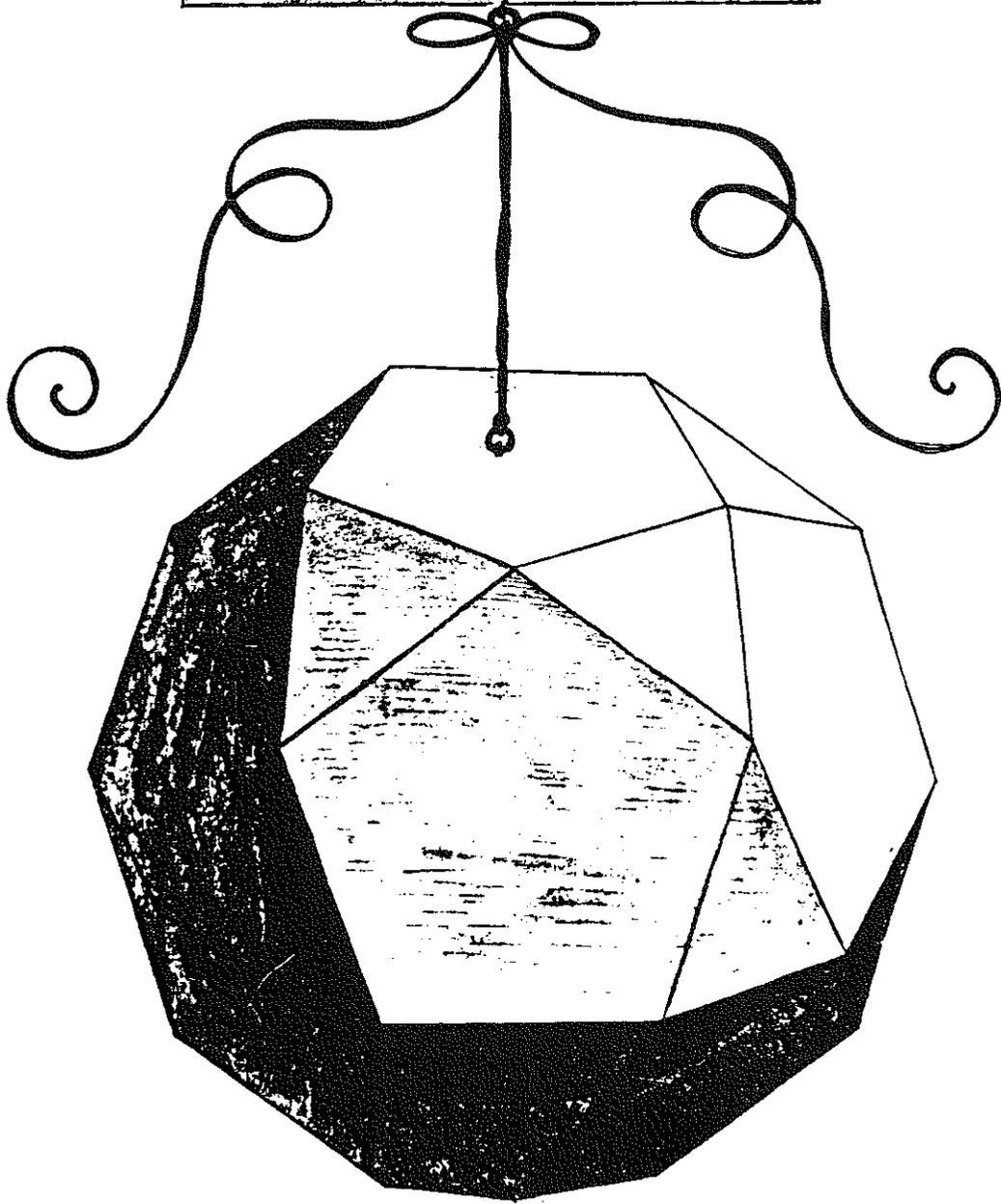
Αωλενολεδρον ες δευ κενον

ΥCOCEDRON· ABSCISVS
VACVVS.



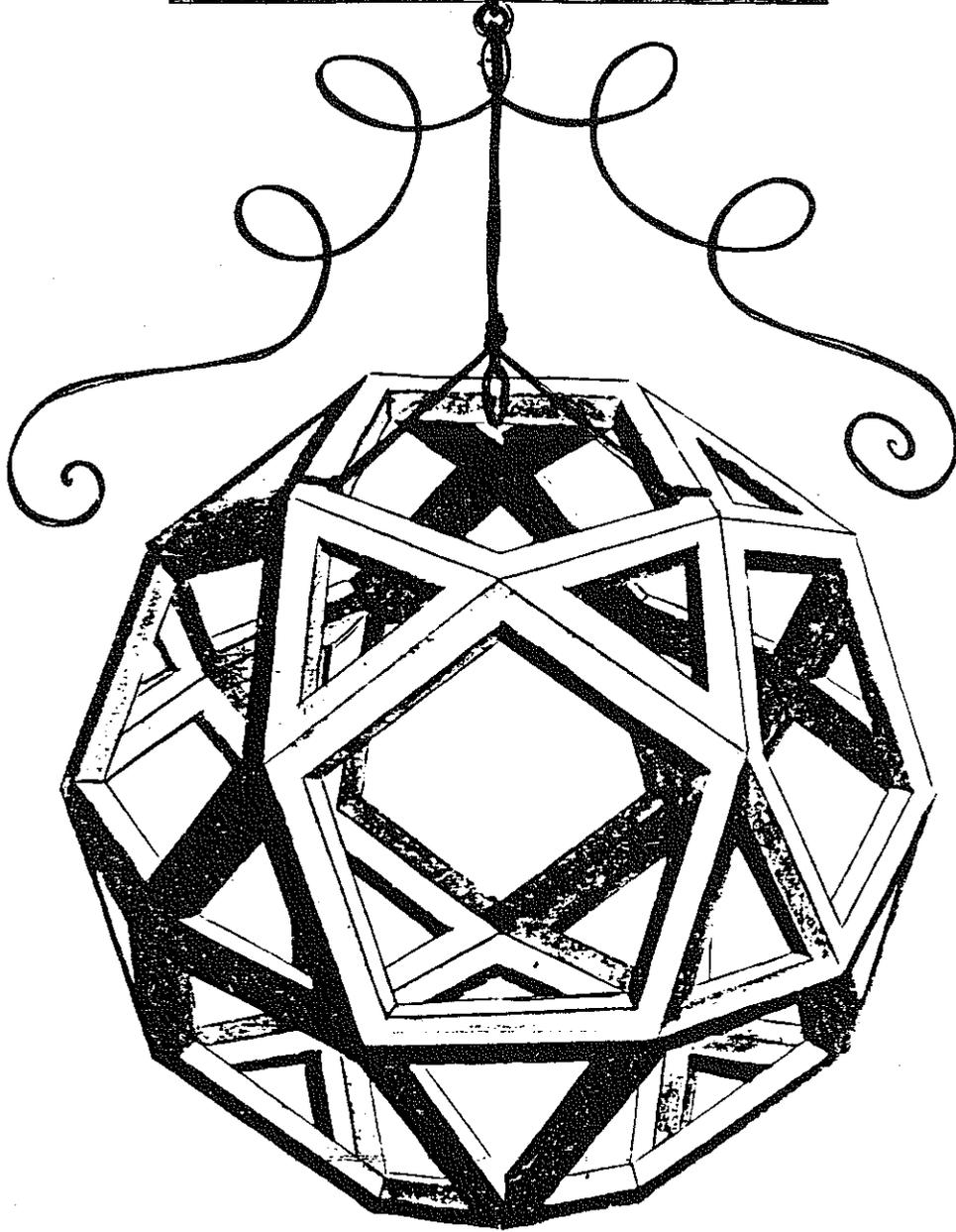
μεθελειν αφηρηδ' κενου.

DVODECEDRON ABSCI
SVS SOLIDVS



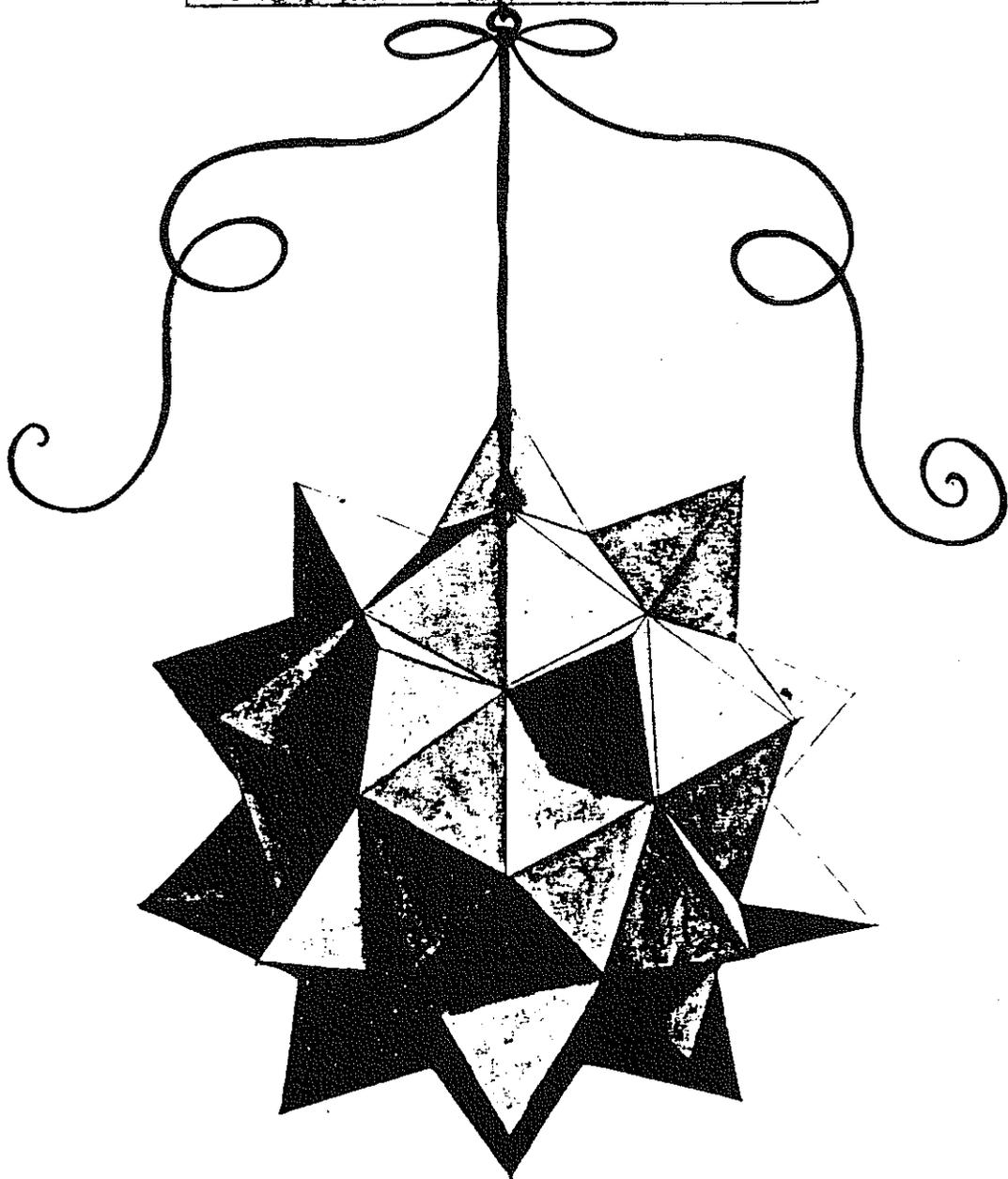
20 dodecagona pentagona sunt.

DVODECEDRON ABSCI
SVS VACVVS



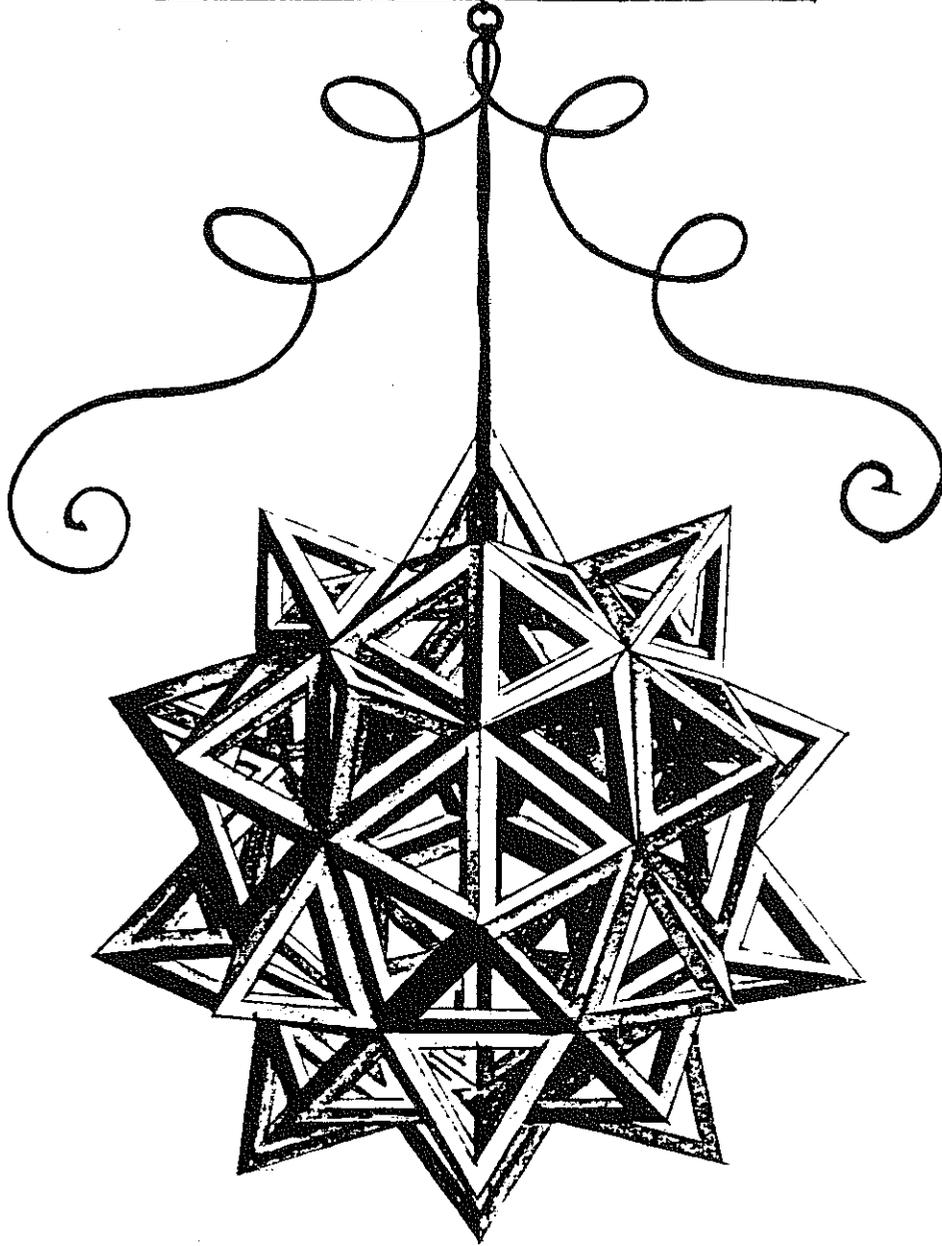
Σωλὸν κ' ἐστὶν ἡ φασὶς δὲ οὐκ ἐστὶν.

DVODECEDRON ABSCI
SVS ELEVATVS SOLIDVS .

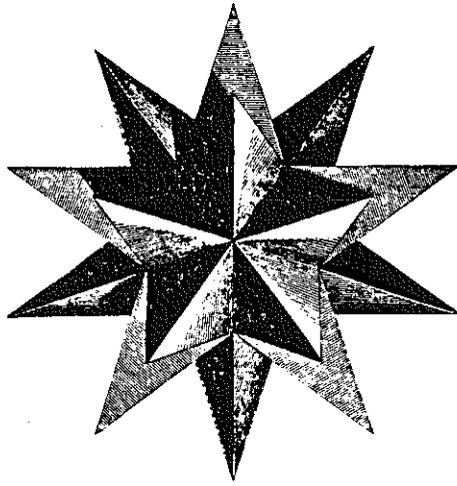


Δωδεκάεδρον ἀποκομῆς ἑξῆς.

DVODECEDRON ABSCI
SVS FIEVATVS VACVVS.



Handwritten text, possibly a signature or note, located below the main diagram.



LES JEUX

LE JEU DE NIM - WHYTOFF

1°) Le jeu

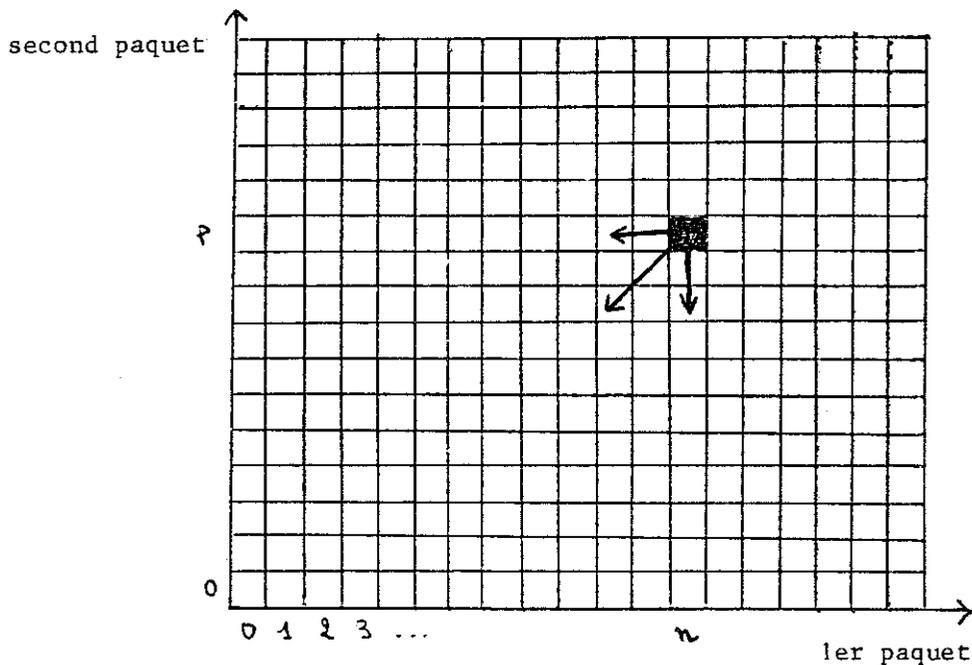
La configuration de départ est formée de deux paquets d'allumettes (pas forcément égaux).

Chacun des deux joueurs joue à son tour et peut

- soit retirer autant d'allumettes qu'il veut dans un seul des paquets de son choix ;
- soit retirer le même nombre d'allumettes (de son choix) dans chacun des paquets.

Le vainqueur est celui qui ramasse la dernière allumette.

On peut représenter les configurations successives sur un quart de plan quadrillé :



A partir d'une position (n,p) , on passe à une position $(n-k,p)$ avec $0 < k \leq n$, ou à $(n,p-k)$ avec $0 < k \leq p$, ou $(n-k,p-k)$ avec $0 < k \leq \text{Min}(n,p)$.

2°) La recherche des situations perdantes

La situation est perdante si, quel que soit le coup joué, elle laisse à l'adversaire la possibilité de gagner.

Ainsi $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$ sont des situations perdantes.

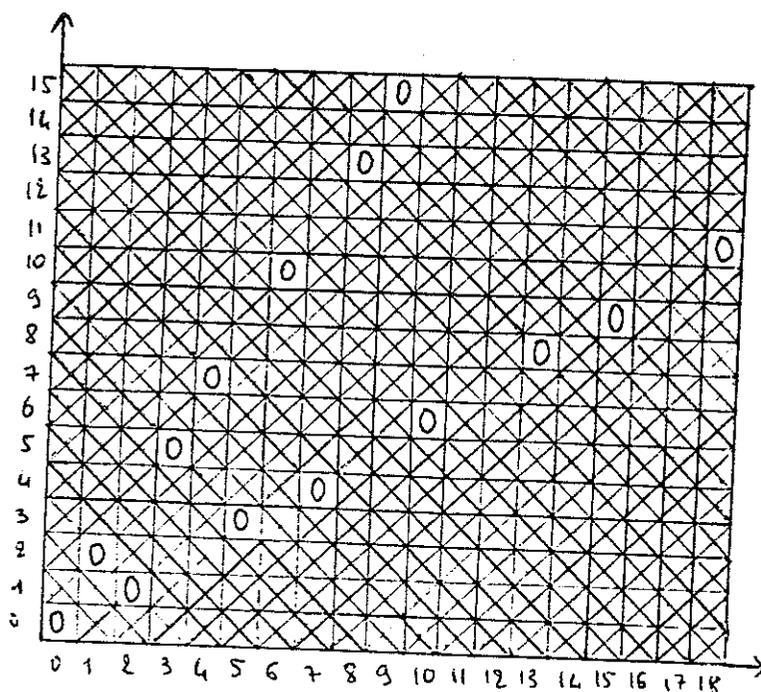
Les situations qui permettent d'atteindre en un coup une situation perdante sont gagnantes.

Ainsi, $\forall n > 0$ $(n,0)$, $(0,n)$, (n,n) sont des situations gagnantes, et d'une manière générale

(*) (n,p) situation perdante $\Rightarrow \forall q > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} (n+q,p) \\ (n,p+q) \\ (n+q,p+q) \end{array} \right.$ sont des situations gagnantes

On peut alors à partir de $(0,0)$ construire l'ensemble des situations gagnantes (notées X) et perdantes (notées 0) en procédant de situation perdante en situation perdante : à partir d'une situation perdante (n,p) , on inscrit les situations gagnantes $(n+q,p)$, $(n,p+q)$ et $(n+q,p+q)$ pour toutes les valeurs de q et la première (au sens "plus petite abscisse ou plus petite ordonnée") case non remplie est une situation perdante.

Le jeu est évidemment symétrique par rapport à la première bissectrice et d'après la propriété (*) et la construction, il y a exactement un "0" par ligne, un "0" par colonne et un "0" par "parallèle" à la première bissectrice.



3°) Les paires de Whytoff et le nombre d'or

L'ensemble des situations perdantes est symétrique par rapport à la première bissectrice. On peut limiter l'étude aux situations perdantes (x,y) telles que $x \leq y$.

En les ordonnant suivant les abscisses croissantes :

$(1,2)$; $(3,5)$; $(4,7)$; $(6,10)$... on définit deux suites u et v définies par :

$\forall n \geq 1$ (u_n, v_n) est le $n^{\text{ième}}$ élément de l'ensemble ordonné ci-dessus.

On démontre en utilisant la règle de construction de la liste des situations gagnantes et perdantes, que :

- (a) u et v sont des suites croissantes
- (b) $\forall n \geq 1$ $u_n + n = v_n$ (récurrence)
- (c) $\{u_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{v_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ sont deux parties disjointes et complémentaires de \mathbb{N}^* .

On démontre en outre que si deux suites u' et v' vérifient (a), (b) et (c) alors $u'=u$ et $v'=v$.

Whytoff a trouvé l'expression des nombres u_n et v_n :

$$\begin{cases} u_n = E(n\phi) \\ v_n = E(n\phi^2) \end{cases}$$

où ϕ est le nombre d'or, et E la fonction partie entière.

Les paires $\{u_n, v_n\}$ portent le nom de "paires de Whytoff".

4°) Les paires de Whytoff et les suites de Fibonacci

De nombreuses propriétés des paires de Whytoff ont été démontrées.

Nous avons vu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n + n = v_n$

Nous utiliserons aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{v_n} = u_n + v_n$

La première paire de Whytoff est :

$$u_1 = 1 = F_2 \quad , \quad v_1 = 2 = F_3 \quad , \quad \text{les } F_i \text{ étant les nombres de Fibonacci.}$$

On en déduit :

$$u_2 = F_2 + F_3 = F_4 = 3$$

$$v_2 = u_2 + 2 = F_4 + F_3 = F_5 = 5$$

puis

$$u_5 = F_5 + F_4 = F_6 = 8$$

$$v_5 = u_5 + 5 = F_6 + F_5 = F_7$$

et d'une manière générale :

$$u_{F_{2p-1}} = F_{2p}$$

$$v_{F_{2p-1}} = F_{2p+1}$$

Donc les paires $\{F_{2p}, F_{2p+1}\}$ sont des paires de Whytoff.

La première paire de Whytoff qui ne s'écrit pas sous cette forme est $\{u_3, v_3\}$

$$u_3 = 4 = L_3, \quad v_3 = 7 = L_4, \quad \text{les } L_i \text{ étant les nombres de Lucas.}$$

On en déduit :

$$u_7 = L_3 + L_4 = L_5 = 11$$

$$v_7 = u_7 + 7 = L_5 + L_4 = L_6 = 18$$

et d'une manière générale

$$u_{L_{2p}} = L_{2p+1}$$

$$v_{L_{2p}} = L_{2p+2}$$

donc les paires $\{L_{2p+1}, L_{2p+2}\}$ sont des paires de Whytoff.

On peut recommencer avec la première paire de Whytoff $\{a, b\}$ non précédemment exprimée et la suite de nombres définie par

$$w_0 = a$$

$$w_1 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_{n+1} = w_n + w_{n-1}$$

(suite de Fibonacci généralisée).

Les paires $\{w_{2p}, w_{2p+1}\}$ seront alors des paires de whytoff.

Robert Silber a étudié l'ensemble de ces paires $\{a, b\}$ et a démontré qu'il était infini. (Ce sont les paires de Whytoff dont l'indice est un terme de la suite (u_n)).

5°) La stratégie à utiliser pour gagner

Connaissant la liste des paires de Whytoff $\{u_n, v_n\}$ nécessaires au jeu, on sait déterminer si une situation est gagnante ou perdante.

Soient x et y les nombres d'allumettes du premier et du deuxième paquet avant de jouer,

1. Si (x,y) est de la forme (u_n, v_n) ou (v_n, u_n) , on ne peut qu'espérer une erreur de l'adversaire pour pouvoir gagner.

On a alors intérêt à retirer un petit nombre d'allumettes pour que le jeu dure plus longtemps.

2. Si (x,y) n'est pas de la forme (u_n, v_n) ou (v_n, u_n) , on est sûr de gagner à condition de bien jouer.

On sait, puisque (x,y) est une situation gagnante que l'on est dans une des situations suivantes :

$$(a) \begin{cases} x = u_n \\ y > v_n \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x = v_n \\ y > u_n \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x > u_n \\ y = v_n \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x > v_n \\ y = u_n \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x = k + u_n \\ y = k + v_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = k + v_n \\ y = k + u_n \end{cases}$$

Dans les cas (a),(b),(c),(d) n est déterminé par comparaison avec la liste.

Dans le cas (e), $n = |x-y|$ (car $n = v_n - u_n = (v_n + k) - (u_n + k)$).

D'où le jeu :

- (a) On retire $y - v_n$ allumettes du second paquet
- (b) On retire $y - u_n$ allumettes du second paquet
- (c) On retire $x - u_n$ allumettes du premier paquet
- (d) On retire $x - v_n$ allumettes du premier paquet
- (e) Si $x \geq y$ on retire $y - u_n$ allumettes de chacun des paquets.

Sinon on retire $x - u_n$ allumettes de chacun des paquets.

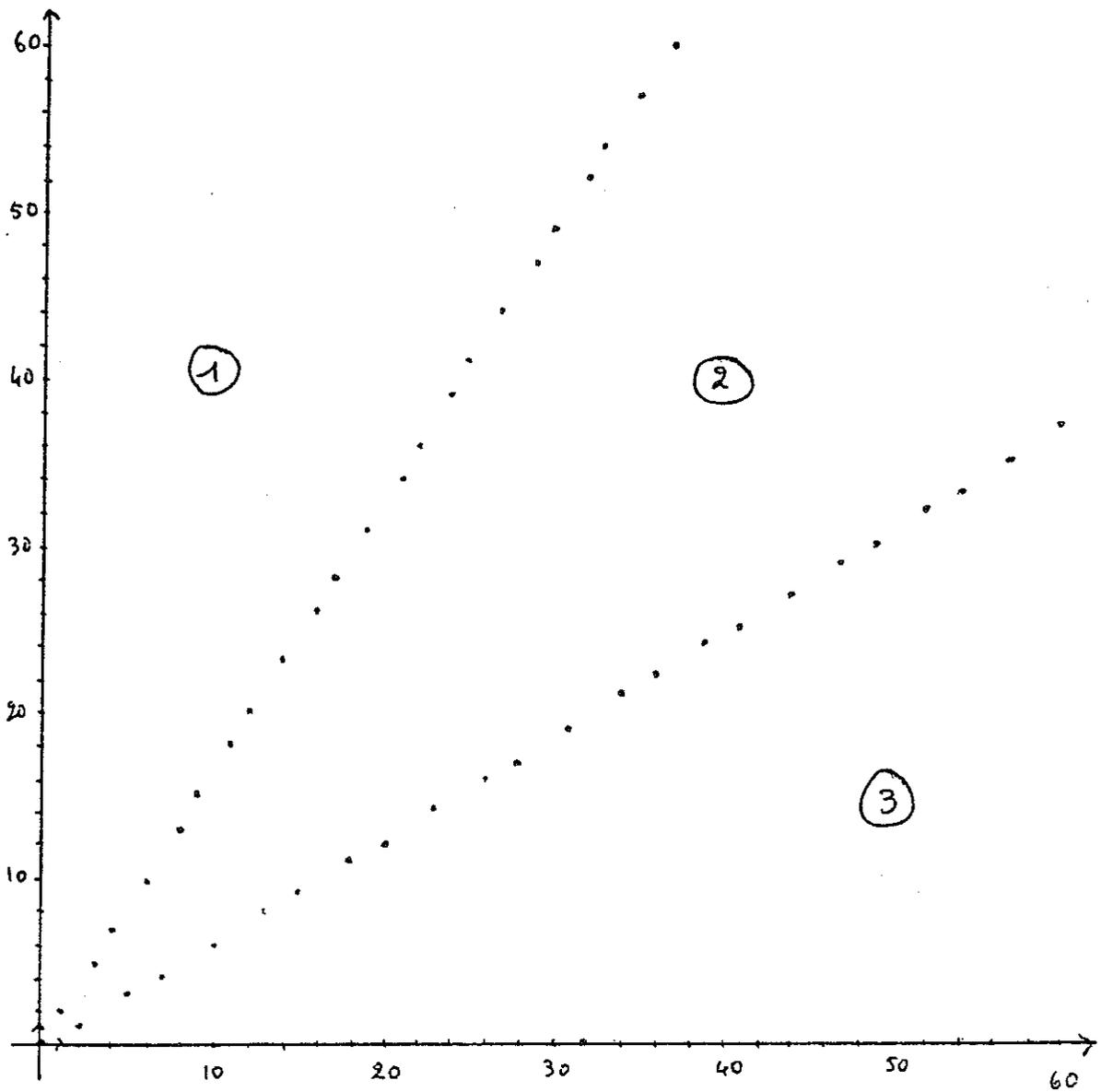
Remarque

Suivant la position de (x,y) dans le quart de plan (voir figure) on n'a que deux cas à étudier :

- Dans la partie ①, on ne pourra jouer que (a) ou (b), et un seul de ces jeux car $\{u_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{v_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de \mathbb{N}^* .
- Dans la partie ②, on ne pourra jouer que (b) ou (c) ou (e) mais on n'aura pas unicité du jeu : par exemple on pourra passer de la situation

gagnante (34,28) à la situation perdante (34,21) ou à la situation perdante (17,28) ou à la situation perdante (15,9).

- Dans la partie ③, on ne pourra jouer que (c) ou (d), et un seul de ces jeux.



Voici les premières paires de Whytoff :

N = 1	UN = 1	VN = 2
N = 2	UN = 3	VN = 5
N = 3	UN = 4	VN = 7
N = 4	UN = 6	VN = 10
N = 5	UN = 8	VN = 13
N = 6	UN = 9	VN = 15
N = 7	UN = 11	VN = 18
N = 8	UN = 12	VN = 20
N = 9	UN = 14	VN = 23
N = 10	UN = 16	VN = 26
N = 11	UN = 17	VN = 28
N = 12	UN = 19	VN = 31
N = 13	UN = 21	VN = 34
N = 14	UN = 22	VN = 36
N = 15	UN = 24	VN = 39
N = 16	UN = 25	VN = 41
N = 17	UN = 27	VN = 44
N = 18	UN = 29	VN = 47
N = 19	UN = 30	VN = 49
N = 20	UN = 32	VN = 52
N = 21	UN = 33	VN = 54
N = 22	UN = 35	VN = 57
N = 23	UN = 37	VN = 60
N = 24	UN = 38	VN = 62
N = 25	UN = 40	VN = 65
N = 26	UN = 42	VN = 68
N = 27	UN = 43	VN = 70
N = 28	UN = 45	VN = 73
N = 29	UN = 46	VN = 75
N = 30	UN = 48	VN = 78
N = 31	UN = 50	VN = 81
N = 32	UN = 51	VN = 83
N = 33	UN = 53	VN = 86
N = 34	UN = 55	VN = 89
N = 35	UN = 56	VN = 91
N = 36	UN = 58	VN = 94
N = 37	UN = 59	VN = 96
N = 38	UN = 61	VN = 99
N = 39	UN = 63	VN = 102
N = 40	UN = 64	VN = 104
N = 41	UN = 66	VN = 107
N = 42	UN = 67	VN = 109
N = 43	UN = 69	VN = 112
N = 44	UN = 71	VN = 115
N = 45	UN = 72	VN = 117
N = 46	UN = 74	VN = 120
N = 47	UN = 76	VN = 123
N = 48	UN = 77	VN = 125
N = 49	UN = 79	VN = 128
N = 50	UN = 80	VN = 130

LE JEU DE LA PILE DE JETONS

1°) La règle du jeu

La configuration de départ est une pile de jetons.

A tour de rôle, chacun des deux joueurs prélève un ou plusieurs jetons dans la pile sans jamais en prendre plus du double de ce qui a été ôté par l'adversaire au coup précédent.

Toutefois, le joueur entamant la partie peut retirer autant de jetons qu'il le désire sauf la totalité.

Le gagnant est celui qui ramasse le dernier jeton.

On peut représenter chaque situation par un couple d'entiers (x,y) où x est le nombre de jetons restant dans la pile, et y le nombre maximum de jetons à retirer, (y est égal à $x-1$ au départ, sinon il est pair et égal au double de ce qu'a ôté le joueur précédent).

L'ensemble des situations est donc

$$\{(x,y) / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^*, y \text{ pair ou } y = x-1\}$$

A partir d'une position (x,y) , on passe à une position $(x-k,2k)$ avec

$$0 \leq k \leq y$$

2°) La recherche des situations perdantes

La situation est perdante si, quel que soit le coup joué, elle laisse à l'adversaire la possibilité de gagner.

Les situations qui permettent d'atteindre en un coup une situation perdante sont gagnantes.

Ainsi, $\forall y (0,y)$ est une situation perdante

$$\text{et } \forall (x,y) \quad x \leq y \Rightarrow (x,y) \text{ est une situation gagnante.}$$

On peut construire la liste des situations perdantes de proche en proche en remarquant les propriétés :

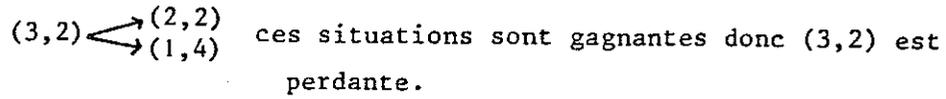
- . (x,y) situation gagnante $\Rightarrow \forall z \geq y (x,z)$ situation gagnante
- . (x,y) situation perdante $\Rightarrow \forall z \leq y (x,z)$ situation perdante
- . $(x,2k)$ situation perdante $\Rightarrow \forall z \geq k (x+k,z)$ situation gagnante,

et en étudiant tous les jeux possibles pour les cas restants.

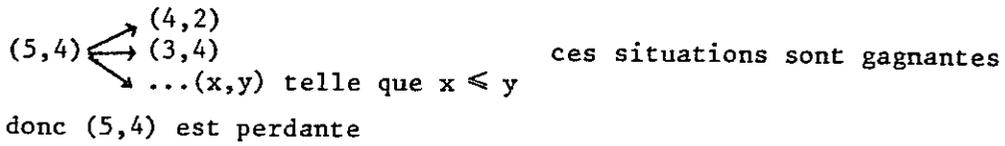
On représente l'ensemble des situations par un quart de plan quadrillé privé des cases correspondant aux couples (x,y) tels que $y \neq x-1$ et y impair.

Les situations gagnantes sont marquées par un point, et les situations perdantes par un "P".

- les cases $(0,y)$ sont marquées "P"
- les cases (x,y) telles que $x \leq y$ sont marquées "."
- on étudie $(2,1)$
 $(2,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (0,4)$ donc $(2,1)$ est perdante
- on étudie $(3,2)$



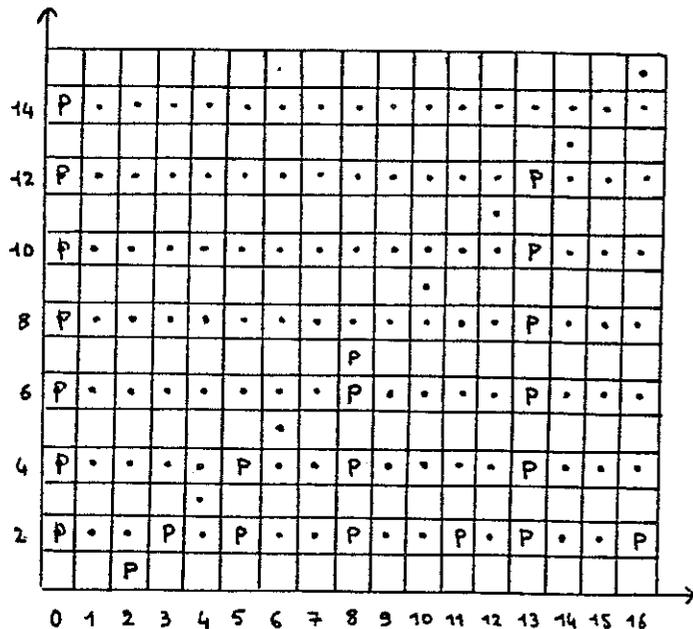
- on en déduit $\forall z \geq 1$ $(4,z)$ est gagnante
- on étudie $(5,4)$



- on en déduit :
 $(5,2)$ situation perdante
 $\forall z \geq 2$ $(7,z)$ situation gagnante
- de $(5,2)$ situation perdante on déduit :
 $\forall z \geq 1$ $(6,z)$ situation gagnante
- on étudie $(8,7)$

.....
 et ainsi de suite.

On obtient :



3°) Décomposition du nombre de jetons en somme de nombres de Fibonacci

On a vu que tout nombre peut se décomposer en somme de nombres de Fibonacci, la décomposition étant unique si on n'autorise pas d'y faire figurer deux nombres consécutifs.

On a de plus, un algorithme permettant de trouver cette décomposition :

N étant le nombre à décomposer, on cherche le plus grand entier de Fibonacci F inférieur ou égal à N

- Si $N = F$ la décomposition est terminée
- Si $N > F$, on décompose $N-F$ suivant le même procédé et on ajoute F à la somme obtenue.

Soit (x,y) une situation donnée et $x = x_0 + \dots + x_r$ la décomposition de x en somme de nombres de Fibonacci avec
$$\begin{cases} r = 0 & \text{si } x \text{ est un nombre de Fibonacci} \\ x_0 < \dots < x_r & \text{sinon.} \end{cases}$$

On démontre que :

- si $x_0 \leq y$ la situation est gagnante
- si $x_0 > y$ la situation est perdante.

La démonstration est intéressante car elle donne une stratégie du jeu :

Avec les mêmes notations, considérons les ensembles

$$P = \{(x,y) \in E / x_0 > y\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y) \in E / x_0 \leq y\}$$

$$\text{où } E = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* - \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / y \text{ impair et } y \neq x-1\}$$

- 1- Dans une situation de G , on peut toujours :
 - soit gagner immédiatement
 - soit offrir à l'adversaire une situation de P

En effet, soit $(x,y) \in G$

- Si x est un nombre de Fibonacci, on retire x jetons et on gagne.
- Si x n'est pas un nombre de Fibonacci, il admet une décomposition $x = x_0 + x_1 + \dots + x_r$ en somme de nombres de Fibonacci, x_0 étant le plus petit (on peut avoir $l = r$ si la somme n'a que deux termes).

En retirant x_0 jetons on offre à l'adversaire la situation (x',y') définie

$$\text{par} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = 2x_0 \end{cases}$$

La décomposition de x' en somme de nombres de Fibonacci reprend les éléments de la décomposition de x : $x' = x_1 + \dots + x_r$ donc $x'_0 = x_1$; or x_0 et x_1 ne sont pas des nombres de Fibonacci consécutifs donc $x_1 > 2x_0$, et (x',y') est élément de P .

-2- Dans une situation de P, quel que soit le jeu on offre à l'adversaire une situation de G.

Soit (x, y) élément de P et $x = x_0 + \dots + x_r$ la décomposition de x :

On a $x_0 > y$ et $y \geq 1$ donc $x_0 \geq 2$

x_0 est un nombre Fibonacci F_n tel que $n \geq 3$

Jouons en retirant k jetons, $1 \leq k \leq y$: nous offrons à l'adversaire la situation (x', y') définie par
$$\begin{cases} x' = x - k \\ y' = 2k. \end{cases}$$

Décomposons x' en somme de nombres de Fibonacci :

- Si x est un nombre de Fibonacci, $x = x_0$ et la décomposition est celle de $x_0 - k$.

- Sinon $x' = x_r + \dots + x_1 + [\text{décomposition de } x_0 - k]$.

Dans tous les cas, x'_0 est le plus petit nombre de Fibonacci de la décomposition de $x_0 - k$.

Démontrons par récurrence la propriété des nombres F_n de Fibonacci définie pour $n \geq 3$ par :

$P(n)$: Pour tout entier k tel que $1 \leq k < F_n$, la décomposition de $F_n - k$ en somme de nombres de Fibonacci admet un plus petit nombre F tel que $F \leq 2k$.

On vérifie aisément $P(3)$ et $P(4)$.

Pour $n \geq 4$ on suppose $P(n-1)$ et on démontre $P(n+1)$ (on n'a pas besoin de $P(n)$ pour démontrer $P(n+1)$ mais de $P(n-1)$).

Soit à décomposer $F_{n+1} - k$.

a) Si $k \geq \frac{F_{n+1}}{3}$ alors $F_{n+1} - k \leq 2k$, or le plus petit nombre F de la décomposition de $F_{n+1} - k$ vérifie $F \leq F_{n+1} - k$ donc $F \leq 2k$.

b) Si $k < \frac{F_{n+1}}{3}$ alors $F_{n+1} - k > \frac{2}{3} F_{n+1}$; or $\forall p \geq 3 \quad \frac{2}{3} F_p \geq F_{p-1}$ (*)

et ici $n+1 \geq 5$, donc $F_{n+1} - k > F_n$

$F_n < F_{n+1} - k < F_{n+1}$ donc F_n est le plus grand nombre de Fibonacci intervenant dans la somme, et on obtient les autres termes en décomposant

$F_{n+1} - k - F_n$, c'est-à-dire $F_{n-1} - k$, ($F_{n-1} - k = F_{n+1} - k - F_n > 0$).

D'après l'hypothèse de récurrence, cette décomposition admet un plus petit élément F , $F \leq 2k$.

(*) Cette propriété se démontre facilement par récurrence.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 3$.

En l'appliquant au jeu à $x_0 = F_n$, on obtient $x_0 \leq 2k$, c'est-à-dire $x_0 \leq y'$ donc (x,y) est élément de G .

4°) Comment jouer pour gagner

Une stratégie du jeu a été précédemment donnée : si on est en situation gagnante (x,y) , il faut décomposer x en somme de nombres de Fibonacci et enlever un nombre de jetons égal au plus petit nombre de Fibonacci intervenant dans cette somme.

Si on ne peut pas jouer ainsi, on est en situation perdante et on aura intérêt à enlever un petit nombre de Fibonacci de jetons pour laisser à l'adversaire le temps de faire une faute dont on profitera.

On vérifie facilement qu'une situation de départ $(x,x-1)$ est perdante si et seulement si x est un nombre de Fibonacci. On peut donc savoir au début du jeu qui doit gagner (s'il joue "bien").

Voici une liste de jeux pour un nombre de jetons initial inférieur ou égal à 150 :

LORSQUE VOUS AVEZ X JETONS , VOUS DEVEZ EN RETIRER K

X	I	K	X	I	K	X	I	K
1	I	1	51	I	1	101	I	1
2	I	2	52	I	5	102	I	13
3	I	3	53	I	1	103	I	1
4	I	1	54	I	2	104	I	2
5	I	5	55	I	55	105	I	3
6	I	1	56	I	1	106	I	1
7	I	2	57	I	2	107	I	5
8	I	8	58	I	3	108	I	1
9	I	1	59	I	1	109	I	2
10	I	2	60	I	5	110	I	21
11	I	3	61	I	1	111	I	1
12	I	1	62	I	2	112	I	2
13	I	13	63	I	8	113	I	3
14	I	1	64	I	1	114	I	1
15	I	2	65	I	2	115	I	5
16	I	3	66	I	3	116	I	1
17	I	1	67	I	1	117	I	2
18	I	5	68	I	13	118	I	8
19	I	1	69	I	1	119	I	1
20	I	2	70	I	2	120	I	2
21	I	21	71	I	3	121	I	3
22	I	1	72	I	1	122	I	1
23	I	2	73	I	5	123	I	34
24	I	3	74	I	1	124	I	1
25	I	1	75	I	2	125	I	2
26	I	5	76	I	21	126	I	3
27	I	1	77	I	1	127	I	1
28	I	2	78	I	2	128	I	5
29	I	8	79	I	3	129	I	1
30	I	1	80	I	1	130	I	2
31	I	2	81	I	5	131	I	3
32	I	3	82	I	1	132	I	1
33	I	1	83	I	2	133	I	2
34	I	34	84	I	8	134	I	3
35	I	1	85	I	1	135	I	1
36	I	2	86	I	2	136	I	13
37	I	3	87	I	3	137	I	1
38	I	1	88	I	1	138	I	2
39	I	5	89	I	39	139	I	3
40	I	1	90	I	1	140	I	1
41	I	2	91	I	2	141	I	5
42	I	8	92	I	3	142	I	1
43	I	1	93	I	1	143	I	2
44	I	2	94	I	5	144	I	144
45	I	3	95	I	1	145	I	1
46	I	1	96	I	2	146	I	2
47	I	13	97	I	8	147	I	3
48	I	1	98	I	1	148	I	1
49	I	2	99	I	2	149	I	5
50	I	3	100	I	3	150	I	1

On peut écrire un programme de jeu contre l'ordinateur :

EXECUTER A PARTIR DE 1

JEU DE LA PILE DE JETONS

VØULEZ-VØUS LA REGLE DU JEU ? NØN
 IL Y A 21 JETØNS
 A VØUS DE CØMMENCER.
 CØMBIEN DE JETØNS ENLEVEZ-VØUS ? 5 IL RESTE 16 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR JØUE...
 IL RETIRE 3 JETØN(S). IL RESTE 13 JETØN(S).
 A VØUS DE JØUER.
 CØMBIEN DE JETØNS ENLEVEZ-VØUS ? 2 IL RESTE 11 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR JØUE...
 IL RETIRE 3 JETØN(S). IL RESTE 8 JETØN(S).
 A VØUS DE JØUER.
 CØMBIEN DE JETØNS ENLEVEZ-VØUS ? 2 IL RESTE 6 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR JØUE...
 IL RETIRE 1 JETØN(S). IL RESTE 5 JETØN(S).
 A VØUS DE JØUER.
 CØMBIEN DE JETØNS ENLEVEZ-VØUS ? 1 IL RESTE 4 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR JØUE...
 IL RETIRE 1 JETØN(S). IL RESTE 3 JETØN(S).
 A VØUS DE JØUER.
 CØMBIEN DE JETØNS ENLEVEZ-VØUS ? 1 IL RESTE 2 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR JØUE...
 IL RETIRE 2 JETØN(S).
 L'ØRDINATEUR A GAGNE.

TERMINE EN LIGNE 021

JEU DE LA PILE DE JETONS ET DES NOMBRES DE LUCAS

1°) Règle du jeu

Ce jeu se joue à deux. On dispose au départ d'une pile de jetons. Chacun peut à son tour ramasser un nombre x de jetons, x étant nécessairement un nombre de Lucas (on prend les nombres de Lucas à partir de $L_0 = 2$).

Le gagnant est celui qui ramasse le dernier jeton.

2°) Recherche des situations perdantes

Soit n le nombre des jetons restants :

- si n est un nombre de Lucas, il suffit de ramasser tous les jetons pour gagner.

Un nombre de Lucas de jetons est donc une situation gagnante pour celui qui va jouer.

- $n = 0$ est une situation perdante.

- En remarquant la propriété

$$n \text{ situation gagnante} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe un nombre de Lucas } L \text{ tel que} \\ n-L \text{ soit une situation perdante,} \end{cases}$$

On peut construire à partir de 0 l'ensemble des situations perdantes :

si n est une situation perdante, toute situation $n+L$, où L est un nombre de Lucas, est perdante.

Dans la liste des nombres de 1 à N (N étant le nombre initial de jetons) on commence par rayer tous les nombres de Lucas. Le premier nombre non rayé, n_0 , représente alors une situation perdante. On raye ensuite tous les nombres de la forme $n_0 + L$ où L est un nombre de Lucas. Puis on recommence avec le premier nombre non rayé suivant n_0 , et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la liste.

Les nombres non rayés représentent les situations perdantes.

On trouvera à la page suivante le crible des situations perdantes pour $N = 500$.

.	.	.	.	5	10
.	.	.	.	15	20
.	.	.	.	25	30
.	.	.	.	35	40
.	.	.	.	45	50
.	.	.	.	55	60
.	.	.	.	65	70
.	.	.	.	75	80
.	.	.	.	85	90
.	.	.	.	95	100
.	.	.	.	105	110
.	.	.	.	115	120
.	.	.	.	125	130
.	.	.	.	135	140
.	.	.	.	145	150
.	.	.	.	155	160
.	.	.	.	165	170
.	.	.	.	175	180
.	.	.	.	185	190
.	.	.	.	195	200
.	.	.	.	205	210
.	.	.	.	215	220
.	.	.	.	225	230
.	.	.	.	235	240
.	.	.	.	245	250
.	.	.	.	255	260
.	.	.	.	265	270
.	.	.	.	275	280
.	.	.	.	285	290
.	.	.	.	295	300
.	.	.	.	305	310
.	.	.	.	315	320
.	.	.	.	325	330
.	.	.	.	335	340
.	.	.	.	345	350
.	.	.	.	355	360
.	.	.	.	365	370
.	.	.	.	375	380
.	.	.	.	385	390
.	.	.	.	395	400
.	.	.	.	405	410
.	.	.	.	415	420
.	.	.	.	425	430
.	.	.	.	435	440
.	.	.	.	445	450
.	.	.	.	455	460
.	.	.	.	465	470
.	.	.	.	475	480
.	.	.	.	485	490
.	.	.	.	495	500

On constate que pour les nombres inférieurs ou égaux à 500, les situations perdantes sont représentées par des nombres multiples de 5.

Démontrons cette propriété :

. Un nombre de Lucas ne peut être multiple de 5 :

On démontre facilement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad L_{4n} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$L_{4n+1} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$L_{4n+2} \equiv 3 \pmod{5}$$

$$L_{4n+3} \equiv 4 \pmod{5}$$

et on en déduit qu'un nombre de Lucas n'est pas divisible par 5

. Comme 1,2,3 et 4 sont des nombres de Lucas, un joueur ayant un nombre de jetons non multiple de 5 peut toujours ramener la situation à un multiple de 5.

. Comme aucun nombre de Lucas n'est multiple de 5, un joueur ayant un nombre de jetons multiple de 5 et retirant un nombre de Lucas de jetons ramène obligatoirement la situation à un nombre de jetons non multiple de 5.

. En fin de partie, on arrive à un nombre de jetons non multiple de 5 qui est 1,2,3 ou 4 et il suffit de retirer tous les jetons pour gagner.

L'ensemble des situations perdantes est donc l'ensemble des multiples de 5.

On remarquera que l'on perd toutes ces propriétés de l'ensemble des situations perdantes si on prend les nombres de Lucas L_n pour $n \geq 1$ car alors 2 est une situation perdante.

Il est donc indispensable de commencer à $L_0 = 2$ pour avoir la stratégie simple suivante :

3°) La stratégie

- Si on est en situation perdante, on peut retirer n'importe quel nombre de Lucas de jetons

- Si on est en situation gagnante, il suffit de ramener le nombre de jetons au multiple de 5 le plus proche en ramassant 1,2,3 ou 4 jetons. Cette manière de jouer risquant d'être un peu monotone, reprenons l'élaboration du crible des situations perdantes et à chaque nombre rayé, c'est-à-dire à chaque non multiple de 5, associons le nombre de Lucas qui a permis de le rayer (on constate qu'à certains nombres rayés correspondent plusieurs nombres de Lucas)

En ramassant ce (ou un de ces) nombre(s) de Lucas de jetons on ramènera le jeu à une situation perdante:

EN SITUATION N , RETIREZ L JETONS

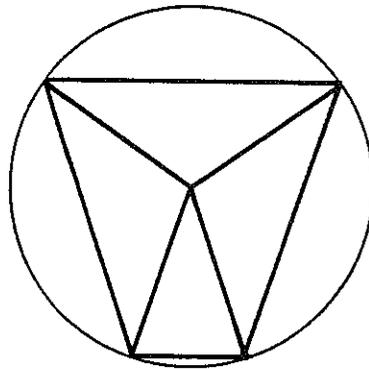
N	L	I	N	L
1	1	I	51	11 0U 1
2	2	I	52	47 0U 7 0U 2
3	3	I	53	18 0U 3
4	4	I	54	29 0U 4
5	SITUATION PERDANTE	I	55	SITUATION PERDANTE
6	1	I	56	11 0U 1
7	7 0U 2	I	57	47 0U 7 0U 2
8	3	I	58	18 0U 3
9	4	I	59	29 0U 4
10	SITUATION PERDANTE	I	60	SITUATION PERDANTE
11	11 0U 1	I	61	11 0U 1
12	7 0U 2	I	62	47 0U 7 0U 2
13	3	I	63	18 0U 3
14	4	I	64	29 0U 4
15	SITUATION PERDANTE	I	65	SITUATION PERDANTE
16	11 0U 1	I	66	11 0U 1
17	7 0U 2	I	67	47 0U 7 0U 2
18	18 0U 3	I	68	18 0U 3
19	4	I	69	29 0U 4
20	SITUATION PERDANTE	I	70	SITUATION PERDANTE
21	11 0U 1	I	71	11 0U 1
22	7 0U 2	I	72	47 0U 7 0U 2
23	18 0U 3	I	73	18 0U 3
24	4	I	74	29 0U 4
25	SITUATION PERDANTE	I	75	SITUATION PERDANTE
26	11 0U 1	I	76	76 0U 11 0U 1
27	7 0U 2	I	77	47 0U 7 0U 2
28	18 0U 3	I	78	18 0U 3
29	29 0U 4	I	79	29 0U 4
30	SITUATION PERDANTE	I	80	SITUATION PERDANTE
31	11 0U 1	I	81	76 0U 11 0U 1
32	7 0U 2	I	82	47 0U 7 0U 2
33	18 0U 3	I	83	18 0U 3
34	29 0U 4	I	84	29 0U 4
35	SITUATION PERDANTE	I	85	SITUATION PERDANTE
36	11 0U 1	I	86	76 0U 11 0U 1
37	7 0U 2	I	87	47 0U 7 0U 2
38	18 0U 3	I	88	18 0U 3
39	29 0U 4	I	89	29 0U 4
40	SITUATION PERDANTE	I	90	SITUATION PERDANTE
41	11 0U 1	I	91	76 0U 11 0U 1
42	7 0U 2	I	92	47 0U 7 0U 2
43	18 0U 3	I	93	18 0U 3
44	29 0U 4	I	94	29 0U 4
45	SITUATION PERDANTE	I	95	SITUATION PERDANTE
46	11 0U 1	I	96	76 0U 11 0U 1
47	47 0U 7 0U 2	I	97	47 0U 7 0U 2
48	18 0U 3	I	98	18 0U 3
49	29 0U 4	I	99	29 0U 4
50	SITUATION PERDANTE	I	100	SITUATION PERDANTE

4°) Le jeu de la pile de jetons et des nombres de Fibonacci

On peut changer la règle du jeu en remplaçant les nombres de Lucas par tout autre ensemble de nombres ne contenant pas 0. En faisant la même étude, on trouve l'ensemble des situations perdantes inférieures à un nombre donné, et la manière de jouer lorsqu'on est en situation gagnante.

Pour l'ensemble des nombres de Fibonacci (à partir de $F_2 = 1$), on trouvera à la page suivante le crible des situations perdantes inférieures ou égales à 500 et la manière de jouer pour gagner lorsque le nombre de jetons est inférieur ou égal à 100.

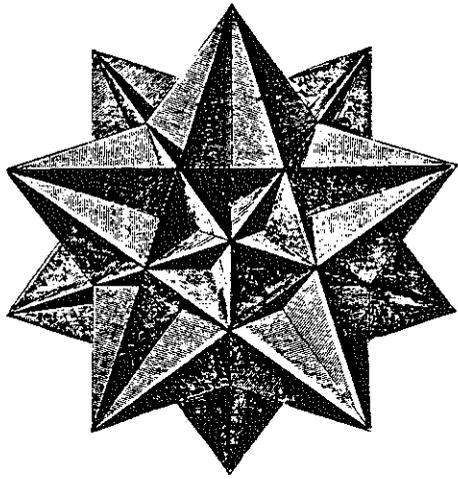
Pour ce jeu, l'ensemble des situations perdantes ne se caractérise pas par des propriétés simples.



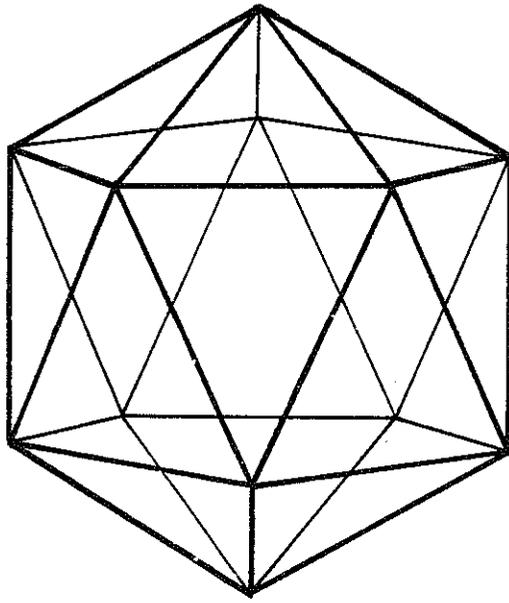
.	.	.	4	10
.	.	.	14	20
.	.	.	24	30
.	36	.	.	.	40
.	46	.	.	.	50
.	56	.	.	.	60
.	66
.	72	.	.	.	76
.	82	.	.	.	86
.	92	.	.	.	96
.	102	108	.	.
.	112	118	.	.
.	122	128	.	.
.	132	138	.	.
.	150
.	160
.	169	.	.
.	176
.	186
.	192	.	.	.	196
.	202	.	.	.	206
.	212	218	.	.
.	222	228	.	.
.	232	238	.	.
.	242	248	.	.
.	.	.	254	260
.	.	.	264	270
.	.	.	274	280
.	.	.	284	290
.	296	.	.	.	300
.	306	.	.	.	310
.	316
.	322	.	.	.	326
.	332	338	.	.
.	342	348	.	.
.	352	358	.	.
.	.	.	364	.	.	.	368	.	.
.	.	.	374	.	.	.	378	.	.
.	.	.	384	.	.	.	388	.	.
.	.	.	394	400
.	406	.	.	.	410
.	416	.	.	.	420
.	426	.	.	.	430
.	436
.	442	.	.	.	446
.	452	.	.	.	456
.	462	468	.	.
.	472	478	.	.
.	.	.	484	.	.	.	488	.	.
.	.	.	494	.	.	.	498	.	.

EN SITUATION N , RETIREZ F JETONS

N	F	I	N	F
1	1	I	51	21 0U 5 0U 1
2	2	I	52	2
3	3	I	53	13 0U 3
4	SITUATION PERDANTE	I	54	34 0U 8
5	5 0U 1	I	55	55 0U 5
6	2	I	56	SITUATION PERDANTE
7	3	I	57	21 0U 1
8	8	I	58	34 0U 8 0U 2
9	5	I	59	55 0U 13 0U 3
10	SITUATION PERDANTE	I	60	SITUATION PERDANTE
11	1	I	61	21 0U 5 0U 1
12	8 0U 2	I	62	2
13	13 0U 3	I	63	13 0U 3
14	SITUATION PERDANTE	I	64	34 0U 8
15	5 0U 1	I	65	55 0U 5
16	2	I	66	SITUATION PERDANTE
17	13 0U 3	I	67	21 0U 1
18	8	I	68	8 0U 2
19	5	I	69	55 0U 13 0U 3
20	SITUATION PERDANTE	I	70	34
21	21 0U 1	I	71	21 0U 5
22	8 0U 2	I	72	SITUATION PERDANTE
23	13 0U 3	I	73	13 0U 1
24	SITUATION PERDANTE	I	74	34 0U 8 0U 2
25	21 0U 5 0U 1	I	75	55 0U 3
26	2	I	76	SITUATION PERDANTE
27	13 0U 3	I	77	21 0U 5 0U 1
28	8	I	78	2
29	5	I	79	55 0U 13 0U 3
30	SITUATION PERDANTE	I	80	34 0U 8
31	21 0U 1	I	81	21 0U 5
32	8 0U 2	I	82	SITUATION PERDANTE
33	13 0U 3	I	83	1
34	34	I	84	34 0U 8 0U 2
35	21 0U 5	I	85	55 0U 13 0U 3
36	SITUATION PERDANTE	I	86	SITUATION PERDANTE
37	13 0U 1	I	87	21 0U 5 0U 1
38	34 0U 8 0U 2	I	88	2
39	3	I	89	89 0U 13 0U 3
40	SITUATION PERDANTE	I	90	34 0U 8
41	21 0U 5 0U 1	I	91	55 0U 5
42	2	I	92	SITUATION PERDANTE
43	13 0U 3	I	93	89 0U 21 0U 1
44	34 0U 8	I	94	34 0U 8 0U 2
45	21 0U 5	I	95	55 0U 13 0U 3
46	SITUATION PERDANTE	I	96	SITUATION PERDANTE
47	1	I	97	21 0U 5 0U 1
48	34 0U 8 0U 2	I	98	2
49	13 0U 3	I	99	89 0U 13 0U 3
50	SITUATION PERDANTE	I	100	34 0U 8

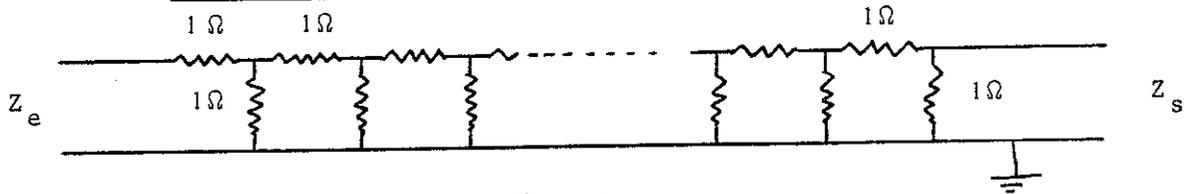


LA NATURE ET LES ARTS



LE NOMBRE D'OR EN PHYSIQUE

I - Cas d'un circuit électrique



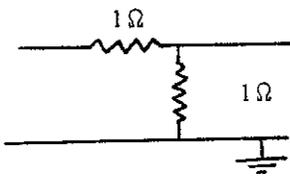
On pose $Z_{e,n}$ = impédance d'entrée

$Z_{s,n}$ = impédance de sortie

$A_n = \frac{\text{différence de potentiel aux bornes de l'entrée}}{\text{différence de potentiel aux bornes de la sortie}}$

On a :

pour $n = 1$

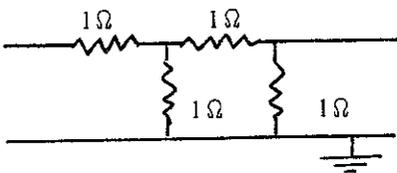


$$Z_{e,1} = 2 \Omega$$

$$Z_{s,1} = 1 \Omega$$

$$A_1 = 2$$

pour $n = 2$

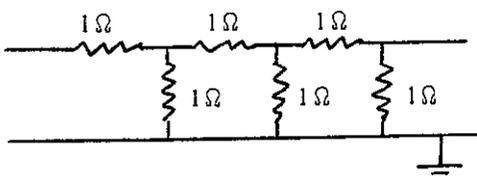


$$Z_{e,2} = \frac{5}{3} \Omega$$

$$Z_{s,2} = \frac{2}{3} \Omega$$

$$A_2 = 5$$

pour $n = 3$



$$Z_{e,3} = \frac{13}{8} \Omega$$

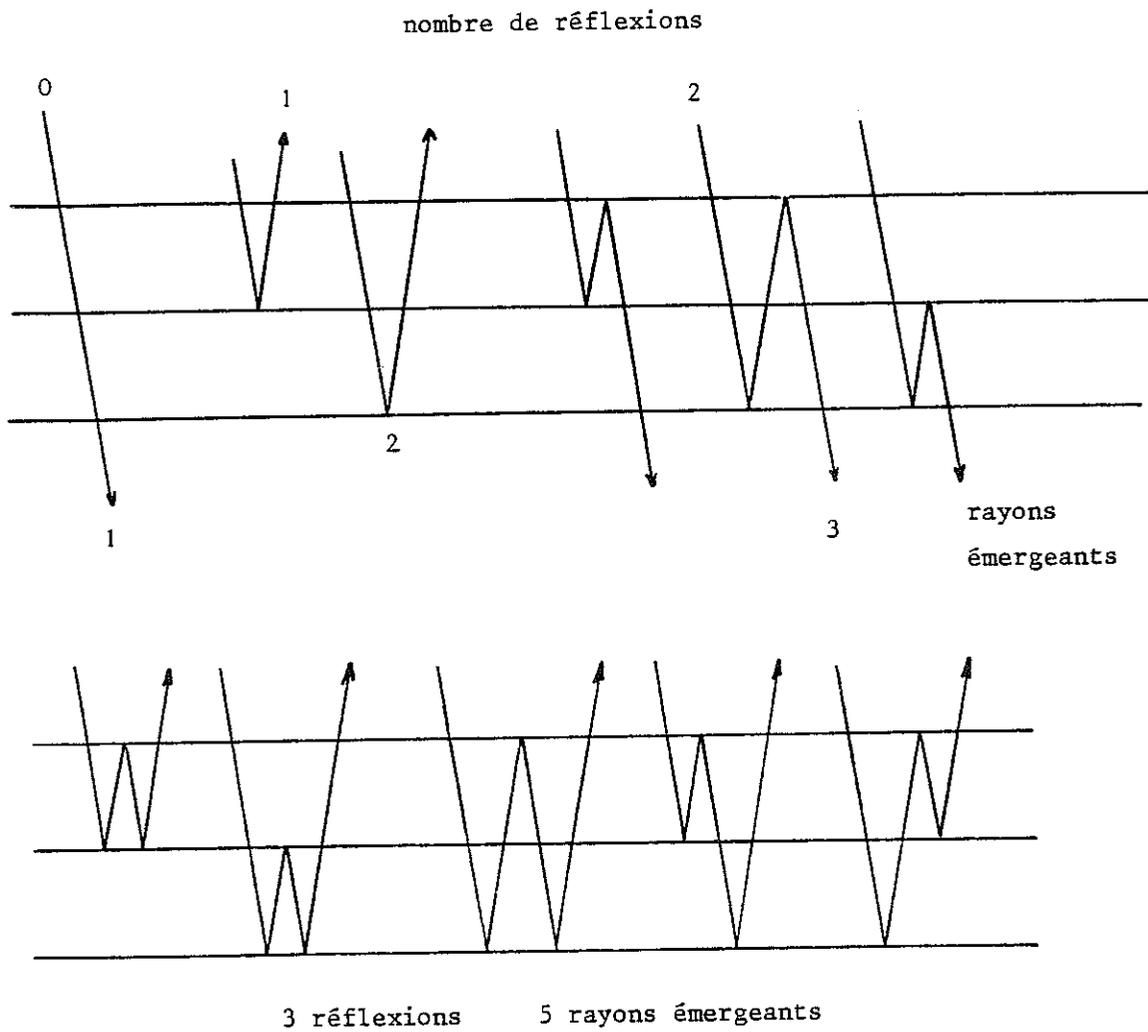
$$Z_{s,3} = \frac{5}{8} \Omega$$

$$A_3 = 13$$

On établit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Z_{e,n} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, \quad Z_{s,n} = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}, \quad A_n = F_{2n+1}$$

II - Réflexions de rayons lumineux avec deux lames à faces parallèles



Le nombre de rayons émergents est un nombre de Fibonacci.

BOTANIQUE

Les branches, feuilles, fleurs ou graines sont assemblées et arrangées selon un certain motif général. On y trouve beaucoup de nombres de Fibonacci.

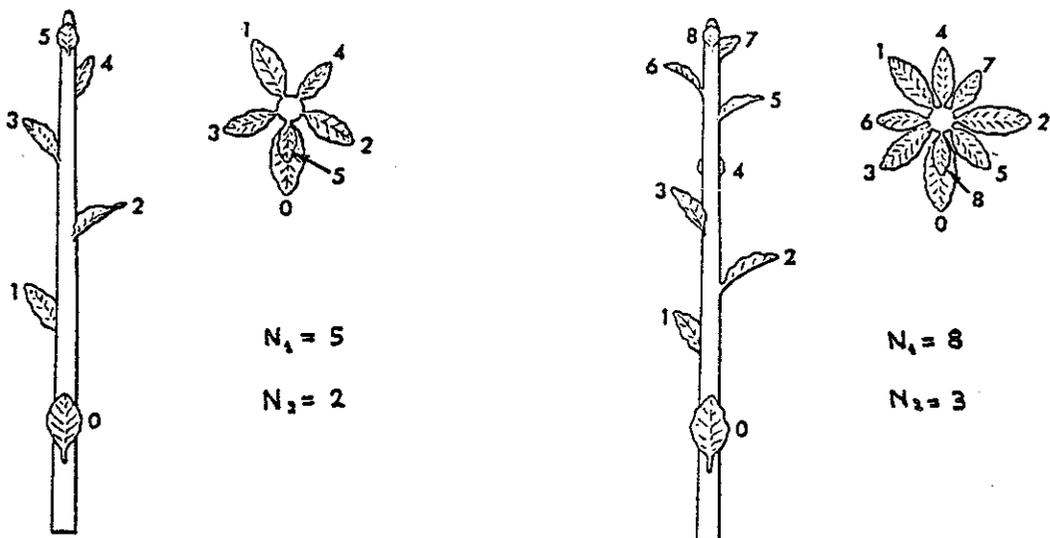
1°) Nombre de pétales des fleurs courantes.

- 2 pétales : circée
 3 pétales : iris, lis, tulipe
 5 pétales : bouton d'or, delphinium, pied d'alouette, ancolie, anémone, garidelle, isopyre
 8 pétales : delphinium, ficaire, anémone
 13 pétales : trolle, delphinium double, jacobée, camomille, marguerite
 21 pétales : aster, chicorée, doronique
 34 pétales : paquerette, marguerite des champs, helenium, gaillardias, plantain
 55 ou 89 pétales : aster d'automne

Ce motif n'est pas nécessairement suivi par toutes les plantes d'une espèce mais semble être la caractéristique de l'espèce.

2°) Position des feuilles le long d'une tige.

Les feuilles poussent régulièrement autour de la tige en décrivant des hélices. En général le nombre N_1 de feuilles entre deux feuilles directement au-dessus l'une de l'autre et le nombre N_2 de révolutions entre ces deux mêmes feuilles sont des nombres de Fibonacci.



La mesure en nombre de tours de l'angle entre deux feuilles est alors N_2/N_1 .

Ainsi, pour le tilleul et l'orme ce rapport est $1/2$, pour le hêtre et le noisetier $1/3$, pour le chêne, l'abricotier, le cerisier $2/5$, pour le peuplier et le poirier $3/8$, pour le saule et l'amandier $5/13$...

Le même angle est conservé pour une même espèce dans la disposition des branches, des bourgeons et des fleurs.

On constate que les rapports les plus courants, $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$, $8/21$... sont de la forme F_{n-2}/F_n , ce qui correspond à un nombre de tour voisin de $\frac{1}{\phi^2}$.

On démontre que pour que l'ensoleillement soit maximum pour toutes les feuilles, l'angle entre deux feuilles consécutives doit mesurer $\frac{1}{\phi^2}$ tour (ou $\frac{1}{\phi}$ suivant l'orientation choisie).

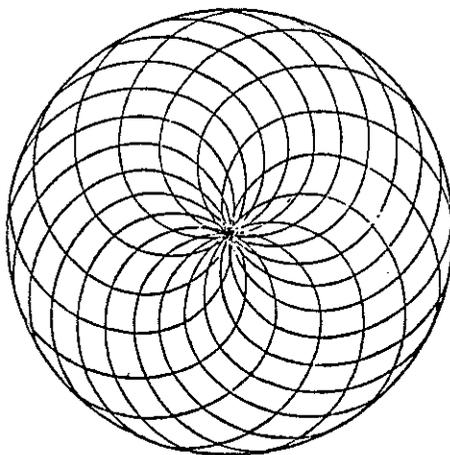
Les fractions $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ sont les fractions les plus simples voisines de

$\frac{1}{\phi^2}$ puisque ce sont les réduites successives dans la décomposition en

fractions continues de $\frac{1}{\phi^2}$.

3°) Détermination de spirales

Etudions le coeur d'une fleur de tournesol (ou d'une marguerite : les graines y sont réparties en spirales comme le représente le schéma ci-dessous :



Le nombre de spirales dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse sont des nombres consécutifs de Fibonacci.

Ces nombres sont en général 21 et 34, 34 et 55 ou 55 et 89 pour les fleurs de tournesol, 21 et 34 pour les marguerites.

On remarque le même phénomène pour les écailles de pommes de pins ou d'ananas (les spirales ne sont plus planes et dans le cas de l'ananas, on en dénombre trois familles).

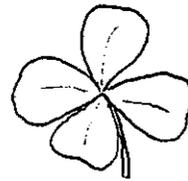
Les nombres de spirales sont en général 3 et 5 ou 5 et 8 pour les pommes de pin, 5, 8 et 13 pour les ananas.

Toutes ces règles d'apparition de nombres de Fibonacci en botanique ne sont pas rigoureusement suivies. Elles apparaissent cependant comme une tendance générale, et les exceptions font peut-être apparaître des nombres de Lucas...



trèfle

$$3 = F_4$$

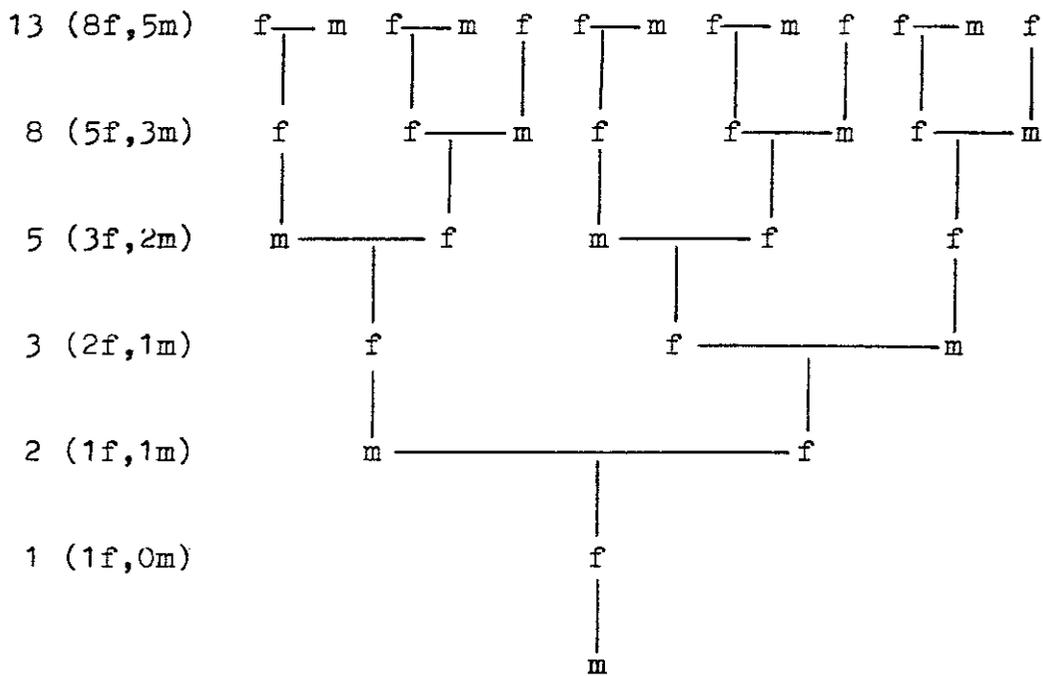


trèfle à quatre feuilles

$$4 = L_3$$

ARBRE GENEALOGIQUE D'UNE ABEILLE MALE

Un oeuf non fécondé donne une abeille mâle ;
 un oeuf fécondé donne une abeille femelle (ouvrière ou reine).

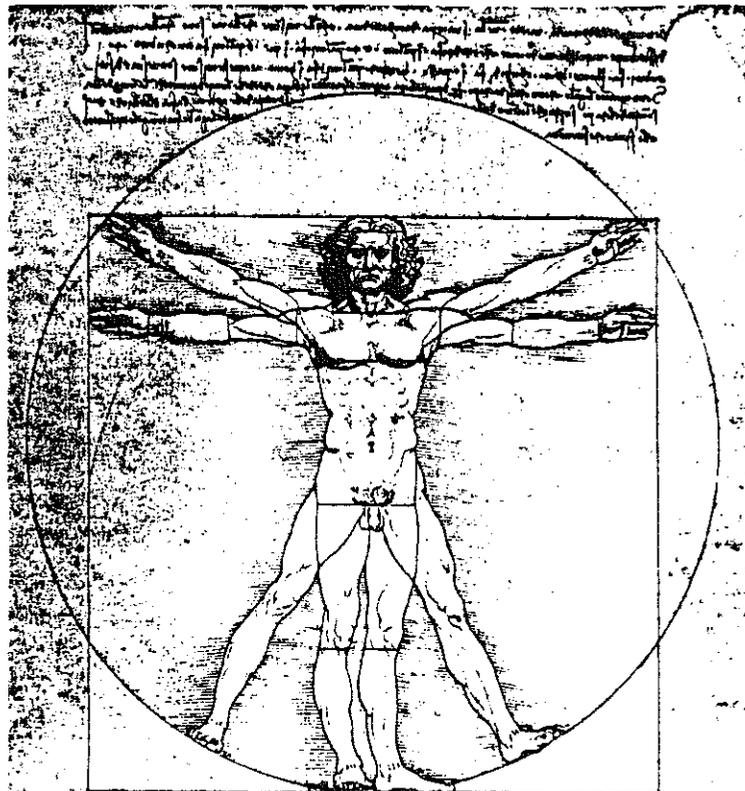


LE NOMBRE D'OR
DANS LE CORPS HUMAIN

Le nombre d'or est quelquefois découvert dans la nature; Léonard de Vinci trouva que la hauteur totale du corps humain et la hauteur des orteils au nombril sont dans le rapport ϕ .

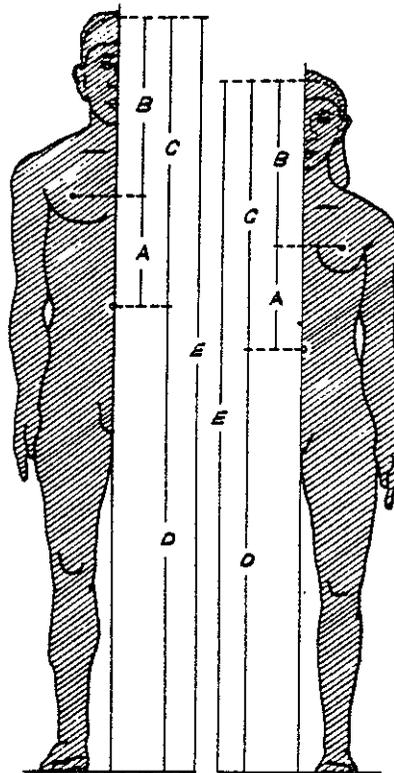
L'architecte romain Vitruve avait remarqué une ressemblance entre le corps humain et une construction parfaite : "La nature a conçu le corps humain de telle sorte que ses membres soient exactement proportionnés à la construction d'un ensemble". Il inscrivit le corps humain dans un cercle et un carré, les deux dessins étant considérés comme des images de la perfection.

La représentation ci-dessous est de Léonard de Vinci.



Des mesures ont été effectuées sur 207 étudiants allemands de Münster (175 garçons et 32 filles) et sur 252 jeunes gens de l'Institut de Statistiques de Calcutta.

On a mesuré les distances A, B, C, D, E représentées sur le dessin ci-dessous.



Les résultats sont regroupés dans les tableaux suivants.

Mesures des étudiants de Münster (en cm)

	A	B	C	D	E
Total des 50 plus grandes observations	1127	2136	3263	5335	8618
Total des 50 plus petites observations	1010	1757	2767	4354	7121
Total général (pour 207)	4313	8009	12322	19900	32222
Moyenne générale	20,836	38,690	59,526	96,135	155,622
Total pour les filles	600	1206	1806	2885	4691
Total pour les garçons	3713	6803	10516	17015	27531

Mesures des étudiants de Calcutta

	A	B	C	D	E
Total des 63 plus grandes observations	1496	2729	4225	6678	10903
Total des 63 plus petites observations	1314	2348	3662	5885	9547
Tous les hommes	5645	10166	15811	25239	41050
Moyenne générale	22,40	40,34	62,74	100,15	162,90

Rapports entre les longueurs pour les étudiants de Münster

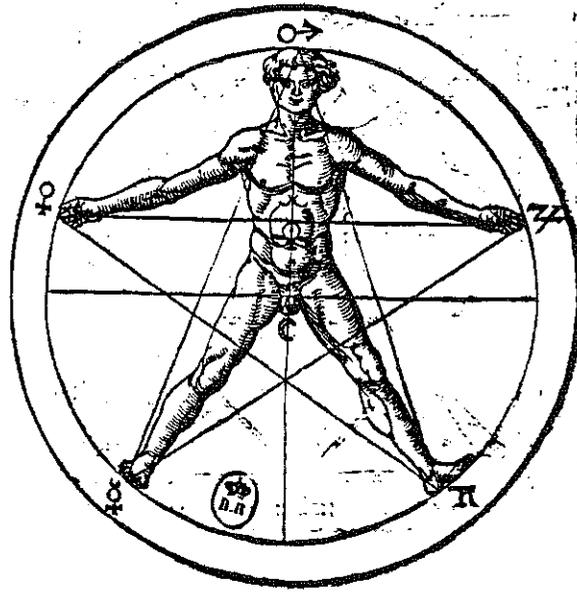
	A/B	B/C	C/D	D/E
25 % des plus grands	0,528	0,655	0,609	0,621
25 % des plus petits	0,575	0,635	0,636	0,611
Filles seulement	0,498	0,668	0,626	0,615
Garçons seulement	0,544	0,647	0,618	0,618
Tous	0,537	0,650	0,619	0,618

Rapports entre les longueurs pour les étudiants de Calcutta

	A/B	B/C	C/D	D/E
25 % des plus grands	0,548	0,646	0,633	0,612
25 % des plus petits	0,560	0,641	0,622	0,616
Tous	0,555	0,643	0,627	0,615

Les résultats obtenus sur les étudiants de Münster confirment l'hypothèse que le nombril partage la hauteur du corps humain dans le rapport ϕ .

L'homme peut être inscrit dans un pentagone



- L'HOMME-MICROCOSME D'APRÈS AGRIPPA DE NETTESHEIM.

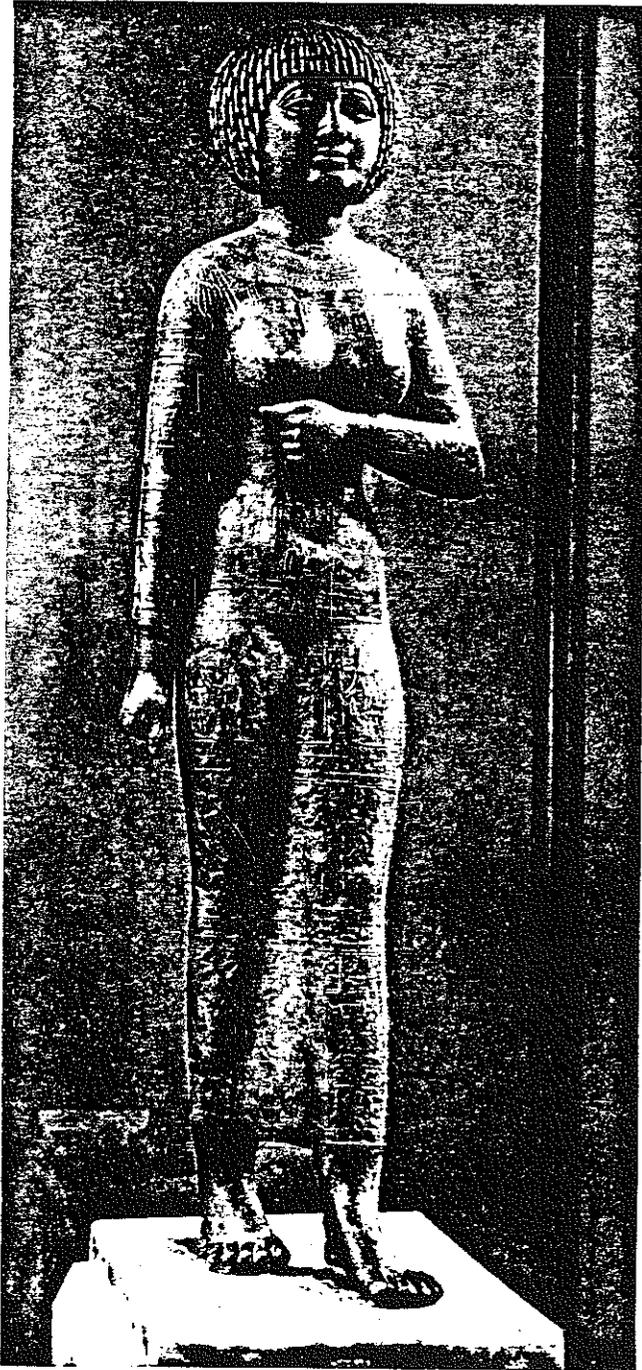
Portrait de femme par Léonard de Vinci



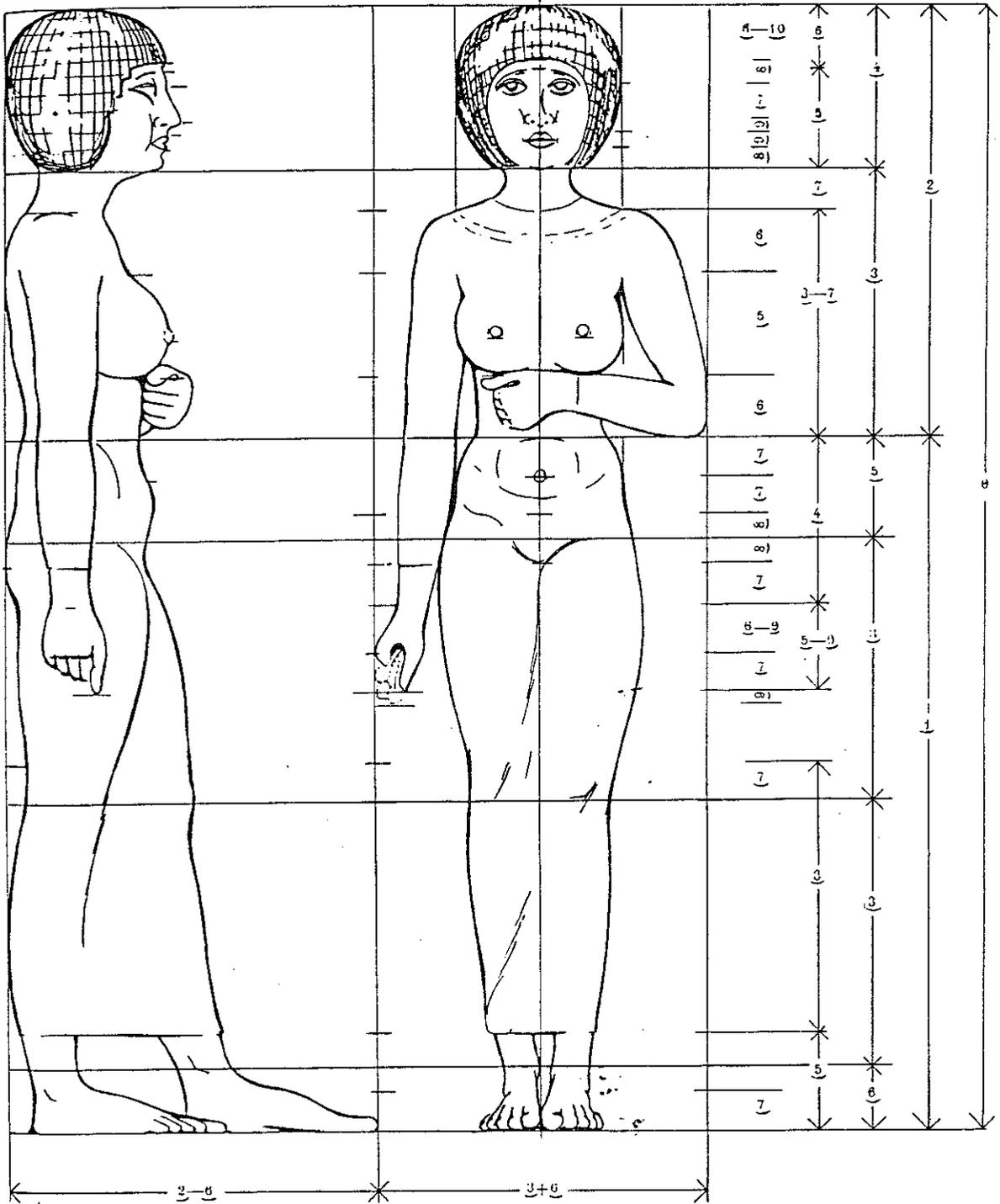
Sections dorées sur le portrait

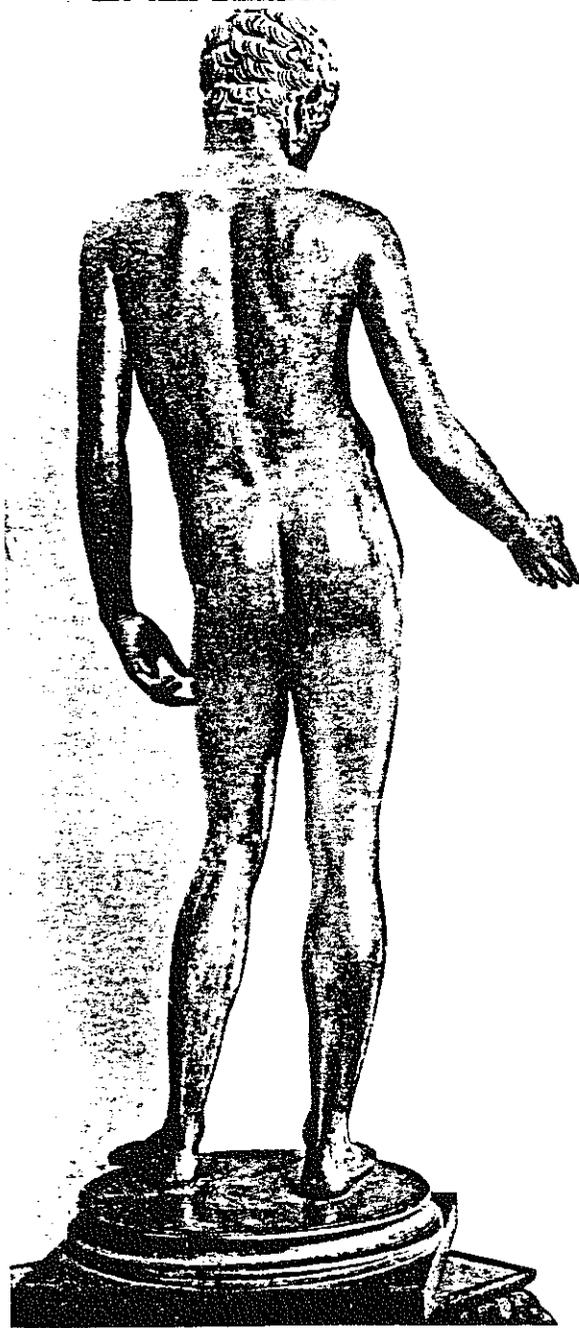


Beothy appelle série d'or, toute suite géométrique de raison $\frac{1}{\Phi}$.
 Il désigne par Θ le premier terme d'une telle suite, par \downarrow ,
 \downarrow_2 , \downarrow_3 , ... les termes successifs; on a donc $\downarrow = \frac{\Theta}{\Phi}$, $\downarrow_2 = \frac{\Theta}{\Phi^2}$, etc.
 Dans les dessins qui suivent, Θ représente la hauteur d'un être
 humain.

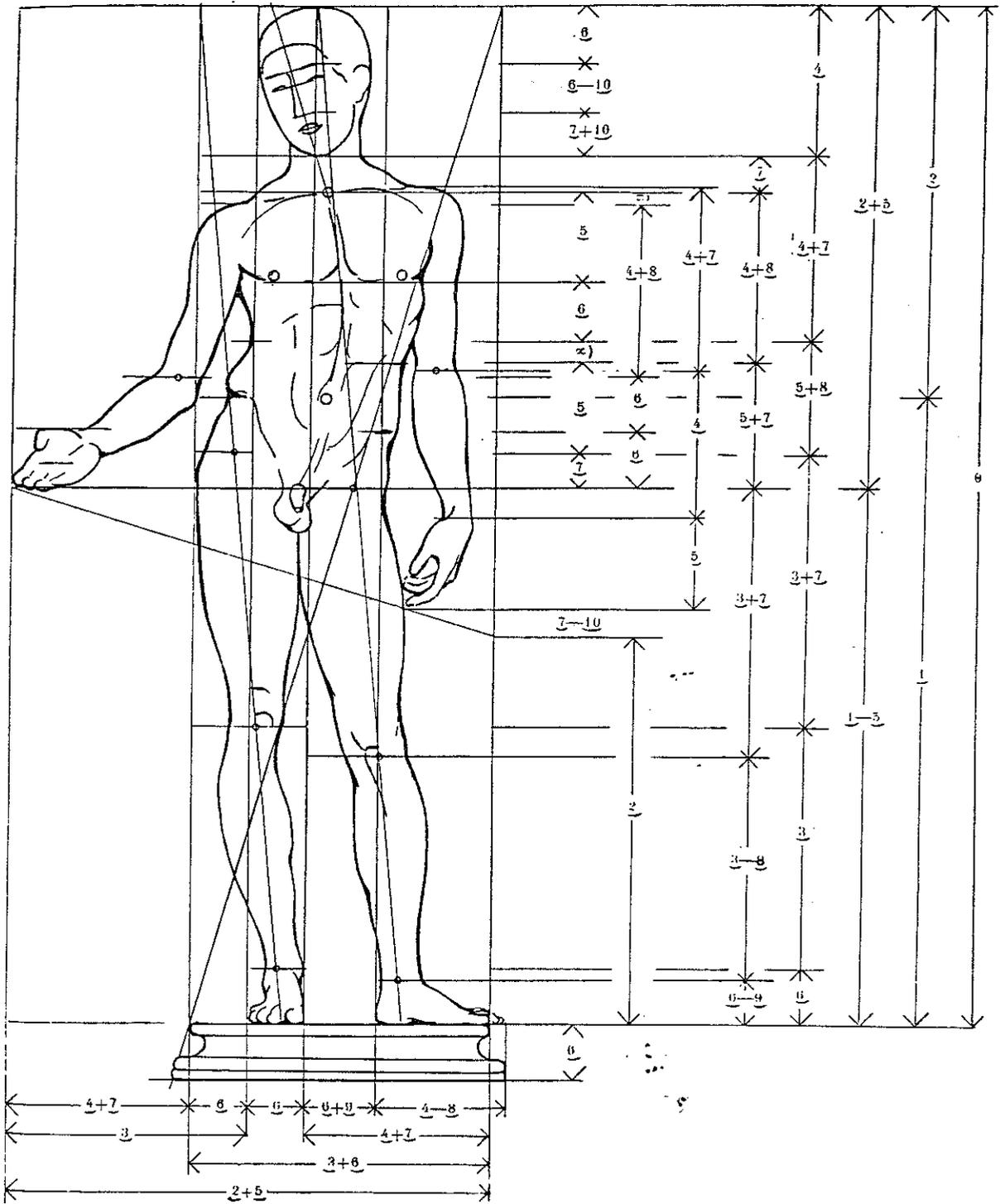


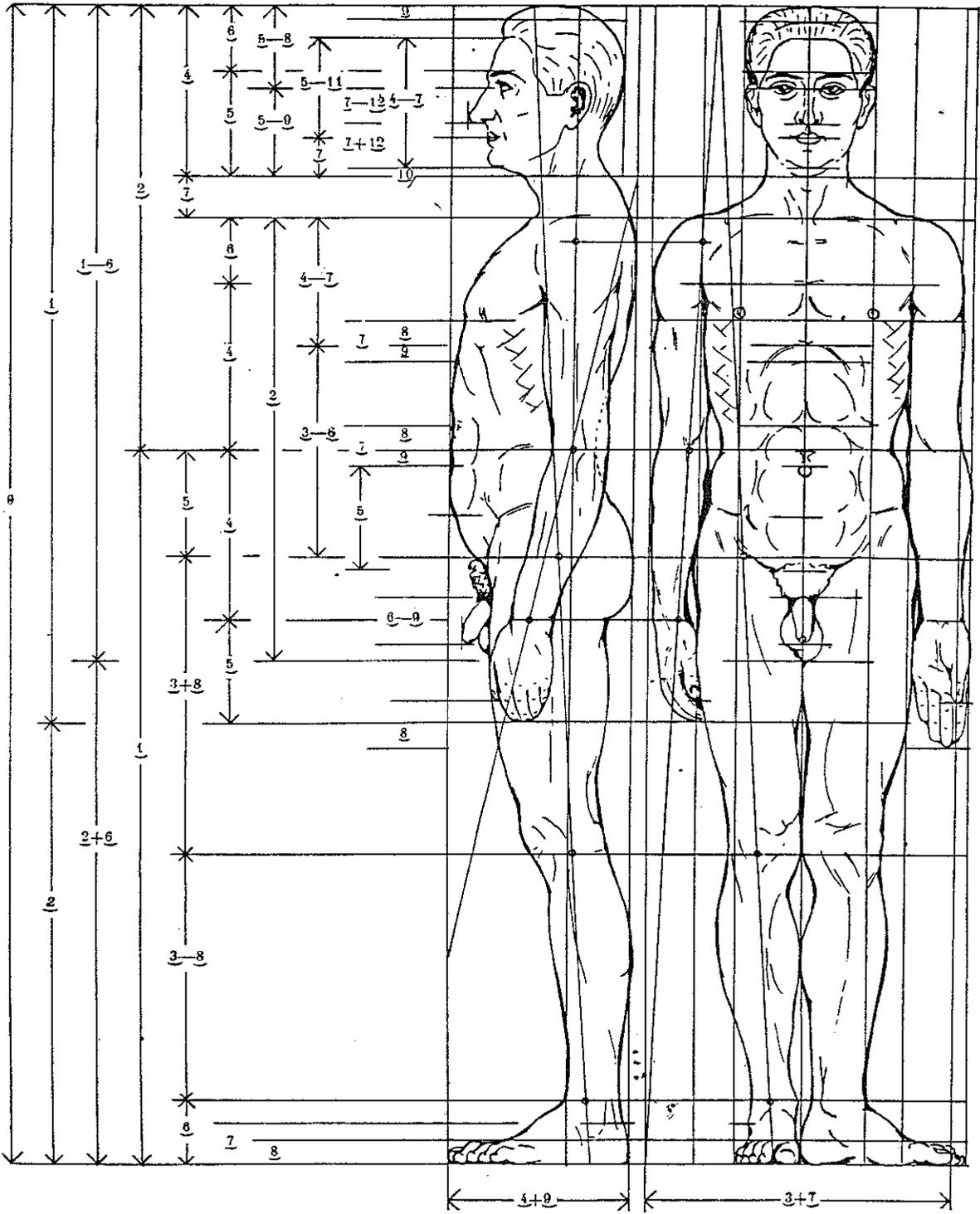
TAKOUCHIT

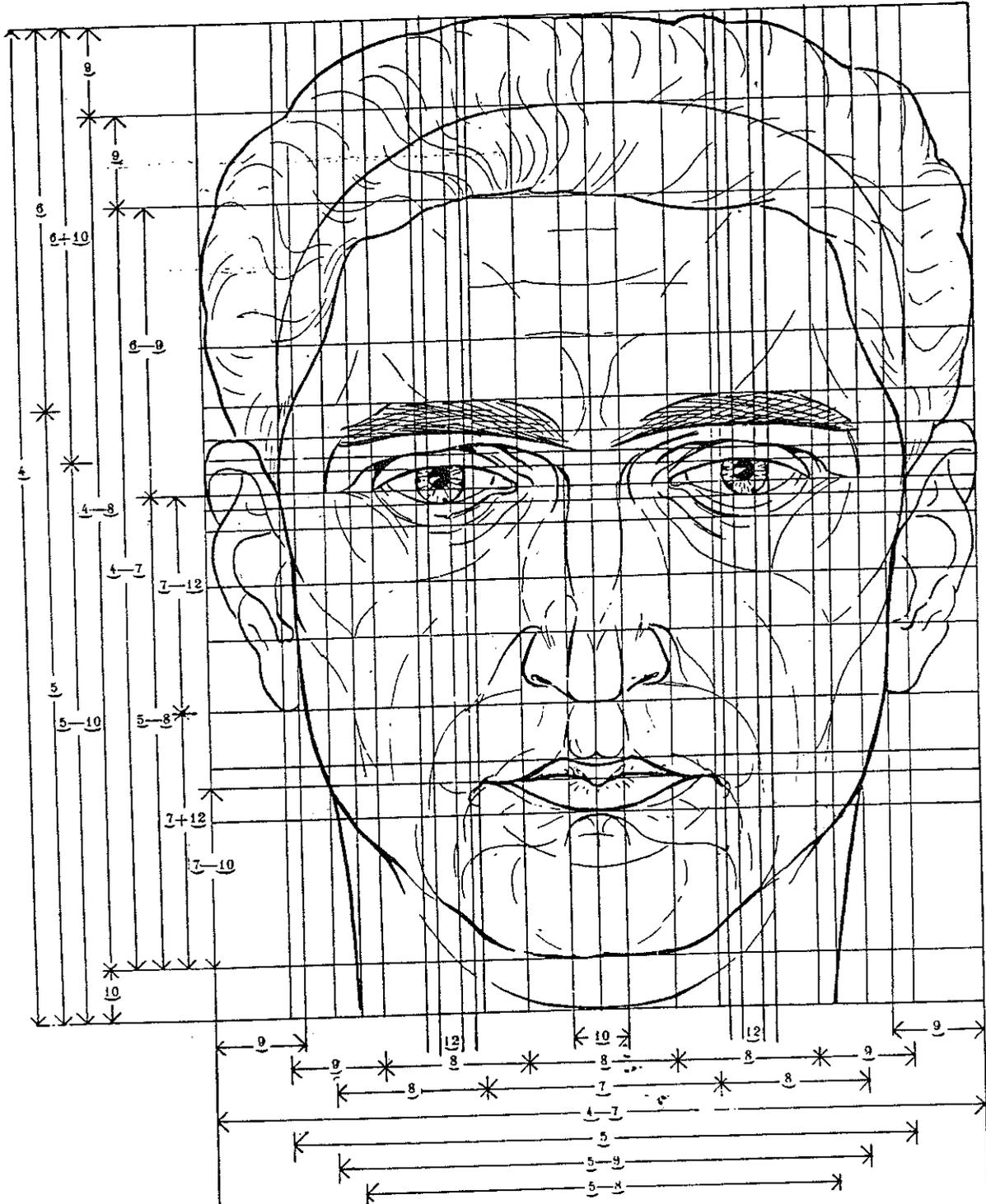




IDOLINO.







LES FORMES OU INTERVIENT LE NOMBRE D'OR

Il est possible d'introduire (pour l'artiste) ou de trouver (pour celui qui cherche) le nombre d'or sous diverses formes dans les oeuvres d'art.

1°) Les triangles

Ce sont ceux apparaissant dans le pentagone convexe, le pentagone étoilé, le décagone convexe, le décagone étoilé.

Les angles mesureront $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 126^\circ, 144^\circ$ et on trouvera ϕ dans l'expression de leurs rapports trigonométriques :

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2\phi} \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\phi+2}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3-\phi} \quad \cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$$

(les autres rapports s'expriment en fonction de ceux-là).

Triangles isocèles

On en distingue quatre types sur la figure

. AOB AO = OB

$$\frac{AO}{AB} = \phi$$

\hat{O} mesure 36°

\hat{A} et \hat{B} mesurent 72°

La bissectrice AD de \hat{A} divise OB suivant le rapport ϕ

. AOC AO = OC

$$\frac{AC}{AO} = \phi$$

\hat{O} mesure 108°

\hat{A} et \hat{C} mesurent 36°

La trissectrice OD de \hat{O} divise AC suivant le rapport ϕ

. A'OC \hat{O} mesure 72°
 \hat{A}' et \hat{C} mesurent 54°

. A'OB \hat{O} mesure 144°
 \hat{A}' et \hat{B} mesurent 18°

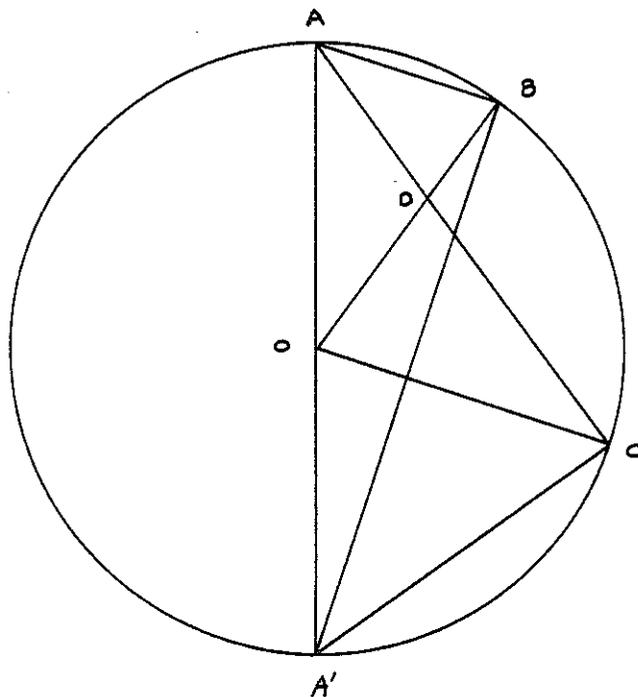
Triangles rectangles

. Triangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement le côté du pentagone étoilé et le côté du décagone convexe.

ABA' \hat{A} mesure 72° , \hat{A}' mesure 18°

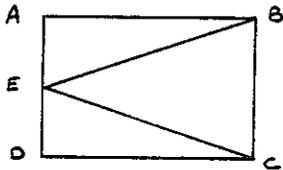
. Triangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement le côté du décagone étoilé et le côté du pentagone convexe

ACA' \hat{A} mesure 36° , \hat{A}' mesure 54°



2°) Les rectangles

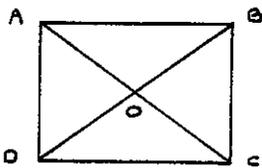
Le nombre d'or intervient dans le rectangle d'or, où il est le rapport de la longueur et de la largeur, mais il peut être le rapport d'autres mesures du rectangle.



Rectangle R1

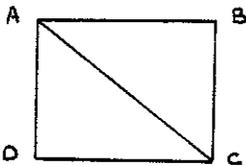
$$AE = ED$$

$$\frac{BE}{BC} = \phi \quad , \quad \frac{AB}{BC} = \sqrt{\phi + \frac{3}{4}} \quad .$$



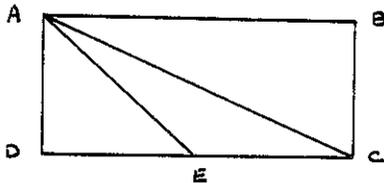
Rectangle R2

$$\frac{AB}{AO} = \phi \quad , \quad \frac{BC}{AB} = \sqrt{7 - 4\phi} \quad .$$



Rectangle égyptien : RE

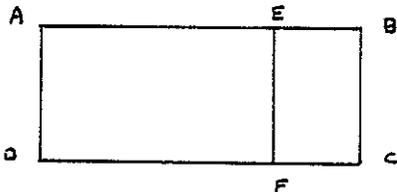
$$\frac{AC}{AD} = \phi \quad , \quad \frac{AB}{BC} = \sqrt{\phi} \quad .$$



Rectangle Parthénon : RP

$$DE = EC$$

$$\frac{AC}{AE} = \phi \quad , \quad \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{3\phi - 4} \quad .$$



$$\frac{AE}{AD} = \phi \quad , \quad \frac{BC}{BE} = \phi \quad , \quad \frac{AB}{BC} = \sqrt{5} \quad .$$

Construction de cinq rectangles dorés

AB, côté d'un pentagone inscrit dans un cercle, est côté commun à ces cinq rectangles.

Rectangle R1 : ABB_1A_1 ; il encadre le triangle ABC du pentagone étoilé.

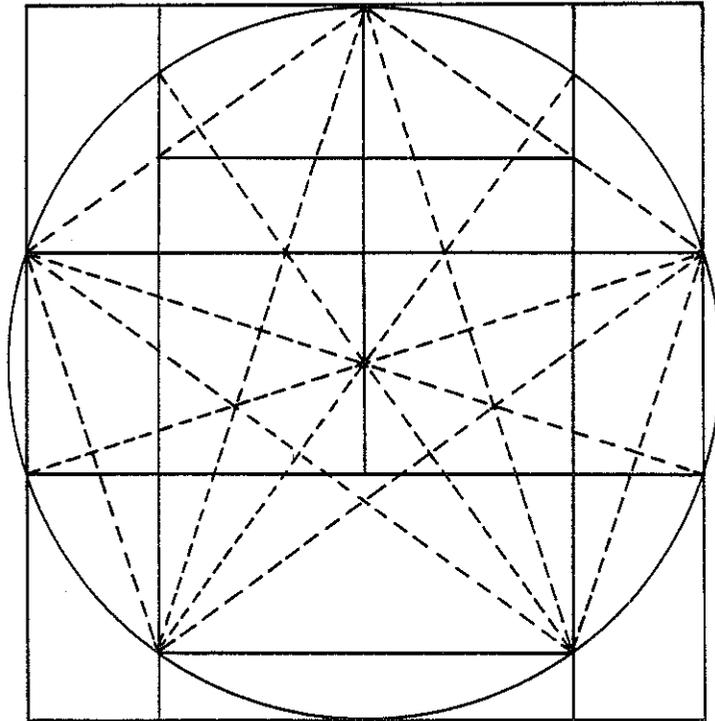
Rectangle R2 : ABB_2A_2 ; AA_2 mesure le côté du décagone étoilé. Il encadre deux triangles isocèles dorés : OAA_2 et OBB_2 .

Rectangle d'or : $ABB_\phi A_\phi$; $BB_\phi = BC$; $\frac{AA_\phi}{AB} = \phi$

Rectangle égyptien : $ABB_E A_E$; $BA_E = BC$

Rectangle Parthénon : $ABB_P A_P$; $AA_\phi = \frac{3}{4} AA_P$ (à 3×10^{-3} près).

On retrouve quelques uns de ces rectangles, et d'autres encore parmi tous les rectangles que l'on peut dessiner à partir d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle.



Cette liste non exhaustive de figures où intervient le nombre d'or donne une idée de la diversité de leurs formes.

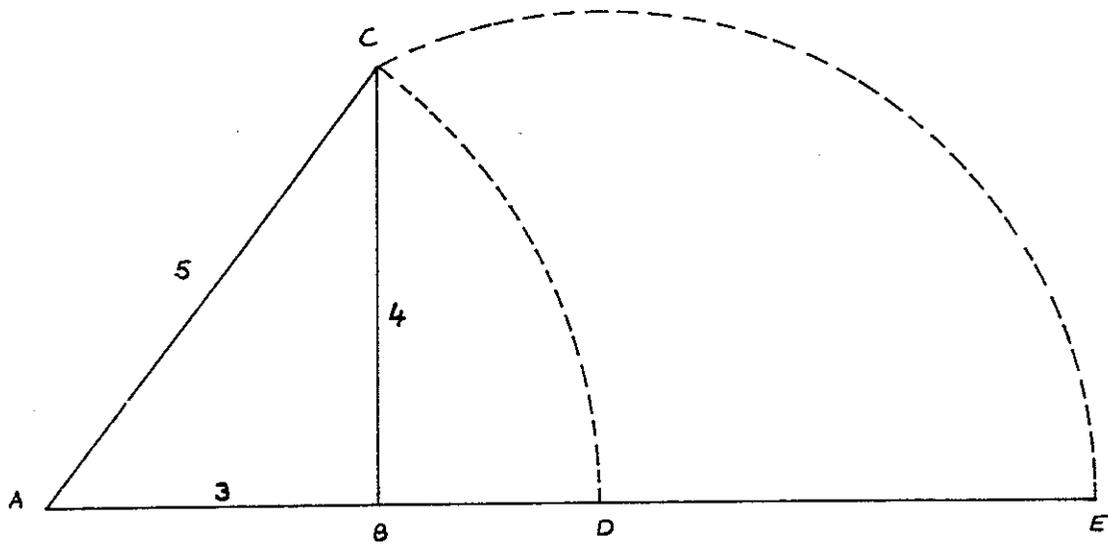
Compte tenu de cette diversité, il n'est pas surprenant qu'une recherche systématique sur telle ou telle oeuvre d'art fasse effectivement apparaître le nombre d'or. Il faut cependant éviter d'en tirer une conclusion trop hâtive : dans certains cas, l'artiste connaissait le nombre d'or et son auréole harmonieuse et a voulu l'utiliser, mais dans d'autres cas on peut se demander si la même étude avec un autre nombre que ϕ n'aurait pas donné le même résultat.

On trouvera dans la suite des exemples d'oeuvres où apparaît le nombre d'or.

LE NOMBRE D'OR CHEZ LES EGYPTIENS

I - Construction d'un rectangle d'or $R\Phi$ à partir du triangle rectangle égyptien 3,4,5

(Construction de J.C. Raoult).



Le cercle de centre A passant par C recoupe AB en D

Le cercle de centre D passant par C recoupe AD en E, et on a

$$\frac{BE}{BC} = \Phi$$

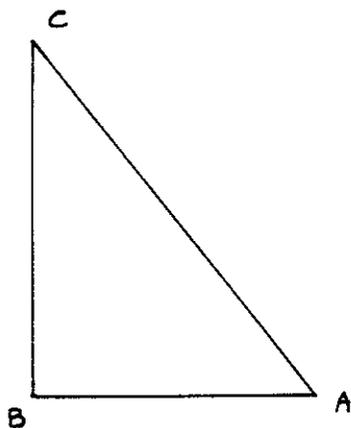
BC et BE sont les côtés d'un rectangle d'or.

II - Les triangles utilisés par les égyptiens

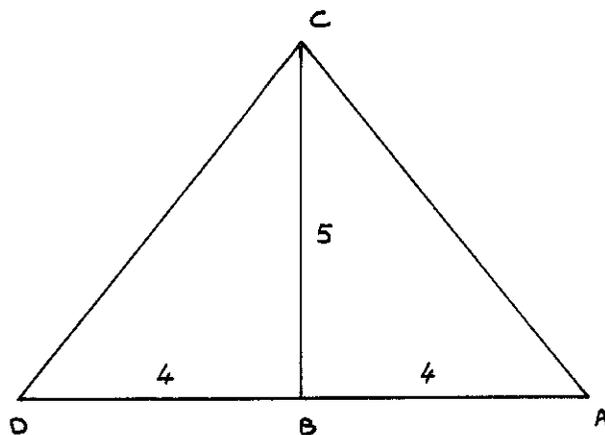
Soit A,B,C trois sommets d'un rectangle égyptien RE

$$\frac{AC}{AB} = \phi \quad \text{et} \quad \frac{BC}{AB} = \sqrt{\phi}$$

L'angle BAC mesure $51^{\circ} 49' 38''$ (à 1"près



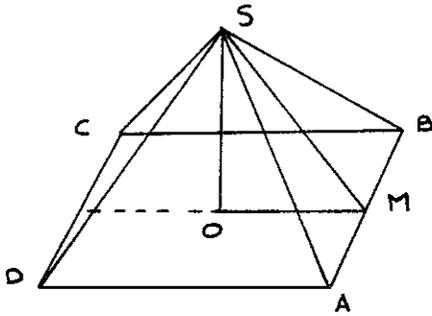
Plutarque, dans son "Traité sur Isis et Osiris" mentionne l'emploi par les Egyptiens des triangles



Dans ce triangle l'angle BAC mesure $51^{\circ} 20' 25''$ (à 1" près). Ce triangle est très voisin d'un triangle égyptien obtenu ci-dessus à partir du rectangle égyptien RE.

Viollet-le-Duc a donné le nom de triangle égyptien à tout triangle semblable à ACD (le rapport de la hauteur sur la base est $\frac{5}{8}$).

III - La grande pyramide de Guizel : Khéops (IV^e dynastie)



Pour la pyramide de Khéops, les mesures au dm près de SO et AD sont :

$$SO = 148,2 \text{ m} = h$$

$$AB = DA = 232,9 \text{ m}$$

L'angle SMO a donc pour mesure $51^{\circ}51'$

Le triangle SMO est donc voisin d'un triangle rectangle égyptien : $\frac{SM}{MO}$

Si $\frac{SM}{MO} = \phi$, alors, l'arête latérale de la pyramide a pour mesure $a\sqrt{\phi^2 + 1}$ où $2a$ est la mesure du côté du carré ABCD.

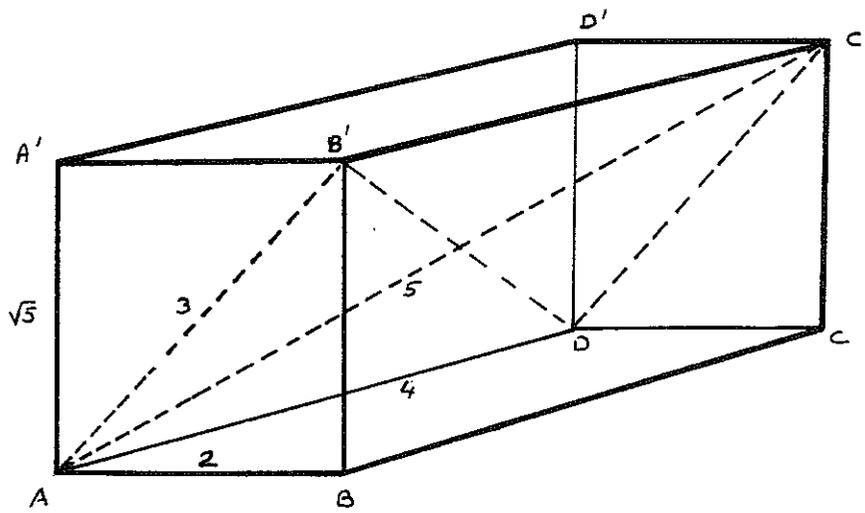
$a\sqrt{\phi^2 + 1}$ vaut la diagonale d'un pentagone inscrit dans un cercle de rayon a .

Mais on peut aussi trouver π dans la grande pyramide : le quotient du demi-périmètre de base par la hauteur est 3,1417.

Mais ces propriétés ne sont pas particulières à Khéops. On les retrouve dans toute pyramide telle que $\frac{h}{a} = \frac{14}{11}$ ce qui correspond à un angle d'inclinaison de $51^{\circ} 50'35''$; par exemple dans la pyramide de Meïdoum (III^e dynastie).

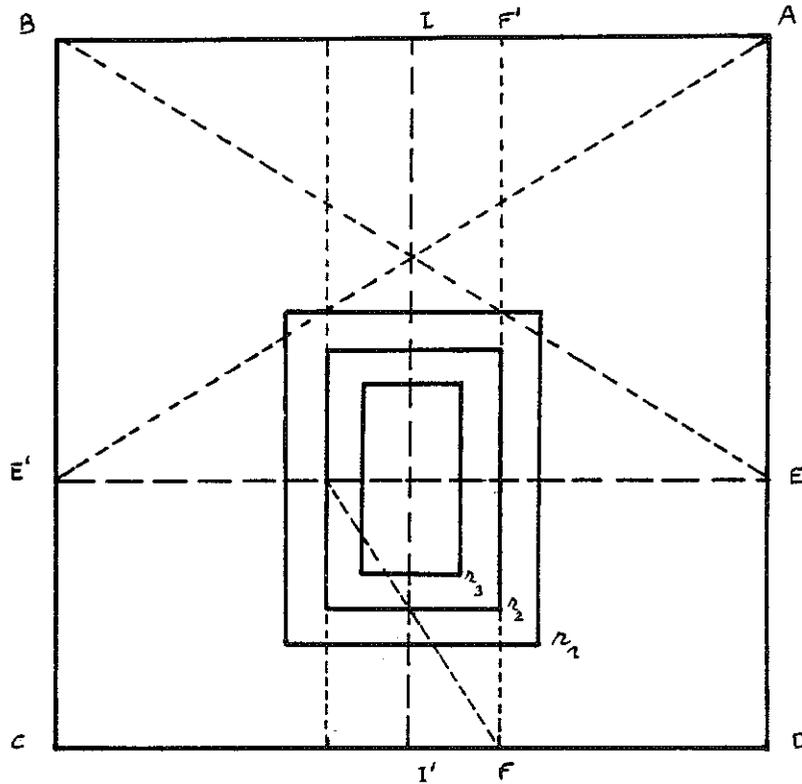
Cependant, rien ne permet de dire que l'architecte de Khéops ait eu, plus que celui de la pyramide de Meïdoum conscience des nombres π ou ϕ . Il convenait de fixer les proportions du triangle de la demi-section méridienne de telle sorte que le rapport entre les deux côtés de l'angle droit soit simple.

La chambre sépulcrale de Khéops



Pour contrôler la parfaite verticalité des parois de cette salle sépulcrale dont le plan est un double carré, il fut fait usage des triangles sacrés 3 - 4 - 5. ADC' est un triangle 3 - 4 - 5. La hauteur du parallélépipède est $\sqrt{5}$.

On retrouve de tels triangles 3 - 4 - 5 dans beaucoup de pyramides.

IV - Plan du tombeau de Ramses IV

ABCD est un carré dont II' est une médiane.

Les points E et F sont tels que $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{CF} = \phi$

Les trois rectangles r_1, r_2, r_3 ont pour centre le point d'intersection de II' et EE' .

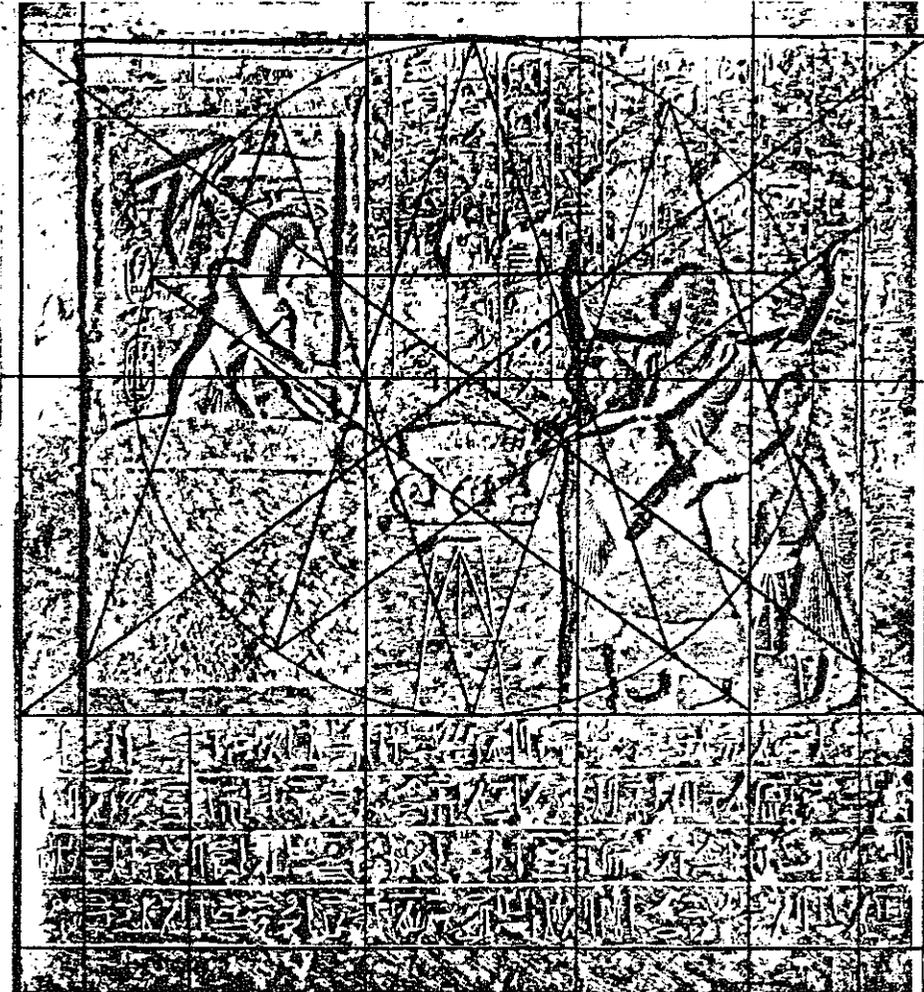
FF' est le support d'un côté de r_2

r_3 est un double carré

r_2 est un rectangle $R\phi$

r_1 est la juxtaposition de deux rectangles r_2

V - La stèle des Colliers (Musée du Louvre)

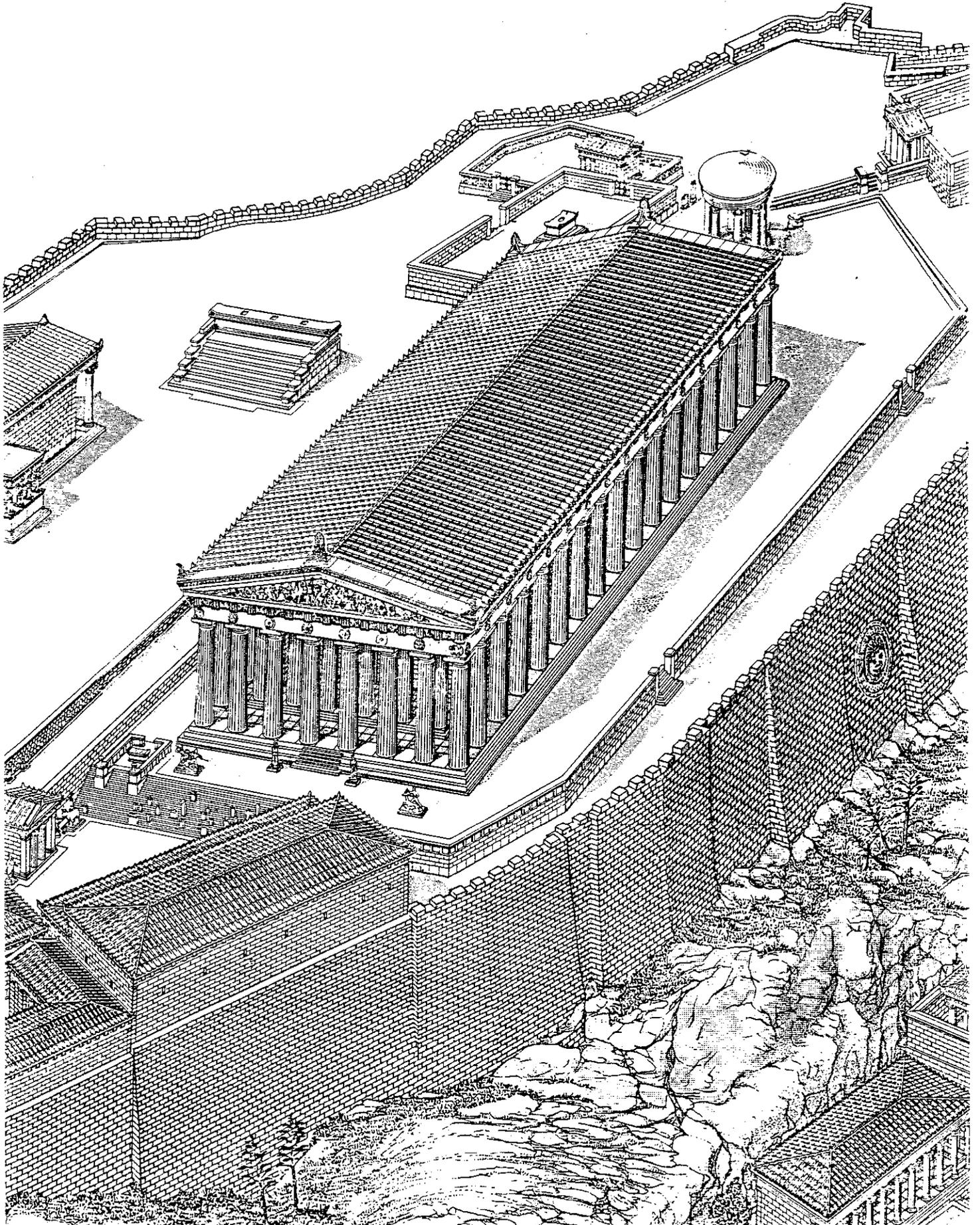


Cette stèle fut trouvée au Sérapeum de Memphis.

Elle date du règne de Séthôsis Ier (1313 - 1292) (XIX^e dynastie)

Un carré circonscrit toutes les parties sculptées. Le bas de ce carré est occupé par une inscription au-dessus de laquelle un rectangle presque semblable à un R2 encadre la cérémonie : Séthôsis Ier remettant les colliers d'honneur à l'un de ses fonctionnaires. Les verticales tracées partagent la largeur suivant le rapport ϕ .

(Les tracés sont d'Elisa Maillard).



LE PARTHENON

Les assises de nivellement du Parthénon forment un rectangle Parthénon RP (rectangle ABCD) : 72,80 m x 33,61 m ; $\frac{BD}{BI} = \phi$

Figure 1

Les faces extérieures des murs formant le rectangle des salles est un rectangle Parthénon (rectangle EFGH).

Le rectangle LNRP est un rectangle Parthénon

LM et PQ sont les banquettes du Pronaos

LNRP se déduit de ABCD par homothétie de centre I' et se déduit de EFGH par homothétie de centre J.

Figure 2

JJ' est l'axe de symétrie Nord-Sud du rectangle des salles.

Un rectangle R2 de petit côté JJ' a son autre petit côté sur les stylobates de la façade du pronaos (s'il est construit à l'est, rectangle JTT'J') ou de la façade de l'opisthodomos (s'il est construit à l'ouest).

Un rectangle égyptien RE de petit côté JJ' a son autre petit côté sur les revers des stylobates (rectangle JSS'J').

Un rectangle d'or Rφ de petit côté JJ' a son autre petit côté sur les bords des péristyles est (ou ouest) (rectangle JUU'J')

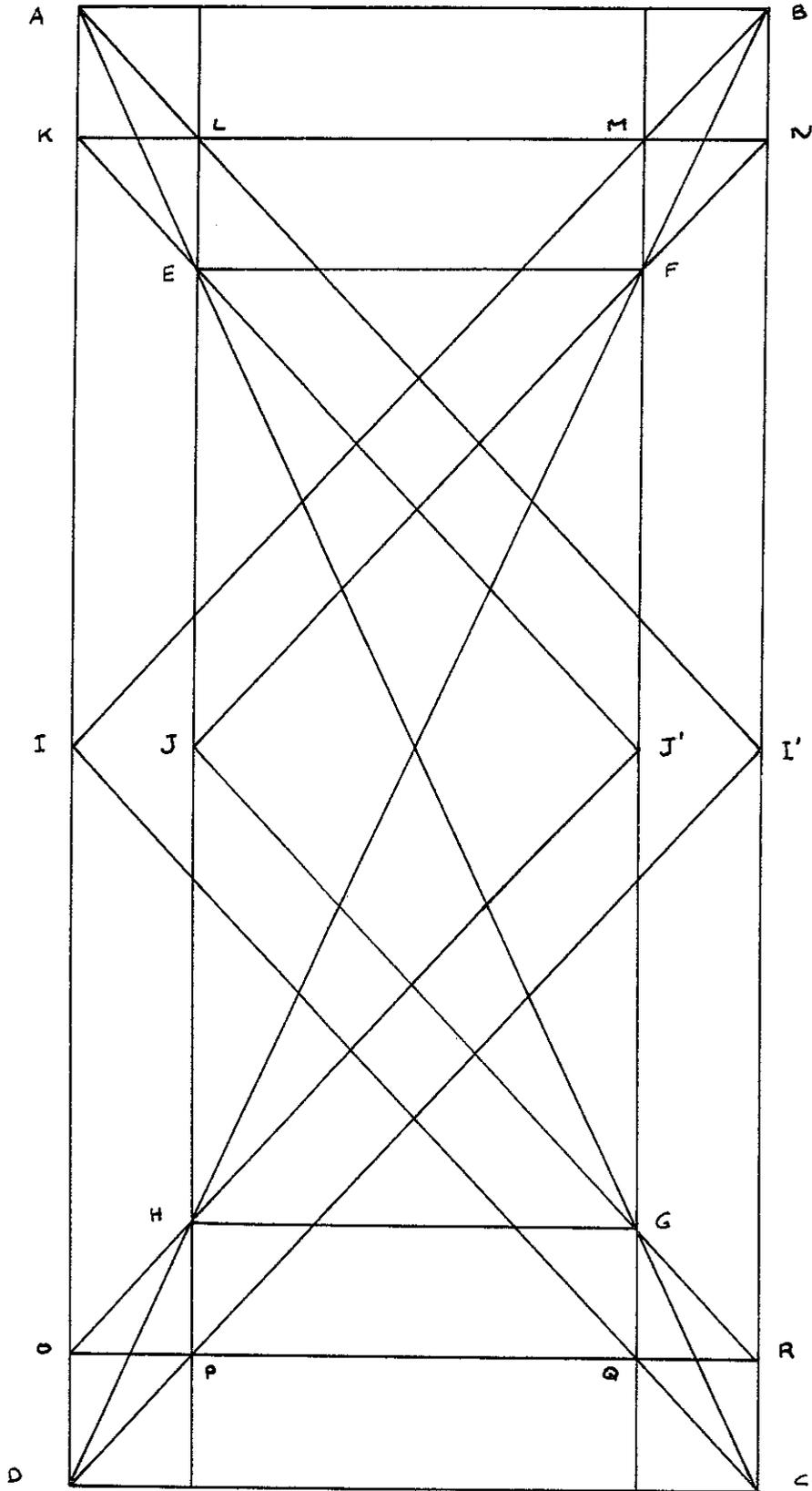


Figure 1

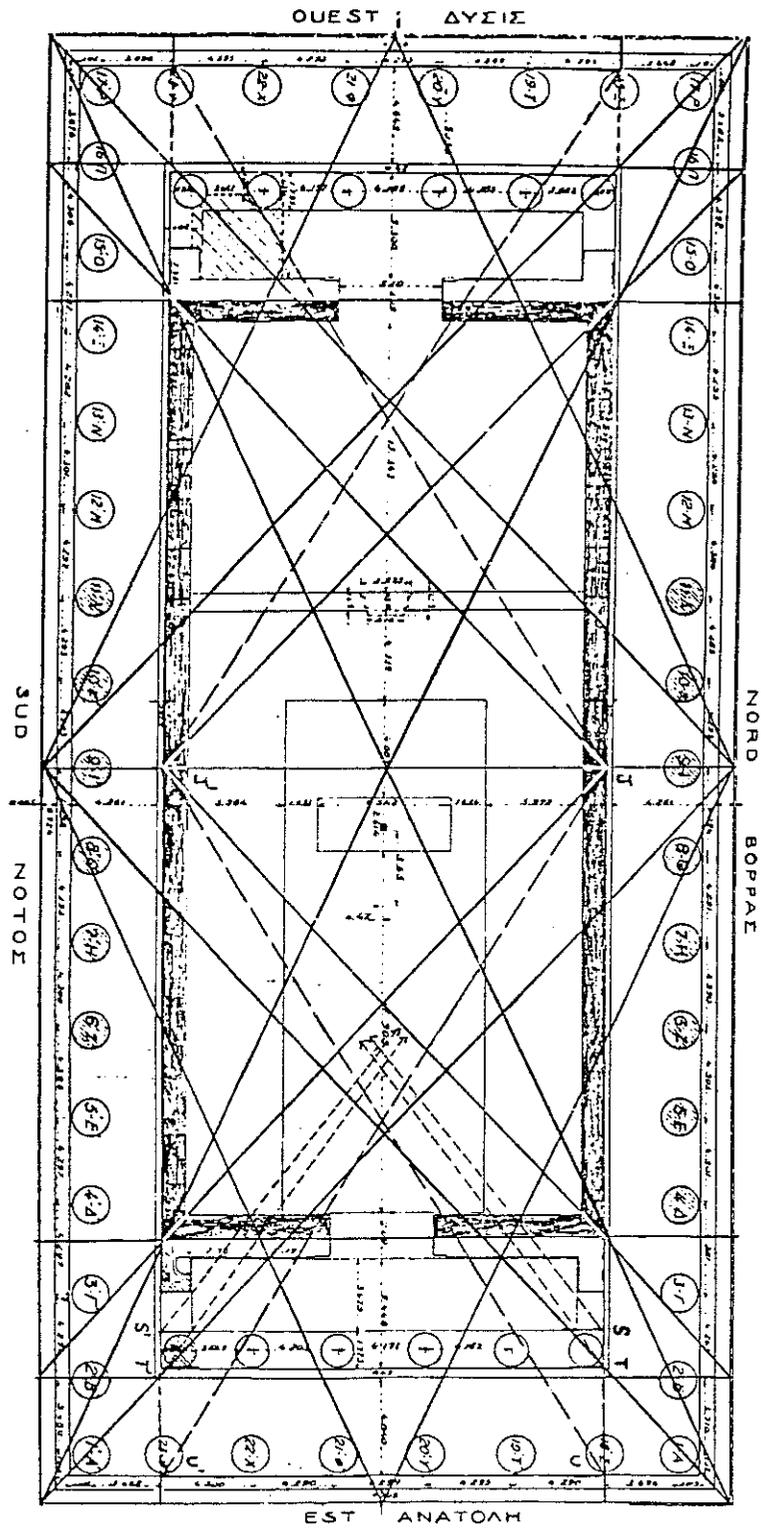


Figure 2

Les triangles égyptiens dans le plan du Parthénon (figure 3)

Le diagramme est centré sur la statue de la divinité Athéna Parthénos.

La statue était sur un piédestal de 6,542 m x 2,614 m : deux rectangles égyptiens accolés.

Considérons un rectangle égyptien centré sur la statue et de petit côté le portique transversal de la cella. En le prolongeant par deux rectangles identiques vers l'est, un petit côté se place sur l'axe de la colonnade du péristyle.

On construit un réseau de mailles rectangulaires égyptiennes en prenant comme base un rectangle égyptien dont les mesures des côtés sont la moitié de celles du rectangle ABCD.

Les faces intérieures des murs orientés est-ouest sont situées sur des noeuds de ce réseau, ainsi que l'axe des colonnades est-ouest.

Les prolongements vers l'est des diagonales passant par le centre de la statue rencontrent le bas du sous-bassement en E et F. La droite EF coïncide avec la face du mur du pronaos.

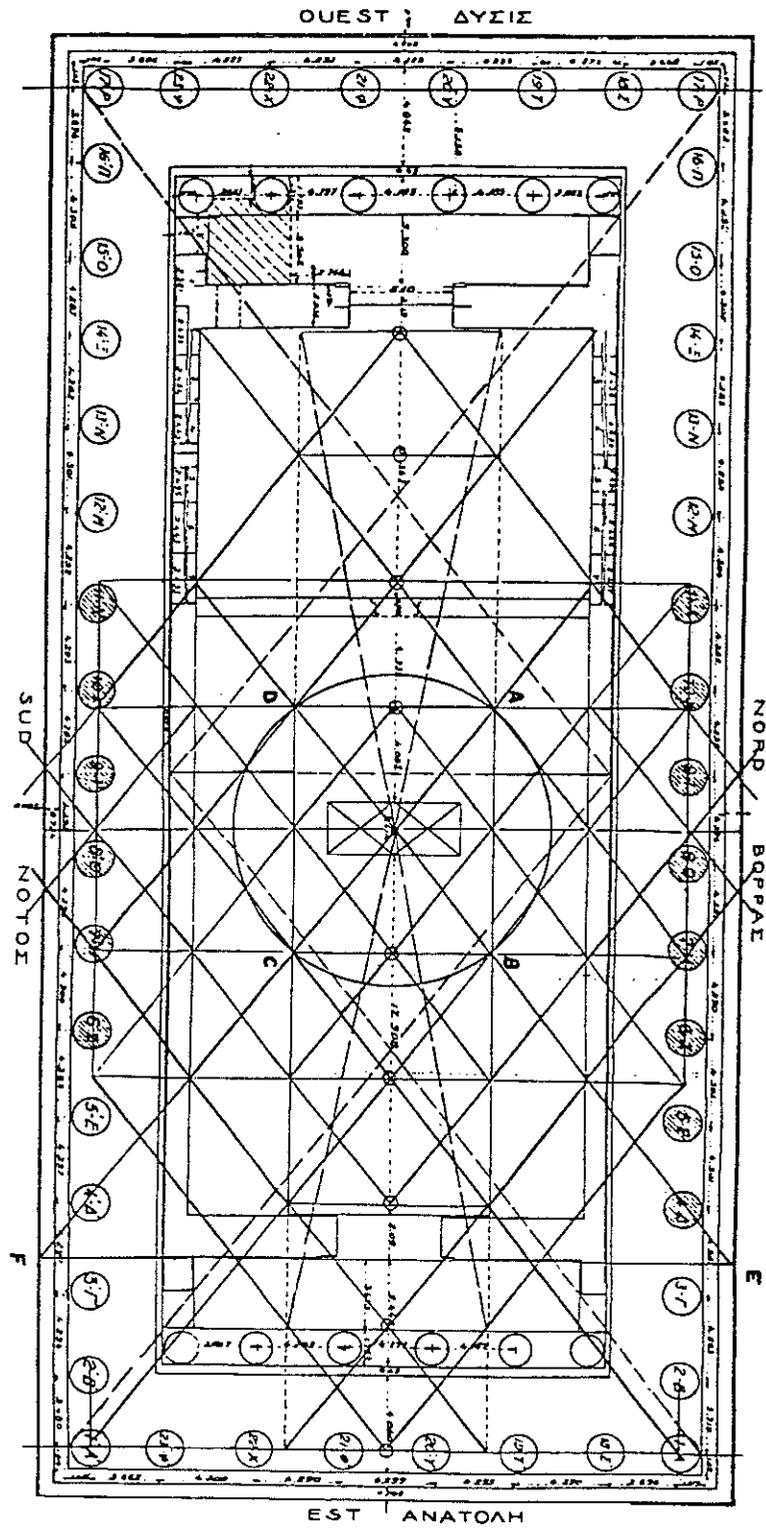


Figure 3

Figure 4

Le triangle d'or isocèle à angle aigü (36°) d'axe ouest-est de base UV a son sommet sur le centre de la statue (point O). CDO' est un triangle d'or semblable.

Le cercle de centre O passant par O' est tangent à la porte du temple.

Quatre des sommets du décagone inscrit dans ce cercle sont situés sur le bord du socle et la droite SS' qui joint deux de ces sommets passe par le mur qui sépare les deux salles.

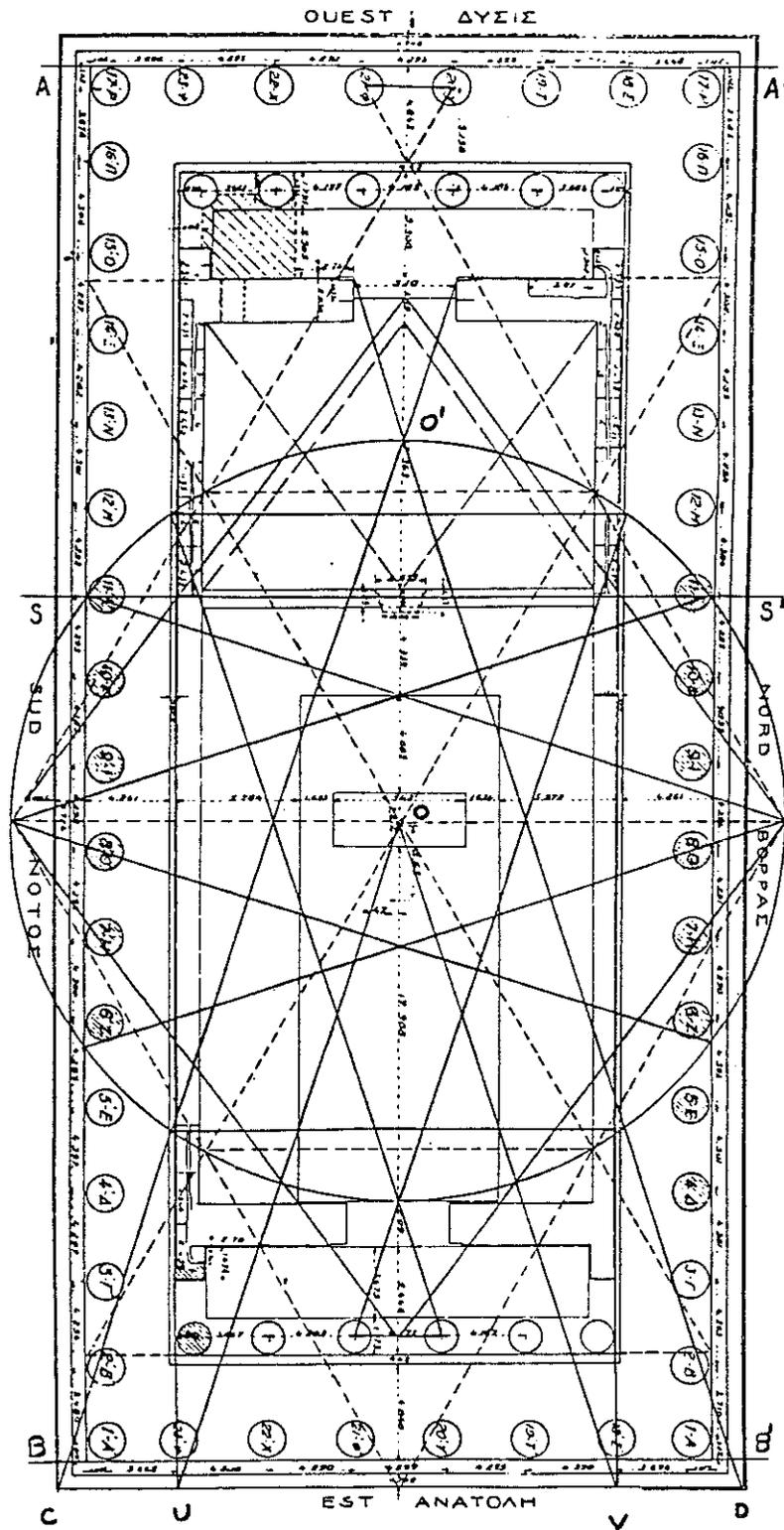


Figure 4

Etude de la façade est (Figure 5)

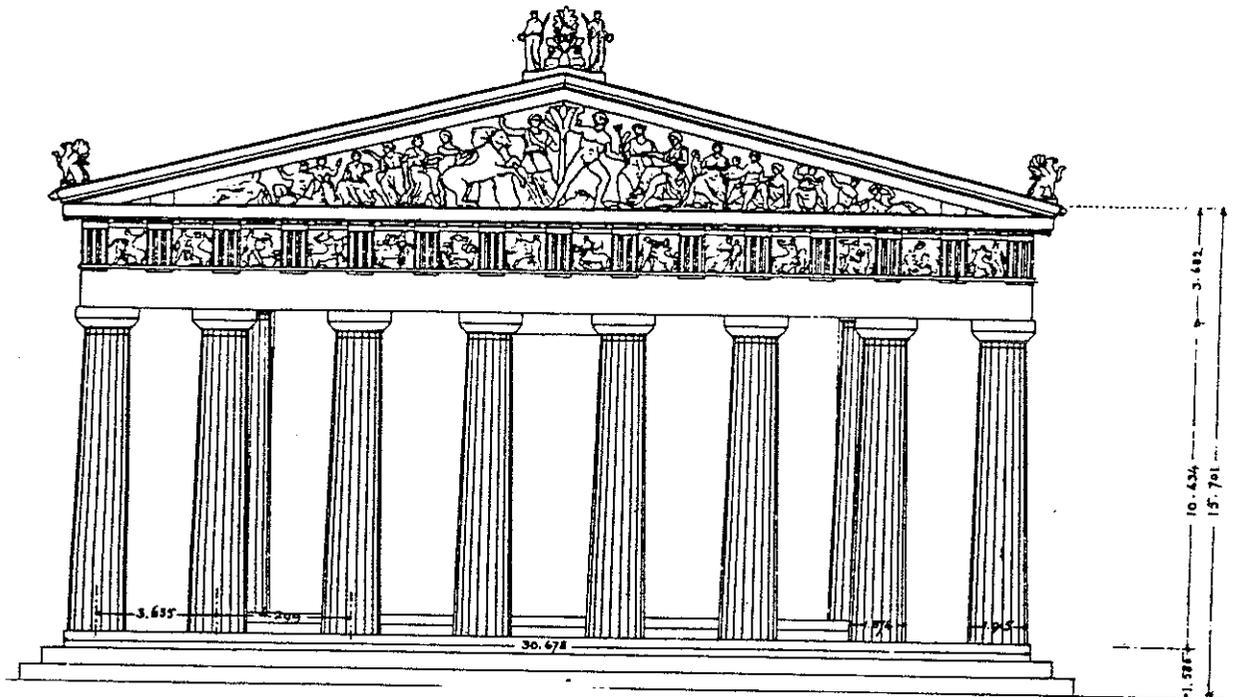
Les cinq entrecolonnements (colonnes 2 à 7) sont de même grandeur que ceux des quatorze entre les colonnes 2 à 16 des grandes façades nord et sud. L'égalité des entrecolonnements était indispensable pour que le même rythme se reproduise sur les quatre façades. Pour des raisons esthétiques les colonnes des quatre angles n'ont pas la même propriété.

La distance centre l'axe de la façade et l'axe de la 7^e colonne sont les petits côtés de trois rectangles dorés :

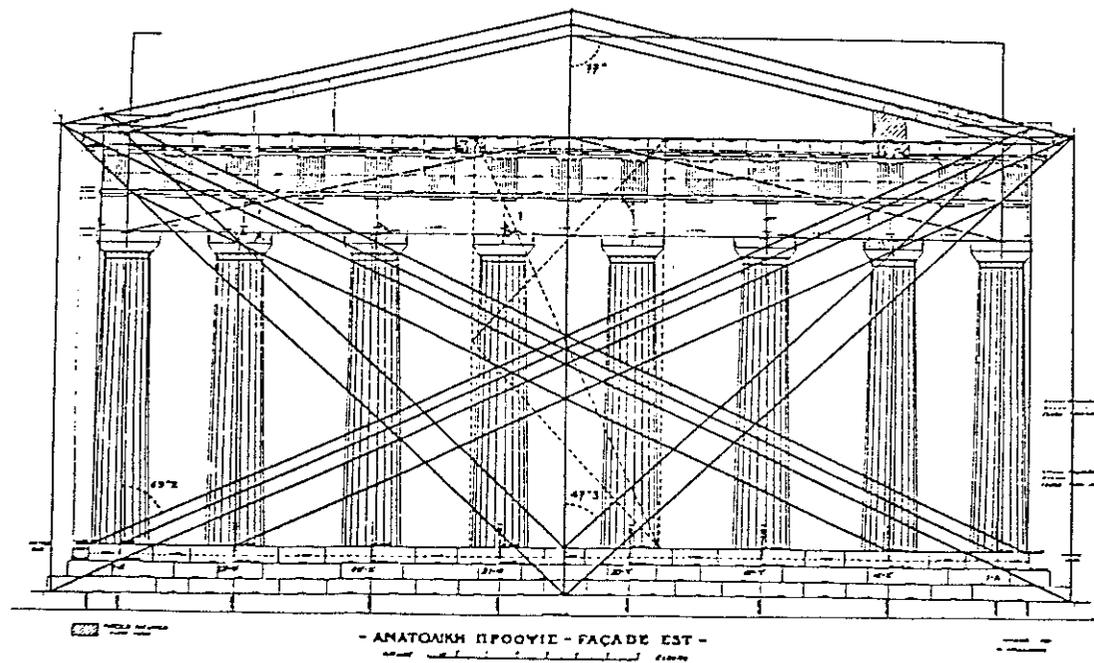
- un rectangle R2 dont le grand côté s'élève de l'assise de nivellement jusqu'à la corniche de l'entablement.
- un rectangle RE dont le grand côté s'élève du bord du péristyle à la corniche
- un demi rectangle RP du bord du péristyle jusqu'à l'échine de la colonne.

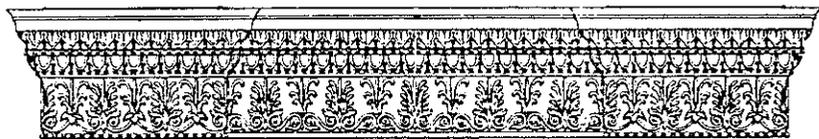
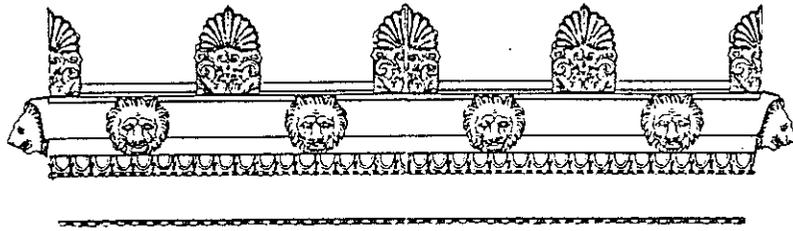
Des rectangles RP se chevauchent : chacun encadre deux colonnes avec ses grands côtés, du bord du péristyle jusqu'à la corniche. Les quatre colonnes du centre sont communes à deux rectangles RP.

La hauteur de l'entablement est celle d'un rectangle égyptien RE ayant comme grand côté la longueur d'une architrave.



Toutes les lignes du diagramme ci-dessous appartiennent à des rectangles RP.





QUELQUES INSTRUMENTS POUR LA
CONSTRUCTION DE TRIANGLES ET DE
RECTANGLES DORÉS

Des instruments de précision spéciaux servaient aux artistes pour le tracé de triangles et de rectangles dorés. Il n'a subsisté que peu d'instruments d'usage courant dans l'Antiquité et jusqu'à la Renaissance.

Tous ces instruments ont été étudiés par Elisa Maillard.

I - TROIS INSTRUMENTS CONSERVES AU MUSEE DE CLUNY

Ces instruments, avec d'autres, composaient la trousse d'un architecte allemand de la Renaissance.

1) La règle à fil à plomb

La droite séparant le rectangle occupé par une femme ailée (qui représente la Force) de la partie inférieure recouverte de rinceaux touffus, partage la règle dans le rapport Φ (le fronton chantourné étant non compris).
Le femme ailée se trouve dans un rectangle RP.



2) L'équerre pliante

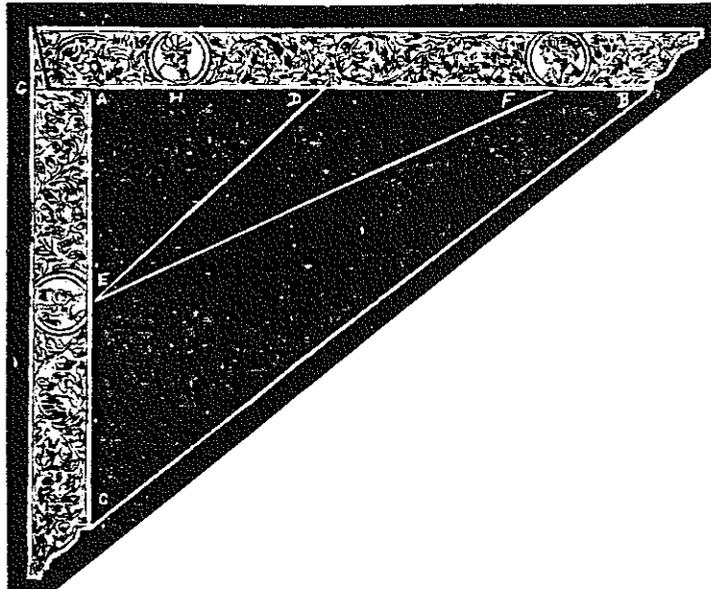
ABC est un triangle rectangle doré :

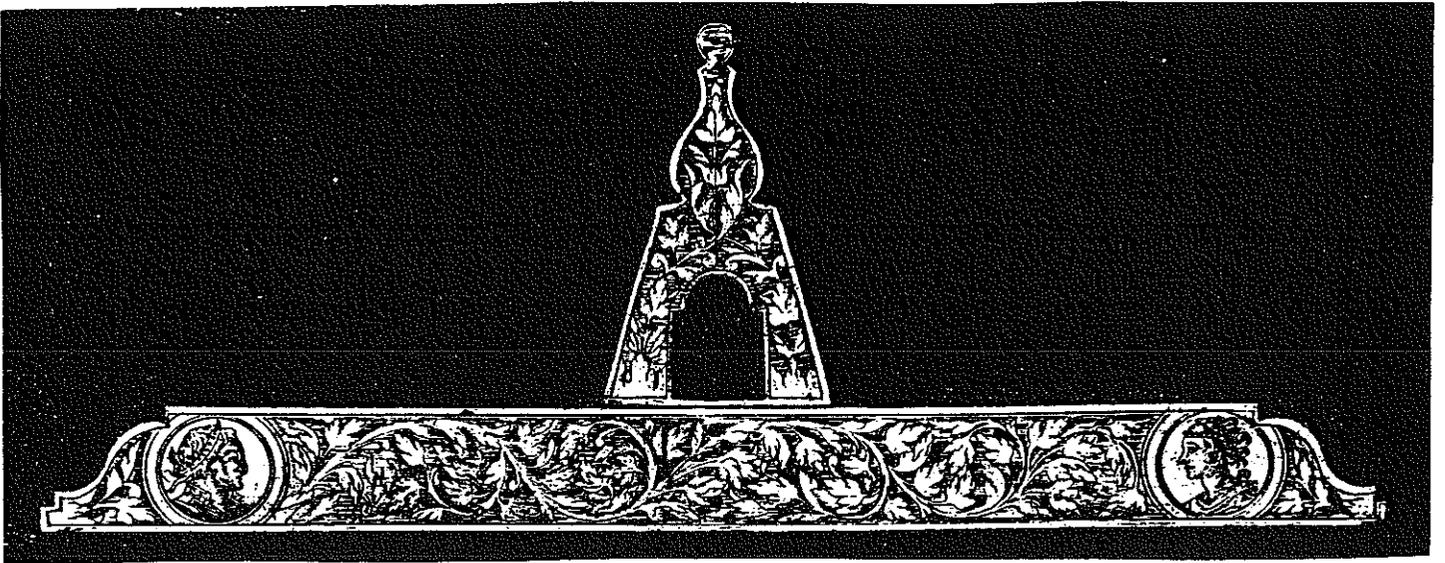
le rapport des longueurs de l'hypothénuse et de l'un des côtés de l'angle droit est le nombre d'or :

$$\frac{BC}{AC} = \phi .$$

A,B,C sont trois des sommets d'un rectangle égyptien RE.

Les médianes des deux médaillons marquent les points E et F d'un rectangle RP dont A,E,F sont trois des sommets.

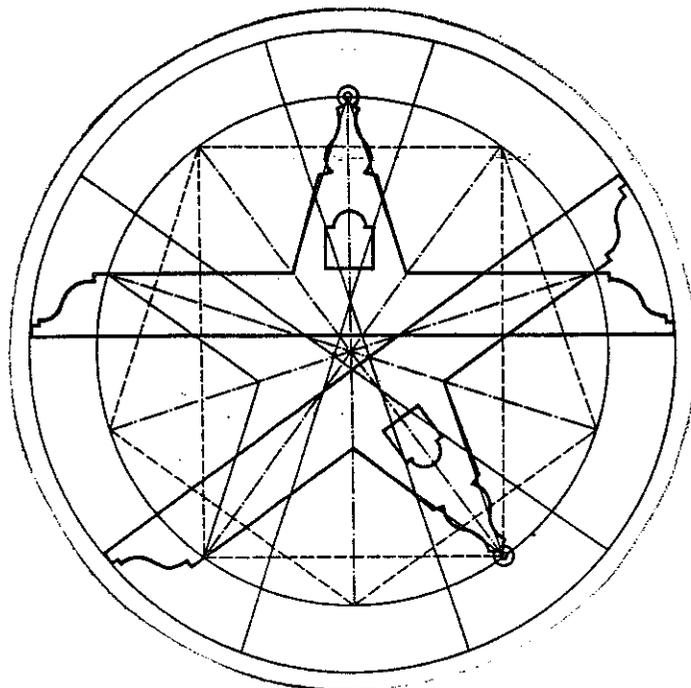


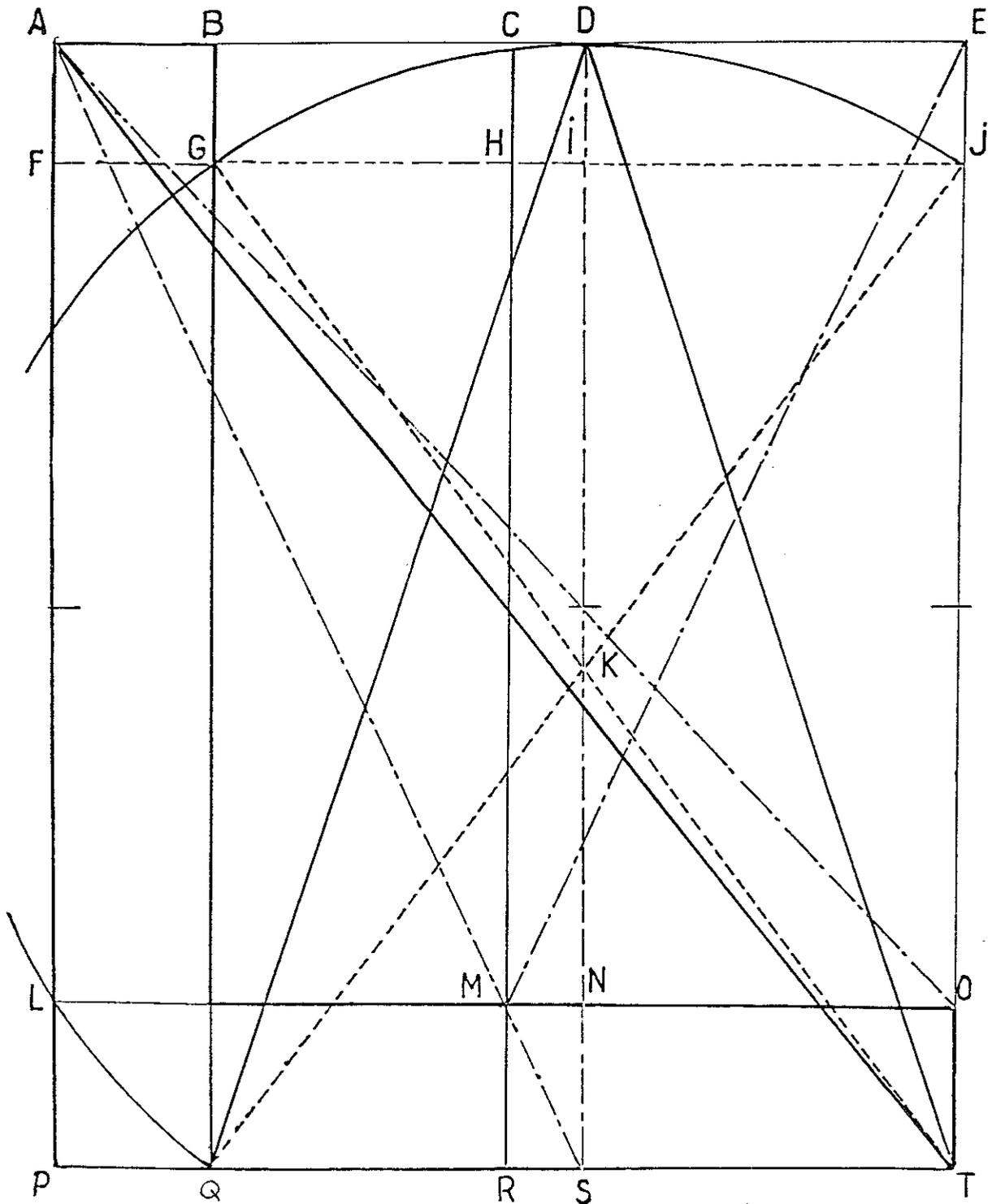
3) - Le niveau à fil à plomb

Il sert au tracé d'un pentagone étoilé et d'un pentagone convexe inscrits dans un même cercle.

La plaque triangulaire permet de construire un triangle isocèle doré dont l'angle au sommet (marqué par le trou de suspension) mesure 36° . Le bord supérieur de la règle permet de construire une diagonale de pentagone étoilé.

En marquant les trois sommets du triangle isocèle, et en utilisant le bord supérieur de la règle, on peut tracer les autres diagonales.





*Équerre d'un maître d'œuvre. (Poitou. XIII^e siècle.)
Construction des cinq rectangles dorés.*

II - L'ÉQUERRE D'UN MAÎTRE D'ŒUVRE (Poitou XIII^e siècle)

Elle est représentée dans la cathédrale Saint Pierre de Poitiers et permet de construire avec une bonne précision les cinq rectangles dorés R_1, R_2, R_E, R_ϕ et R_P .

Les bords extérieurs de l'équerre définissent un rectangle égyptien RE : $AETP$.

La largeur AB de la grande branche de l'équerre est telle que $BETQ$ est un rectangle R_1 .

D et S étant les milieux respectifs de BE et QT , le rectangle $ADSP$ est presque un rectangle R_P . Cela n'est pas rigoureusement exact car cela signifierait que si trois rectangles RE, R_P et R_1 avaient même longueur, leurs largeurs respectives l_E, l_P et l_1 seraient liées par la relation

$$l_E = l_P + \frac{1}{2} l_1$$

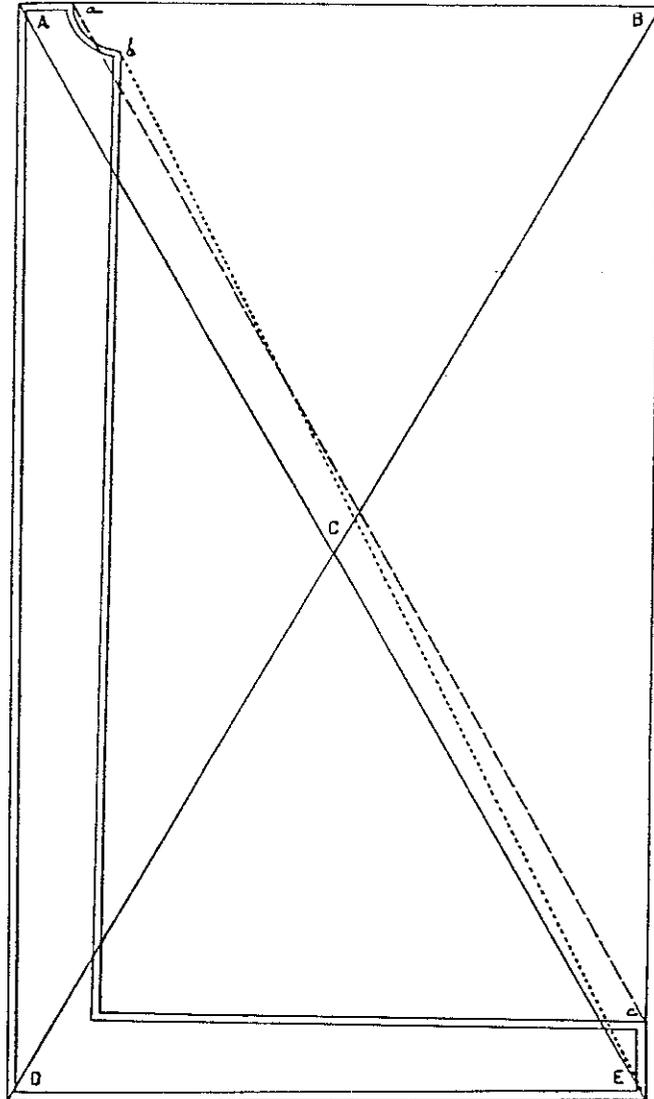
relation vérifiée à 10^{-6} près.

Le cercle circonscrit au triangle DTQ (son centre est K) coupe les côtés du rectangle R_1 : $BETQ$ en G et J .

Le rectangle $GJTQ$ est donc un rectangle R_2 .

Enfin, C et R étant les milieux respectifs de AE et PT , la droite AS coupe la droite RC en M , ce qui définit la largeur RM de la petite branche de l'équerre. La parallèle à PT en M coupe AP en L et SD en N . La droite GJ coupe AP en F et SD en I . Le rectangle $FINL$ est presque un rectangle R_ϕ (avec une précision de $5 \cdot 10^{-3}$).

Il suffit donc de marquer les points F, G, Q, N, S et L sur l'équerre pour construire les cinq rectangles dorés.



III - L'EQUERRE DE MAITRE HUE LIBERGIER

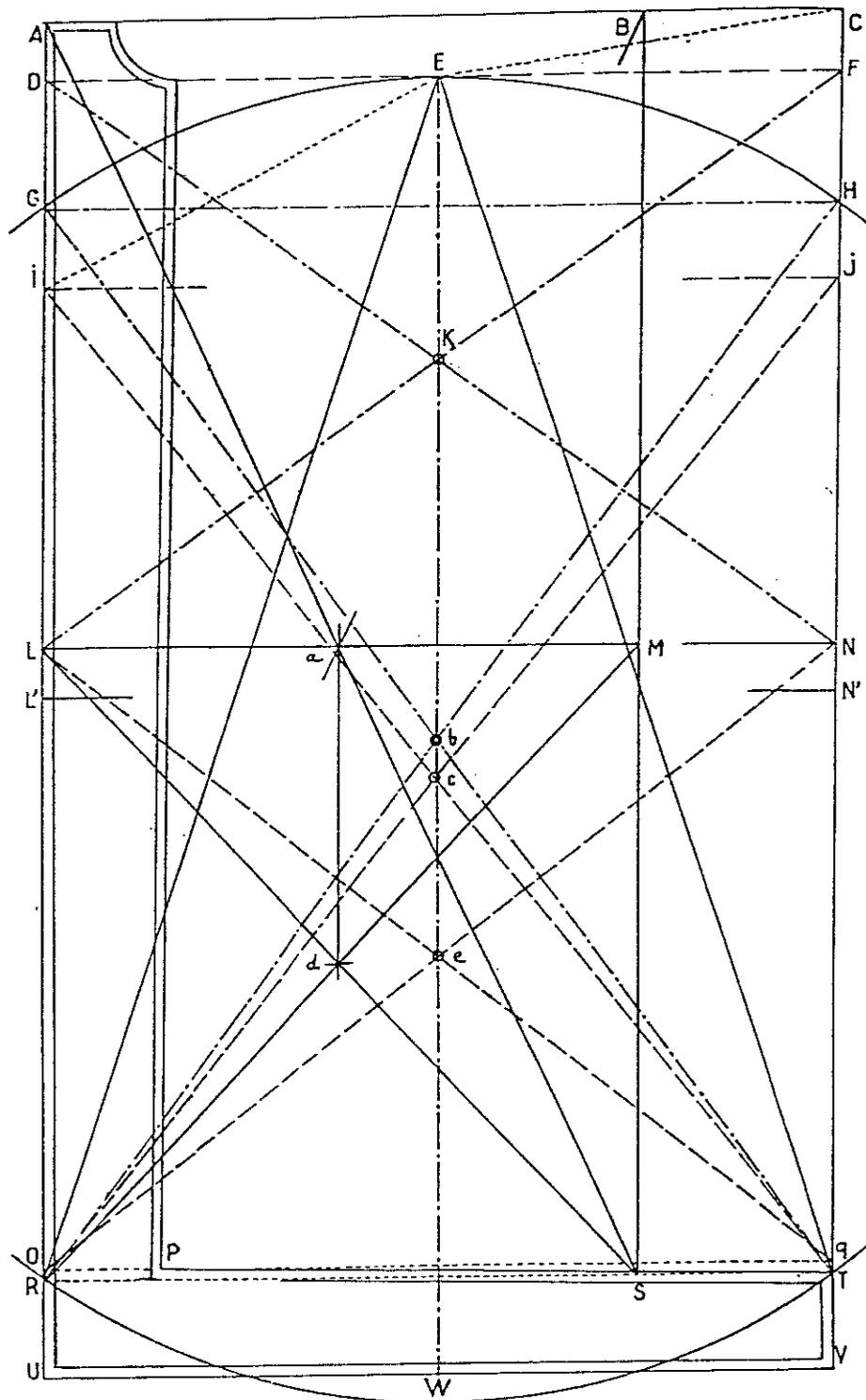
Hue Libergier (mort en 1263) était un architecte rémois. Son équerre est représentée sur sa dalle funéraire (voir illustration page 186).

L'angle ADE est droit ainsi que l'angle bdc.

La grande branche de l'équerre s'élargit vers son extrémité alors que la petite branche de l'équerre s'amincit vers son extrémité.

Les triangles ABC et DEC sont équilatéraux.

La distance entre l'angle inférieur du cavet de la grande branche (b) et le point E est la même que la distance entre a et c. Cette distance représente deux pieds de la vicomté de Reims au temps de Saint Louis.



T étant l'extrémité supérieure de la petite branche de l'équerre et P le sommet de l'angle intérieur de l'équerre, les droites RT et OPQ sont parallèles à UV.

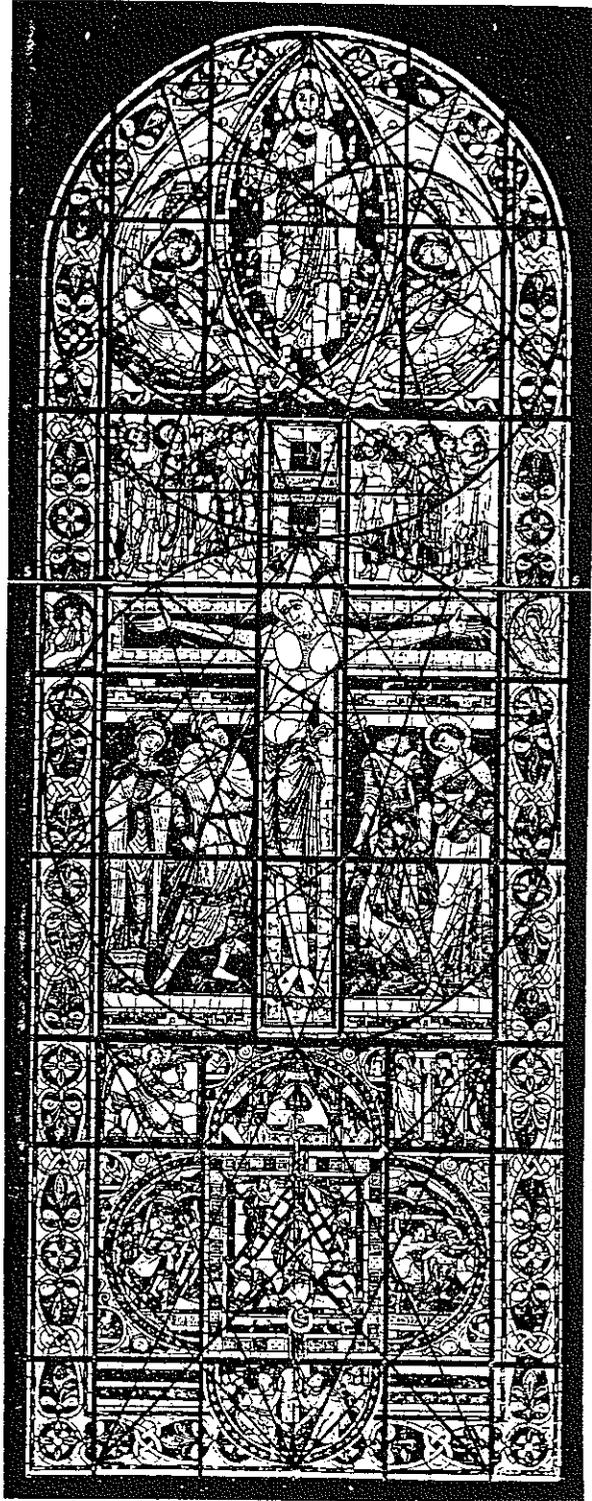
L'arc de cercle de centre T de rayon TC coupe en E la médiatrice de RT. On constate que la parallèle DF à RT menée par E passe par l'angle inférieur du cavet. Cet angle permet donc de construire le rectangle doré R1 : DFTR.

Ce même arc de cercle coupe AV en I. Le repérage de I permet donc de construire le rectangle RE : IJTR.

Le cercle circonscrit au triangle ERT (son centre est b) coupe AV et CV en G et H. Le repérage de G permet de construire le rectangle R2 : GHTR.

Enfin, en repérant S ($\vec{RS} = 3/4 \vec{RT}$), ABSR est presque un rectangle RP.

D'autres rectangles dorés, R2, RE apparaissent sur cette figure en utilisant la droite QQ et le cavet : DFNL est un R2 et LNQO un R3. L' étant le milieu de AU, DFN'L' est un R3 tandis que L'N'QO est un R2.



CATHÉDRALE DE POITIERS

Vitrail de la Crucifixion - Cathédrale Saint Pierre de Poitiers
(vers 1150 - 1179).

Ce vitrail est inscrit dans un demi-rectangle R2.

La section dorée de la hauteur de la fenêtre est sur la barlotière qui surmonte le bord supérieur de la traverse de la croix.

L'Ascension est représentée dans un R2 qui s'étend sous l'arc de la fenêtre jusqu'au bord supérieur de la traverse de la croix de la Crucifixion.

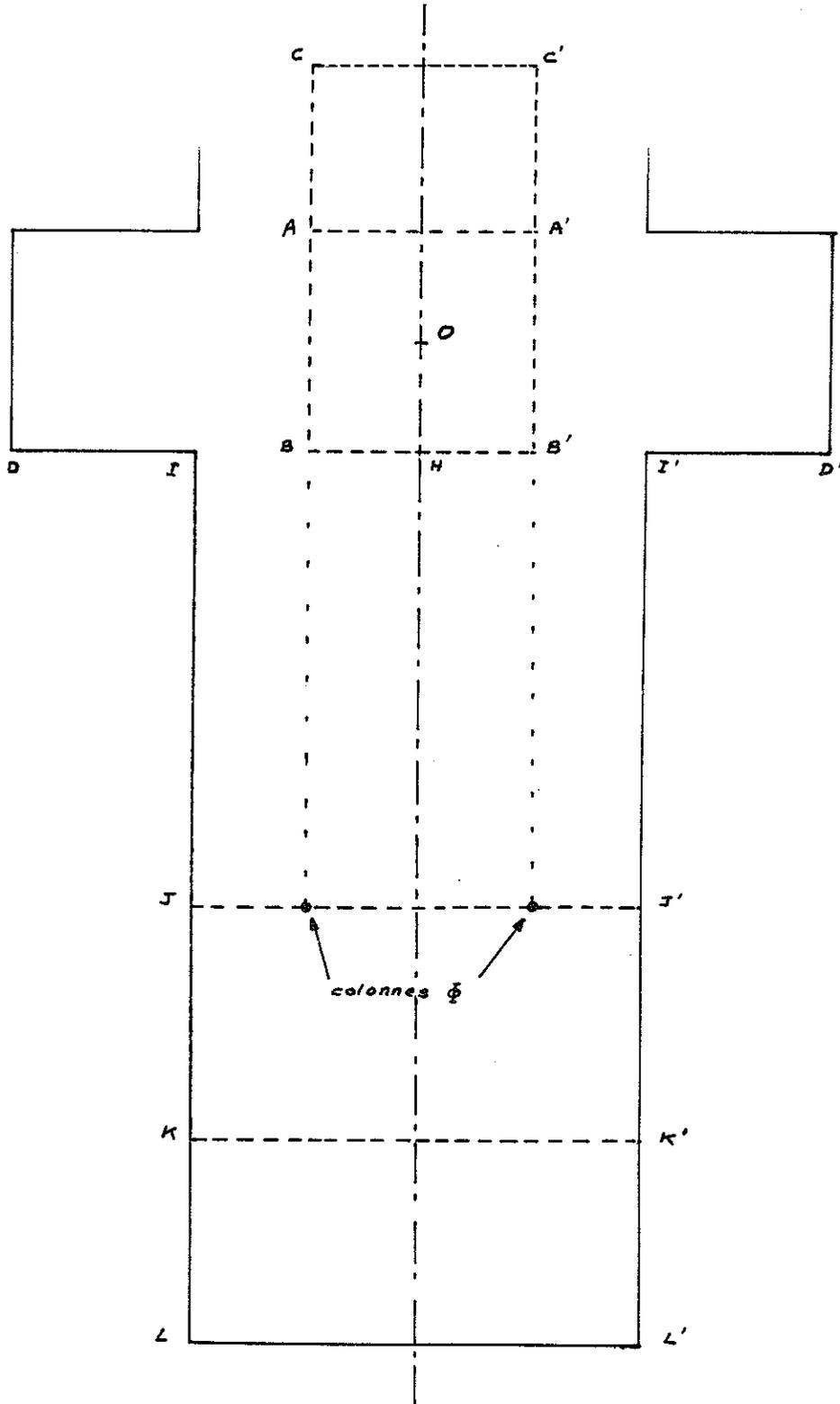
Le rectangle de la Crucifixion est un R Φ . Le rapport des longueurs du montant et de la traverse de la croix sont dans le rapport Φ .

Le quadrilobe qui s'étend entre la barlotière du pied de la croix et le bord inférieur de la fenêtre est inscrit dans un rectangle obtenu par la juxtaposition de deux rectangles RP.

Entre le bas de la croix et le haut de la fenêtre, deux cercles sont tracés dont l'un souligne l'arc en plein cintre de la fenêtre. Des côtés de pentagones étoilés et de décagones étoilés sont tracés dans ces cercles. Ces traits ordonnent les scènes représentées.

NOTRE DAME DU PORT A CLERMONT - FERRAND

L'étude du plan de Notre Dame du Port, et les mesures effectuées permettent de penser que cette cathédrale a été construite selon le nombre d'or.



Les mesures moyennes en cm sont :

$$\begin{array}{lll} IJ = 1410 & , & JK = 942 & , & KL = 443 \\ HB = 351,5 & , & HI = 740 & , & HD = 1278 \\ AC = 420 & . & & & \end{array}$$

Ce qui permet d'émettre les hypothèses ci-dessous :

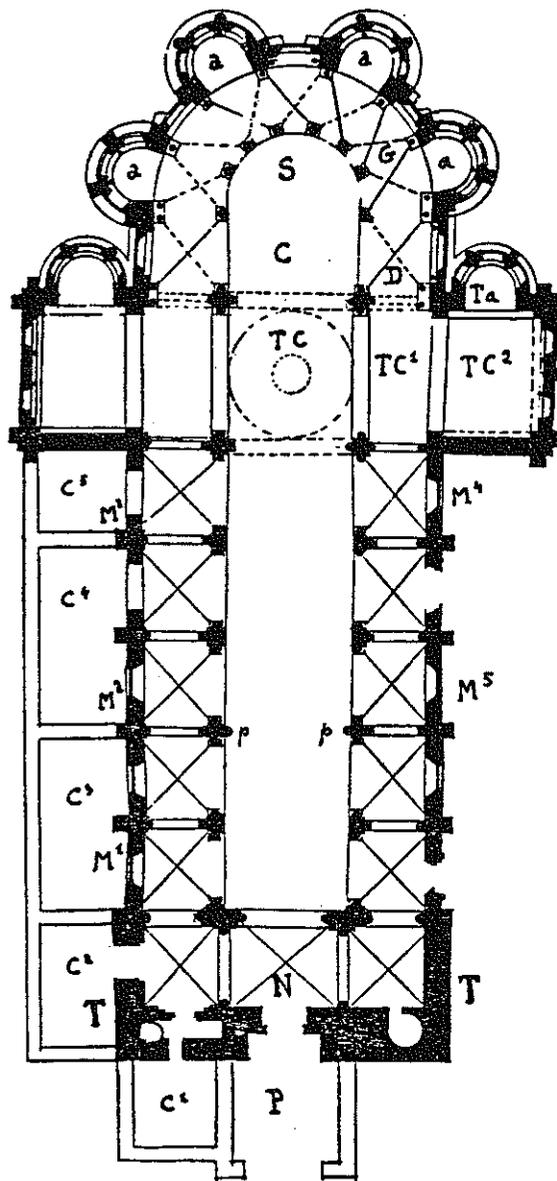
La nef et le narthex forment un ensemble de deux carrés $II'J'J$ et $JJ'L'L$. La nef sans le narthex est un rectangle d'or R_ϕ : $II'K'K$. Sur JJ' sont situées deux colonnes que nous appellerons colonnes ϕ . Celles-ci, pourvues d'un chapiteau mais sans arc doubleau n'ont aucune utilité fonctionnelle : peut-être l'architecte voulait-il montrer par leur présence sa connaissance du nombre d'or : $\frac{IK}{IJ} = \phi$. De plus, la hauteur du fût de ces colonnes et la largeur de la nef sont dans le rapport ϕ .

$$\text{On a } \frac{IK}{IJ} = \frac{IJ}{JK} = \frac{JK}{KL} = \phi .$$

Le carré du transept $AA'B'B$ et la travée de chœur $AA'C'C$ forment un rectangle d'or.

D'autre part, si O est le centre du carré du transept, on a :

$$\frac{OI}{OB} = \frac{OD}{OI} = \phi \quad \text{et} \quad \frac{OL}{OD} = \phi^2 .$$



- P : Porche xvi^e siècle.
 C1 : Anc. chapelle xv^e siècle.
 TT : Tours de la façade ouest vi^e au x^e siècles.
 N : Narthex ix^e-x^e siècles.
 M1, M2, M3 : Sur gouttereau nord. Segments d'époques différentes vi^e(?) ix^e et x^e siècles.
 M4 : Partie x^e siècle du mur sud.
 M5 : Mur gouttereau sud, reconstruit fin xii^e siècle.
 C2, C3, C4, C5 : Chapelles édifiées aux dépens du cloître du chapitre xiv^e-xv^e siècles.
 p.p' : Piliers de la nef avec colonnes à chapiteaux libres.
 TC : Croisée ou carré du transept et coupole, xi^e siècle.
 TC1 : Collatéral du transept.
 TC2 : Croisillon.
 Ta : Chapelle du croisillon.
 C : Chœur, xi^e siècle.
 D : Déambulatoire, xi^e siècle.
 S : Sanctuaire, xi^e siècle.
 G : Galerie tournante, xi^e siècle.
 a : Absidioles du chevet, xi^e siècle.

Ce plan établi en grande partie d'après celui de MM. H. et E. du Ranquet, montre la divergence des murs de la nef par rapport à l'alignement de ses piliers, ainsi que la légère désaxation sud du transept et du chevet.

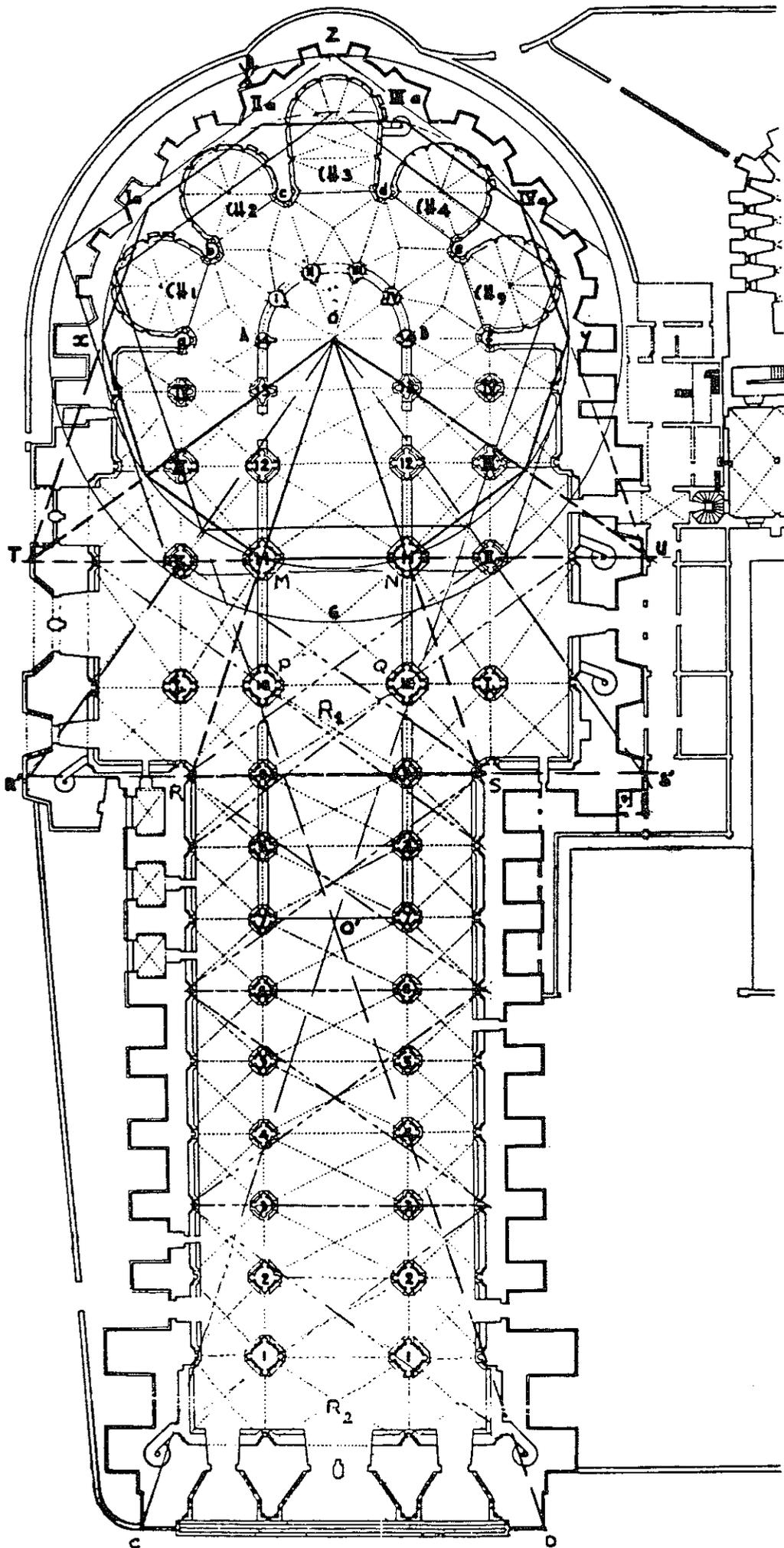
(Extrait du guide *Notre-Dame du Port* de la collection « Le Touriste en Auvergne », n° 3, du docteur Balme et du chanoine Crégut.)

LA CATHÉDRALE DE REIMS

A l'époque romane, entre le 8^e et le 11^e siècle, l'essor de l'architecture religieuse regroupa autour des magnifiques abbayes bénédictines les ateliers de maçons et tailleurs de pierres en véritables écoles d'architecture dirigées par les moines. Ce sont les disciples de Saint Benoît qui conservèrent ou retrouvèrent les textes de l'Antiquité grecque ou alexandrine ainsi que le traité d'architecture de Vitruve ; ils nous transmirent tout spécialement la mystique pythagoricienne des nombres par Nicomède de Gérase, Martianus Capella (5^e s.), Boèce et Cassiodore (6^es.) Isidore de Séville (6^e s.), le pape Sylvestre II (10^e s.).

Sylvestre II est le moine bénédictin rémois Gerbert qui fut certainement le chef de file des bâtisseurs de la cathédrale. On a trouvé à Reims des pentagrammes sur des pierres.

D'autre part, Hue Libergier dont la dalle funéraire se trouve dans la cathédrale de Reims a certainement participé à l'édification de la cathédrale.



I - ETUDE DU PLAN DE LA CATHEDRALE (relevé de M.H. Desseux)

Soit O le pied de la verticale du clocher à l'Ange (flèche).

Le cercle de centre O de rayon OM (M étant le centre du onzième pilier) est tangent aux quatre demi-cercles des chapelles. MN est le côté d'un décagone inscrit dans ce cercle.

$$\frac{OM}{MN} = \Phi .$$

Les fonds des chapelles CH1 et CH5 sont deux des sommets d'un pentagone inscrit dans ce cercle.

Le cercle de centre O et de rayon OG (G étant le centre du rectangle MNQP) est circonscrit au pentagone dont les côtés sont parallèles au premier pentagone. Le premier cercle est inscrit dans ce deuxième pentagone.

Les triangles OMN et ORS sont des triangles d'or isocèles dont l'angle au sommet mesure 36° et on a

$$\begin{aligned} OM &= ON = MN \times \Phi \\ OR &= OS = RS \times \Phi = OG \times \Phi \end{aligned}$$

Les points T et U situés à l'intersection de la droite MN et des bords extérieurs de la cathédrale sont tels que le triangle OMT est un triangle d'or isocèle dont le sommet M a pour mesure 108° et par suite, le triangle TOU est un triangle d'or isocèle dont le sommet O mesure 108° . On a :

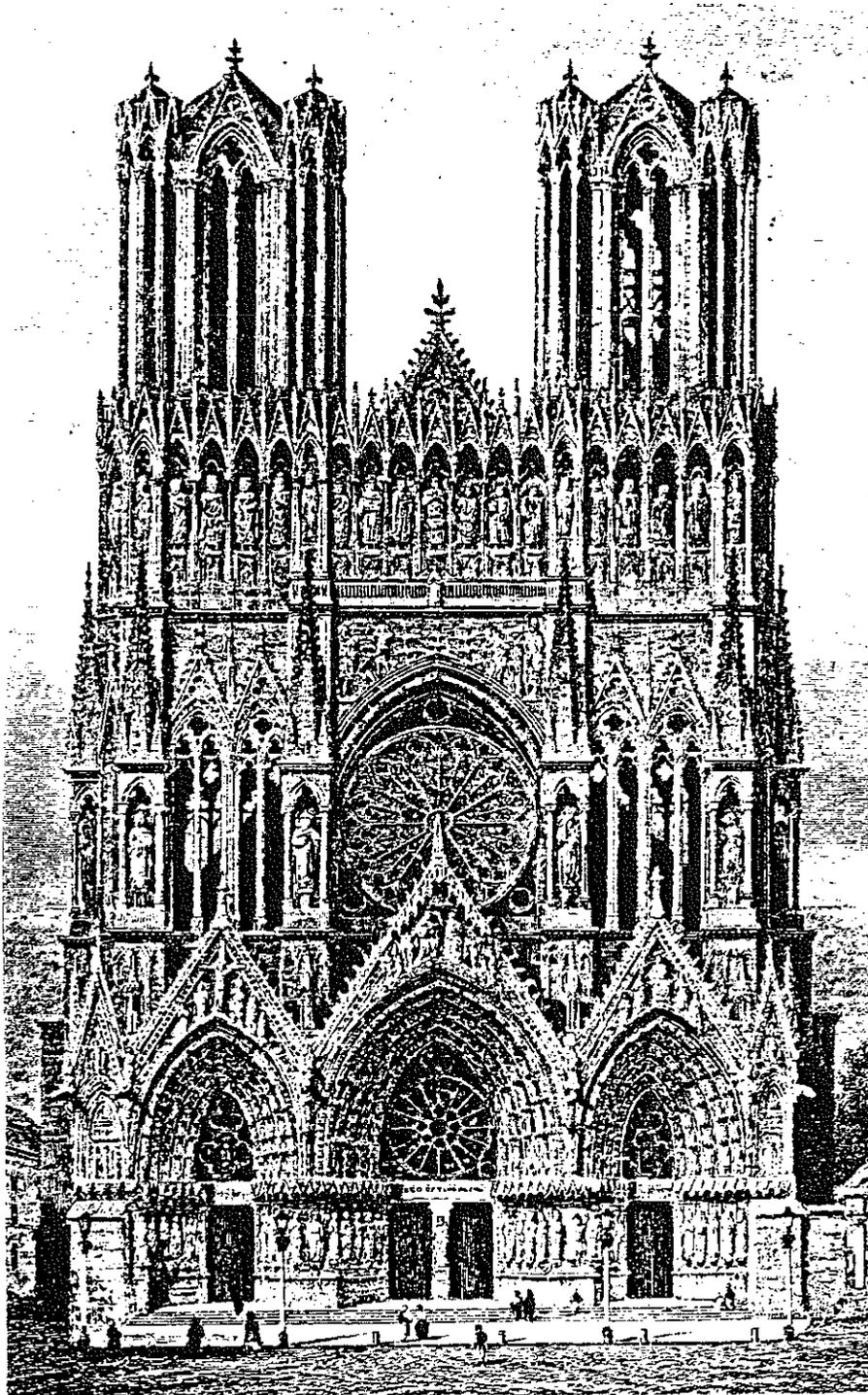
$$\frac{TU}{TO} = \frac{TO}{OM} = \frac{OM}{MN} = \Phi$$

Deux des côtés du premier pentagone se coupent en O' et leurs prolongements déterminent la largeur de la façade de la cathédrale : le triangle O'CD est un triangle d'or isocèle dont le sommet O' mesure 36° .

Les rectangles R_1 (situé entre les piliers 0 et les piliers 10) et R_2 (situé entre les piliers 1 et le revers du portail) sont deux rectangles d'or $R\Phi$.

Les bras de la croix (choeur et transept) et la longueur de la nef (à partir du choeur jusqu'à l'entrée) dessinent la majuscule grecque Tau et sont sensiblement dans le rapport Φ .

On peut encore trouver d'autres rapports Φ dans le plan de la cathédrale.



Cathédrale Notre-Dame (gravure du XIX^e siècle). (Photo S.A.E.P.)

II - LA FACADE DE LA CATHEDRALE

Le rectangle ayant pour côté la largeur de la façade principale et dont la hauteur aboutit au sommet du fronton du Couronnement de Marie est un rectangle $R\Phi$.

Il y a corrélation entre le plan et la hauteur de la façade.

Soit A_1 et B_1 les projections des axes des basses neufs, et $a = A_1B_1$. La hauteur de la cathédrale est $a\sqrt{4\Phi^2-1}$.

Soit Ω le sommet interne de l'arcade qui surplombe la rose, et soit Δ_1 le décagone de centre Ω de côté A_1B_1 .

$A_1B_1 = G_1F_1$ = distance entre l'axe des tours.

B_1D_1 coupe C_1F_1 en U. Soit T le symétrique de U par rapport à l'axe de la façade : UT représente la largeur extérieure de la cathédrale au niveau des transepts. Or dans le plan de la cathédrale TU est la base du triangle OTU. $TU = OM \times \Phi^2$.

M_1 étant le milieu de B_1C_1 , la droite $M_1M'_1$ marque le niveau inférieur des linteaux des trois portes.

ab est la largeur du linteau central.

A_2 et B_2 sont les intersections de ΩA_1 et ΩA_2 avec $C_1C'_1$.

A_2B_2 est la base du triangle équilatéral qui encadre le fronton central (Couronnement de Marie par le Christ).

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \Phi$; A_1, A_2, B_2, B_1 sont quatre des sommets d'un pentagone dont le centre du cercle circonscrit est sur la partie supérieure du piédestal où se posent les pieds de Marie couronnée.

La droite A_2B_2 limite les triangles équilatéraux des trois frontons.

Soit Δ_2 le décagone de centre Ω et de côté A_2B_2 .
 M_2 étant le milieu de C_2D_2 , la droite $M_2M'_2$ indique l'axe de la grande rose.

$C_2C'_2$ coupe ΩA_1 et ΩB_1 en A_3 et B_3 . $\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \Phi$.

A_3B_3 marque le niveau du premier étage.

Soit Δ_3 le décagone de centre Ω et de côté A_3B_3 .

Le point I intersection de B_2A_3 et A_2B_3 est le centre l'ogive au-dessus de la petite rose.

Le point J intersection de G_2F_3 et F_2G_3 est le centre du petit médaillon au-dessus de la statue de Clovis.

$N_3N'_3$ marque le niveau inférieur de la galerie des rois.

H étant le sommet du clocher à l'Ange (flèche) le triangle $C_2C'_2H$ est un triangle isocèle d'or dont le sommet H mesure 36° .

Le nombre Φ se trouve tout au long de la verticale passant par Ω .

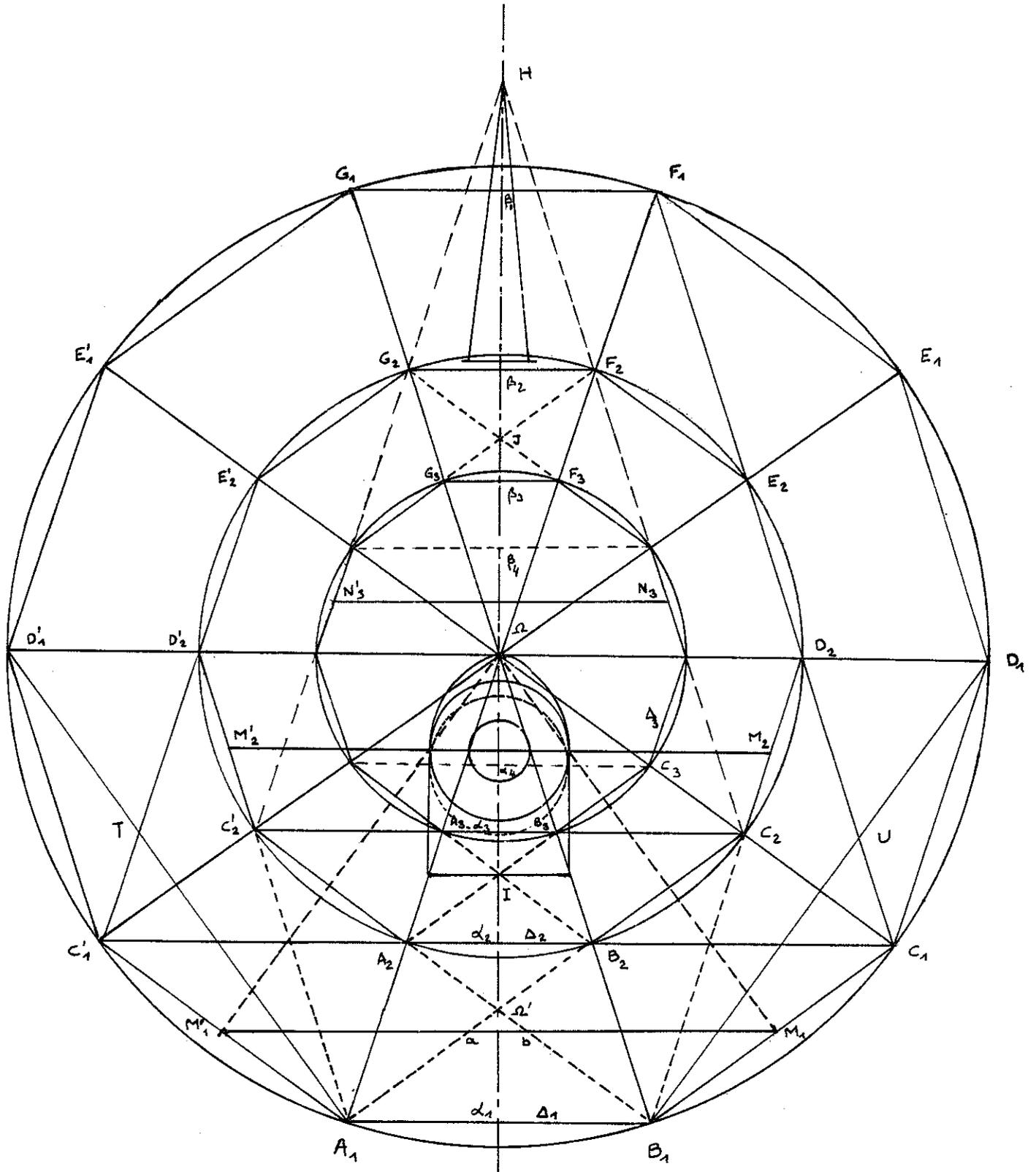
Ω est situé sur le Dieu bénissant.

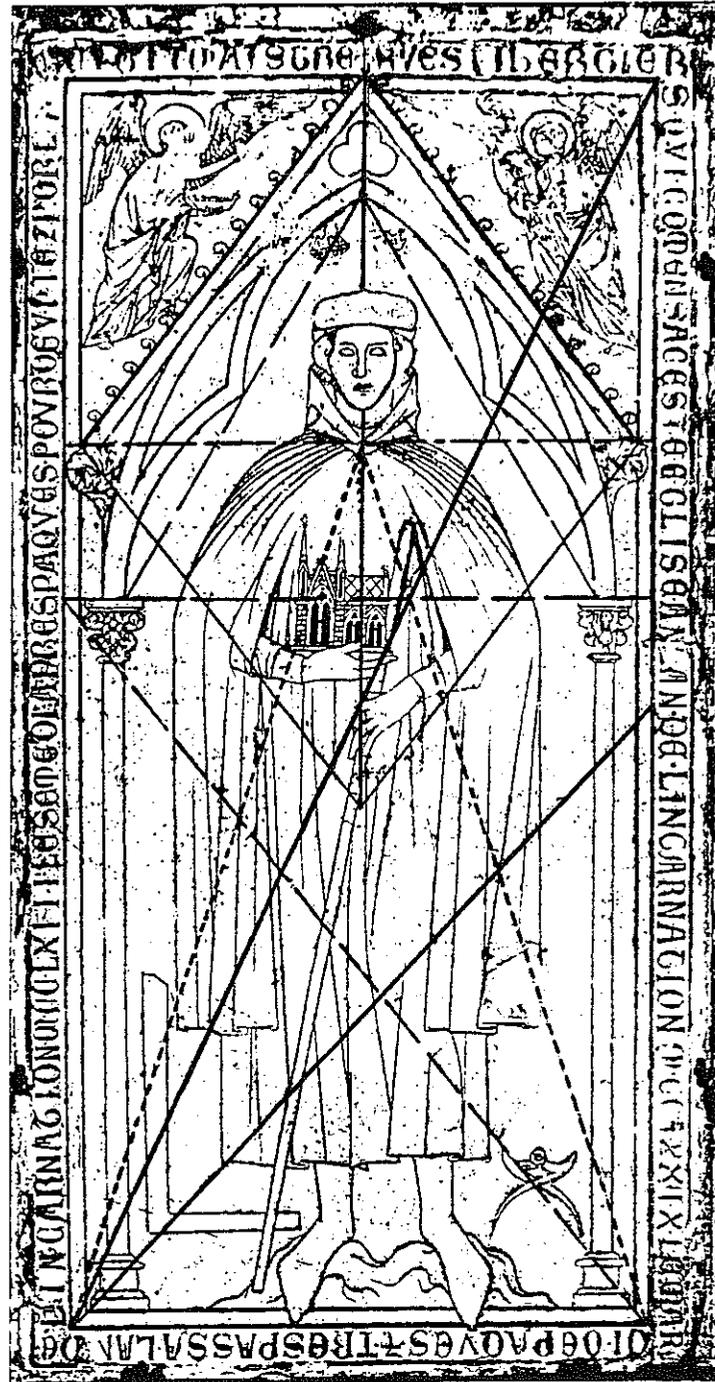
Désignons sur cette verticale par :

- α_1 le point au niveau du sol,
- α_2 le point à l'horizontale d'où s'élèvent les arcs des voûtes des portails,
- α_3 le point à la base de l'étage de la grande rose,
- α_4 le centre de la grande rose,
- β_1 le point à l'horizontale du sommet des tours,
- β_2 le point à la base du clocher à l'Ange,
- β_3 le point au niveau du sommet des niches de la galerie des Rois,
- β_4 le point au pied des statues du baptême de Clovis.

On a :

$$\frac{\Omega\alpha_1}{\Omega\alpha_2} = \frac{\Omega\alpha_2}{\Omega\alpha_3} = \frac{\Omega\alpha_3}{\Omega\alpha_4} = \frac{\Omega\beta_1}{\Omega\beta_2} = \frac{\Omega\beta_2}{\Omega\beta_3} = \frac{\Omega\beta_3}{\Omega\beta_4} = \Phi$$





III - LA DALLE FUNERAIRE DE HUE LIBERGIER (mort en 1263)

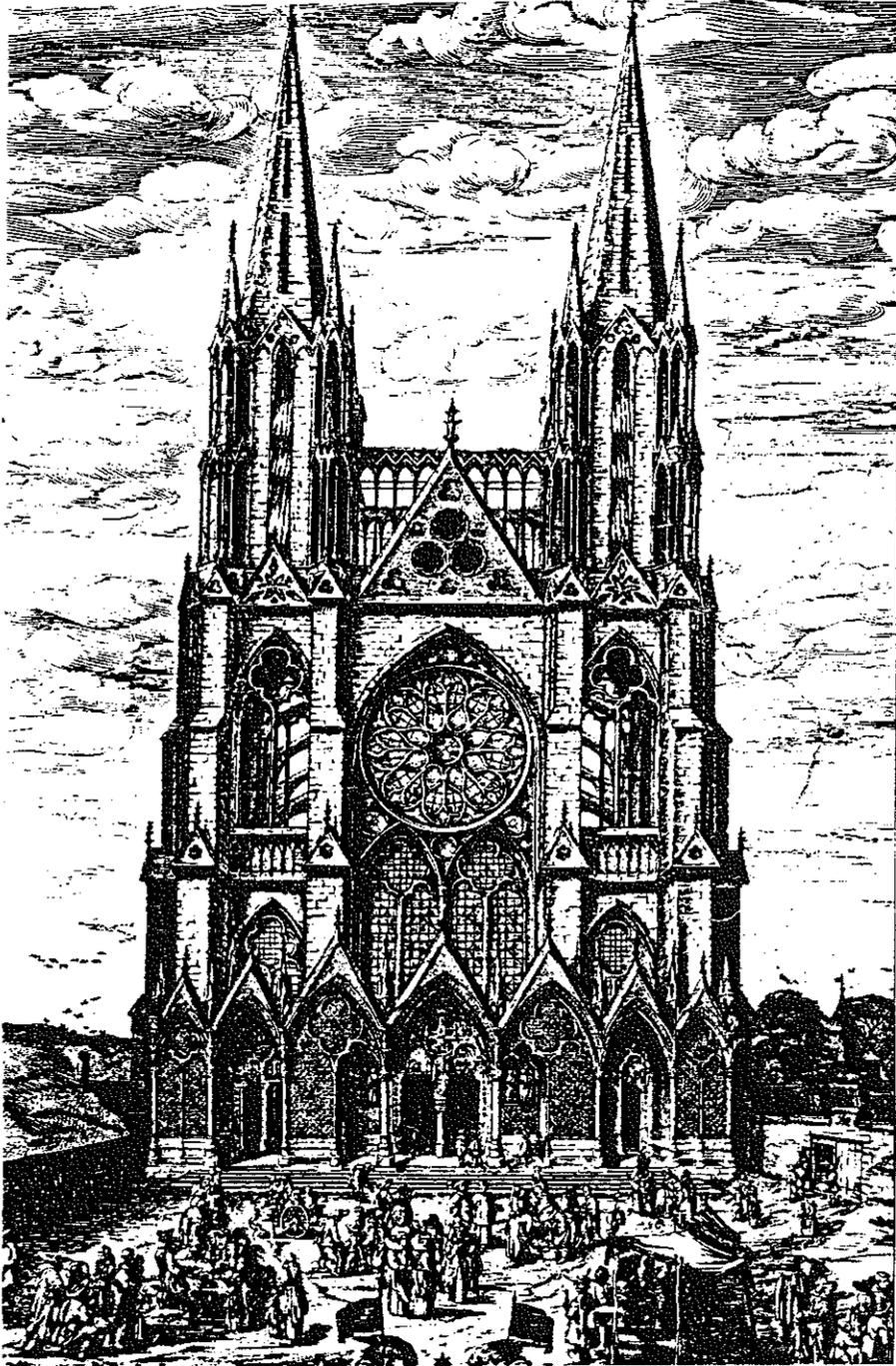
Cette dalle en pierre gravée a été transportée dans la cathédrale de Reims à la fin du XVIII^e siècle lorsque fut démolie l'église où elle se trouvait : l'église Saint Nicaise, grand chef d'oeuvre de Hue Libergier,

Sur cette dalle est tracée l'équerre qui permet de tracer des rectangles dorés et les triangles équilatéraux.

Si on retire la bordure d'encadrement qui porte l'inscription, la dalle est un rectangle RP.

Entre le bord inférieur et les retombées du gâble se trouve un rectangle R1. Le rectangle limité par le bord supérieur et les retombées du gâble est un rectangle R Φ .

Un rectangle RE est obtenu entre le bord inférieur et les taillons des chapiteaux des colonnes qui portent l'arc redenté.



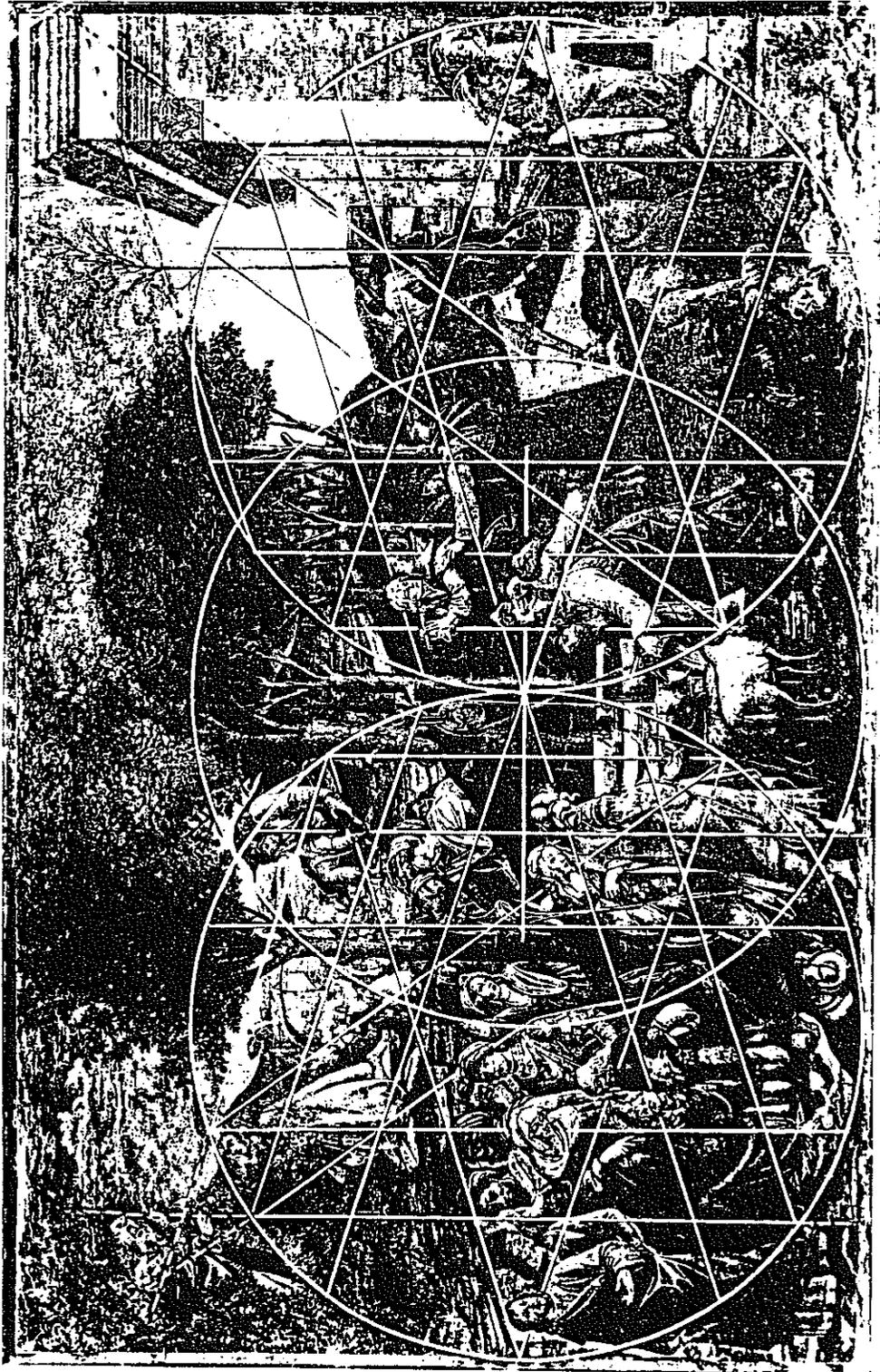
Abbatiale Saint-Nicaise (XIII^e siècle), détruite pendant la période révolutionnaire (gravure du XVII^e siècle). (Photo A. Demouy)

S A N D R O B O T T I C E L L I (1444 env. - 1510)

Il fut l'élève de Filippo Lippi (1405 env. - 1469) et rencontra Léonard de Vinci. Tous ces peintres connaissaient sûrement le nombre d'or comme le prouvent leurs oeuvres : en particulier, Léonard de Vinci a dessiné des volumes pour le traité sur la Divine Proportion de Luca Pacioli, et comme on l'a vu on retrouve le rectangle d'or dans certains de ses portraits.

Il semble que Botticelli ait beaucoup utilisé le nombre d'or : par exemple, les trois fresques qu'il a peintes à la Chapelle Sixtine à Rome sont des rectangles d'or $R \Phi$. De nombreuses lignes liées aux pentagones convexes, étoilés, aux décagones étoilés sont utilisées par le peintre pour donner du mouvement à ses personnages.

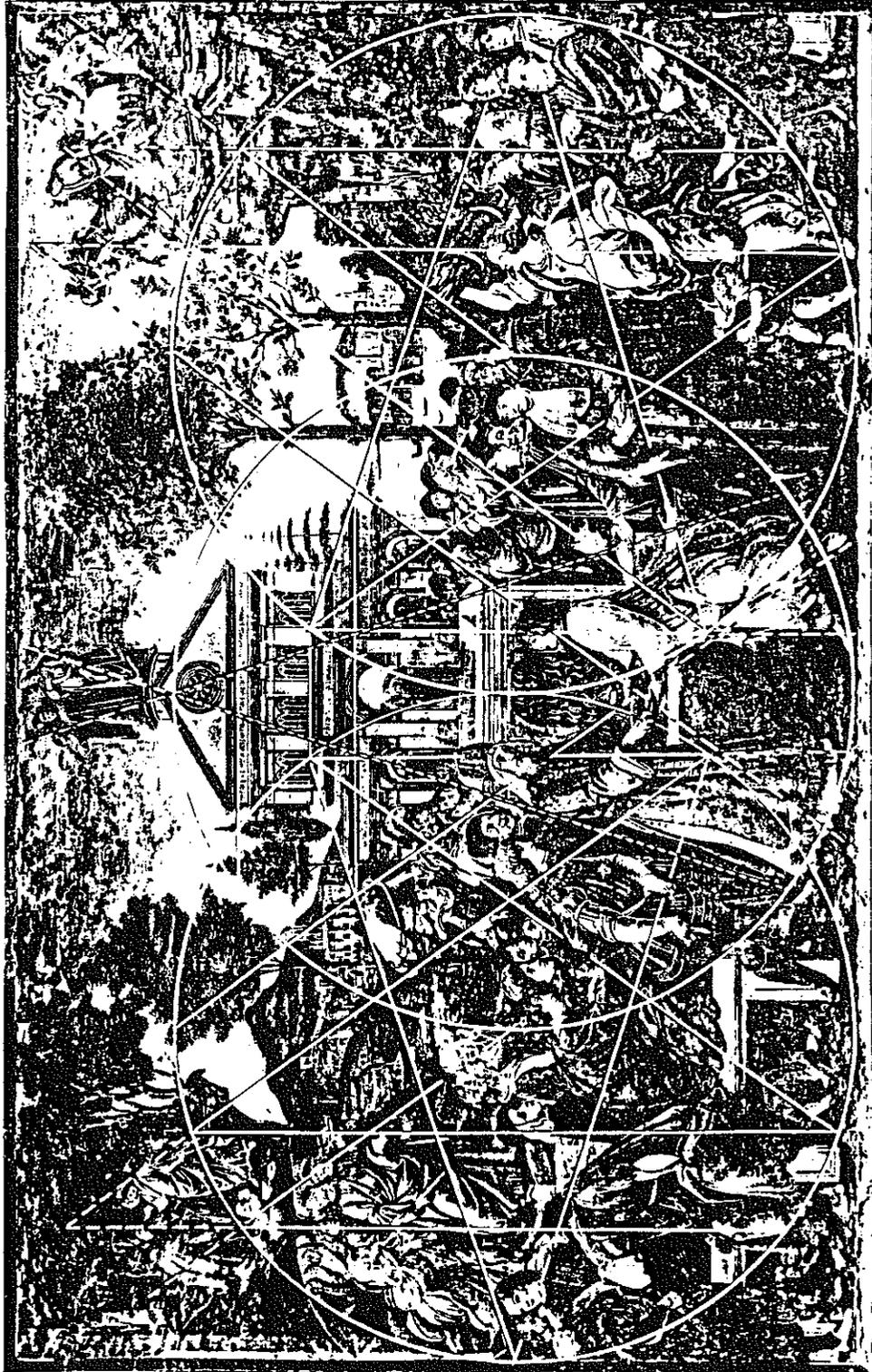
Les études qui suivent ont été faites par Elisa Maillard.



LES EPREUVES DE MOÏSE (Rome - Chapelle Sixtine)

Les dimensions de la fresque sont celles d'un rectangle $R\Phi$ (348,5 x 558).

Elisa Maillard a tracé trois cercles tangents au bord inférieur de la fresque, dont deux sont tangents à l'axe de l'oeuvre et aux bords latéraux. D'où quatre compartiments : deux en forme d'amande et deux en forme de croissant. Toutes les lignes tracées appartiennent à des pentagones étoilés ou à des décagones étoilés. De nombreux triangles dorés sont ainsi dessinés. Toutes ces lignes "encadrent sept épisodes de la vie de Moïse.



LA LUSTRATION DU LÉPREUX (Rome, Chapelle Sixtine)

Les dimensions de la fresque sont aussi celle d'un rectangle d'or $R\Phi$ (345 x 555).

Comme dans la fresque précédente, trois cercles ont été tracés, ainsi que des pentagones étoilés, et des côtés de décagones étoilés. Dans le triangle isocèle doré (dont l'angle au sommet mesure 36° - lignes de tirets) se situe la scène principale : un lépreux, guéri par le Christ, se présente au grand prêtre (qui n'est autre que le pape Sixte IV) et offre le sacrifice prescrit par Moïse.





Le couronnement de la Vierge (Florence - Galerie des Offices)

La hauteur et la largeur de ce rétable en plein cintre correspondent à celles d'un triangle doré (triangle isocèle dont l'un des angles mesure 36°). (378 x 258).

Deux cercles passant par le centre l'un de l'autre sont engendrés par le plein cintre. La corde commune aux deux cercles est la diagonale d'un losange formé par la juxtaposition de deux triangles équilatéraux, chacun étant inscrit dans l'un des cercles et tangent à l'autre cercle.

Des côtés de pentagones et décagones étoilés sont tracés.

Les traits représentés dirigent certaines lignes utilisées par le peintre.



LA VIERGE AU MAGNIFICAT (Florence - Galerie des Offices)

Le plus célèbre des tondos de Botticelli.

Deux pentagones étoilés ont été tracés ainsi que des côtés de décagone étoilé et de pentagones convexes. De chacune des extrémités du diamètre horizontal, rayonnent six droites (deux diagonales d'un pentagone étoilé deux côtés d'un décagone étoilé et deux côtés d'un pentagone convexe).

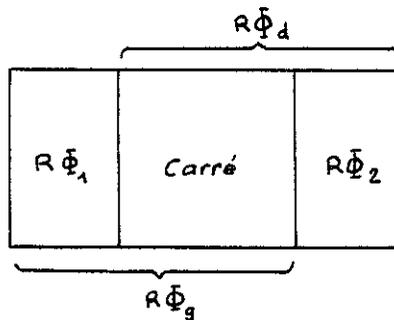
Dans le petit pentagone convexe central est tracé la diagonale verticale. Le Saint Esprit est situé au point où cette droite rencontre le bord supérieur du tondo. Cette verticale descend sur le visage de la Vierge avant de passer contre la joue droite de l'Enfant. Le visage de l'Enfant est situé sur le diamètre horizontal, entre cette verticale et le côté vertical de l'un des pentagones étoilés construits. La grenade symbolique tenue par le Vierge et l'Enfant est également située entre ces deux verticales. Le côté du pentagone étoilé passant par l'extrémité droite du diamètre horizontal et traversant la poitrine de l'Enfant dirige son bras droit et celui de la Vierge.

L E T I T I E N (1488 env. - 1576)

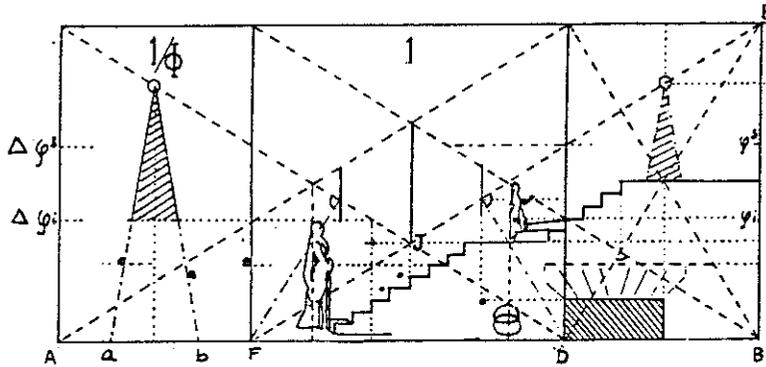
La présentation de la Vierge au Temple (Académie de Venise)



L'oeuvre est composée dans un rectangle $\sqrt{5}$: le rapport de la largeur sur la hauteur est $\bar{\Phi}$. Ce rectangle est la juxtaposition de deux rectangles d'or $R\bar{\Phi}$ de part et d'autre d'un carré.



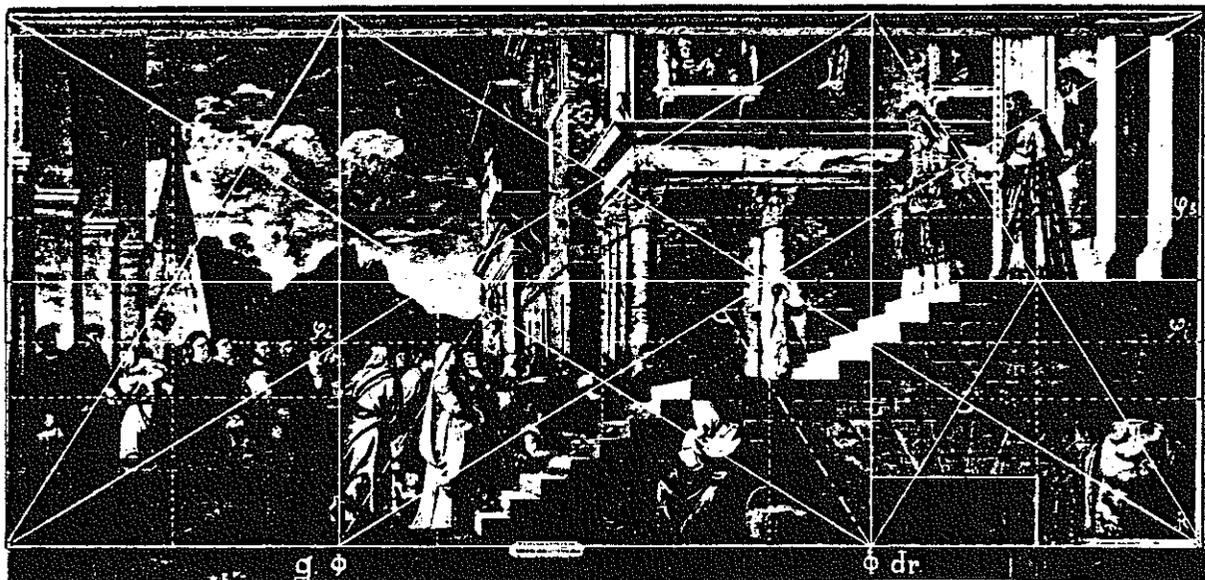
La réunion du carré et du rectangle $R\bar{\Phi}_1$ donne un rectangle d'or $R\bar{\Phi}_g$.
On obtient de même un rectangle $R\bar{\Phi}_d$.



On peut remarquer que les deux escaliers comportent 8 et 5 marches : deux nombres de Fibonacci. L'inclinaison du premier escalier est parallèle à l'une des diagonales de $R\Phi_4$.

Les deux rectangles $R\Phi_1$ et $R\Phi_2$ et le carré compartimentent la composition : le rectangle $R\Phi_1$ contient la masse des personnages sombres ; le rectangle $R\Phi_2$ sépare les trois prêtres de la foule ; le carré central contient la masse des personnages clairs : les croyants. Dans le rectangle $R\Phi_3$, la foule ; dans le rectangle $R\Phi_4$, les prêtres et les croyants.

LA Vierge enfant s'adosse à la verticale qui passe par le point d'intersection des diagonales du rectangle $R\Phi_4$, tandis que la mère de la Vierge est adossée à la verticale qui passe par le point d'intersection des diagonales du rectangle $R\Phi_3$.



L'axe vertical central de la toile limite le bâtiment soutenu par les colonnes de la Scuola della Carità.

L'horizontale $\Delta \varphi_s$ qui partage la hauteur suivant le nombre d'or, limite le plafond sombre de la Scuola. L'autre horizontale $\Delta \varphi_i$ qui partage la hauteur suivant le nombre d'or marque la hauteur des têtes de la foule. La main droite de la Vierge enfant s'arrête à la ligne $\Delta \varphi_i$. Le palier est à la hauteur du croisement J d'une diagonale $R \Phi_3$ et d'une diagonale $R \Phi_4$.

Dans le rectangle $R \Phi_1$, la pyramide est située sur l'axe vertical. Les prolongements des arêtes de cette pyramide coupent la base inférieure de $R \Phi_1$ en deux points a et b tels que $\frac{Ab}{Aa} = \Phi$, $\frac{Fa}{Fb} = \Phi$.

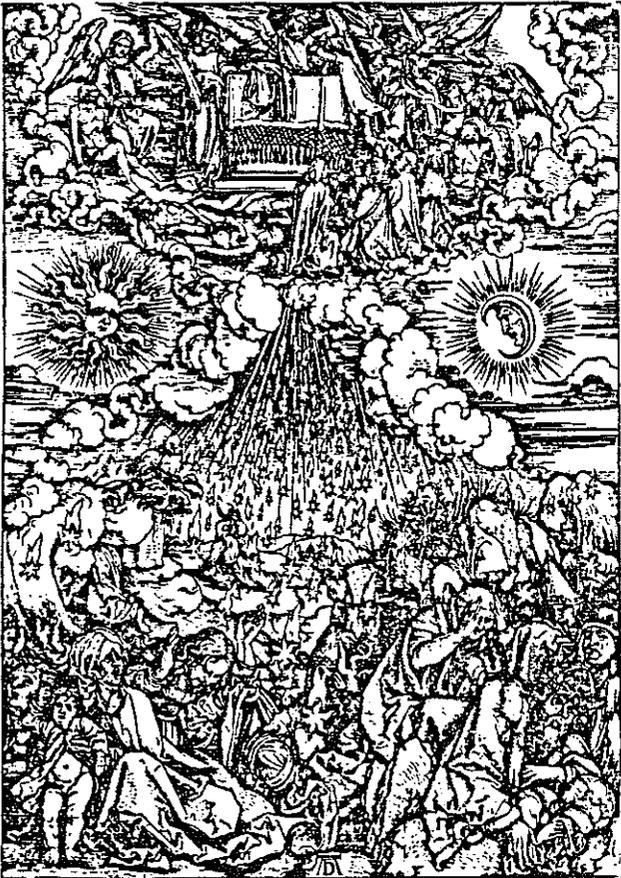
Le sommet de la pyramide est situé sur l'une des diagonales de $R \Phi_3$.

Les arêtes de la pyramide ont leur pendant dans certains plis de la robe du prêtre du rectangle $R \Phi_2$ et la sphère qui surmonte la pyramide a son répendant sur la nuque de ce prêtre.

ALBERT DÜRER (1471-1528)

Albert Dürer naquit à Nuremberg. Le renouveau d'intérêt pour la géométrie dû aux humanistes et artistes de la Renaissance italienne, motiva l'impression des Eléments d'Euclide en 1482. Dürer eut certainement connaissance de cet ouvrage ; il écrivit "Instructions pour mesurer à l'aide du compas et de l'équerre".

Dürer, formé dans les corporations, connaissait aussi bien que Pacioli le nombre d'or : il a employé très couramment la section d'or à toutes les époques de sa vie et surtout dans sa jeunesse ; les bois de l'Apocalypse (1498) sont composés sur cette division.



L'Apocalypse : L'Ouverture du
sixième sceau.

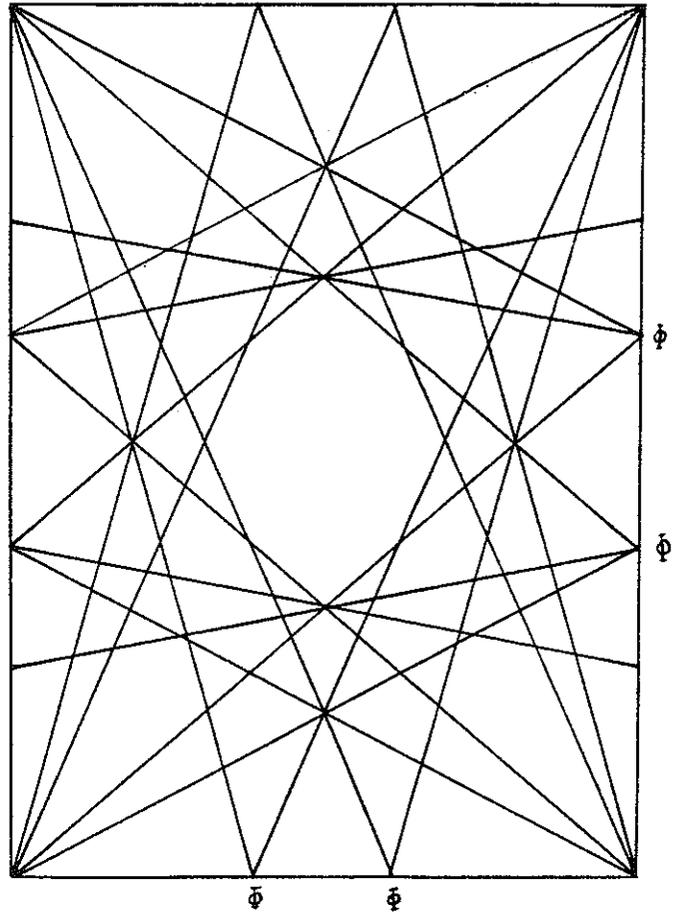


Diagramme régulateur.

Dürer : la Mélancolie (burin de 1514)

Les tracés sur cette composition sont d'Elisa Maillard.

Ce burin est l'oeuvre la plus célèbre de Dürer. Ses dimensions sont celles d'un rectangle égyptien RE : AA'B'B.

La ligne d'horizon DD' détermine un rectangle DD'B'B dont la médiane CC' partage la hauteur du burin dans le rapport du nombre d'or : $\frac{AB}{AC} = \Phi$

E et E' étant les milieux respectifs de AA' et BB', la droite EE' coïncide avec l'une des arêtes du bâtiment.

L'arc en ciel est un arc de cercle centré sur DD', le centre partageant la moitié gauche du burin dans le rapport $\Phi : \frac{AE}{FE} = \Phi$

Un pentagone étoilé est inscrit dans ce cercle. Deux côtés de ce pentagone étoilé sont tangents à un cercle qui contient un polyèdre.

Deux côtés du pentagone convexe inscrit dans le cercle de l'arc en ciel se coupent en Ω sur la petite sphère située dans le bas gauche du burin. Ce point Ω est l'un des centres d'homothétie qui transforme le cercle de l'arc en ciel en celui "circonsrit" au polyèdre, mais Ω est aussi situé sur la diagonale du pentagone inscrit dans le grand cercle centré sur CC' et EE', cette diagonale joignant Ω au sommet du pentagone voisin de C'. De plus, ce grand cercle passe par le centre de la sphère.

De nombreuses intersections des lignes tracées situent des points significatifs de l'oeuvre : petit génie, l'un des plateaux de la balance, l'horloge à sablier, carré magique...

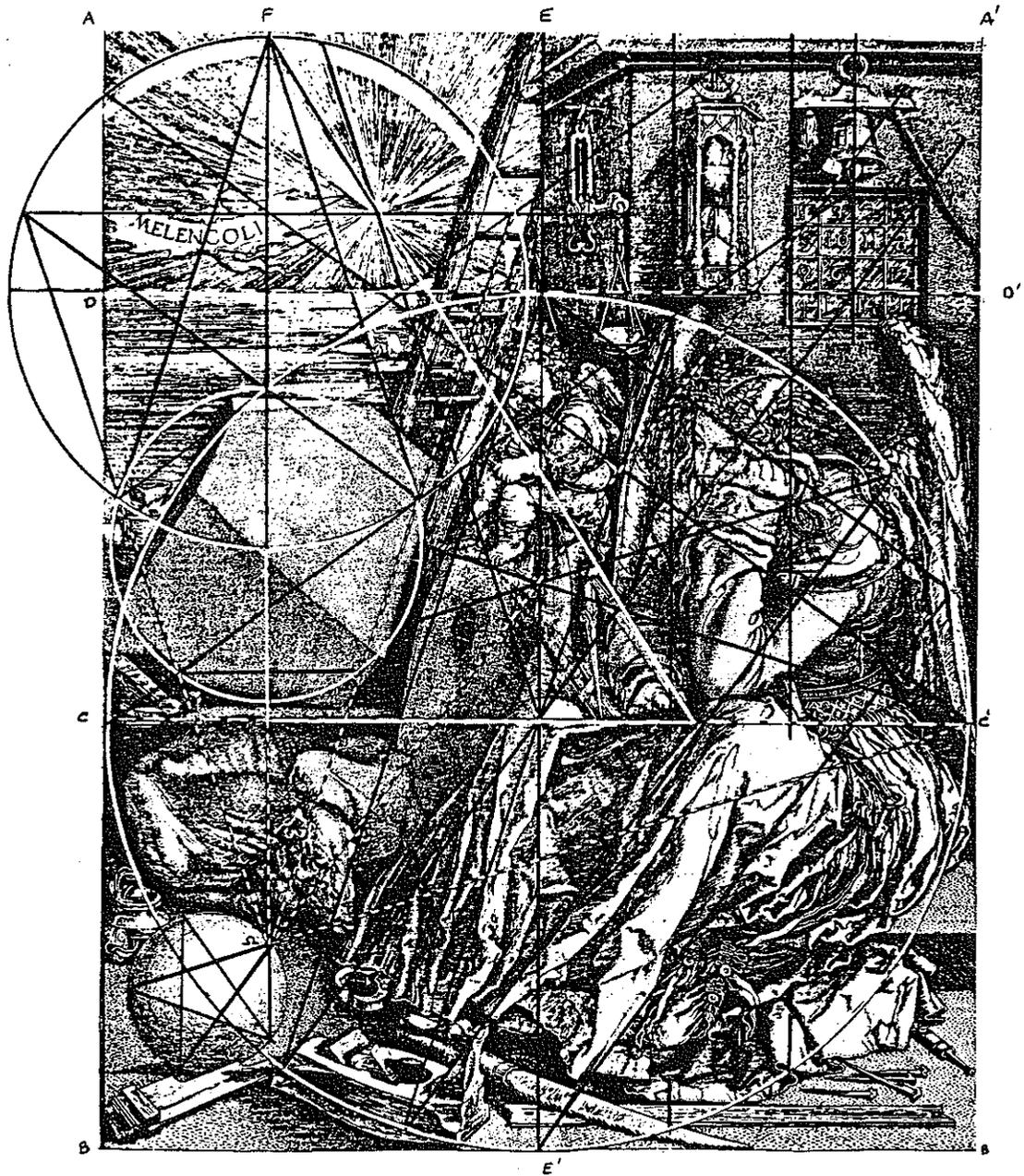
Le montant de l'échelle est parallèle à un côté du pentagone passant par l'une des branches du compas est inclinée suivant la diagonale d'un rectangle d'or $R\Phi$

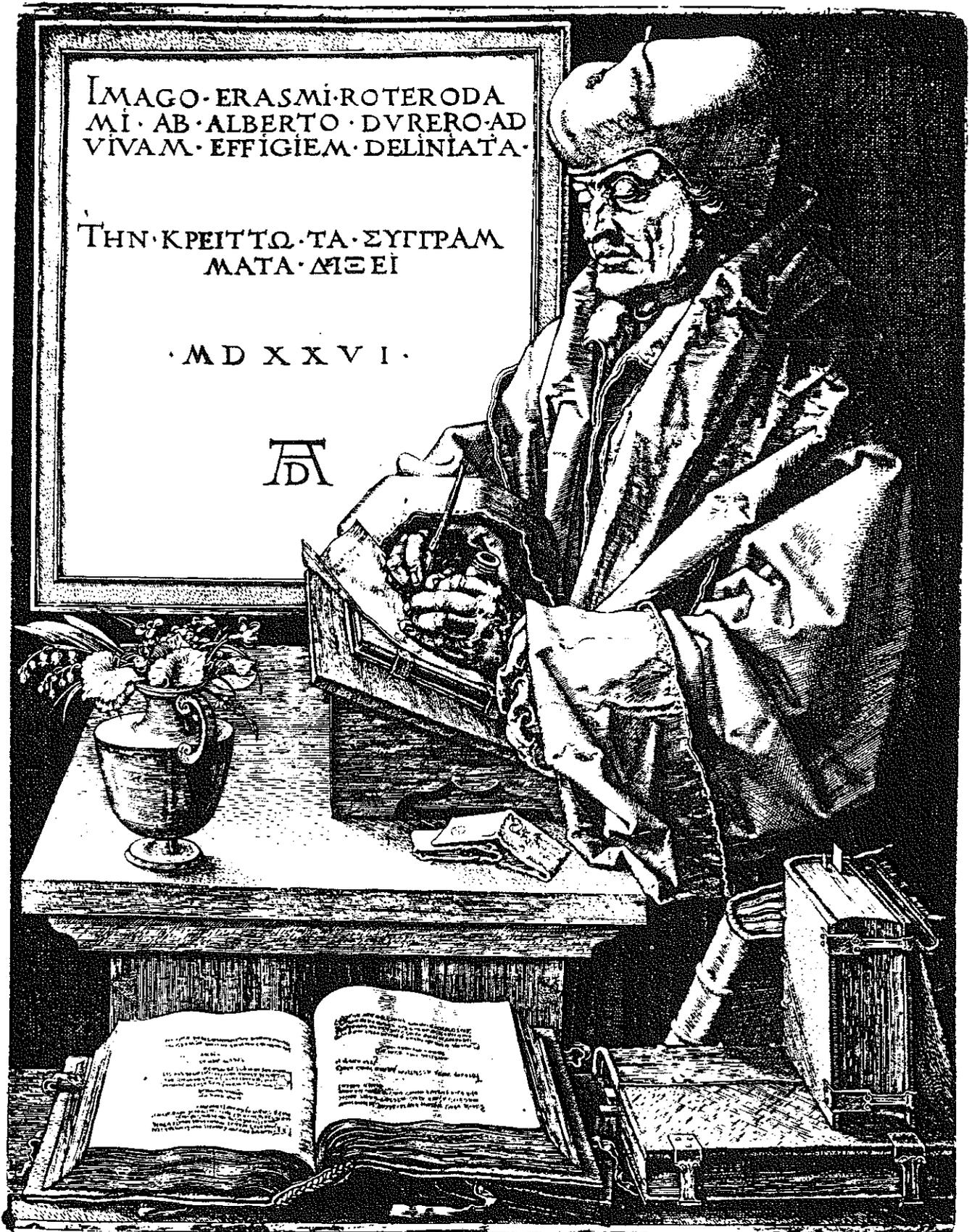
La balance et le carré magique sont deux symboles qui ont trait au nombre d'or : la balance est allusive au décagone (ésotériquement, la balance représente Vénus dont le nombre est 5 ; 5 est le nombre de justice car il partage 10 en deux ; et la balance est en équilibre lorsqu'on met 5 dans chaque plateau). Le carré magique de seize cases, dit carré de Jupiter, est

allusif au nombre 5, donc au pentagone. Les propriétés bénéfiques de ce carré magique sont énumérées dans "De occulta philosophia" de Henri-Cornélius Agrippa de Nettesheim (1531) : "On tire de cette table le caractère de Jupiter et de ses esprits, on dit que si elle est gravée sur une lame d'argent représentant Jupiter puissant et dominant, elle donne les richesses, la faveur, l'amour, la paix et la concorde entre les hommes...".

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

On peut noter aussi que la somme commune aux lignes, colonnes et diagonales est 34, un nombre de Fibonacci !



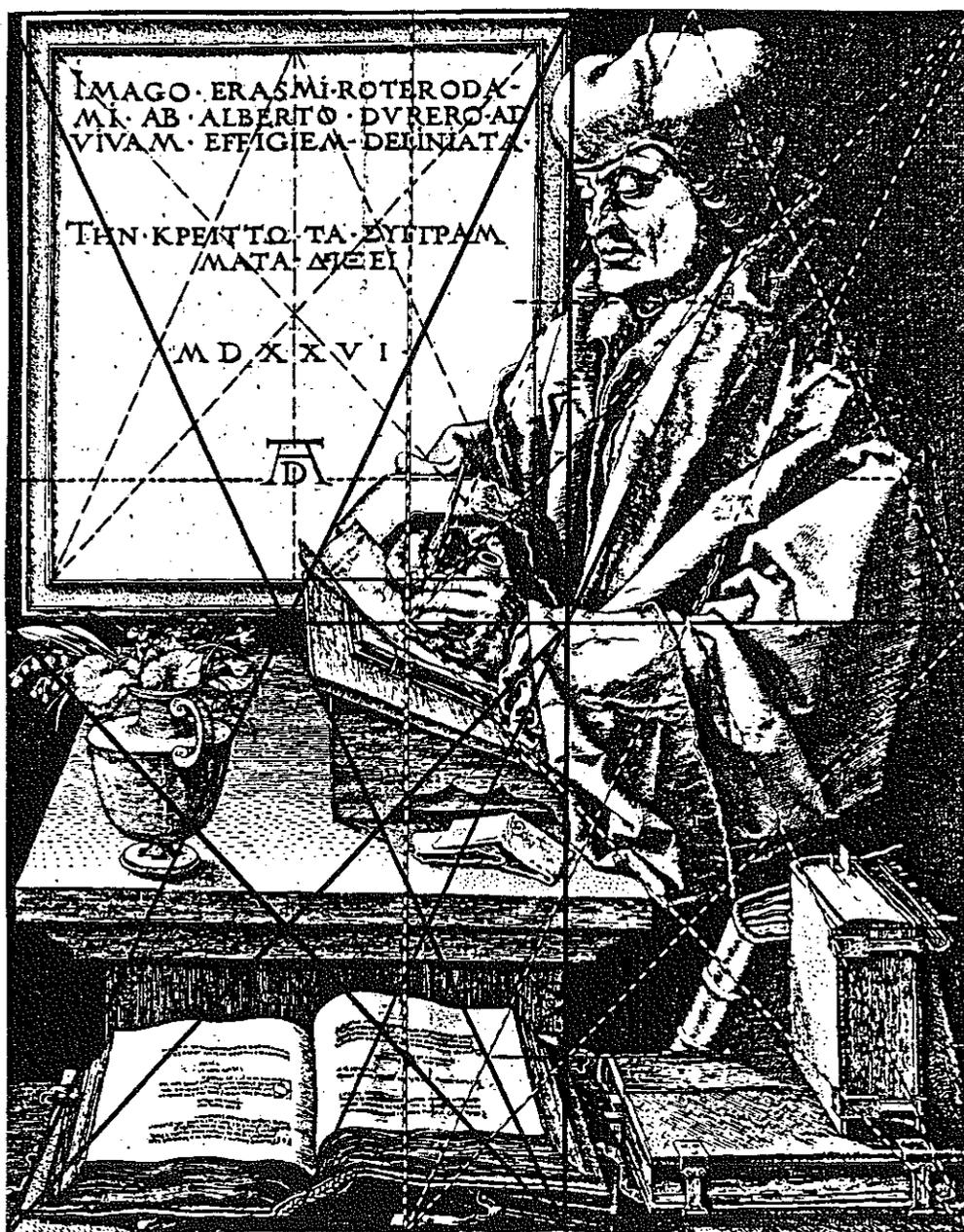


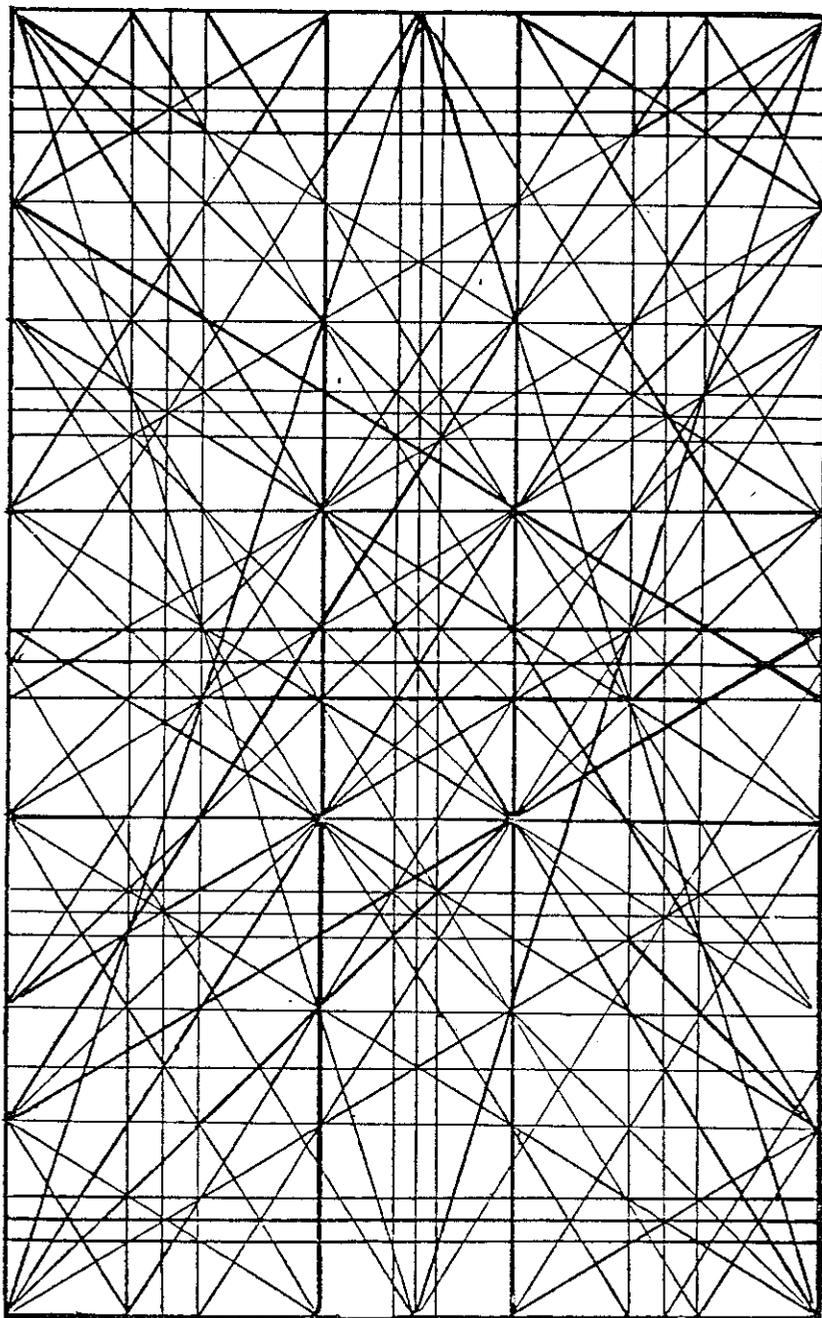
. Erasme de Rotterdam, 1526.

Erasme de Rotterdam (1526) (Tracés d'Elisa Maillard)

Les dimensions de l'aire gravée sont celles d'un rectangle égyptien RE.

La grande inscription encadrée est inscrite dans deux rectangles RP juxtaposés. Deux grands rectangles RP de hauteur celle de la gravure dans la partie commune à ces deux grands rectangles, tandis que son regard est dirigé vers ses mains par une diagonale de rectangle.





DÉCOMPOSITION HARMONIQUE DU RECTANGLE θ .

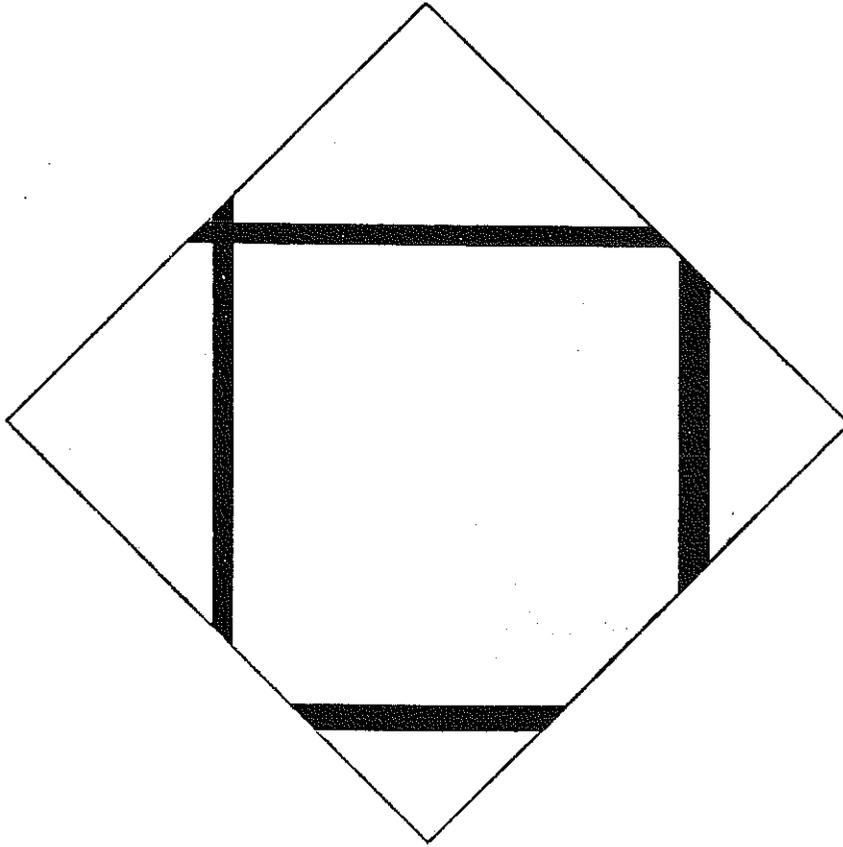
(D'après M. D. Wiener.)

UN PEINTRE MODERNE : PIET MONDRIAN

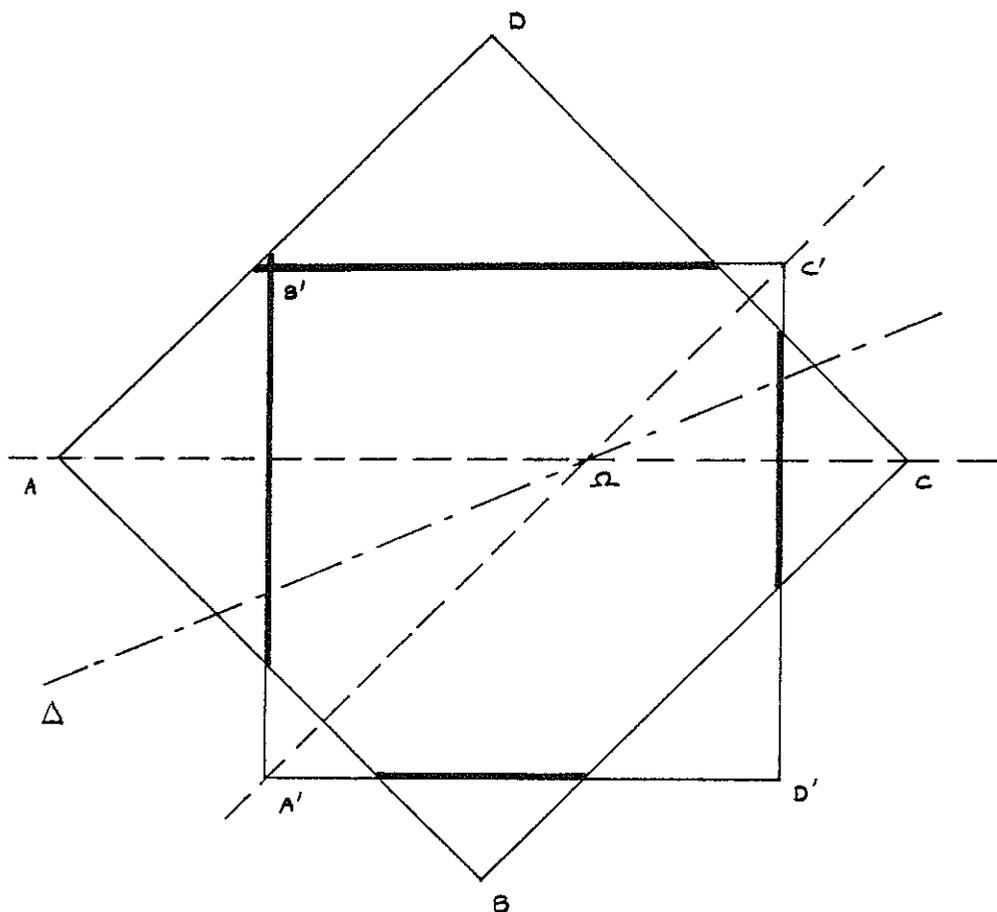
Certains peintres modernes s'appuient sur des mensurations, des constructions au compas. Le nombre d'or renaît. Ce sont les théoriciens allemands du début du XIX^e siècle qui ont dégagé la notion de nombre d'or avec précision en l'étudiant surtout sur les monuments égyptiens. L'école néo-classique des Cornélius, des Overbeck se plut aux nombres incommensurables $\sqrt{2}$, ϕ . Ces nombres devinrent l'essentiel des fameuses "Saintes Mesures".

Le peintre hollandais Piet Mondrian (1872-1944) définit la doctrine du néo-plasticisme. L'extrême modernité de l'oeuvre de Mondrian est liée à la sérialité, à la combinatoire, aux variations différentielles.

Les études qui suivent sont dues à Charles Bouleau.



Mondrian : Peinture I
(New-York , Museum of Modern Art)

Mondrian : Peinture I

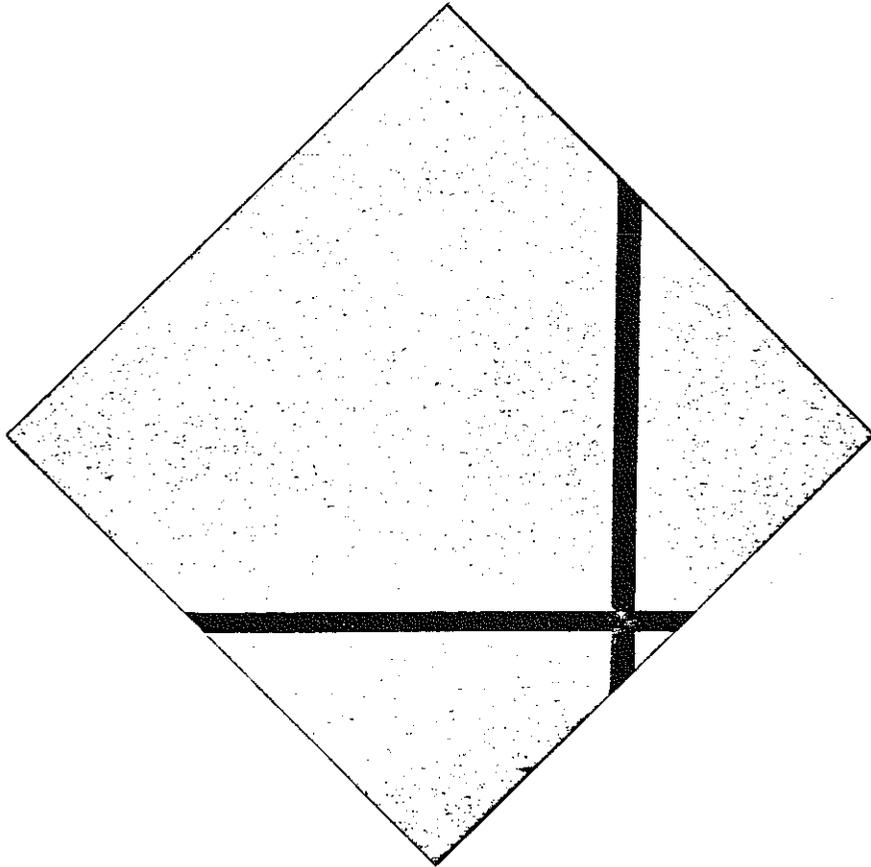
$ABCD$ est un carré. Soit Ω le point de AC tel que $\frac{\overline{AC}}{\overline{A\Omega}} = \phi$

Soit Δ la droite passant par Ω telle que $\text{mes}(\widehat{AC, \Delta}) = \frac{\pi}{8}$ (2π)

Soit $A'B'C'D'$ l'image du carré $ABCD$ par la similitude indirecte de centre Ω , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{\phi}$ et d'axe Δ .

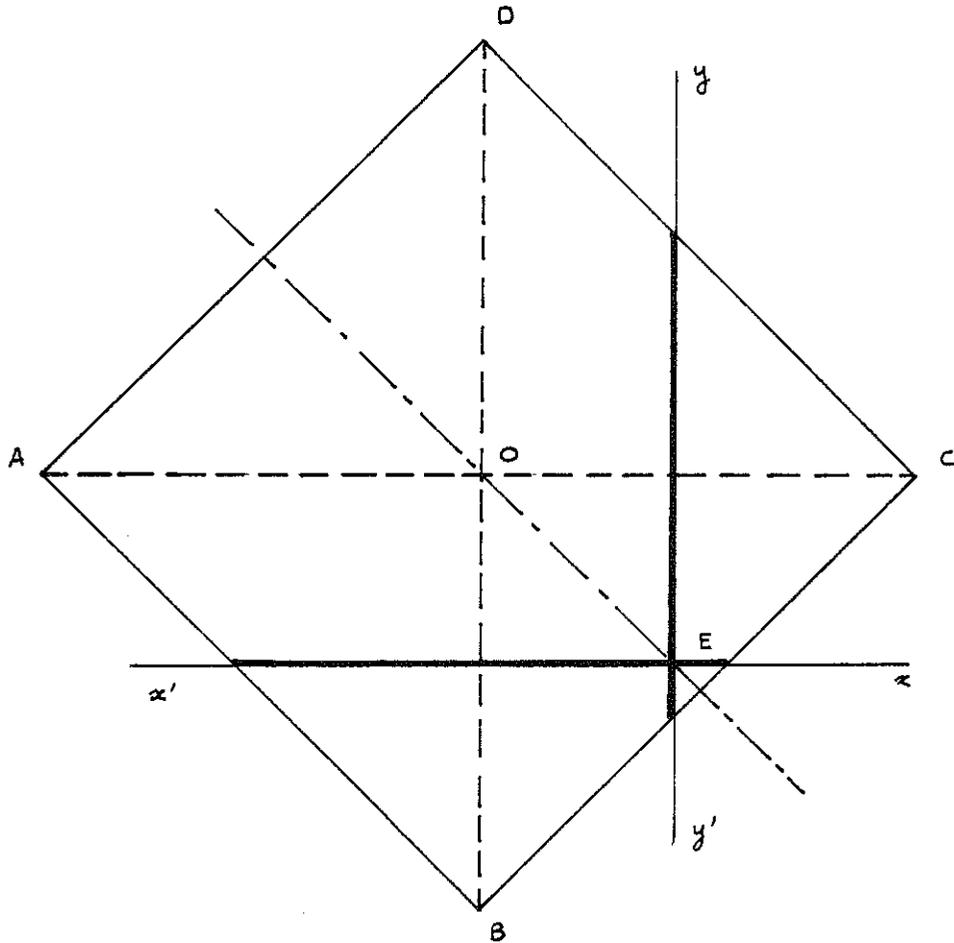
On a alors $A'B' = \frac{\sqrt{2}}{\phi} AB = A\Omega$.

$A'B'C'D'$ définit le bord du carré formé par les parties extérieures des traits noirs. Ces traits ont des épaisseurs proportionnelles à 3, 4 et 5.



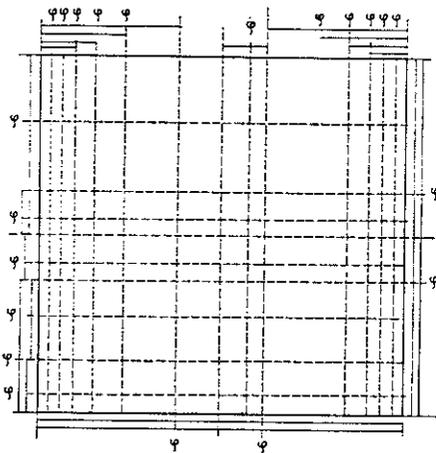
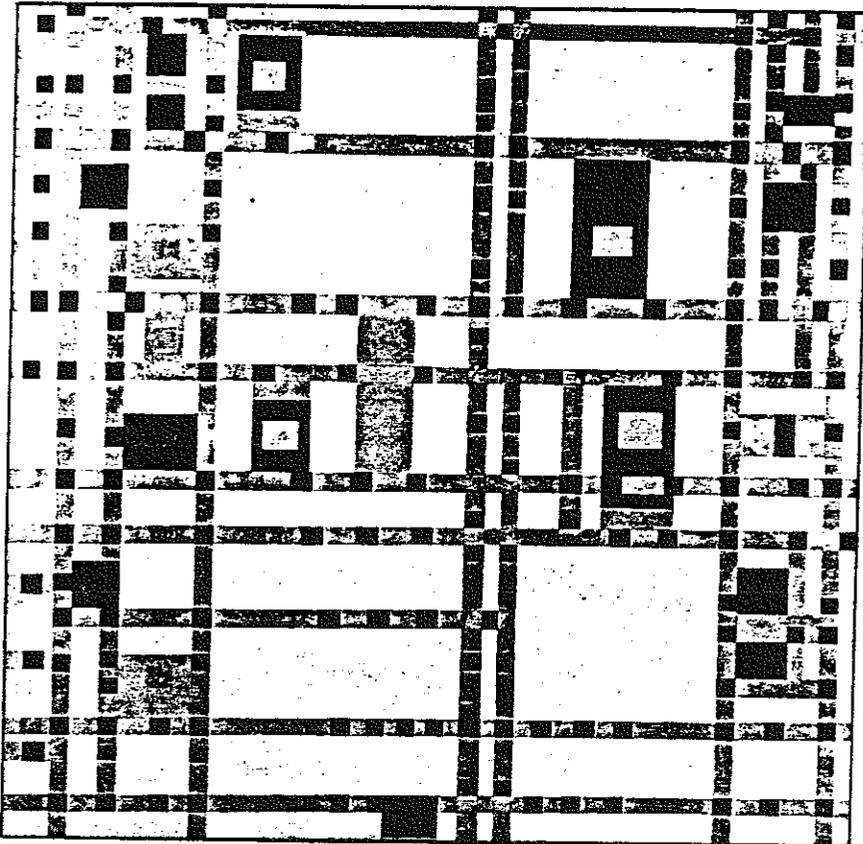
Mondrian : Composition avec deux lignes
(Amsterdam , Stedelijk Museum)

Mondrian : Composition avec deux lignes



ABCD est un carré de centre O.

Les droites $x'x$ et $y'y$ se déduisent des droites AB et BC par la similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{\phi}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ (2π).



Mondrian :

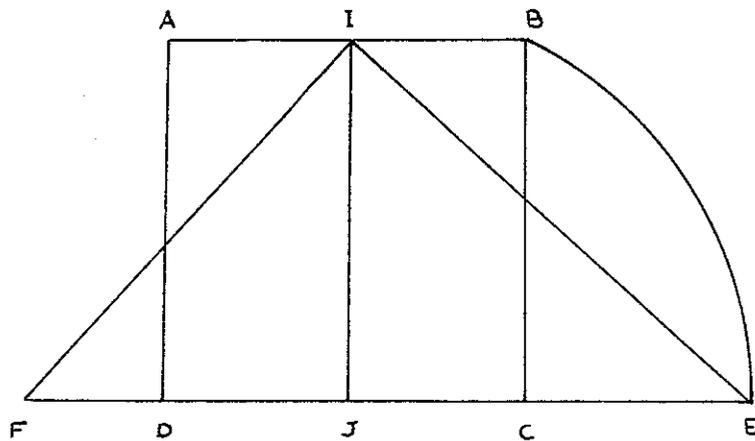
Broadway Boogie-Woogie
(New-York , Museum of Modern Art)

Les horizontales et les verticales qui
constituent cette oeuvre sont presque
toutes sur le rapport d'or.

LE CORBUSIER : LE MODULOR

I - LA FIGURE DE BASE

Le Corbusier, partant du principe que la source de l'harmonie est d'une part le nombre d'or, d'autre part le "lieu de l'angle droit" cherche à réaliser une grille des proportions : une série de mesures à laquelle chaque ouvrier d'un chantier viendrait se référer pour son ouvrage. Il part de la figure suivante



ABCD carré

I MILIEU DE AB

J milieu de CD

$$\frac{DE}{DC} = \phi$$

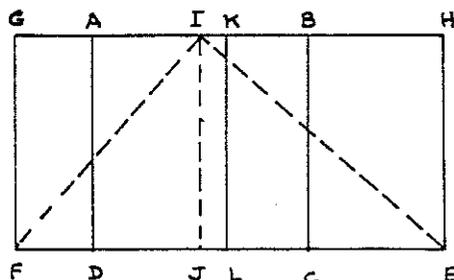
F point de la droite DE tel que \widehat{EIF} soit droit et constate que $FE \simeq 2 DC$

En réalité $FE = \frac{9}{10} \sqrt{5} DC$ et $\frac{9}{10} \sqrt{5} \simeq 2,01246..$

Il réunit sur une même figure les "trois carrés égaux" et l'angle droit :

K milieu de GH

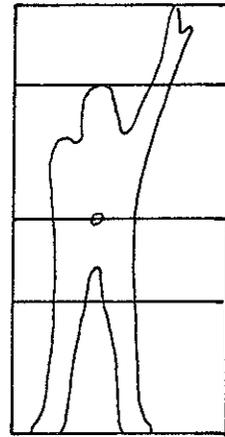
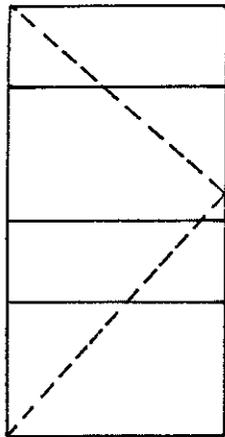
L milieu de EF



On voit apparaître les rapports 2 et Φ entre les longueurs

$$\frac{FL}{FE} \approx \frac{DC}{FE} \approx \frac{LE}{FE} \approx 2 \quad \text{et} \quad \frac{DC}{DE} \approx \frac{FL}{DE} \approx \frac{LE}{DE} \approx \Phi$$

Il intègre la silhouette humaine à son schéma en le dessinant dans l'autre sens.



II - LA GRILLE DES PROPORTIONS OU MODULOR

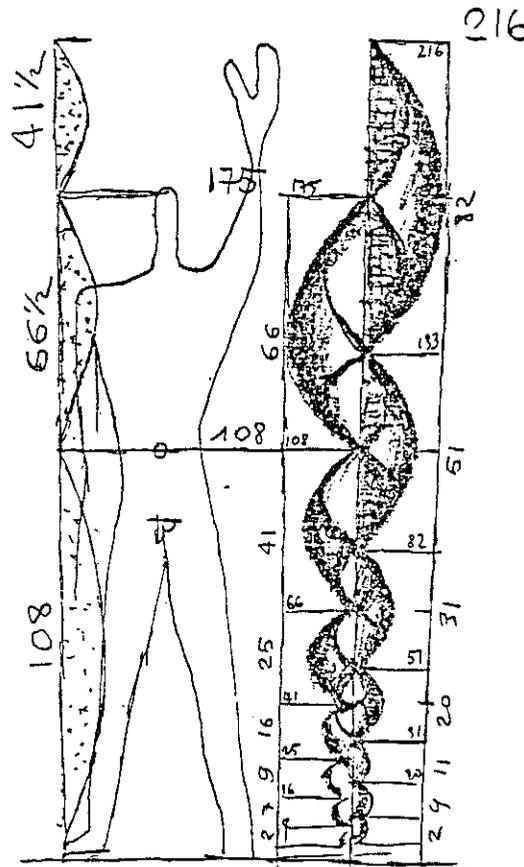
En partant de la taille d'un homme égale à 175 cm, il obtient un carré de côté 108,2 cm et calcule, en arrondissant, les nombres se déduisant de ceux-ci par multiplication ou division par Φ :

283,2 ; 175 ; 108,2 ; 66,8 ; 41,3 ; 25,5

216,3 ; 133,7 ; 82,6 ; 51,1 ; 31,6 ; 19,5

Voici, schématisées par Le Corbusier, ses deux suites géométriques de raison Φ constituant le Modulor :

l'une contenant 108, qualifiée de "série rouge", l'autre, contenant 216, qualifiée de "série bleue".



Un problème se pose alors : celui de l'utilisation de cette série de mesures dans les pays anglo-saxons. Les valeurs trouvées ne se convertissant pas simplement en unités pied-pouce, Le Corbusier refait un modulor en partant de la taille de six pieds (environ 1,83 m) pour un homme debout.

Il obtient les valeurs suivantes (en mm) :

série rouge : 4 ; 6 ; 10 ; 27 ; 43 ; 70 ; 113 ; 183 ; 296..
 série bleue : 13 ; 20 ; 33 ; 53 ; 86 ; 140 ; 226 ; 366 ; 592...

Certaines de ces mesures lui apparaissent caractéristiquement rattachées à la stature humaine :

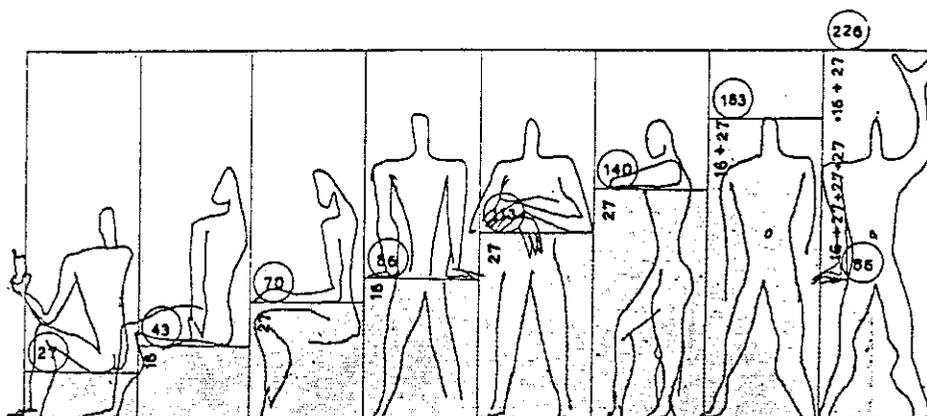


Fig. 25

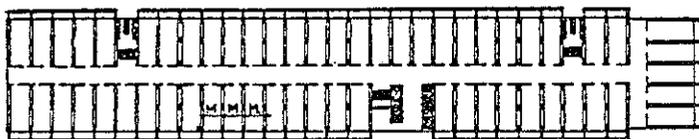
C'est cette deuxième version du Modulor qu'il adopte, et dont il préconise une utilisation mondiale.

III - UN EXEMPLE D'APPLICATION

Une des premières expériences de mise en application du Modulor est la réalisation d'une unité d'habitation à Marseille, boulevard Michelet.

. Plan général

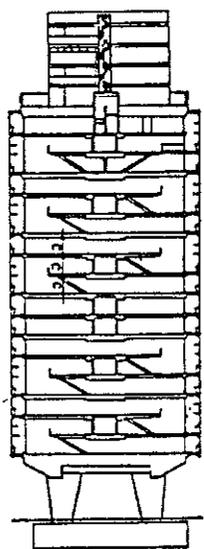
Figuration d'un étage, avec 58 appartements :



Le vide des appartements est $l = 366$ cm

La séparation entre appartements est $f = 53$ cm

L'écart entre axes des travées d'appartements est $m = l+f = 419$ cm.



Coupe générale de l'immeuble:

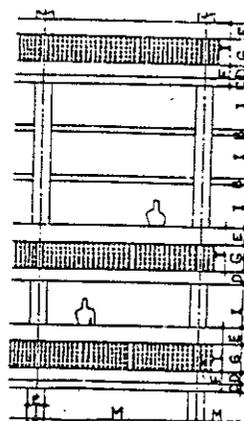
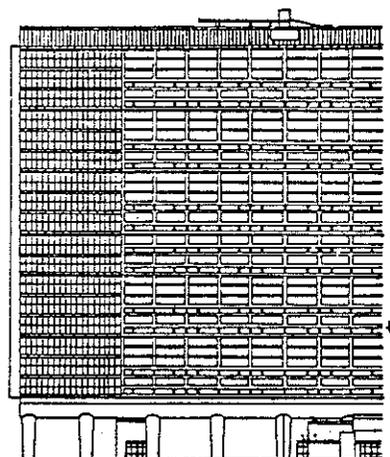
hauteur des appartements : $j = 226$ cm

épaisseur des planches : $d = 33$ cm

épaisseur des planches avec coupe

feu : $f = 53$ cm

. La façade



les mesures m, f, d ont déjà été données

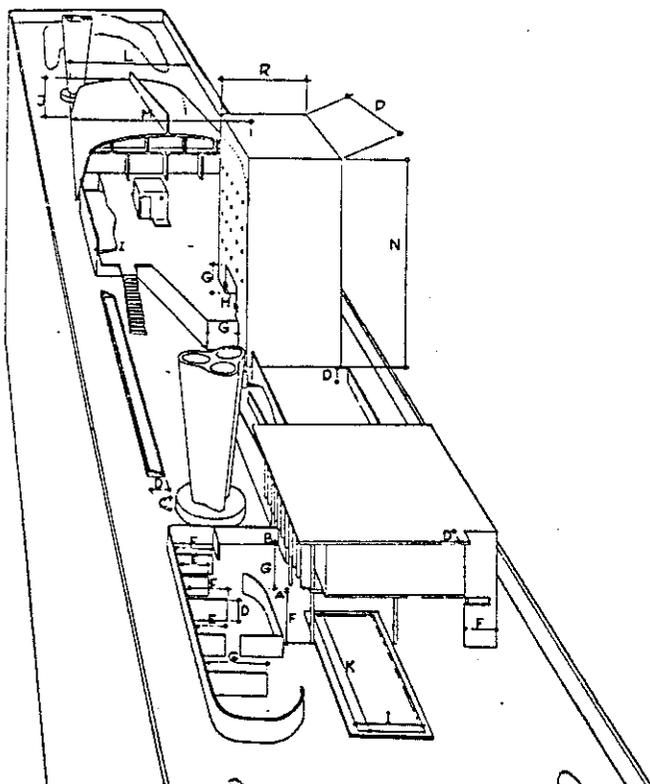
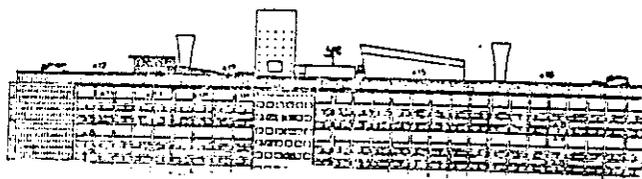
$i = 113$ cm

$g = 70$ cm

$e = 43$ cm

$b = 16,5$ cm

$c = 20,5$ cm

. La toiture

A = 33 cm	épaisseur des planches
B = 43 cm	épaisseur de la toiture avec costière
C = 86 cm	socle des ventilateurs
D = 113 cm	hauteur des murs de séparation des jeux de sable ainsi que du mur d'appui de la cour des agrès.
E = 140 cm	murettes
F = 183 cm	divers murs
G = 226 cm	hauteur du salon des mamans
H = 296 cm	bar
I = 366 cm	largeur de la baignade des gosses
J = 479 cm	hauteur de la salle de culture physique
K = 775 cm	longueur de la baignade
L = 1253 cm	largeur nord de la salle de culture physique
M = 1549 cm	largeur sud de la salle de culture physique

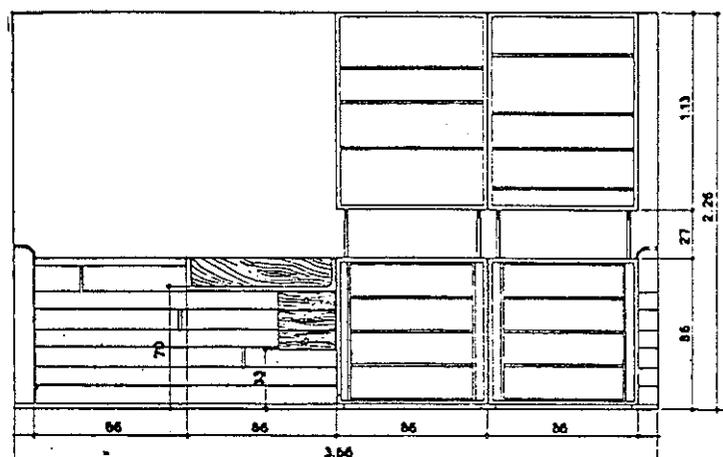
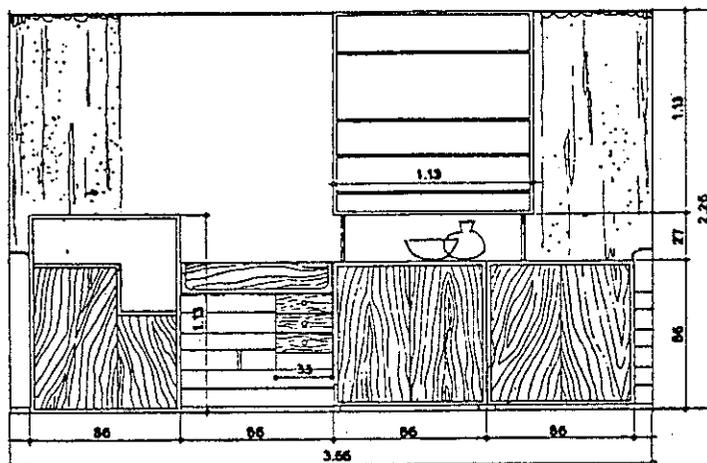
N = 1775 cm hauteur de la tour des réservoirs et des ascenseurs
 $1775 = 1549 + 226$

P = 828 cm largeur de la tour des réservoirs et des ascenseurs
 $828 = 775 + 53$

R = 645 cm profondeur de la tour des réservoirs et des ascenseurs
 $645 = 592 + 53$

. Chaque appartement est conçu en utilisant les mesures du Modulor

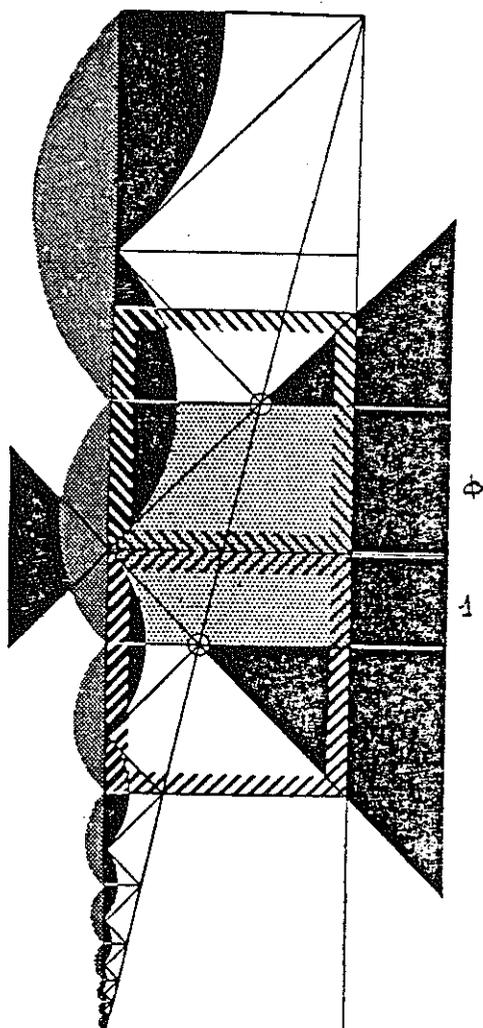
Tous les aménagements intérieurs : armoires, armoire de toilette, douche, tablettes... sont aussi aux dimensions du Modulor.



L'utilisation du Modulor dans la construction de cet immeuble est rappelée par la décoration d'un pan de béton et la "stèle des mesures", où on retrouve les mesures employées dans la construction.

IV - LES DISCUSSIONS AUTOUR DU MODULOR

Le livre de Le Corbusier a été traduit dans presque toutes les langues et diffusé dans le monde entier. Les architectes ont utilisé ces séries de mesures avec plus ou moins de bonheur. Certains se sont posé le problème de l'exactitude de la figure de départ, et ce problème a été résolu par la construction suivante : deux carrés égaux contigus de 1,13 m de côté et l'angle droit formé par leurs diagonales sont tracés ; le troisième carré est placé à cheval, en section d'or et la droite joignant les points d'intersection des côtés de l'angle droit avec le troisième carré permet de construire la série rouge et la série bleue, comme le montre la figure suivante.



Certains ont étudié les relations entre les mesures anciennes (palme, coudée, pied) et le modulator.

Un ingénieur mécanicien a proposé d'y remplacer le nombre d'or par la valeur $\sqrt[5]{10} \simeq 1,585$ pour que le Modulator soit en accord avec la série de Renard utilisée en mécanique, mais ceci eut été un crime de lèse-nombre d'or !

D'autres ont voulu voir dans ces deux suites géométriques de raison des nombres véritablement miraculeux, comme en témoigne cette lettre extraite du Modulator 2 que nous citerons sans commentaire

De Jean Dayre (Ascoral), du Secrétariat d'Etat aux Affaires Economiques, à Paris :

« Paris, le 31 août 1950.

... J'ai essayé de diriger ma pensée selon les perspectives que vous ouvrez aux pages 45 et suivantes (de « Le Modulator » 1948) prophétisant la mesure harmonique universelle.

Je désire vous confier quatre réflexions :

1. - Vous pouvez établir un système de mesures logarithmiques sur la base du Modulator ;
2. - Ce système permettrait de simplifier l'expression numérique des grandes et petites dimensions ;
3. - Vous pouvez exploiter ses propriétés multiplicatives pour le calcul simplifié des surfaces et des volumes ;
4. - Mais il faudra voir jusqu'où vont ses propriétés additives.

1. - Possibilité d'un système de mesures logarithmique basé sur le Modulator.

$$\emptyset = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6178 \simeq 1.62$$

raison de la série de Fibonacci, peut être pris comme base d'un nouveau système de logarithmes, concurrent du système népérien (base e) et du système décimal.

Si vous le voulez bien, nous appellerons ces logarithmes les logarithmes *auraux* (de la section d'or) ou, plus simplement, les logor (s).

Le logarithme aural d'un nombre N est \times tel que :

$$\emptyset^x = N, \text{ ou :}$$

$$1.6178^x = N.$$

$$\text{Ainsi : logor } 1,62^0 \text{ ou logor } 1) = 0$$

$$\text{logor } 1,62 = 1$$

$$\text{logor } 1,62^2 = 2$$

etc...

Pour vous ajuster sur l'échelle humaine, vous proposez une unité de mesure auxiliaire — ou complémentaire — qui est la hauteur de l'athlète de 6 pieds : 1,83 m.

Appelons cette unité *megalanthrope* (car cet homme est vraiment grand par la taille) ou, par contraction le *megan*.

$$1 \text{ megan} = 1,83 \text{ m.}$$

Vous obtenez ainsi le tableau d'équivalences ci-joint, qu'on peut extrapoler à volonté.

Convertissons en logors.

Nous pouvons prendre comme unité logarithmique le logarithme aural de \emptyset megan = 1,62 megan. Appelons cette unité *l'almegan* (d'algorithme).

D'où les équivalences indiquées par le tableau, par exemple :

$$\begin{aligned} 2,96 \text{ mètres} &= 1,62 \text{ megan} = 1 \text{ almegan} \\ 0,70 \text{ " } &= 0,37 \text{ " } = 2 \text{ " } \\ 3,66 \text{ " } &= 2 \text{ " } = 1,45 \text{ " } \end{aligned}$$

(Pour la série rouge, vous avez des almegans fractionnaires.)

2. - *Les mesures en almegans (comme toute mesure logarithmique) sont commodes pour exprimer les très petites ou très grandes dimensions.*

Elles expriment le nombre d'échelons qu'il faut franchir (en montant ou en descendant) sur la série de base (série rouge), en partant de la hauteur du megalanthrope, pour atteindre la dimension cherchée.

Exemples (sauf erreur de calcul) :

1. - Distance de Paris à Marseille :

$$\begin{aligned} 800.000 \text{ m.} &= \frac{800.000 \text{ megans}}{1,83} \\ &= 28 \text{ almegans environ.} \end{aligned}$$

2. - Diamètre d'une goutte d'eau :

$$\begin{aligned} 5 \text{ mm.} &= \frac{0,005 \text{ megan}}{1,83} \\ &= - 13 \text{ almegans environ.} \end{aligned}$$

3. - Diamètre de la voie lactée :

$$\begin{aligned} 5.000 \text{ années-lumières} &= 10^{21} \text{ mètres} = \frac{10^{21} \text{ megans}}{1,83} \\ &= 100 \text{ almegans environ.} \end{aligned}$$

4. - Longueur d'onde de la lumière dans le vide :

$$\begin{aligned} 0,0006 \text{ mm.} &= \frac{6 \text{ mètres}}{10^7} = \frac{6}{1,83} 10^7 \text{ almegans} \\ &= - 31 \text{ almegans environ.} \end{aligned}$$

Ainsi toutes les grandeurs, des plus grandes aux plus petites, s'expriment, en almegans, par des nombres à l'échelle humaine. On trouverait naturellement cette même propriété en prenant comme unité de longueur le mètre. Les longueurs, exprimées en logarithmes du nombre de mètres, seraient encore des nombres à l'échelle humaine, quel que soit l'ordre de grandeur. De la longueur d'onde de la lumière au diamètre de la voie lactée, il n'y a que 131 barreaux de l'échelle Modulor à franchir.

3. - *Exploitation des propriétés multiplicatives du Modulor pour le calcul des surfaces et volumes.*

Ceci est une application toute simple des propriétés logarithmiques.

Calculons par exemple des surfaces en mètres carrés — en megans carrés :

$$\begin{aligned} (1 \text{ megan carré} &= 1,82^2 \text{ mètres carrés} \\ &= 3,35 \text{ mètres carrés).} \end{aligned}$$

Soit une pièce de

$$4,79 \times 7,74 \text{ mètres}$$

ou : $2,62 \times 4,24$ megans.

Le calcul arithmétique donnerait :

$$37 \text{ m}^2$$

ou : 11 megans carrés.

Utilisons les logarithmes aurax ou logors :

$$\text{logor } 2,62 \text{ megans} = 2 \text{ almegans}$$

$$\text{logor } 4,22 \text{ megans} = 3 \text{ almegans.}$$

Le logor de la surface en megans carrés sera :

$$2 + 3 = 5$$

soit, d'après la table de correspondance extrapolée,

$$\begin{array}{l} 11 \text{ megans carrés} \\ \text{ou : } 11 \times 3,35 = 37 \text{ m}^2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 11 \text{ megans carrés} \\ \text{ou : } 11 \times 3,35 = 37 \text{ m}^2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{ce qui confirme le résultat} \\ \text{du calcul arithmétique.} \end{array}$$

Une table de correspondance bien graduée permettrait de faire rapidement les calculs pour les grandeurs en alme-gans fractionnaires.

4. - Extension des propriétés additives du Modulor.

Ici, nous rencontrons la plus grave difficulté pour l'utilisation du Modulor comme *système de mesure*.

La première qualité d'un système de mesure est de permettre l'addition des grandeurs.

D'une manière générale, les systèmes logarithmiques n'ont pas de propriétés additives.

J'entends par là que le logarithme d'une somme de deux nombres ne peut pas se déduire directement des logarithmes de ces nombres. Soit, dans le système décimal :

$$\begin{array}{l} \log 10 = 1 \\ \log 1000 = 3 \end{array}$$

Nous savons que

$$\log (1000 + 10) = \log 1010 = 3,0043.$$

Mais cela, c'est la table de logarithmes qui nous le donne. Il n'y a pas de relation directe entre $\log 1010$ (3,0043), $\log 10$ (1) et $\log 1000$ (3). Or, il se trouve que le *système logarithmique aural a certaines propriétés additives*, en ce qu'il y a, pour certains nombres, une relation directe entre les logarithmes de ces nombres et le logarithme de leur somme. Ceci est la conséquence de la propriété fondamentale du Modulor dans la série de Fibonacci :

$$\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2}$$

Il s'ensuit que si nous considérons trois termes consécutifs de la série rouge, le logarithme aural du 3^e (qui est la somme des 2 premiers) est dans une relation simple avec les logarithmes auraux des deux premiers.

Si n est le logarithme aural du premier, $n + 1$ étant le logarithme aural du second, le logarithme aural de la somme est $n + 2$.

Nous avons ainsi un moyen de sommer *certaines grandeurs* en utilisant la propriété de leurs logarithmes auraux.

Mais, et c'est là la difficulté essentielle, *il n'est pas évident que cette propriété soit extensible à toutes les grandeurs*.

Soit deux nombres quelconques (et non privilégiés) dont les logarithmes auraux sont 1,83 et 2,67 (pris au hasard). Peut-on obtenir aisément le logarithme de leur somme à partir de 1,83 et 2,67 ?

Il ne le semble pas.

Si cependant, la possibilité en était démontrée, alors le Modulor triompherait sur toute la ligne et pourrait être vraiment, non seulement dans son *essence*, mais dans sa *pratique*, la *mesure harmonique universelle*.

La question est d'importance, et je pense qu'elle pourrait être soumise à un mathématicien.

Quoi qu'il en soit, la découverte est belle et, intégralement additif ou partiellement additif, le Modulor est bien l'instrument qui a manqué aux normalisateurs officiels pour harmoniser rigueur et plastique.

Jean DAYRE. »

En conclusion, disons que ces deux suites géométriques de raison ϕ ont fait couler beaucoup d'encre, beaucoup de béton aussi, et que les réalisations n'ont pas toujours été aussi heureuses que l'auteur du Modulor l'aurait voulu.

EN GUISE DE CONCLUSION

Nous venons de voir que le nombre d'or apparaît beaucoup dans la nature et dans les arts. Il ne faut cependant pas pour autant lui attribuer les propriétés mystérieuses, magiques et surnaturelles que les mystiques ont pu lui donner au cours des siècles, ceci pour deux raisons :

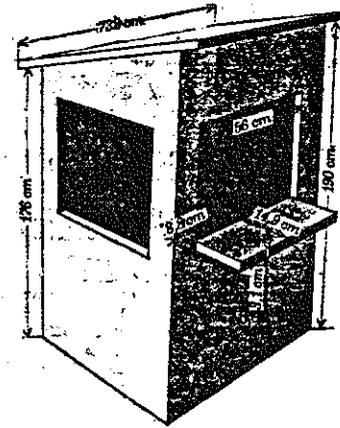
- tout d'abord, parce que certaines figures géométriques où apparaît le nombre d'or sont extrêmement voisines de figures qui se rattachent à d'autres nombres que le nombre d'or.
- ensuite parce qu'il suffit de chercher le nombre d'or, ou tout autre nombre, quelque part pour le trouver.

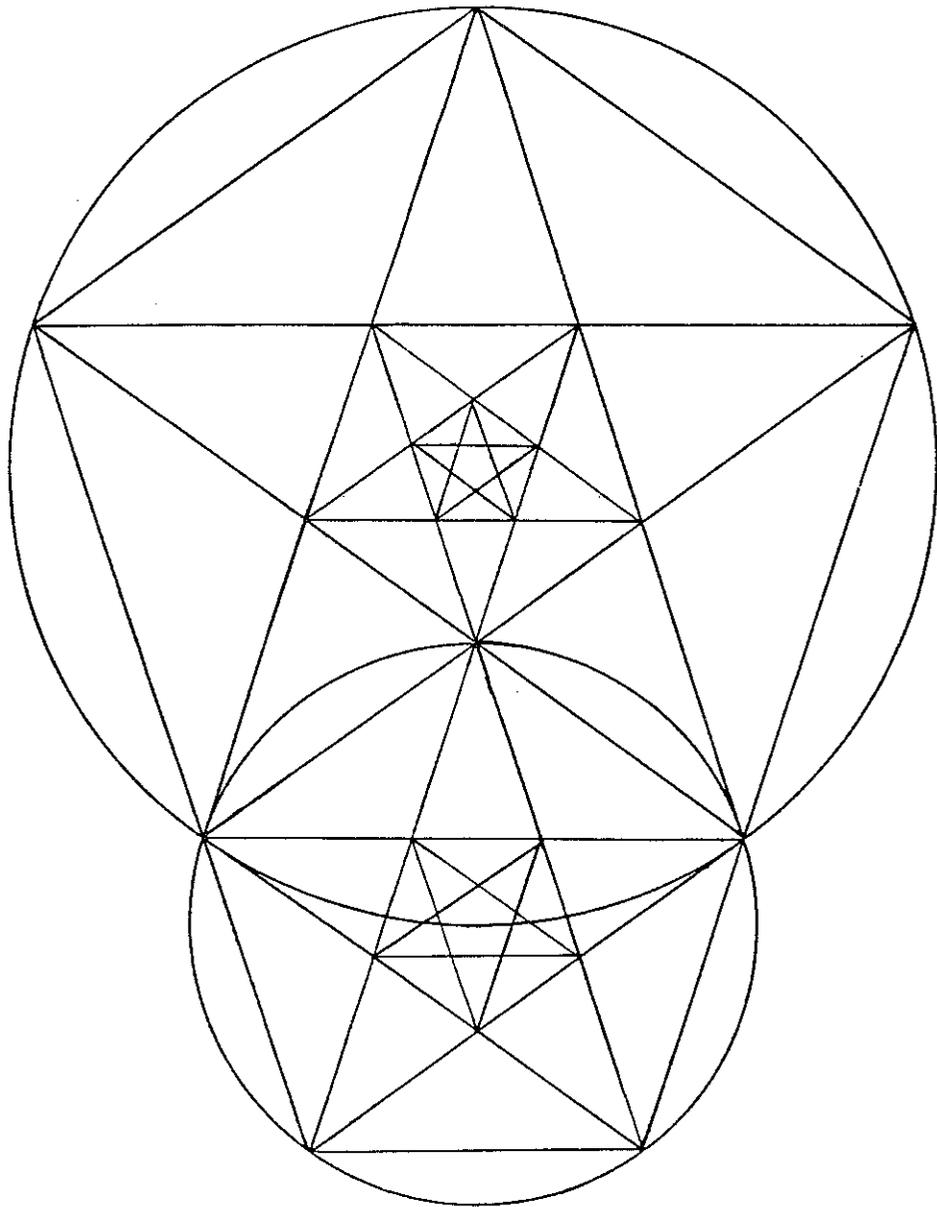
Jean Pierre Adam a bien illustré ce fait en étudiant les dimensions d'une guérite de vendeuse de billets de la loterie nationale de l'avenue de Wagram.

Il y a trouvé :

- . la distance (approximative) Terre-Soleil : la largeur de la planchette (14,9 cm) multiplié par cent milliards, soit 149 000 000 km
- . le nombre π : la hauteur de l'arrière de la guérite (176 cm) divisée par la largeur de la fenêtre (56 cm), soit 3,1412
- . la date de la bataille de Poitiers : la double somme des hauteurs avant (190 cm) et arrière (176 cm) soit 732
- . la formule de la naphthaline : la somme de l'épaisseur de la tablette (3,10 cm) et de la distance de la fenêtre à l'angle de la guérite (8,8 cm) ; 3 et 8 représentant respectivement C et H (troisième et huitième lettre de l'alphabet), 3,10 + 8,10 représente C10 H8.

Il ne mentionne pas le nombre d'or, mais avec les dimensions de la guérite, vous allez sûrement le trouver !





B I B L I O G R A P H I E

(non exhaustive !)

- * Revue Fibonacci Quaterly
- * A primer for the Fibonacci numbers - The Fibonacci Association
- * Le nombre d'or - Marius Cleyet-Michaud - Que sais-je ?
- * Le nombre d'or - Matila Ghyca - Gallimard
- * De divina proportione - Luca Pacioli
- * Suite de Fibonacci - N. Vorobiev - Ed. de Moscou
- * Mathématiques d'un point de vue algorithmique - Engel - Cedic
- * Fantaisies et paradoxes mathématiques - E.P. Northrop - Dunod
- * Récréations mathématiques II - E.Lucas - Blanchard
- * La géométrie secrète des peintres - C. Bouleau - Seuil
- * Les cahiers du nombre d'or - E. Maillard - CNRS
- * L'archéologie devant l'imposture - J.P. Adam - Laffont
- * Le Modulor et Modulor 2 - Le Corbusier - Ed. de l'Architecture d'aujourd'hui
- * Le nombre d'or sur la façade de la cathédrale de Reims - M.Jay
- * La série d'or - Béothy
- * Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 275/276 (1970)

Notre site WEB

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

**IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

Le nombre d'or et les nombres de fibonacci

AUTEUR (S) :

Meyer A
Steyaert C

**Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1981
ISBN : 2-86612-131-7**