



Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITE PARIS VII



mars 1981

D.E.U.G./S.S.M.
première année
SECTION E
UN AN DE FONCTIONNEMENT

MICHELE ARTIGUE

D.E.U.G. S.S.M. — PREMIERE ANNEE — SECTION E —

UN AN DE FONCTIONNEMENT

Equipe Enseignante de Mathématiques :

M.Artigue, F.Colmez, M.F.Gouzou, R.Grunig, M.J.Perrin,
J.Pichaud, A.Revuz, J.Robinet, M.Tessier, J.L.Verley

Rapport rédigé par M.Artigue

Décembre 1980

DEUG SSM 1ère année - Section E Rapport sur un an de fonctionnement
--

A - ORIGINES DE L'EXPERIENCE

A l'origine de cette expérience, il y a :

- d'une part, un certain nombre de constats sur la faillite de l'enseignement à l'Université. Beaucoup d'enseignants du supérieur qui s'intéressent à leur fonction d'enseignant sont conscients de ces problèmes. Des recherches en didactique entreprises récemment, comme celles d'A. ROBERT [8] et de B. CORNU [5] permettent de les objectiver et de les motiver. Mais il faut souligner que pour l'instant ces recherches naissantes n'en sont pas au stade où elles permettraient de fonder des stratégies d'enseignement.

- d'autre part, la rencontre à un instant donné, de quelques individus mathématiciens ou physiciens, ayant le désir d'essayer d'améliorer (sans plus attendre) le fonctionnement du système et réunis autour de quelques objectifs communs:

1 - Briser le cloisonnement existant dans l'enseignement entre les mathématiques et la physique

2 - Partant de l'hypothèse que l'activité mathématique repose sur la résolution de problèmes, essayer de se démarquer du mode de fonctionnement de l'enseignement à l'Université (où suivant le schéma classique "théorie-applications", on commence par donner un statut formel aux objets que l'on va étudier pour proposer ensuite des exercices d'application visant presque exclusivement à asseoir ce statut), aborder plutôt un certain nombre de problèmes riches du point de vue scientifique chargés de sens pour les étudiants et développer les outils mathématiques permettant de les résoudre.

3 - Sur la physique, "développer chez les étudiants le sens des phénomènes de la matière, de leur modélisation, de leur classification suivant des types connus et non leur faire apprendre par coeur des formules et des lois" (cf A_1 "principes").

En tant qu'initiateurs, nous étions parfaitement conscients des limites que le manque de réflexion préalable approfondie sur le fonctionnement du système d'enseignement à l'Université et sur les contenus eux-mêmes, créait à une telle entreprise d'innovation pédagogique. Mais il nous paraissait important de saisir l'occasion qui se présentait de modifier le cours des choses même si les modifications devaient se révéler en fin de compte très minimes, même si l'expérience n'avait que peu de chances d'avoir une réelle influence sur l'enseignement dispensé habituellement.

B - ORGANISATION DE LA SECTION E

Pour mettre sur pied cette section de DEUG SSM 1ère année, il nous a fallu agir sur certaines variables du système universitaire. En l'absence d'une réflexion théorique préalable, comme c'est le cas de la majorité des innovations pédagogiques tentées ici ou là, on peut penser que les choix qui sont alors faits de modifier telle ou telle variable, ne sont pas fonction essentiellement de leur pertinence par rapport au projet, de leur importance comme variables de commande du système mais plutôt de convictions internes et de la plus ou moins bonne accessibilité de ces variables. Ce fut sûrement notre cas. Nous avons décidé, en particulier, d'agir sur les effectifs, les programmes, la répartition des heures entre les différents modes d'intervention, les rapports entre les différents modes d'intervention, l'évaluation. Pour chacune de ces variables, nous allons préciser maintenant quelles ont été les contraintes fixées par l'institution et les principaux choix que nous avons effectués compte tenu de ces contraintes.

1 - Effectifs

En première année de DEUG SSM à PARIS 7, les étudiants sont regroupés en section de 160 étudiants environ, chaque section correspondant à 4 groupes de travaux dirigés - le programme et les examens sont communs à toutes les sections.

Nous avons obtenu que la section expérimentale ne compte que 100 étudiants répartis en 4 groupes de travaux dirigés. Nous avons pour cela argué du fait que, vue les modalités d'inscription dans la section, la chute des effectifs en cours de l'année serait moins élevée que dans les autres sections - les modalités d'inscription ont été les suivantes: dans le dossier d'inscription, les étudiants recevaient un imprimé explicitant les objectifs de la section et ce en quoi son organisation différait de celle des autres.

Lors de leur inscription pédagogique, les étudiants intéressés s'entretenaient avec deux enseignants, l'un de mathématiques, l'autre de physique, puis éventuellement s'inscrivaient dans notre section. Pourquoi ce processus ?

1) il nous semblait que les informations données dans l'imprimé étaient insuffisantes pour permettre un choix motivé et que les étudiants auraient de nombreuses questions à nous poser.

2) divers facteurs risquaient à notre avis d'entraîner un afflux d'étudiants vers la section: petit effectif dans les groupes de T.D., importance accordée à une approche expérimentale en physique et chimie, coordination entre mathématiciens et physiciens, le sigle même d'experimental ...

Nous voulions pouvoir insister sur des termes du contrat qui nous paraissaient fondamentaux : importance accordée au contrôle continu, nécessité d'une présence et d'activités régulières

Il ne s'agissait en aucun cas dans notre esprit de chercher à sélectionner les étudiants pour former une section d'élite, mais notre discours a pu être compris par certains comme : il faudra travailler plus que dans les sections ordinaires, cela va être plus dur, il y aura moins de reçus

Les étudiants de première année avaient le choix entre une unité de valeur de chimie classique et une de chimie expérimentale (ceux de la section E devaient obligatoirement prendre la deuxième) lors des inscriptions, il nous est apparu que, pour les étudiants qui avaient le choix, la chimie expérimentale jouait souvent le rôle de repoussoir, contrairement à toutes nos idées préconçues parce que :

- ce n'était pas un enseignement de type habituel et ceci les effrayait un peu

- l'évaluation étant basée sur les compte rendus de T.P, l'assiduité était quasiment obligatoire.

Or, beaucoup d'étudiants à l'entrée à l'Université, sont en réaction contre l'enseignement secondaire, se veulent libres de toute contrainte.

En résumé, les étudiants ne se précipitèrent pas en section E et nous eûmes presque des difficultés à recruter 100 étudiants sur les 816 de première année. Les raisons pour lesquelles, ils s'inscrivirent chez nous ne furent pas toujours celles que nous attendions (cf. A₂) la fonte des effectifs fut équivalente à celle des autres sections (70 étudiants passèrent les examens de février, 561 pour toutes les sections cumulées). Elle se produisit principalement les deux

premiers mois et visa surtout les étudiants étrangers. Il faut cependant noter que les interviews et les réponses au questionnaire proposé aux étudiants en fin d'année (cf A_2) montrent que, pour beaucoup, la grande autonomie accordée brutalement à l'entrée à l'Université est très difficile à assumer et gérer et que finalement, parmi les choses qu'ils ont appréciées dans la section figurent en bonne place, l'importance accordée au contrôle continu, les devoirs réguliers exigés, l'existence de tests leur permettant de se situer par rapport aux apprentissages requis, bref des méthodes d'encadrement parfois ressenties comme gênantes au moment de l'inscription*

2 - Programmes

- Mathématiques : En ce qui concerne les mathématiques, toute liberté nous a été laissée pour organiser l'enseignement par l'U.E.R. Mais une contrainte très forte a pesé sur nous de manière indirecte: les étudiants devaient l'année suivante rejoindre en deuxième année les sections ordinaires. Nous ne pouvions donc nous permettre de trop grands écarts dans le programme des matières traitées. La liaison avec les physiciens nous a imposé également des contraintes au niveau de la planification (premier semestre consacré presque exclusivement à l'analyse..) et au niveau des contenus (Nous avons abordé les fonctions de plusieurs variables et les équations différentielles, sujets traditionnellement réservés à la deuxième année de DEUG à Paris 7).

Finalement les thèmes du cours ont été abordés dans l'ordre suivant:
Premier semestre

Description "scientifique" de l'Univers-Modèles fondamentaux : temps, espace.

Structure affine, structure vectorielle, applications linéaires - Repérage d'un point - Bases, sous-espaces - Applications linéaires et matrices - Noyau, image, factorisation - Projections, symétries et homothéties - Applications affines

Approximations - Ordre et valeur absolue sur $\mathbb{R}$ - Distance

* Cette année, forts de cette expérience, nous avons insisté, lors des inscriptions, sur les avantages que présentait (à nos yeux bien sûr!) la section. L'annonce d'un travail régulier sur microordinateur, l'assurance que nous avait donné un an de pratique ont sans doute aussi contribué à rendre la situation différente de celle de l'an passé: La section s'est remplie très rapidement. Un mois après le début des cours la baisse des effectifs reste très faible (il faut remarquer qu'il y a cette année beaucoup moins d'étudiants étrangers à Paris 7).

Normes dans les espaces vectoriels - Produit scalaire -
 Applications continues dans les espaces métriques, composition
 Applications linéaires continues dans les espaces vectoriels normés
 Différentielle de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ espaces affines.
 Unicité - Différentielle d'une composée
 Fonctions différentiables à variables réelles : somme, produit
 Notations, df , dx
 Dérivées partielles - Matrice Jacobienne
 Accroissements finis - Formule de Taylor
 Développements limités
 Fonctions usuelles : Arc sin, ..., ch ..., Argch
 Courbes paramétrées - Coordonnées polaires, constructions de courbes
 en polaire
 Polynômes, fonction polynômes, Anneau $K[X]$
 Division euclidienne - Division suivant les puissances croissantes
 Fractions rationnelles - Décomposition dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$
 Intégrale de Riemann - Primitives - Intégrales impropres

et pour le deuxième semestre, en moins détaillé :

Quelques propriétés de $\mathbb{R}$ et des fonctions continues (déjà abordé en fin de
 premier trimestre)
 Le corps des complexes
 Retour sur l'algèbre linéaire - Déterminants - Rang d'une application linéaire
 Résolution des systèmes d'équations linéaires
 Valeurs propres - vecteurs propres - Diagonalisation
 Suites et séries numériques
 en Amphi Math-Physique : Equations différentielles linéaires à coefficients
 constants du premier et second ordre

Mais ceci ne permet de se faire qu'une idée très vague de la façon
 dont les différents thèmes se sont articulés, de leur importance respective, du
 niveau auquel les questions ont été abordées.

A titre indicatif voici le programme des autres sections pour l'année
 1979-80 (et pour l'année 80-81 : on peut y sentir l'influence de la section
 expérimentale)

PROGRAMME DES UNITES DE VALEUR

79-80

UNITES DE VALEUR DE MATHÉMATIQUES

NN 121-122 : Eléments de mathématiques (premier semestre)

Algèbre :

- 1 - Polynômes (avec rappels sur les notions de groupes, anneaux et corps), divisibilité, polynômes irréductibles, pgcd, ppcm, théorème de Bezout, interpolation de Lagrange ; fonctions symétriques.
- 2 - Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples sur $\underline{\mathbb{C}}$, sur $\underline{\mathbb{R}}$.

Analyse :

- 1 - Présentation des corps des nombres réels et des nombres complexes.
- 2 - Suites numériques, convergence, suites de Cauchy, exemples nombreux et judicieux (avec rappels sur les fonctions élémentaires déjà connues).
A l'occasion des § 3, 4 et 5 on donnera les notions nécessaires aux démonstrations des points suivants : topologie de $\underline{\mathbb{R}}$, fonctions réciproques, fonctions usuelles servant au calcul des primitives.
- 3 - Fonctions continues : limite, théorèmes généraux sur les fonctions continues sur un segment.
- 4 - Fonctions dérivables : définition, théorème de Rolle, formules de Taylor ; tracé de graphes.
- 5 - Développements limités, développements limités usuels ; étude locale des fonctions.
- 6 - Coordonnées polaires, équation polaire, exemple.
Courbes paramétrées, tangente, étude locale, branches infinies, tracé de courbes courbes paramétrées dans l'espace.
- 7 - Calculs de primitives : changement de variables, intégration par parties, primitives des fractions rationnelles.
Les fractions rationnelles doivent être faites en vue du calcul des primitives
- 8 - Construction du corps des réels et du corps des complexes et des fonctions élémentaires.

NN 123-124 : Algèbre et Analyse I (second semestre)

Algèbre

- 1 - Espaces vectoriels, vecteurs indépendants, bases, dimension, théorème de la base incomplète.
- 2 - Applications linéaires, image, noyau, rang, équations linéaires.
- 3 - Matrices, lien avec les applications linéaires ; changement de base, matrice de passage ; forme matricielle des équations linéaires.
- 4 - Déterminants, théorème d'existence et d'unicité, développement suivant une rangée ; sous-matrice principale et calcul du rang ; résolution des équations linéaires. Théorème de Cramer.
- 5 - Vecteurs propres, valeurs propres, triangulation. Application à la résolution des équations linéaires.

Analyse :

- 1 - Séries numériques, séries à termes positifs, convergence absolue, critère de Cauchy, règle de d'Alembert, Cauchy, Riemann ; opérations sur les séries numériques.
- 2 - Intégrale de Riemann sur la droite réelle, intégrale des fonctions bornées continues par morceaux ; exemples.
- 3 - Intégrale impropre, exemples.

PROGRAMME 80-81

UNITES DE VALEUR DE MATHÉMATIQUES

NN 121-122 : Eléments de mathématiques (premier semestre).

- 1) Propriétés fondamentales du corps des réels et du corps des complexes.
- 2) Espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif ; familles libres, familles génératrices, bases, théorèmes de l'échange, de la base incomplète, de la dimension.
- 3) Applications linéaires ; image, noyau, rang, matrices d'applications linéaires ; changement de base, matrice de passage. Equations linéaires.
- 4) Fonctions continues d'une variable réelle ; limites, théorèmes généraux sur les fonctions continues.
- 5) Fonctions différentiables d'une variable réelle : diverses présentations ; théorème de la moyenne, formules de Taylor.
- 6) Développements limités. Etude locale des fonctions, tracé des graphes.
- 7) Courbes paramétrées ; tangente, étude locale, branches infinies, tracé de courbes. Courbes définies en coordonnées polaires.

NN 123-124 : Algèbre et Analyse I (second semestre).

- 1) Rappel de notions élémentaires sur les groupes. Exemples ; groupe symétrique, Signature d'une permutation.
- 2) Déterminant d'une matrice, d'un endomorphisme ; méthodes de calcul ; calcul du rang d'une application linéaire . Résolution des systèmes d'équations linéaires.
- 3) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; divisibilité, théorème de Gauss, polynômes irréductibles, p.g.c.d., p.p.c.m., théorème de Bezout.
- 4) Fractions rationnelles ; décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$.
- 5) Intégrale de Riemann des fonctions bornées sur un segment ; exemples.
- 6) Primitives ; calcul des primitives : changement de variables, intégration par parties, primitives des fonctions rationnelles.
- 7) Intégrales impropres ; exemples.
- 8) Suites et séries numériques ; suites de Cauchy, critères de convergence des séries positives ; séries absolument convergentes, semi-convergentes.

3 - Coordination Math-Physique

Dans ce domaine, la principale originalité de cette section a consisté en l'organisation d'amphi Math-Physique hebdomadaires. Pour chacun de ces amphi de 1 h 30, deux responsables (un enseignant de mathématiques et un enseignant de physique) étaient désignés. C'est par la préparation commune de ces cours où intervenaient simultanément les deux enseignants qu'a réellement pris corps la coordination Math-Physique. Elle a été ressentie comme très positive à la fois par les enseignants et les étudiants et même jugée par ces derniers avec une lucidité certaine (cf A_2). Il s'agissait dans ces amphis, pour tenter de briser le cloisonnement existant entre les deux disciplines, de montrer aux étudiants comment les notions importantes du programme intervenaient à la fois en math et en physique.

- Il y en eut 15 au total - En voici la liste - Le lecteur intéressé trouvera en annexe A_4 , les notes de préparation du premier amphi consacré aux équations différentielles, à titre d'exemple.

- 10 Octobre : Affine - Vectoriel - Produit vectoriel - Produit mixte - Produit scalaire
- 17 Octobre : changement de référentiel - changement de coordonnées - influence des symétries
- 24 Octobre : Cinématique
- 31 Octobre : Représentations graphiques
- 7 Novembre : Mécanique I (amphi physique)
- 14 Novembre : Mécanique II(")
- 21 Novembre : Différentielle
- 28 Novembre : Circulation d'un vecteur - Intégrale curviligne
- 9 Décembre : Champ potentiel - Gradient
- 16 Janvier : Mécanique III (amphi physique)
- 23 Janvier
- 30 Janvier Tests (texte en A_3)
- 27 Février : Equations différentielles 1
- 6 Mars : Equations différentielles 2
- 19 Mars : Test (texte en A_3)

- Cette coordination a été coûteuse en temps pour les enseignants des deux disciplines. Nous avions initialement prévu une réunion hebdomadaire de 2 heures et nous avons respecté cette fréquence pendant tout le premier trimestre. - la majeure partie du temps des réunions était alors consacré à la préparation des amphis communs - la préparation d'un cours occupait (en partie) deux réunions :

Au cours de la première, les deux enseignants responsables soumettaient au groupe un avant-projet qui était discuté. Après une ou deux répétitions des intéressés, nous avions droit pour la seconde à un plan détaillé de l'amphi prévu.

A la fin de Décembre, un certain essoufflement s'est fait sentir, surtout chez les physiciens, très occupés par le montage des travaux pratiques entièrement nouveaux, l'encadrement des projets, le soutien qu'ils avaient organisé pour les étudiants les plus faibles. Les réunions se sont espacées. Il y en eut deux au mois de Janvier consacrées principalement à l'organisation et à la correction des tests (chaque série de tests ayant été corrigée séparément par les enseignants des deux disciplines, les notes furent harmonisées au cours des réunions), deux au mois de Février, l'une pour mener une délibération commune après les examens, l'autre pour dresser un bilan pour le semestre écoulé et organiser le suivant.

Au second semestre, après les deux amphi consacrés aux équations différentielles et l'amphi de test qui eut lieu 15 jours plus tard sur le même sujet, les enseignants de Physique demandèrent à bénéficier de cette plage horaire pour faire un cours sur l'oscillateur harmonique. Il n'y eut plus d'autres amphi Math-Physique jusqu'à la fin de l'année (mais ceci est dû en partie à la désorganisation causée par les mouvements de grève). Les réunions sont alors devenues quasiment mensuelles. Elles ont servi surtout à échanger des informations diverses, organiser la fin de l'année, les examens, délibérer ensemble après les examens, faire le bilan de l'année écoulée et mettre sur pied l'année 80-81.

- L'organisation des amphi Math-Physique n'a pas posé de problèmes de coordination insurmontables excepté pour l'amphi "différentielles" sur lequel se sont cristallisés les affrontements entre mathéux et physiciens - le lecteur intéressé trouvera jointe à ce rapport une tentative d'analyse de ce phénomène -

Il faut souligner que, même dans cette circonstance, il n'y avait pas face à face d'un côté un clan uni de mathématiciens et de l'autre un clan uni de physiciens, mais dans chaque équipe diverses tendances dont les divergences étaient parfois aussi fortes que celles inter-équipes. Mais c'est un fait dont nous n'avons pas été d'emblée conscients, chaque équipe donnant à l'autre au cours des réunions communes une forte impression de cohésion (il serait sans doute intéressant d'en analyser le pourquoi) Ceci permit au débat de virer à l'affrontement Math-Physique, avec tous les stéréotypes du genre, entre les points de vue les plus opposés sans que personne ne parvienne à l'interposer efficacement pour relancer la négociation.

- Toujours à propos de ces amphi, il faut remarquer qu'au début les étudiants n'ont pas su quel statut leur accorder : ce n'étaient ni des cours de physique, ni des cours de math - les thèmes traités étaient repris en travaux dirigés de math et de physique mais pas nécessairement juste après ou sous référence explicite, les enseignants de cet amphi changeaient chaque semaine, le sujet aussi. Pour toutes ces raisons, ils eurent tendance à les considérer comme des conférences que l'on pouvait écouter d'une oreille distraite, parfois même en achevant des devoirs de math ou de physique.

Ceci nécessita une mise au point de l'équipe enseignante. Elle fut obligée d'explicitier le rôle qu'elle entendait faire jouer à ces interventions et quel contrat elle souhaitait passer à leur sujet.

- Enfin, il faut noter que les premiers amphis furent trop ambitieux. Ils furent très appréciés des enseignants des deux disciplines qui y assistaient, mais ils passèrent allègrement au-dessus de la tête de la majorité des étudiants et ne manquèrent pas de tomber dans le travers qui consiste à répondre à des questions que certes les enseignants se posent ou se sont posées, mais que les élèves, eux, sont loin de se poser.

Ceci d'autant plus, qu'ayant, en général, prévu une matière trop riche, n'ayant pas la possibilité de déborder, les enseignants accéléraient l'allure au bout d'une heure pour parvenir à terminer. Là encore, il fallut s'adapter au niveau des étudiants, et rompre avec l'organisation initiale trop rigide, en s'autorisant la possibilité de déborder d'une séance sur l'autre, puis en chargeant les équipes non plus d'un amphi mais d'une série d'amphis sur un thème donné.

4 - Répartition des horaires

La répartition des horaires entre cours-travaux dirigés et travaux pratiques était conditionnée par de nombreuses contraintes institutionnelles et notre marge de manoeuvre en la matière malheureusement très limitée.

- en mathématiques : le sous-encadrement chronique de l'U.E.R. de Math rendait impossible la suppression du cours magistral (L'horaire des enseignants de rang A étant de 3 heures, celui des rangs B de 5 heures). Ceci nous imposait donc pratiquement les mêmes répartitions entre cours et T.D. que les autres sections; à savoir : 3 heures de cours magistral réparties en 2 fois 1 H.30 et 2 séances de T.D. de 2 h.30)

Pour plusieurs raisons, on a prévu au premier semestre des séances de T.D. de 2 h et non de 2 h.30 :

a) pour les horaires des enseignants de rang B qui, outre le surcroît de travail notable entraîné par la participation à cette section, étaient chargés de l'organisation des amphi math-Physique.

b) parce que les séances de 2 h 30 sont, de l'avis de la majorité des enseignants, trop longues et que les étudiants de première année ne parviennent pas à travailler aussi longtemps sans interruption. En général, on fait donc une pause au milieu de la séance et en fait l'horaire de travail effectif dépasse rarement 2 heures.

c) parce que l'un des objectifs de la section était de développer l'autonomie des étudiants et que ceci nous paraissait incompatible avec un alourdissement des horaires par rapport aux autres sections. Or nous organisons déjà en supplément l'amphi Math-Physique.

Mais un nombre aussi restreint d'heures de travaux dirigés est pratiquement incompatible avec une démarche véritablement heuristique et une approche heuristique et une approche spiraloïdale des notions*

- En ce qui concerne le rôle respectif des divers modes d'intervention, les objectifs cités au début supposaient une refonte totale des rapports existant entre le cours magistral et les T.D. Dans notre esprit, son but n'était plus de dérouler linéairement un cours de math, chapitre par chapitre, théorème par théorème, mais de présenter ou faire la synthèse d'activités réalisées en T.D., insister sur tel ou tel point précis, contribuer en se plaçant en recul par rapport aux T.D. à la structuration du savoir, enfin d'ouvrir des perspectives sur la façon dont les notions introduites s'étaient historiquement construites et sur la façon dont elles intervenaient actuellement dans le savoir scientifique. C'était sans doute un projet difficilement réalisable vu les horaires en vigueur nécessitant de plus de la part de tous les enseignants un travail considérable, compte tenu de leur formation et de leurs habitudes d'enseignement. L'absence (pour l'enseignement supérieur) d'une documentation adaptée à cette forme de travail s'est faite cruellement sentir. Il faut noter également que les étudiants de DEUG 1ère année ne sont absolument pas prêts à recevoir un enseignement de ce type.

* Pour l'année 80-81, nous avons essayé d'apporter quelques modifications à ce régime (cf. A₆)

Finalement, s'il y eut peu de modifications dans ce domaine, la seule responsabilité n'en incombe pas aux contraintes institutionnelles; mais je pense que si nous avons l'ambition de contribuer par notre enseignement à une formation scientifique véritable des étudiants, cet objectif est et doit rester prioritaire - étant entendu que nous ne progressons vers sa réalisation que lentement et par îlots.

- en Physique : Les 8 enseignants de la section se sont répartis la charge hebdomadaire suivante, toute l'année, - 4 x 4 h de T.D soit 16 heures

- 4 x 1 après-midi de TP soit 24 heures

- 1 heure 30 d'amphi (physique ou math-physique)

Soit au total 40 heures de T.P - T.D et 1 h. 30 d'amphi.

Les T.P étaient encadrés par deux enseignants et les T.D par un seul, 2 enseignants étaient affectés à chaque groupe.

Chacun assurait 5 heures d'enseignement hebdomadaire (1 séance de T.P et 1 séance de T.D.) et chaque étudiant avait 7 heures de cours (1 séance de T.P et 2 séances de T.D) non compté pour les uns et les autres l'amphi math-physique. En physique, d'autre part, l'équipe enseignante avait tenu à pouvoir disposer d'une salle qui appartienne en propre à la section. L'existence de cette pièce commune a été un point fondamental pour le fonctionnement de la section (cf A₁: principes)

5 - Evaluation

- en Mathématique

Nous avons obtenu qu'elle soit indépendante de celle des autres sections - Le conseil de l'U.E.R. avait simplement demandé un droit de regard sur les sujets de l'examen, droit qu'il n'a d'ailleurs pas exercé. Notre seule contrainte était donc de rester dans le cadre fixé par l'Université pour les rapports entre contrôle continu et examen terminal (de 20 à 80% pour le contrôle continu).

En fait, les modalités d'évaluation sont restées extrêmement classiques, les tests et les problèmes rendus chaque semaine par les étudiants tenant lieu de contrôle continu, et une bonne note de contrôle continu permettant de passer l'oral même avec une très mauvaise note d'écrit. Je pense, pour ma part, que le manque de précision dans les modes d'évaluation conduit à adopter avec les

étudiants dans ce domaine une attitude paternaliste, à mon avis personnel, peu cohérente avec les ambitions de développement de l'autonomie affichées par ailleurs. Mais cette opinion n'était pas partagée par l'ensemble des enseignants de la section. Certains craignaient qu'en fixant de manière précise, au début de l'année, la part accordée au contrôle continu et la manière exacte suivant laquelle il serait évalué, on aboutisse à un système d'évaluation rigide et éparpillé vis à vis duquel la préoccupation majeure des étudiants serait de glaner des points ici ou là dans une comptabilité mesquine préjudiciable à l'unité de l'enseignement.

A la suite de discussions menées au cours du bilan, et au début de cette année scolaire qui nous ont amenés à expliciter et confronter nos points de vue, nous avons mis sur pied pour 80-81 un système d'évaluation légèrement différent de celui de 79-80 (cf A₆).

- en Physique

L'évaluation en physique a été légèrement différente aux deux semestres pour prendre en compte la réalisation des projets.

Au premier semestre :

1/3 pour un partiel + un examen écrit

1/3 pour un examen oral sur les T.P. d'optique et les T.D

1/3 pour le contrôle continu régulier répartie entre :

- les interrogations écrites en T.D (3 ou 4 dans le semestre)
- les tests math-physique
- les compte rendus de T.P
- les problèmes

(un problème était distribué chaque semaine mais les étudiants rendaient un seul document écrit par semaine, soit le problème, soit le compte rendu des T.P. donc faisaient en fait un problème sur deux).

Au second semestre :

1/3 pour le contrôle continu comme au premier semestre

1/3 projet (qu'il ait été réalisé au 1er ou au 2ème semestre)

1/3 examen écrit

Pour plus de précision sur les projets voir dans A₄ le fonctionnement

C - QUELQUES REFLEXIONS A PROPOS DE CETTE EXPERIENCE ET DE
L'INNOVATION PEDAGOGIQUE DANS LE SUPERIEUR EN GENERAL

Si dans la description qui précède, un certain nombre d'obstacles à l'innovation pédagogique sont apparus, il s'agissait le plus souvent d'obstacles institutionnels pouvant être perçus par nous comme externes. Il paraît nécessaire de mentionner aussi d'autres contraintes, peut être moins aisées à cerner que les contraintes matérielles, sur lesquelles nous avons des moyens d'action plus limités, mais qui n'en affectent pas moins de façon déterminante le fonctionnement du système.

Une expérience comme la nôtre est en général lancée par un petit groupe de personnes désireuses d'améliorer le fonctionnement du système et fortement motivées, pour des raisons qui nous ne chercherons pas ici à analyser, dans la réussite de leur projet. Ce désir rend acceptable la masse de travail supplémentaire occasionnée par l'organisation de l'innovation. Mais pour que le projet se réalise, il est nécessaire que le groupe s'élargisse (Il a concerné dans notre cas 18 personnes - 10 en mathématiques et 8 en physique). Comme pour l'inscription des étudiants, la loi de l'offre et de la demande va jouer dans l'établissement du contrat implicite et explicite entre les enseignants. Il est clair que moins le projet sera explicitement défini, plus il sera facile de passer un contrat, chaque enseignant pouvant, en toute bonne foi, mettre dernière chaque expression un sens qui le satisfasse que, d'autre part, dans beaucoup d'innovations, et ce fut aussi le cas chez nous, l'explicitation porte principalement sur ce qu'il est commode d'explicitier, à savoir les conditions matérielles, mais que l'ambiguïté reste élevée dans les autres domaines.

La situation dans l'enseignement supérieur fait que les Universitaires attachent, en général, moins de prix à leur fonction d'enseignant qu'à celle de chercheur, et qu'il n'est pas question de leur demander de rétablir l'équilibre entre ces deux activités. La participation à une innovation, exigeant dans tous les cas, beaucoup de travail de la part des enseignants, il se peut que les candidatures ne pleuvent pas et que le principal critère de recrutement se révèle être le suivant : "être disposé à consacrer davantage de temps aux activités d'enseignement". Il est évident qu'une telle plateforme peut cacher des divergences idéologiques profondes mettant en cause la signification même de l'expérience.

En ce qui nous concerne :

en mathématiques : Nous n'avons pas eu de mal à former l'équipe enseignante, beaucoup d'enseignants en demi-service à l'IREM étant intéressés par l'entreprise (Un seul des 10 enseignants n'a jamais fait partie de l'IREM). Mais que se passera-t-il si, désirant que cette section ne reste pas un îlot perdu dans la masse du DEUG P7, nous voulons, soit l'étendre en première année, soit la prolonger en seconde année ?

L'équipe était donc formée de 10 personnes, chacune ne travaillant dans la section que durant un semestre. Nous nous partagions deux bureaux contigus à l'IREM. L'équipe du premier semestre participait à des enseignements communs depuis plusieurs années; dans celle du second semestre, c'était le cas pour 3 des 5 personnes. Ceci nous plaçait donc dans des conditions extrêmement favorables. Mais, il faut néanmoins souligner que même si nous étions tous prêts à investir davantage de temps et d'énergie dans notre fonction d'enseignant, à tenter l'expérience d'une collaboration réelle avec les physiciens, si nous nous connaissions bien et avions pour la plupart l'habitude de travailler ensemble, cela n'impliquait pas que nous ayons exactement tous les mêmes conceptions à propos de l'enseignement des mathématiques:

Quelle était la place à accorder à la manipulation ? A quel moment devrait se situer la formalisation? Quel était son rôle ? Comment concevions nous la rigueur mathématique? Comment se démarquer d'un type de fonctionnement "j'apprends - j'applique" et arriver à ce que l'activité mathématique des étudiants repose effectivement sur la résolution de problèmes?

Il est clair qu'il devait exister entre nous des divergences, divergences d'autant plus difficiles à cerner que nous n'avons réfléchi à nos propres conceptions que de manière assez superficielle (cf A_8). Emportés par l'action (qui constitue un bon échappatoire) je pense que nous n'avons pas consacré assez de temps à de telles discussions qui nous auraient obligés à réfléchir sur nos projets, nos idées et expliciter au moins en partie l'implicite qui les sous-tendait. Peut-être, aussi, inconsciemment, avons-nous eu peur que ces discussions ne révèlent des divergences plus profondes, et ne détruisent la représentation que nous nous faisons de l'équipe.

Une dernière remarque enfin à propos de la conception de l'activité mathématique comme résolution de problèmes. Au second semestre, nous avons décidé de mettre l'accent sur cet objectif. Très vite, nous nous sommes sentis effrayés, par l'ampleur de la tâche et les lacunes de notre culture scientifique. Finalement excepté sur quelques îlots, nous nous sommes le plus souvent

réfugiés dans un enseignement assez traditionnel, la désorganisation due à la grève et le peu d'heures de cours restantes nous fournissant un alibi facile en nous incitant à viser l'efficacité à court terme.

L'étroitesse de notre spécialisation pose aussi des problèmes au niveau de la coordination math-physique; si nous ne voulons pas que cette coordination se limite à quelques amphi laborieusement préparés et répétés, chacun essayant de comprendre le point de vue de l'autre dans le domaine abordé, mais ait des effets réels sur notre pratique, il faudrait que nos connaissances respectives de l'autre discipline soient suffisantes. Quand nous constatons les difficultés que nous avons eues, nous, les mathématiciens, à faire, en Juin, le problème de l'examen de physique et celles qu'ont eu les physiciens à faire le nôtre, force nous est de constater que ce n'est pas encore tout à fait le cas.

L'objectif cité plus haut, vise, en se démarquant du schéma "j'apprends-j'applique", à modifier le rapport au savoir des étudiants.

En essayant de les placer dans des conditions d'apprentissage différentes, en insistant sur la manipulation destinée à familiariser l'étudiant avec certains objets sur lesquels il va agir, leur donner un sens et une chair, l'amener à se poser des problèmes avant de développer les outils permettant de les traiter, crée-t-on les conditions d'une véritable démarche scientifique ? Il nous semble qu'à ce niveau là, il faut être très attentif à ne pas tomber dans l'illusion pédagogique qui consisterait à croire qu'il y a démarche scientifique, là où ayant simplement juxtaposé manipulation et théorisation, on n'aurait reproduit que l'apparence d'une telle démarche.

En physique : cf ("Bilan" A_1)

D - LE POINT DE VUE DES ETUDIANTS

Pour mieux connaître le point de vue des étudiants sur l'expérience, nous avons, en fin d'année, d'une part proposé un questionnaire à tous les étudiants, d'autre part interviewé les étudiants de deux groupes de travaux dirigés.

Les interviews ont été réalisés par des enseignants de mathématiques. Les questionnaires ont été élaborés et proposés par les enseignants de physique.

- Le teste du questionnaire était le suivant :

Section E - votre avis ?

Après cette première année d'expérience, votre avis nous serait très utile pour tenter d'améliorer le fonctionnement de la section E l'an prochain.

Nous nous interrogeons en particulier sur les points suivants : amphis Math-Physique , nécessité d'un cours de physique continu sur toute l'année, coordination entre enseignants, relation entre travaux pratiques et T.D., projets, problèmes, oral - T.P
1

I - Quels sont les points de fonctionnement de la section qui vous ont semblé positifs ?

II - Quels sont ceux qui vous ont semblé négatifs ?

III - Quelles propositions de changement feriez-vous ?

Les réponses sont de longueurs diverses et vont du plus grand laconisme à cinq pages dactylographiées. Comme le questionnaire a été posé par les physiciens, les réponses sont plutôt orientées vers une évaluation de ce qui s'est passé en Physique.

Sans nous lancer dans un dépouillement systématique, disons que sur les 35 réponses recueillies, l'appréciation générale est positive.

Sont appréciées plus particulièrement :

- la coordination math-physique (citée 20 fois) - Un seul trouve qu'elle ne lui a rien apporté.

- les relations entre enseignants et étudiants et l'encadrement (citées 18 fois)

- le projet (cité 16 fois)

- l'importance accordée aux travaux pratiques (15 fois)

- l'importance accordée au contrôle continu, l'existence de tests ...(11 fois)

les récriminations visent principalement les cours, davantage les cours de mathématiques que les cours de physique d'ailleurs. Ils sont jugés tantôt trop théoriques, tantôt pas assez structurés, trop calculatoires ou incompréhensibles (8 fois). La façon dont ils s'articulent avec les travaux dirigés et T.P. est aussi critiquée plusieurs fois (4 fois). En fin les étudiants regrettent la séparation Math-Physique de la fin de l'année (6 fois).

En ce qui concerne les changements, les étudiants demandent principalement plus de tests pour pouvoir se situer (Certains réclament des interrogations écrites!) et une extension de la coordination math-physique à toute l'année; cinq seulement souhaitent un cours de physique annuel.

On a souvent l'impression, en lisant les réponses des étudiants, qu'ils sont conscients des efforts de l'équipe enseignante et qu'ils les apprécient; qu'à ce titre, ils jugent les maladroites avec une certaine indulgence. Comme écrit l'un d'entre eux " Chacun apprécie les efforts des autres et les respecte". On retrouve ce même style de rapports dans les interviews réalisés en mathématiques. En A_2 le lecteur intéressé trouvera le décryptage des interviews regroupé en fonction de quelques thèmes :

- Pourquoi vous êtes-vous inscrit dans la section expérimentale ?
- Qu'avez-vous pensé de la coordination math-physique ?
- Les cours de math et les T.D. ?
- l'ambiance
- les T.D. sur machine
- les projets de physique
- l'enseignement des différentielles

E - CONCLUSION

Des quelques pages qui précèdent, le lecteur retirera peut-être un certain pessimisme. Tant d'obstacles de toutes sortes s'opposent à une telle innovation pédagogique! le coût de l'entreprise par rapport aux résultats obtenus, qui ne manqueront pas de paraître à certains insignifiants, peut sembler démesuré. Pourquoi consacrer tant d'énergie à un travail qui socialement sera si peu reconnu par nos pairs ?

Effectivement, dans cette description, nous avons essayé d'identifier un certain nombre d'obstacles, institutionnels ou autres, et de déterminer la façon dont ils étaient intervenus dans notre projet. Une telle analyse (la nôtre est pour l'instant sommaire!) nous paraît nécessaire si nous voulons que cette expérience ne soit pas comme tant d'autres qui se succèdent ici ou là, un îlot qui naît, vit et meurt, mais qu'elle puisse influencer sur l'enseignement dispensé par ailleurs ou aider d'autres innovations (conf. [G.3]).

Mais cette tentative d'analyse est impuissante à rendre compte de ce qui est pourtant essentiel: l'atmosphère de l'expérience, la satisfaction et l'enrichissement que nous en retirons, nous, enseignants. Ils sont certains. Et, en Juin 1980, nous étions tous volontaires et pleins de projets pour recommencer. Tout autant que les étudiants, nous avons perçu une qualité de rapports autre que celle que nous vivions habituellement, l'impression de former, tous les enseignants et eux, une équipe liée par la réalisation d'objectifs communs et non plus d'être simplement ceux chargés de distribuer la manne à des individus plus ou moins motivés.

L'existence de cette équipe, la coordination avec les physiciens et la naïveté du regard que ces derniers jetaient sur notre pratique de mathéux, nous ont obligés à repenser notre enseignement et réfléchir à ses finalités, expliciter le plus possible pour chaque thème les objectifs poursuivis, les préciser aux étudiants et leur donner les moyens de se situer par rapport à eux. Tout cela est bien banal, c'est vrai, mais ce n'est pas d'une pratique courante dans les enseignements universitaires. Cela ne se passe pas toujours sans conflits y compris avec les étudiants. La perception qu'ils ont des mathématiques à l'issue de l'enseignement secondaire et la façon dont ils s'y accrochent est, en elle-même, un obstacle à l'innovation pédagogique. Comme l'a écrit B. ROZOY-SENECHAL ([9])

"En premier lieu, et quoiqu'implicitement en général, les mathématiques sont perçues comme une vérité absolue, préexistantes, fondées et valables en soi, indépendamment de tout contexte; elles ne sont jamais regardées comme construction de l'esprit humain, comme résultat d'une activité. En tant que telles, elles ne sont pas susceptibles à fluctuation, pas porteuses de dynamique, pas réponses à des problèmes, et surtout pas rendant compte d'objets. La réalité, le monde physique sont sales, seule la théorie est noble : et pour l'être, elle doit être sans rapport avec les contingences quotidiennes, inapprochable à partir du visible. Partant, l'enseignement de ces mathématiques venues d'ailleurs se devra de répondre à des règles strictes".

Il s'ensuit une représentation du parfait cours de mathématiques qui doit se dérouler linéairement, le professeur énonçant d'abord les définitions, démontrant ensuite théorèmes et corollaires pour ensuite et seulement éventuellement donner des exemples.

"La conception défendue de mathématiques riches, liées à d'autres domaines, actives, est en rupture avec celle intériorisée par les élèves dans les années antérieures.

Ils opposent une dénégation d'autant plus incoercible qu'elle est méconnue, une barrière d'autant plus solide que sa suppression signifierait une destructuration profonde de leurs savoirs".

Toute rupture du contrat est perçue par eux comme une agression.

Ainsi l'enseignement en mathématiques au second semestre a commencé par le thème : équations différentielles. L'objectif prioritaire en était la résolutions des équations linéaires du premier et second ordre à coefficients constants en relation avec l'étude de l'oscillateur harmonique en physique. Nous décidâmes de les aborder comme des équations particulièrement importantes (linéarisation des petits mouvements) que l'on sait résoudre algébriquement parmi la masse des équations différentielles pour lesquelles on ne dispose que de méthodes graphiques ou numériques approchées - donc, de développer dans un premier temps de façon très élémentaire une approche graphique et numérique des équations différentielles. Nous nous heurtâmes chez eux à des convictions solidement ancrées et liées à leur perception des mathématiques :

- 1) toute équation différentielle est algébriquement résoluble
- 2) il existe une théorie générale, de laquelle on déduit directement des méthodes de résolution des différentes équations différentielles.
- 3) historiquement, on a construit la théorie et c'est ce qui a permis de savoir résoudre les équations différentielles. Aussi, quand au cours de la première séance de T.D je leur demandai d'étudier graphiquement une équation différentielle et j'osai leur poser des questions comme : A quoi cette étude graphique vous permet-elle de répondre avec certitude ? De quoi n'êtes-vous pas sûr ? Quelles conjectures faites-vous ? ils eurent l'impression d'être complètement mystifiés. Nous étions en math et à leurs yeux, ce que je leur demandai de faire n'avait rien de mathématique - c'était du domaine de l'intuition, des sciences expérimentales, dans leur échelle de valeur de la pureté, même pas de la physique.

De plus en mathématiques, on démontrait des théorèmes puis on les utilisait pour résoudre des exercices. Il était inadmissible de se poser des questions du style : "De quoi suis-je sûr ? De quoi ne suis-je pas sûr ?".

Enfin, pourquoi les obligeais-je à se compromettre de la sorte dans de bases besoins puisque il y avait une théorie, des théorèmes et que tout en découlait. Je n'avais pas le droit de leur cacher ce que je savais et de faire comme si je ne le savais pas.

Nous eûmes plusieurs discussions passionnées et je fus obligée pour achever de les convaincre de leur amener un texte extrait du Kline [] et racontant l'histoire des équations différentielles !

Mais il est évident que ce qui est vrai des équations différentielles (absence d'une théorie unitaire au sens où ils l'entendent) ne l'est pas pour tous les domaines traités en DEUG, et qu'ailleurs ils peuvent également réclamer d'abord la théorie parce que c'est le mode de fonctionnement auquel ils sont habitués et nous accuser de ne pas respecter les règles.

Enfin, après cette longue parenthèse, pour terminer, abordons le coût de telles expériences. Il est évident qu'une innovation pédagogique est coûteuse, mais il reste que l'Université n'a pas le choix.

Son enseignement au niveau du premier cycle manque à un tel point d'efficacité que, si simplement elle veut survivre, elle ne pourra manquer à court terme de le repenser.

A N N E X E A₁

—

Rapport des enseignants de physique à l'U.E.R. de physique

Enseignants de Physique : F.Abel, J.Bruneaux, Y.Couderc,
F. de Jouvenel, J.Matrimon, B.Perrin, E.Saltiel, L.Viennot

A₁ - 1ère année de DEUG S.S.M. Section E

Compte-rendu d'un an de fonctionnement

La motivation de l'équipe qui a lancé la section E (E pour expérimental) était au moins double. Considérant que la première année à l'Université est très importante, nous voulions accorder plus d'attention et de soins que n'avaient tendance à le faire beaucoup d'enseignants de notre U.E.R. Point de rencontre des imaginations et des générosités de l'après 68 (on se souvient des groupes expérimentaux), cette première année de DEUG S.S.M. s'est petit à petit cristallisée en une structure rigide où le problème dominant était de "gérer" un maximum d'étudiants avec un minimum d'enseignants. Il était donc tentant, surtout pour des gens qui aiment bien les expériences pédagogiques nouvelles, de mettre en place un mode de fonctionnement plus souple mieux adapté aux disparités de recrutement et au caractère encore "ouvert" que doit avoir une première année universitaire, si l'on songe en particulier que pour presque la moitié des étudiants il n'y en aura pas de deuxième.

La seconde motivation était de proposer à nos collègues une pratique renouvelée, plus amusante, susceptible éventuellement d'être étendue à une large fraction du premier cycle.

S'il est probable que ces deux motivations étaient ressenties par l'ensemble des partants de la section E, il est certain que les méthodes à employer pour réussir l'expérience n'étaient pas vues de la même façon. C'est donc au grè d'innombrables réunions, d'interminables discussions et de multiples tiraillements que s'est dégagé petit à petit le schéma que nous allons essayer de décrire.

LES PRINCIPES

1) Unité de lieu. Qu'offre l'univers katkaïen de Jussieu à celui qui y débarque : un labyrinthe abstrait de tours et de couloirs sales et inhospitaliers, des salles "banalisées" et une cour de caserne venteuse et sinistre. Il est fondamental que les étudiants puissent néanmoins se sentir un peu chez eux dans un tel monde, et nous avons donc tenu à avoir une salle qui appartienne en propre à la section, autant pour les étudiants que pour les enseignants.

Aménagée en salle de travaux pratiques, contenant un matériel de base de physique et de bricolage, cette pièce a servi de salle de T.P., de salle de T.D., de pièce de réunion pour les enseignants, pour les étudiants aussi (en particulier pendant les événements de Mai) et surtout de lieu de rencontre pour tout le monde. L'existence de cette pièce commune est certainement un point fondamental de notre fonctionnement.

2) Unité d'action. Les pères (mères) fondateurs(trices) de la section E s'étaient réunis depuis déjà longtemps sous la bannière de l'unité d'action math-physique et avaient élaboré une progression parallèle des deux enseignements dans laquelle certains outils mathématiques étaient forgés au fur et à mesure du besoin qu'en avaient les physiciens. Réciproquement, les physiciens modelaient leur demande sur le déroulement logique du cours de mathématiques. Exemples : Les espaces vectoriels, l'algèbre vectorielle précédaient l'arrivée des champs, les intégrales curvilignes celle des potentiels et les équations différentielles celle des oscillateurs harmoniques. Cette idée simple, mais complètement perdue de vue depuis des années à Paris VII, s'est concrétisée par la mise au point d'un objet pédagogique nouveau : l'amphi de math-physique au cours duquel deux enseignants, un de mathématique et un de physique, viennent dialoguer devant les étudiants sur un sujet où les deux ont leur mot à dire, comme le gradient, les courbes paramétrées, les équations différentielles linéaires du premier et second ordre etc...

Pour leur compte, les enseignants ont beaucoup appris, en particulier sur la difficulté qu'il y aurait à parler le même langage. (Il faut dire que les enseignants ont été dans l'ensemble plus assidus à ces amphis que les étudiants).

3) Unité de fonctionnement. Ce qui suit s'applique aux physiciens :
La physique est plus une attitude devant les phénomènes de la matière qu'un amas de connaissances, et nous sommes persuadés que lorsque l'étudiant a compris cette attitude et qu'il l'a adoptée, l'acquisition des connaissances ne pose plus autant de problème et, à la limite, ne devrait plus requérir l'intervention d'un enseignant. Notre but était donc de développer chez les étudiants le sens des phénomènes, de leur leur modélisation, de leur classification suivant des types connus, et non de leur faire apprendre par coeur des formules et des lois. Il fallait donc leur proposer un contact direct avec ces phénomènes, par des travaux théoriques et pratiques faits dans le même esprit, donc en fait, par les mêmes enseignants : nous nous sommes astreints à pratiquer un enseignement tous azimuts sur toute l'année : au cours d'une même séance, on a pu par exemple usiner une pièce, l'inclure dans un montage optique, faire quelques mesures, et calculer l'appareil ainsi construit pour comparer aux mesures... Nous avons toujours considéré que théorie et expérience étaient étroitement liées, qu'aucune des deux ne devrait apparaître comme une application de l'autre et qu'apprendre de la physique, c'était d'abord prendre conscience de cette dualité.

LE FONCTIONNEMENT

Au départ, cent étudiants répartis en quatre groupes, chaque groupe encadré par deux physiciens, un mathématicien et quelques chimistes. Là encore nous parlerons essentiellement des physiciens. Un vague filtrage aux inscriptions nous garantissait des étudiants vierges de tout contact universitaire et prêts à affronter une expérience dure mais exaltante. Conformément à la tradition, le nombre réel d'étudiants s'établissait d'emblée à 80 et décroissait quelque peu au cours du premier semestre

(70 se présentent aux examens de Février).

Chaque étudiant a hebdomadairement 4 heures de T.D. et une demi-journée de T.P. (minimum 3 heures) ainsi qu'un amphî de math. physique ou de physique (1 heure 1/2). Environ un devoir tous les 15 jours, une interrogation également et un compte rendu de T.P. par semaine. Durant les cinq dernières semaines de chaque semestre, une moitié des étudiants a consacré les séances de T.P. à l'élaboration d'un "projet" : par équipe de un, deux ou trois, ils ont dû réaliser un montage se rapportant au programme du semestre, ou réunir une documentation sur un sujet également voisin du programme. Dans les deux cas, un rapport écrit et un exposé oral public couronnent le tout.

- Le contrôle des connaissances résulte des multiples devoirs, interrogations, T.P., du projet et d'un examen semestriel parfaitement traditionnel (sauf en Février où il s'agit d'un oral en salle de T.P.). Pour faire fonctionner cette machine, les enseignants passaient au moins une demi-journée par semaine à causer entre eux.

BILAN

Il est difficile, en cette matière, de fonder un bilan sur des données autres que subjectives.

Il ressort d'un sondage fait auprès des étudiants qu'ils ont le sentiment d'avoir beaucoup travaillé, ce qui n'est évidemment pas l'avis unanime des enseignants, au moins pour une partie des étudiants.

Ont-ils progressé dans le sens souhaité ? Ont-ils acquis quelque notion des phénomènes physiques et de la façon de les aborder ? Ont-ils tout simplement compris de quoi nous parlions ? Nous pensons que pour certains d'entre eux la réponse est positive. Les résultats de la fin de l'année, l'intérêt porté aux projets vont dans ce sens. On peut arguer également d'un nombre d'abandons en cours d'année un peu inférieur à celui des autres sections, mais cet argument tient mal du fait de l'information faite à l'entrée. (En outre, il n'y a peut-être pas lieu de s'en féliciter, car c'est un des rôles

- 20 -

de la première année du DEUG de faire comprendre à certains étudiants qu'ils sont mal orientés, et dans ce cas une décision rapide peut être considérée comme un succès).

Il faut signaler à ce point que certains enseignants du groupe ont assumé en plus de leur service la charge d'un enseignement de rattrapage, puis de soutien destiné à une dizaine d'étudiants particulièrement en difficulté. Il est certain que cet effort a été fructueux et qu'il a mis sur les rails quelques étudiants qui, entre autre, avaient des problèmes linguistiques.

La partie la plus positive de l'expérience se situe à un niveau social : l'existence d'une pièce commune, d'activités collectives, de groupes peu nombreux et malgré tout d'une présence assez fréquente sur les lieux, tout cela a créé un lien social réel dans l'ensemble de la section, ainsi qu'un certain sens du travail d'équipe : il est caractéristique qu'ayant assisté aux exposés de projets du premier semestre, ceux qui doivent passer au second semestre s'inquiètent non pas des questions que poseront les enseignants, mais de celles que poseront leurs collègues. Un tel acquis ne peut que leur être profitable dans les années à venir.

Une des difficultés majeures que rencontrent beaucoup d'étudiants lors de leur première année universitaire réside dans l'ignorance totale où ils se trouvent du mode de fonctionnement universitaire. Ils ne savent pas ce que l'on attend d'eux, quel effort personnel ils doivent fournir, quel est le rôle des différents exercices auxquels ils sont soumis (cours, T.D., T.P. etc) et ils ont naturellement tendance à fonctionner comme ils l'ont fait les années précédentes, au lycée. Nous pouvons alors considérer que les méthodes mises en pratique dans la section E ont dans une certaine mesure parfaitement réussi sur ces étudiants frais et sans défense : nous avons vu se manifester au cours de la réalisation des projets des dons réels de bricoleurs, de conférenciers et même parfois de physiciens. Tout le groupe se souvient de la présentation du projet "électricité domestique", où plus d'un ont appris dans la joie comment fonctionnait un va et vient, un télérupteur

Côté travaux pratiques, initiative personnelle, implication dans le travail, ambiance, nous pouvons juger notre effort comme rentable. Mais ces étudiants, ceux qui ont réussi, vont maintenant entrer en seconde année, se confronter à ceux des autres sections, et devoir travailler comme ont appris

les autres à le faire. Ils devront se référer aux connaissances acquises et à leur aptitude à s'en servir pour comprendre les nouveaux enseignements et faire les problèmes. DE l'avis unanime des enseignants du groupe, cette préparation par contre n'a pas été réussie, en tout cas pas mieux que dans une section traditionnelle. Le transfert que nous espérions entre les motivations pour le travail pratique et individuel et celles pour un travail scolaire et formel ne s'est pas produit. Nos étudiants sont aussi mal à l'aise avec le théorème de Gauss, le potentiel et la mise en équation d'un problème que n'importe quel autre étudiant de première année. Nous n'avons pas trouvé de formule miracle pour obtenir de nos étudiants ce que n'importe quel professeur de taupe obtient de ses élèves.

Nous recommandons donc l'expérience une seconde année, mutatis mutandis, bien entendu convaincus que tout ce qui n'a pas bien marché l'an dernier sera, cette année, parfait !

- 30 -

A N N E X E A₂

Interview des étudiants

A₂ - INTERVIEWS D'ETUDIANTS

Pourquoi êtes-vous inscrits dans cette section expérimentale ?

- Parce que l'emploi du temps était bouché
- Oui, quand je me suis inscrit moi aussi, il ne restait que B₄ et tous les E
- Moi, ça a été vraiment pour ne pas me réveiller à 8 heures tous les jours
- Moi c'est parce que je suis tombé sur Joëlle et Laurence qui m'ont fait une pub terrible (Joëlle Pichaud et Laurence Viennot assistantes de Math et de Physique).
- Non, moi c'est parce que c'était une section où on allait travailler plus, où il y avait des travaux pratiques, c'était plus intéressant et plus dirigé par les professeurs.
- Moi, ce n'est vraiment pas à cause de l'emploi du temps, ce qu'il y avait d'attirant c'est que c'était pas tout à fait la fac; on retrouvait un peu le lycée
- On allait être moins nombreux et plus encadrés - on s'occupait davantage de nous
- Moi, c'est à cause de la coordination math-physique. J'aime bien la physique et je suis mauvais en math.

Qu'avez-vous pensé de la coordination Math-Physique ?

En général, la coordination et les amphis math-physique ont été ressentis positivement par les étudiants surtout au premier semestre. Au second semestre il y a eu uniquement 2 amphis communs sur les équations différentielles qui, en général, ont beaucoup plu aux étudiants (comme tout ce qui a eu trait aux équations différentielles). Ensuite, ils ont eu l'impression que la coordination n'était plus un des soucis de l'équipe enseignante. Il est vrai que le support de cette coordination avait été la préparation commune des amphis math-physique et que le rythme d'une réunion par semaine avait essoufflé beaucoup d'enseignants au premier semestre. Après les équations différentielles, en l'absence d'amphis communs à préparer, les relations se sont fortement relâchées.

Voici quelques opinions d'étudiants :

- E - Elle a été bonne au premier semestre, mais au second ... en plus avec la grève
- E - Ça se sentait à notre point de vue mais pas à celui des profs.
- E - L'amphi Math-Physique, c'était que des amphis de physique

- 32 -

- E - Non
- E - Si, si
- E - C'était bien au début de l'année, quand les profs changeaient chaque fois - mais au second semestre c'était toujours Matricon, c'était pas pareil
- M - Mais, au second semestre, il n'y a eu que deux amphis Math-Physique, ceux sur les équations différentielles, après c'est Matricon qui a fait le cours de physique
- E - Au premier semestre, on a eu les profs de math qui ont fait des amphis de physique et les profs de physique qui ont fait des amphis de Math
- E - Cà, c'était bien
- E - C'était vachement intéressant parce que les profs de physique faisaient un effort pour faire leur truc correctement
- E - Oui, mais c'était la panique, parce que les profs de math étaient coulés quand ils devaient faire de la physique*
- E - Oui, mais ça leur apprenait à se débrouiller un peu - Après dans les T.D., ils faisaient des relations
- E - Oui, mais ils se débrouillaient pas très bien, je trouve
- E - en second semestre, après les équations différentielles, on a fait le cours de physique et on n'a plus fait la liaison entre les maths et la physique
- E - Oui, il y a plus eu aucun lien entre eux
- E - Remarque, ce qui intéressait les physiciens, on l'avait mis au début

Les cours de math et les T.D.

- E - Il faudrait plus de T.D. et moins de cours
- E - Rien que des T.D.
- E - Moi, je trouve qu'il y a pas beaucoup de liens entre le cours et les T.D.
- M - Ah! qu'est-ce que tu trouves comme absence de lien entre le cours et les T.D.?
- E - Je sais pas, on fait les cours, ils restent dans un coin
- E - On apprend le cours en faisant les T.D. et pas en le suivant
- E - Exactement
- E - On n'apprend pas le cours
- E - C'est ça, on n'apprend pas le cours comme ça, on l'apprend à cause des T.D. Il faudrait en tirer des conclusions
- E - Moi, je regarde le cours uniquement parce qu'en T.D on a parlé d'un théorème que je ne connaissais pas, alors je regarde le cours
- E - A mon avis, ça serait beaucoup mieux si on faisait des T.D cours où on introduirait les notions en faisant des exercices, puis ensuite des exercices en T.D puis du cours.

*Quelle lucidité! A notre décharge ou plutôt à celle de Mr Revuz, il faut ajouter qu'à un autre moment ils ont dit: "chez les matheux, il y en a qu'un qui sait de la physique, mais il en sait beaucoup"

- 33 -

- E - Quand même le cours il sert, on a beaucoup plus de facilités à aller regarder le cours si on a des difficultés avec les exercices
- M - C'est-à-dire que vous ne voyez l'utilité du cours qu'au moment où vous faites les exercices
- E - Pratiquement, oui
- M - Mais, quand vous faites des exercices est-ce que le cours vous sert ?
- E - Oui E - bien sûr E - Oui *
- E - Et puis de toutes façons, en cours Jean-Luc on peut pas l'arrêter, lui dire
- M - Si, si, si, vous pouvez très bien
- E - Mais, Michèle, il nous explique les choses et on comprend toujours rien
- E - Non, c'est pas ça, Jean-Luc il a une conception des mathématiques qu'est très très puriste et pour nous, on est complètement en dehors du coup - Pour lui, ça correspond à une manière de penser tandis que nous on a euh! euh! une manière encore très euh ! à quoi ça va servir pour les exercices qu'on va avoir à faire. Lui, c'est un raisonnement mathématique, nous (il siffle) oh! là oh! là (il fait signe que ça lui vole au-dessus de la tête)
- M - Vous êtes facilement perdus en cours ?
- E - Ça dépend, au début oui E - depuis les suites ça va beaucoup mieux
- E - Moi ça m'arrive assez souvent de partir au bout d'une heure
- E - Moi, ça m'intéresse pas le cours, après le premier, j'y ai plus mis les pieds
- M - Mais, ça ne t'a pas gêné pour les T.D. ?
- E - Pas trop, parce qu'en T.D on résume souvent le cours
- E - Si tu suis pas les T.D par contre, c'est râpé
- E - Tu vois, moi, les démonstrations des théorèmes de Jean-Luc, au fond je m'en fous
- E - Moi, je remarque une chose, c'est que le cours soit difficile ou simple il est fait avec la même vitesse
- E - On devrait demander aux élèves ce qu'ils ont mal compris et insister sur ça
- M - Bon, alors expliquez-moi - Quelles sont les parties que vous avez mal comprises et celles qui vous ont paru faciles ?
- E - facile - les équations différentielles, ça c'était bien - En plus il y a eu des amphis math-physique
- E - Difficile l'algèbre linéaire
- E - Alors là, Jean-Luc, il était à 5 mille pieds au-dessus des mers et nous à 20 mille lieues au-dessous
- E - Oh! E - non, mais c'est vrai E - dis, on t'enregistre, fais gaffe à ce que tu dis

* trois bons élèves.

- 34 -

M - Il peut dire ce qu'il veut

E -(autre) et d'abord Omo, il lave plus blanc (rires)

Dans le T.D. de Marie-Jeanne, on ressent aussi les difficultés d'accession au langage mathématique et le hiatus entre le mode de fonctionnement des T.D où nous sommes sans cesse interpellés par les étudiants, obligés de convaincre et non pas seulement de démontrer, donc de nous adapter à leur mode de pensée tout en recherchant son évolution et celui du cours magistral, où même s'il y a une possibilité théorique d'intervention des étudiants, le système est beaucoup plus figé et l'enseignant est là, face à un public tenté de l'idéaliser et de voir en lui le représentant de la Pensée Mathématique à lui inaccessible - le garant de la loi

En T.D., forcés que nous sommes de rendre opératoire ces mathématiques, une négociation s'établit entre nous et les étudiants, entre notre système de fonctionnement et le leur et la Pensée Mathématique perd ses majuscules. Même si la façon dont ils vivent ceci nous semble parfois puérile, elle est révélatrice d'un problème certain.

E - le cours c'est négatif

M.J - Négatif, pourquoi ?

E - le cours on croit que c'est très compliqué, on ne comprend pas.

On arrive en T.D, vous expliquez, souvent c'est tout simple

M.J - Oui, mais moi j'ai remarqué quelque chose : En amphi, vous n'écoutez pas du tout

E - On est largués, on parle (rires)

M.J. - Mais même en T.D. vous parlez !

E - En T.D. c'est parce qu'on a compris (rires)

Compte tenu de ces difficultés inhérentes au système, un cours bien structuré, où beaucoup de choses sont écrites au tableau, que l'on peut prendre un peu mécaniquement sans avoir vraiment besoin de tout comprendre, sans avoir à faire des efforts de traduction et d'interprétation, les sécurise. Ils se situent beaucoup plus mal face à un cours plus "heuristique" en quelque sorte. Comment prendre des notes ? Que faut-il retenir ? Où commence la démonstration du théorème ? Où finit-elle ? Les considérations historiques ça sert à quoi ?

- 35 -

En T.D. on retrouve les mêmes tendances; si l'étude des fonctions leur a tant plu disent-ils, c'est parce que là, on sait où on va - D'accord on peut finasser mais on a toujours la ressource du plan en 7 points qui se déroule comme du papier à musique. La résolution graphique des équations différentielles a soulevé par contre, au début, des oppositions farouches.

L'ambiance - les T.D.

- E - C'était un changement complet par rapport au lycée
- E - Ça n'avait aucun rapport
- E - Ce qu'on faisait, la façon de faire le cours, tout, les T.D.
- E - On ne peut pas comparer - C'était pas les mêmes méthodes d'enseignement
- E - En tout cas, c'était mieux
- M - Vous préférez ça au système du lycée ?
- E - Oui
- E - Au lycée on apprend plus, ici je crois qu'on réfléchit plus
- E - Bof! le niveau de réflexion - T'as vu ce matin à la correction des tests
- M - Qu'est-ce qui vous a plu le plus dans les cours que vous avez suivis
- E - les courbes E - ça c'était chouette et pas dur - (unanimité)
- M - Et au second semestre ? E - la grève (rires)
- E - les équa diff
- E - les suites et les séries. Les séries c'est bien mais c'était trop près des suites alors on se mélangeait tout le temps.
- E - je crois qu'il y a eu un creux dans le semestre qui nous a incités à moins travailler
- E - Oui, avec la grève et on a eu du mal à s'y remettre
- E - Oui, moi c'est vrai. J'ai eu des problèmes, du retard
- E - Oui et puis moi je trouve que l'ambiance dans les T.D. est un peu trop décontractée
- E - Il y a un brouhaha général et on ne peut pas travailler
- M - Moi aussi, je trouve que c'est trop bruyant
- E - Y a des moments, y en a qui se mettent à parler, à faire n'importe quoi, même pas des maths
- E - On devrait pas permettre
- E - Et alors tu veux que Michèle elle fasse le flic
- E - Non, mais.... E - On n'est plus au lycée non
- M - Alors l'auto-discipline ?

- 36 -

Les T.D. sur machines

Chez Marie-Jeanne :

- E - Inutile E - Pas très chouette E - amusant sans plus
E - Moi, je suis pas d'accord, je trouve ça très très bien
E - On n'a pas eu le temps d'apprendre à s'en servir et puis on a enregistré des programmes mais on ne comprenait pas très bien ce qu'on faisait
E - Il faudrait pouvoir tracer des courbes et puis un T.D. par semaine
M.J.- Attention notre but n'est pas d'apprendre la programmation
E - Mais si !
M.J.- Ah! non, pour ça il y a les U.V. d'informatique en deuxième année.
Mais on peut apprendre un minimum de choses très élémentaires et s'en servir pour faire des calculs et mieux comprendre certaines choses en maths.
Par exemple, pour le problème 7 , on calcule les valeurs pour 50, 100 années, on constate que ça se stabilise et on essaie d'expliquer pourquoi
E - oui E - Bof!

Chez moi

- E - Moi, j'en pense zéro
E - Moi, j'ai pas vu les liens entre les différents trucs sur les machines et les T.D.
E - Moi en début ça me plaisait
E - C'est une perte de temps
M - Ce qui vous a plu, c'est la première séance et les équa diff.
E - Oui E - Oui, c'est ça E - mais les matrices alors
M - Oui, je suis d'accord, c'était trop compliqué pour vous
E - Oui et il faut bien voir que les machines avec une séance tous les 15 jours on a le temps de tout oublier d'une séance à l'autre. En plus y avait aucun rapport entre les séances
M - C'était trop décousu ?
E - Oui E - il faudrait plus lier
M - Vous voudriez que ce soit plus intégré aux T.D. ?
E - Oui, mais c'est impossible car les T.D. ils sont à un niveau beaucoup plus élevé, théorique. On n'est pas capable de refaire avec les machines ce qu'on a fait en T.D. en quelques séances
M - Je crois que le problème est très différent en analyse et en algèbre.
En analyse on peut faire des calculs sur les séries, sur les suites avec des programmes qui tiennent trois lignes et que vous savez très vite faire.
Mais en algèbre avec les matrices, ils deviennent tout de suite gigantesques.

- 37 -

E - Ça a un rôle un peu boîteux - On en fait un petit peu mais pas beaucoup ...

E - C'est pas assez tous les 15 jours

E - Souvent, c'était trop difficile

E - Peut-être on pourrait le voir comme un truc plus optionnel

M - L'année prochaine, on avait pensé mettre l'horaire de T.D. à 4 heures et mettre les machines en plus - Pendant les heures de machine on ne ferait pas des choses trop compliquées au niveau théorique, mais par contre, on vous demanderait de faire un projet pour approfondir un peu certains sujets du cours ou, si ça a des liens avec un projet de physique, en traiter la partie numérique

Brouhaha E - C'est trop de boulot! E - Y-a qu'à voir les projets de physique, le temps que ça prend !

Finalement leurs objections à propos des T.D. de machines sont tout à fait valables

1) le matériel n'est pas d'un accès facile et ce n'est pas une séance tous les quinze jours pendant si peu de temps (surtout qu'avec les diverses vacances et grèves les séances ont plutôt été mensuelles) qui permet d'acquérir avec la familiarité nécessaire pour pouvoir l'utiliser comme un outil

2) A raison d'une séance tous les quinze jours (si l'on veut suivre ou précéder) les T.D. ordinaires, on ne fait que du saupoudrage comme cela a été le cas : une séance d'introduction, une d'équa diff, 2 de matrices et systèmes linéaires, 2 de suites et séries On a à peine le temps de se familiariser avec un type de programmes qu'il faut passer à autre chose sans avoir pu l'exploiter du point de vue mathématique ce qui était notre ambition première. D'autre part, récolter des données numériques en T.D. sur machines pour les exploiter ensuite dans un T.D. ordinaire, s'est révélé difficile - difficultés d'organisation - les étudiants ont perdu le fil, ou les données - ou l'analyse suggère de nouveaux calculs mais on ne dispose plus de la machine - Si par contre, on essaie de mener cette dialectique pendant le T.D. machine (J'ai essayé à propos des suites), ce qui paraît la meilleure solution, la séance paraît beaucoup trop courte.

3) Vu le peu de temps dont on dispose pour les T.D. de math, le temps pris par le moindre travail sur machine, l'ampleur du programme, les machines apparaissent un peu comme un luxe que l'on ne peut s'offrir. On n'a pas de temps à perdre disent-ils - Est-ce du temps perdu ?

Il est certain qu'un matériel plus "léger" comme celui que nous avions demandé à l'origine, avec lequel l'étudiant pourrait se familiariser en dehors des T.D. (cf Grenoble), que l'on pourrait utiliser au rythme des besoins sans que des séances spéciales lui soient consacrées, servirait beaucoup mieux les objectifs que nous nous étions fixés.

Les projets de physique

E - C'est très bien les projets, mais ça prend beaucoup de temps

E - les projets, c'est un peu scabreux, on ne peut pas faire ça en début d'année et puis maintenant ça prend un temps fou. Moi c'est simple, je ne fais plus que ça. Alors pour ce qui est des maths et même le cours de physique, maintenant je panique parce que, bon, j'ai pas le temps de les travailler et c'est bientôt les exams, et je crois que c'est un peu pour tous la même chose, on est surchargés par les projets de physique.

Brouhaha d'approbation

E - Et puis, il y a une grosse différence entre ceux qui les font au premier semestre et ceux qui le font au second, ceux qui le font en premier, ils ont plus de temps.

E - C'est à peu près la même chose; ils ont la chimie au second

E - Non, parce que ceux qui ont chimie au second, ils sont aidés par ceux qui ont fait chimie en premier.

E - et puis le dossier, tu le fais après les vacances de Février, tu as les vacances de Noël et celles de Février pour le préparer

E - Oui, là on a beaucoup moins de temps

E - et on n'a pas de vacances au milieu

E - Eh! tu as eu la grève!

L'enseignement des différentielles en mathématiques et en physique

E - Oh! Panique, chacun faisait son truc, de sa méthode, de son côté

M - Est-ce que vous pourriez expliquer un peu plus

E - les histoires de dy, dx les physiciens ils avaient leurs petites habitudes, les matheux ils avaient leurs habitudes aussi mais c'était pas les mêmes

E - oui, c'est ça

M - Qu'est-ce que tu as l'impression d'avoir compris?

E - Moi, le point de vue physique, mais le point de vue math c'est pas très bien encore

M - C'est quoi pour toi le point de vue physique?

- 39 -

- E - Le point de vue physique, c'est on a des dx , on les trimballe un peu partout n'importe comment- ça c'est parfait, c'est super parce que tu peux diviser, multiplier, c'est super ça, maintenant du point de vue des math.....
- M - C'est quoi un dx alors ?
- E - dx ça représente un petit truc
- E - C'est un truc infiniment petit que tu sommes - oui - c'est ça
- M - Donc ça n'a pas tellement de lien avec les dérivées?
- E - Bé non
- E - Ça a un vague lien avec les dérivées quand même parce qu'on va étudier comment va osciller la courbe à un endroit très précis et la gueule qu'elle va avoir
- M - Et alors et en math, vous les avez vues comment les différentielles?
- E - Oh là! (rires) Ah! si, ça fait un espace vectoriel, ça je m'en rappelle
- E - C'était surtout les équations que l'on a fait
- M - Non, mais avant, au premier semestre
- E - Au premier semestre, c'était quoi déjà ?
- M - les différentielles, les dérivées partielles
- E - Ah! oui les dérivées partielles
- E - ça c'était facile, on avait bien compris E - oui, oui
- E - c'était vachement intéressant, après quand on l'a eu en physique, on n'a pas eu trop de problèmes
- E - En plus, c'était presque au même moment, alors, c'était bien
- E - En math, y avait les petits d et les Δ , en physique y avait que des d
Tu te rappelles, je te l'avais raconté, en T.D. de physique quand Joëlle et Revuz sont venus et qu'on avait demandé à Bernard s'il fallait faire comme en math ou comme d'habitude en physique - il nous avait répondu : oh! ils nous emmerdent ces matheux!
- E - oui, c'est ça
- M - Mais il y a quelque chose d'étonnant, c'est qu'au moment où vous avez fait les tests math-physique, vous avez presque tous eu vos points à cause des maths
- E - oui, c'est vrai ça
- M - Et pas à cause de la physique
- E - Oui, c'est très vrai
- M - Or, il y avait des problèmes de différentielle

- 40 -

- E - oui, mais attends, c'est parce que nous, on nous les pose en math les équations différentielles en physique c'est à nous de les poser et de les résoudre, c'est ça qui est différent
- E - le problème, c'est que ...
- M - Vous avez l'air de dire que les dx et tout ça vous les manipulez très bien en physique et que ce n'est pas compliqué!
- E - C'est pas pareil, on a des difficultés à poser les équations en physique, en math, c'est la mise en forme qui est difficile
- M - Oui mais pour les tests sur la température, vous aviez tous écrit correctement l'équation
- E - là, on nous la donnait pratiquement, c'était pas difficile
- M - Et alors, pourquoi vous n'avez pas résolu dans la plupart des cas, l'équation différentielle correctement
- E - Je me rappelle plus très bien E - Moi non plus
- M - vous avez toujours l'impression que c'est très différent les différentielles en math et en physique ?
- E - oui, E - Y a quand même des rapports mais c'est pas le même langage
- M - Est-ce que vous arrivez à faire une traduction entre les 2 langages ?
- E - oui E - non E - c'est très approximatif
- E - Maintenant, on a surtout l'aspect physique, à partir du moment où on n'en fait plus qu'en physique, comme maintenant, on oublie le côté mathématique
- E - Quand tu écris ça, par exemple, $\frac{dx}{dt} \times dt$, ça ça s'écrit très bien en physique, (il barre les 2 dt), alors qu'en math, halte là, ouille, ouille!
- E - En math, vous n'avez pas écrit des choses comme ça ?
- E - Si, mais alors, je sais qu'on l'a fait mais je serais pas capable de le refaire comme on l'a fait
- E - Ouais, Ouais, c'est vrai, là, tu simplifies par dt et c'est fini
- E - Ouais, c'est ça, c'est super
- E - Ce qui est marrant, c'est que tous, en début de l'année, ils disaient : attention, on n'a pas le droit de simplifier comme ça
- E - les physiciens y disaient : les mathématiciens y vont dire qu'on doit pas simplifier comme ça - Nous on va le faire mais faut faire attention. Maintenant hop là !
- E - Remarque, c'est naturel

- E - comme ça : $\frac{dw}{dt} = x$, on écrit aussitôt $dw = xdt$
- M - ça on l'a écrit aussi en math, quand on a fait des équations différentielles
- E - Oui, mais en physique, on le fait tout de suite. En math, avant de le traduire en mathématiques correctes
- M - Si je comprends bien, ce qui vous paraît compliqué c'est de traduire des choses que vous faites simplement dans un langage mathématique correct
- E - oui
- M - Vous ne vous trompez pas non plus, en faisant ces choses là en physique?
- E - Oui, un peu
- E - Beaucoup moins qu'au début
- M - Est-ce que vous vous trompez ?
- E - Moi je crois qu'on peut plus se tromper en physique
- E - Oh! non beaucoup moins
- E - Si plus, regarde les mathématiques, c'est vachement plus formel, tu as beaucoup plus d'automatismes, de trucs comme ça qui ressortent - en physique, c'est plus l'intuition qui joue
- E - Oui, souvent les exos en math, ils se ressemblent beaucoup, en physique, ils se ressemblent pas tellement!
- E - Oh! si, ils se ressemblent tous sur le fond, tu as toujours le même terme et c'est la même démarche qui sert - Strictement ce n'est pas la même chose et il faut tenir compte de
- E - Oui, tu as tout un tas de signes et il faut savoir comment les mettre
- E - Tu prends entre un ressort et un circuit ...
- E - Tu arrives toujours au même résultat
- E - ce qu'il y a, c'est que, imagine que tu n'aies fait que les ressorts, on te demande sans que tu aies jamais fait d'électricité, on te demande de faire l'équivalent en électricité et bien tu saurais pas et pourtant c'est la même équation diff

- 42 -

A N N E X E A₃

Texte des tests math-physique et des examens de fin d'année

Université Paris VII
1979-1980

TEST MATH-PHYSIQUE N° 2

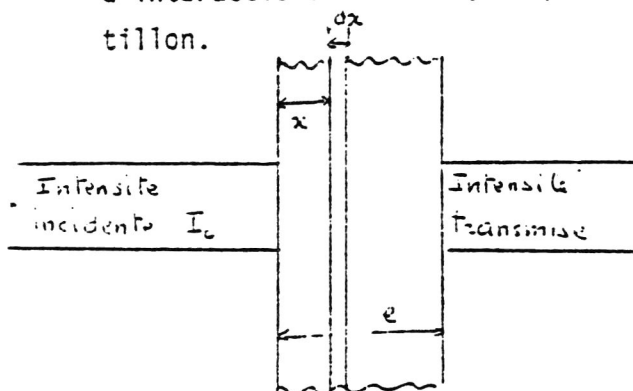
D.E.U.G S.S.M
Section E

I- Une particule de vitesse $\vec{v}$ et de charge q est soumise à une induction magnétique $\vec{B}$. La force exercée sur cette particule est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

a) Montrer que le travail de cette force est nul.

b) En déduire que $|\vec{v}| = \text{c}^{\text{te}}$.

2- Soit I_0 l'intensité d'un faisceau de rayons X de section constante, arrivant normalement sur un échantillon métallique d'épaisseur e . L'intensité transmise est inférieure à l'intensité incidente I_0 : en effet, par suite d'interactions diverses, une partie de l'énergie est absorbée par l'échantillon.



L'intensité absorbée par une tranche élémentaire d'épaisseur dx , située à la profondeur x , est proportionnelle à son épaisseur dx et à la valeur de l'intensité I en x , le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'absorption linéaire μ caractéristique du métal.

a) Exprimer l'intensité dI absorbée par une tranche élémentaire dx

b) En déduire la variation de l'intensité du faisceau lors de la traversée de la tranche ($x, x+dx$)

c) Donner la loi de variation de I en fonction de l'épaisseur x de métal traversé

d) Calculer les épaisseurs e_{Al} et e_{Pb} d'Aluminium et de Plomb que doit traverser un faisceau de rayons X pour que l'intensité incidente du faisceau soit réduite d'un facteur 100? On donne $\mu_{Al} = 14 \text{ cm}^{-1}$ et $\mu_{Pb} = 1600 \text{ cm}^{-1}$

3- Chacune des formes différentielles suivantes:

$$\omega_1 = (y^2 + 1) dx + 2xy dy$$

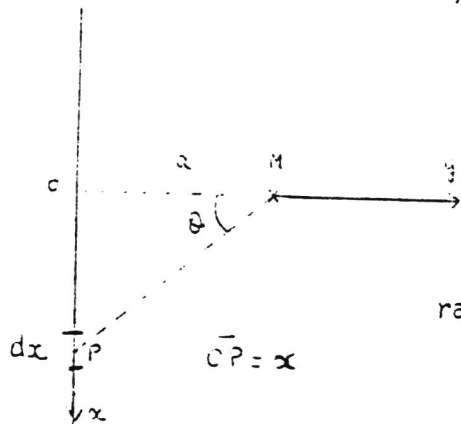
$$\omega_2 = \cos x dx + (\sin x + \sin y + \cos y) dy$$

est-elle exacte?

Si oui, calculer le potentiel du champ associé à ω .

Si non, peut-on trouver une fonction f ne dépendant que de x ou de y telle que $f \cdot \omega$ soit exacte?

4- Champ créé par un fil de longueur infinie, portant une charge électrique de densité linéaire constante $\lambda > 0$, en un point M situé à la distance a du fil.



a) L'élément de fil de longueur dx porte la charge élémentaire $dq = \lambda dx$. Quels sont la direction, le sens et le module du champ élémentaire $d\vec{E}$ créé au point M par dq ? Montrer que la résultante des champs créés en M par des charges élémentaires dq symétriques par rapport à O est dirigée suivant $\vec{OM}$.

b) En déduire la direction et le sens du champ total créé au point M par le fil chargé

c) Calculer maintenant le module de ce champ (Il est recommandé d'utiliser θ comme variable d'intégration et d'exprimer dx en fonction de a et θ).

d) Quel est le sens du champ si $\lambda < 0$?

e) Calculer le potentiel au point M.

5- Soient

$$\vec{V}_1 \begin{cases} 5 \\ 2 \\ 4 \end{cases}$$

$$\vec{V}_2 \begin{cases} -3 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

et les symétriques $\vec{V}_1', \vec{V}_2', \vec{V}_3'$ de ces vecteurs par rapport au plan $x=y$.

Comparer $\vec{V}_1' \wedge \vec{V}_2'$ et $\vec{V}_3'$.

Exercice 1

Deux voitures de police équipées de radar, l'une arrêtée, l'autre roulant à vitesse constante en ligne droite, évaluent, chacune dans son référentiel, la vitesse d'un véhicule. Trouveront-elles la même valeur pour :

- la vitesse du véhicule,
- l'accélération du véhicule?

Dans tous les cas on justifiera la réponse.

Exercice 2

On repère le mouvement d'un point mobile M par les fonctions $p(t)$ et $\vec{u}(t)$ telles que

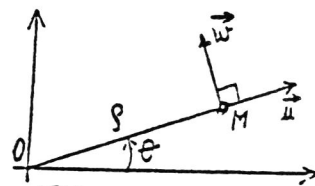
$$\vec{OM}(t) = p(t) \vec{u}(t)$$

où $\vec{u}(t)$ est le vecteur unitaire faisant avec l'axe Ox l'angle $\theta(t)$.

Exprimez les composantes de $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ en fonction de $p(t)$,

$\frac{dp}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{w})$, où $\vec{w}(t)$ est le

vecteur unitaire transformé de $\vec{u}(t)$ par une rotation de $+\pi/2$.

Exercice 3

Dans un espace vectoriel à trois dimensions on donne les vecteurs

$$\vec{V}_1 = (1, -1, 2) \quad \vec{V}_2 = (2, 4, 1) \quad \vec{V}_3 = (4, 2, 5).$$

Calculez $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3$. Remarques éventuelles?

Exercice 4

Dans un espace vectoriel à trois dimensions, de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le vecteur $\vec{A} = (1, 1, 0)$.

Quels sont tous les vecteurs $\vec{V}$ tels que $\vec{A} \wedge \vec{V} = \vec{0}$?

Quels sont tous les vecteurs $\vec{W}$ tels que $\vec{A} \wedge \vec{W} = -2\vec{k}$?

Exercice 5

Le mouvement d'une particule est tel que la vitesse $\vec{v}(t)$ a un module constant. Montrez que son accélération $\vec{a}(t)$ est en permanence perpendiculaire à sa vitesse $\vec{v}(t)$.

Exercice 6

Soit une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace vectoriel à trois dimensions.

Calculez $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{j} - \vec{k})$ et $(\vec{i} + \vec{j}) \wedge (\vec{j} - \vec{k})$

Exercice 7

Construire la courbe $y = e^{-x^2}$.

Utilisez cette construction pour tracer le graphe de $y = 2 \cdot e^{-(x+5)^2}$ en précisant les transformations que vous utilisez pour passer d'une courbe à l'autre.

TEST du Mercredi 12 mars 1980

=====

Exercice 1 Déterminez les solutions de l'équation différentielle

$$2 y'' - 7 y' + 3 y = 0$$

qui passent par l'origine ($t = 0$, $y = 0$).

Représentez graphiquement quelques unes d'entre elles (3 ou 4 choisies de façon à donner une idée de l'ensemble des solutions).

Exercice 2 Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'' + 9 y = 2 \cos 3t$$

satisfaisant aux conditions initiales suivantes $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

Donnez l'allure de la courbe représentative.

Exercice 3 Sachant que la vitesse de refroidissement, dT/dt (où T est la température), d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant considéré et celle du milieu ambiant, supposée constante ($T_a = \text{const.}$), trouvez au bout de combien de temps la température d'une eau portée à ébullition (dans les conditions normales de pression) atteindra 30°C dans une pièce où il fait 20°C , sachant qu'au bout de 20 minutes la température était tombée à 60°C .

Exercice 4 On considère le mouvement d'un mobile soumis à une force F et à une force de freinage f proportionnelle au carré de la vitesse; on désignera par α la constante, positive, de proportionnalité. Toutes les grandeurs (position, vitesse et forces sont dirigées suivant la même direction, sur laquelle on choisira un sens, arbitraire, positif)

Montrez que l'équation du mouvement prend deux formes différentes selon que la vitesse est positive ou négative à l'instant considéré. Ecrire ces deux équations pour une pierre lancée verticalement (vers le haut ou vers le bas) dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On posera $mg/\alpha = u^2$ et $\alpha/m = k$.

Dans ces deux équations, on peut "séparer les variables", c'est-à-dire les écrire sous la forme $f(v) dv = g(t) dt$.

On admettra que pour résoudre les équations mises sous cette forme, il suffit d'intégrer séparément les deux membres, le premier par rapport à v , le second par rapport à t . Pour ce faire : - dans le cas où $v > 0$, on décomposera $f(v)$ en éléments simples qui s'intègrent... simplement,

- dans le cas où $v < 0$ on se rappellera

que la primitive de $1/(1+x^2)$ est $\text{Arctg } x$.

Donnez la forme des deux types de solutions.

U.V.QA II5-II6

Section E

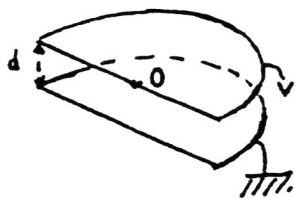
Université Paris VII

Session de Juin 1980

I) On établit une différence de potentiel V entre deux plaques métalliques identiques (en forme de demi-cercle de rayon R), placées en regard l'une de l'autre et distantes de d .

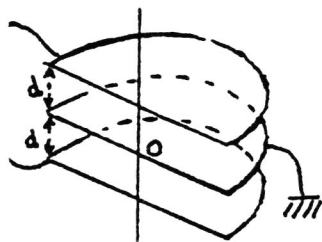
Exprimez

- a) Calculer le champ électrique en tout point de l'espace compris entre les deux plaques: on négligera les effets de bord, c'est à dire que l'on considérera que le champ est uniforme entre les deux plaques et nul à l'extérieur.

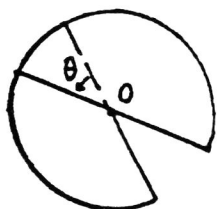


- b) Calculer la capacité du condensateur ainsi formé. $\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ M.K.S.} \right)$

2) On forme un autre condensateur en plaçant trois plaques identiques les unes au-dessus des autres. L'une des armatures est formée par l'ensemble des deux plaques extrêmes reliées entre elles et portées au potentiel V ; l'autre, reliée à la masse, est constituée par la plaque intermédiaire qui est distante des deux autres de d .



- a) Quelle est la charge portée par chacune des plaques?
 b) Calculer la capacité de ce nouveau condensateur et montrer qu'elle vaut 25 pF ($0,25 \cdot 10^{-10} \text{ F}$) lorsque $d=1 \text{ mm}$ et $R=3 \text{ cm}$.
 NB: Si vous n'avez pas trouvé 25 pF au bout de 10 minutes, passez à la question suivante.
 c) La capacité de ce condensateur varie lorsqu'on fait tourner l'armature intermédiaire autour d'un axe passant par le point O et perpendiculaire aux plaques. Calculer la capacité C en fonction de l'angle θ commun aux armatures, en négligeant encore les effets de bord. Précisez ce que cette hypothèse signifie quant à la répartition des charges sur chacune des plaques.

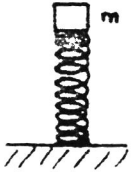


3) On monte ce condensateur en série avec une self de $25 \cdot 10^{-8} \text{ Henry}$ réalisée avec un fil de cuivre de 70 cm de long et de 2 mm de diamètre (résistivité du cuivre: $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$)

- a) Calculer la résistance de la self
 b) On supposera tout d'abord que $\theta = 180^\circ$. Calculer dans ce cas la fréquence de résonance, le facteur de surtension et la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance.
 c) Pour quelles valeurs de θ , le circuit sera-t-il accordé sur France Musique (97,6 MHz) ?

- 48 -

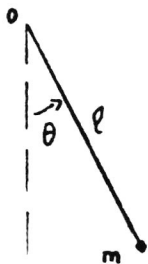
II- Un ressort de longueur libre l_0 est fixé verticalement sur le sol. On fixe à l'extrémité supérieure une masse m .



Ecrire l'équation du mouvement de la masse en définissant complètement toutes les variables et les symboles utilisés.

dans un plan

III- Un pendule de longueur l oscille autour du point fixe O . Exprimez la période des oscillations et représentez graphiquement la variation de θ en fonction du temps en supposant qu'à $t=0$, $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (on négligera les frottements).



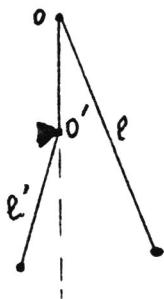
A une distance d sur la verticale en dessous du point O , on place une butée O' (cf. schéma).

On a alors, à droite, un pendule de longueur l qui oscille autour de O et, à gauche, un pendule de longueur l' qui oscille autour de O' .

a) quelles sont les quantités qui se conservent quand la masse oscille de part et d'autre de la verticale?

b) représentez graphiquement la variation, en fonction du temps,

- de l'angle que fait le pendule avec la verticale
- de la vitesse angulaire de la masse
- de la vitesse linéaire de la masse.



Université Paris VII

NN 120-124 E

Service commun A

(J.L. Verley)

EXAMEN du 17 juin 1980Exercice 1 (Noté sur 6)

Répondre par "VRAI" ou "FAUX" à chacune des quatre assertions ci-dessous. (Seules seront prises en compte les réponses "VRAI" accompagnées d'une démonstration ou les réponses "FAUX" avec un contre-exemple.)

- 1) Toute suite de nombres réels tendant vers $+\infty$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
- 2) Toute suite extraite d'une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$.
- 3) Si le rang d'un système d'équations linéaires est égal au nombre d'équations, le système a au moins une solution.
- 4) Si le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues, le système a au moins une solution.

Exercice 2 (Noté sur 8)

1) Soit f l'endomorphisme de $\underline{\mathbb{R}}^4$ défini matriciellement dans la base canonique de $\underline{\mathbb{R}}^4$ par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base du noyau de f et caractériser son image $\text{Im } f$.

Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

2) Résoudre et discuter le système linéaire :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 + m^2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 3m \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel}$$

Exercice 3 (Noté sur 6)

On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, et on désigne par (s_n) , avec $s_n = u_0 + \dots + u_n$, la suite des sommes partielles.

1) Montrer que la série est convergente. (On pourra utiliser un théorème du cours ou démontrer que les suites (s_{2p}) et (s_{2p+1}) , $p \in \mathbb{N}$, sont adjacentes.)

2) Montrer que :

$$s_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

(On pourra intégrer sur l'intervalle $[0, 1]$ la relation

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} .)$$

3) Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

4) S'inspirer de la méthode précédente pour montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \text{Log } 2 .$$

- 51 -

A N N E X E A₄

Notes de préparation du premier amphi sur les équations différentielles

A_4 - AMPHI MATH-PHYSIQUE - EQUATIONS DIFFERENTIELLES I
(Notes de préparation)

I - INTRODUCTION (par L. Viennot enseignante de physique)

Quelques exemples physiques faisant intervenir des équations différentielles, c'est-à-dire conduisant à des relations entre des fonctions et leurs dérivées.

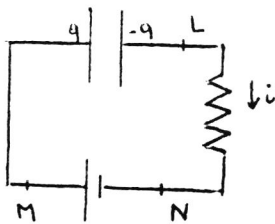
Exemple 1 : La relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}$$

C'est une relation entre des grandeurs physiques (forces, accélérations) fonctions de l'espace et (ou) du temps. L'accélération $\vec{\gamma}$ étant la dérivée seconde de la fonction vectorielle de position

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$$

Exemple 2 : Charge (ou décharge) d'un condensateur de capacité C , à travers une résistance R



- définition des symboles q , i
conformément au schéma ci-contre
(convention de signes)

$$V = V_M - V_N$$

- Mise en équation

$$V_M - V_L = \frac{q}{C}$$

$$V_L - V_N = Ri$$

$$V_N - V_M = -V$$

$$\text{d'où} \quad 0 = \frac{q}{C} + Ri - V$$

D'après le schéma et les conventions adoptées $i = + \frac{dq}{dt}$

d'où l'équation différentielle :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - V = 0$$

Exemple 3 : Freinage par frottement

On suppose qu'un mobile est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ opposée à sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha > 0$

. 1er cas $\alpha = K$ (K constant)

L'équation du mouvement d'un mobile de masse m soumis à la force $\vec{f}$ et à une autre force $\vec{F}$ est

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + K\vec{v} - \vec{F} = \vec{0}$$

ce qui peut se décomposer en 3 équations numériques analogues par projection :

$$m \frac{dv_x}{dt} + Kv_x - F_x = 0$$

$$m \frac{dv_y}{dt} + Kv_y - F_y = 0$$

$$m \frac{dv_z}{dt} + Kv_z - F_z = 0$$

- Noter l'analogie entre cette forme d'équation différentielle et celle du condensateur

. 2ème cas $\alpha = -\lambda |v|$ avec $\lambda > 0$

Nous allons nous restreindre dans ce cas à un mouvement linéaire

- si $v > 0$ $|v| = v$ et $f = -\lambda v^2$

d'où l'équation

$$m \frac{dv}{dt} + \lambda v^2 - F = 0$$

- si $v < 0$ $|v| = -v$ et $f = \lambda v^2$

d'où l'équation

$$m \frac{dv}{dt} - \lambda v^2 - F = 0$$

Donc suivant le signe de v , le mouvement sera donné par l'une ou l'autre des deux équations.

II - PRESENTATION MATHÉMATIQUE (par M. Artigue enseignante de math.)

a - Définition d'une équation différentielle comme une relation liant les dérivées d'une fonction et cette fonction

Notion d'équations du 1er, 2ème, nième ordre, d'équations aux dérivées partielles

- . Dans cet amphi, on se borne - à des fonctions d'une variable réelle
- à des équations du premier ordre

on suppose de plus que les équations différentielles peuvent se mettre sous la forme :

$$y' = f(y, t)$$

y fonction cherchée de la variable t

f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$

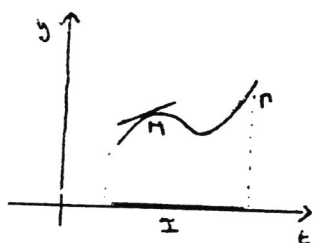
t est une variable réelle; dans les exemples précédents, elle représente le temps, mais elle peut représenter diverses grandeurs physiques

Résoudre une telle équation sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur I et vérifiant en tout point de I la relation donnée soit :

$$\forall t \in I \quad y'(t) = f(y(t), t)$$

b - Interprétation géométrique

- . Soit l'équation $y' = f(t, y)$
- . y une fonction solution sur l'intervalle I
- . Γ la courbe représentative de y sur I



en M point quelconque de Γ , Γ a une tangente de pente $y'(t)$ soit $f(t, y(t))$ soit $f(t, y)$ où (t, y) sont les coordonnées de M .

De ce fait découlent les méthodes graphiques de résolution -
 Soit une équation $y' = f(t, y)$, f étant définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$,
 en tout point M de D , on peut calculer $f(t, y)$ et si une courbe solution passe
 par M , elle aura en M une tangente de pente $f(t, y)$.

ex.: $y' = -y^2$ (freinage par frottement avec $\lambda = 1$ et
 sans force annexe $\vec{F}$)

$f \mid (t, y) \mapsto -y^2$	en $(1, 1)$	pente - 1
	en $(3, 2)$	pente - 4
	en $(0, 0)$	pente 0

c - Résolution graphique

Résoudre graphiquement, c'est chercher à tracer des courbes, qui,
 en tout point, ont une tangente dont la pente satisfait la relation donnée.
 Pratiquement, on ne va pas tracer des petits bouts de tangente n'importe où
 au hasard, mais s'organiser.

D'abord, on cherche $\{ (t, y) \in D \mid f(t, y) = 0 \}$
 soit $\{ (t, y) \in D \mid y' = 0 \}$

ce qui permet de régionner D suivant le signe de y'

Plus généralement $\{ (t, y) \in D \mid f(t, y) = a \}$ est appelé l'isocline I
 d'indice a . Dans la suite, on le notera I_a .

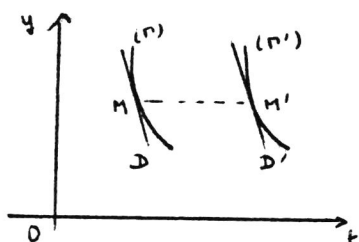
exemple 1 = $y' = -y^2$

- la pente est toujours négative
- I_0 est l'axe des t . C'est une solution particulière de l'équation
- I_a (pour $a < 0$) est formée de 2 droites parallèles à l'axe des t
 et symétriques par rapport à lui, les droites d'équation $y = \sqrt{a}$
 et $y = -\sqrt{a}$

Passer au rétro-projecteur le transparent n° 1 (champ associé à
 $y' = -y^2$) et étudier l'évolution des pentes dans le plan.

Remarques :

- Dans ce cas particulier, f ne dépend pas de t
Conséquence : si Γ est solution, toute courbe translatée horizontale de Γ est aussi solution :



$$\text{pente } D' = \text{pente } D = -y_M^2 = -y_{M'}^2$$

$$\text{donc } \text{pente } D' = -y_{M'}^2$$

Γ' vérifie la relation en chacun de ses points donc est la courbe représentative d'une solution

L. Viennot intervient pour interpréter physiquement cette remarque.

- en 2 points symétriques par rapport à 0, les pentes sont les mêmes.
conséquence, si Γ est solution, la symétrique de Γ par rapport à 0 l'est aussi.

Tracé des courbes solutions :

Passer au rétro-projecteur le transparent n° 2 (champ + quelques courbes solutions de $y' = -y^2$. En tracer d'autres directement sur le transparent.

Commentaires : 2 problèmes sont en suspens

- y a-t-il vers le haut une asymptote verticale ou une branche parabolique ?
- les courbes sont-elles asymptotes à l'axe des t ou l'atteignent-elles à une distance finie avec une tangente horizontale?

A propos du second point, on citera le théorème de Cauchy-Lipschitz avec les hypothèses

• f continue sur un ouvert D

• $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur D

en précisant que la démonstration de ce théorème ne sera faite qu'en 2ème année.

On utilisera le résultat pour montrer que les courbes sont nécessairement asymptotes à l'axe des t .

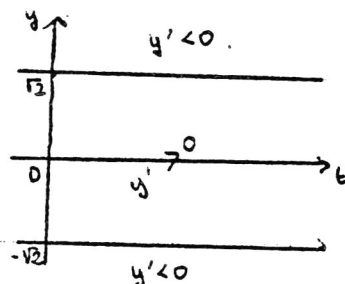
. Démontrer que 2 courbes quelconques, se déduisent nécessairement par une translation horizontale ou une symétrie centrale.

L. Viennot intervient pour interpréter tout ceci en termes physiques (existence - unicité - asymptote - transformations géométriques entre les solutions.). Elle distingue ce qui a du sens du point de vue du phénomène étudié de ce qui n'en a que du point de vue d'une résolution mathématique - (En effet, ici l'équation $y' = -y^2$ n'est représentative du phénomène que pour des valeurs positives de y)

exemple 2 : $y' = -y^2 + 2$

ce qui correspond à $\lambda = 1$ et une force F constante

. Régionnement du plan suivant le signe de y' :



l'isocline I_a est formée des deux droites d'équations $y = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ qui sont, deux solutions particulières de l'équation

Isocline I_a : si $a > 2$ $I_a = \emptyset$

si $a \leq 2$ I_a est formée de 2 droites parallèles à

l'axe des t et symétriques par rapport

à lui, d'équation $y = \sqrt{2-a}$ et $y = -\sqrt{2-a}$

la pente est donc maximum pour $y = 0$ et vaut 2

Ceci correspondra pour les courbes solutions à un point d'inflexion.

Passer au projecteur le transparent n° 3 (champ de $y' = -y^2 + 2$) puis le transparent n° 4 (champ + quelques courbes solutions)

Démontrer que les solutions sont asymptotes aux droites $y = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$

L. Viennot intervient comme dans le cas précédent, souligne que certaines des courbes solutions ne sont pas significatives du phénomène étudié.

Pour y négatif il faudrait raccorder avec des solutions de l'équation $y' = y^2 + 2$.
Le faire en superposant le transparent n° 5 (champ + solutions de $y' = y^2 + 2$)
au transparent n° 4.

Conclusion

En général, les équations différentielles que l'on rencontre ne sont pas algébriquement résolubles (celles que l'on vient de traiter le sont aisément). On fait alors appel pour avoir l'allure des solutions à des méthodes graphiques de résolution, à des méthodes numériques de calcul approché (cf. T.D). Dans certains cas, on remplace aussi l'équation donnée, $y' = f(t, y)$ par une équation plus simple $y' = y'(t, y)$ que l'on sait résoudre et dont on sait, moyennant certaines hypothèses, que les solutions sont proches des solutions de l'équation donnée (ex.: petites oscillations du pendule).

D'où l'intérêt des équations linéaires à coefficients constants, (correspondant à une approximation linéaire de la fonction f). Ce sont elles que nous allons étudier maintenant, en nous bornant pour ce premier amphi, à celles du premier ordre.

III - EQUATIONS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS DU PREMIER ORDRE :

Ce sont des équations de la forme $ay' + by = c$

a, b étant des réels, a non nul

c étant une fonction de t

$$f(t, y) \longmapsto \frac{1}{a} [c(t) - by]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{b}{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est continue en tout point où } f \text{ est définie}$$

Donc, en appliquant le théorème de Cauchy, si c est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, par tout point de $I \times \mathbb{R}$, il passe une solution et une seule.

En particulier si c est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions seront définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- propriété fondamentale : si y_1 et y_2 sont deux solutions, $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée : $ay' + by = 0$

conséquence pour les solutions.

- résolution de l'équation homogène

$$ay' + by = 0 \quad , \quad \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

Ces deux fonctions de t ont même dérivée donc sont égales à une constante près.

$$\text{Log } |y| = -\frac{b}{a}t + K$$

$$|y| = e^{-\frac{b}{a}t} \cdot e^K$$

$$y = \pm e^K \cdot e^{-\frac{b}{a}t} \quad K \in \mathbb{R}, e^K \in \mathbb{R}^+$$

d'où la forme générale des solutions

$$y = Ae^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \quad (\text{le cas } A = 0$$

correspondant à la solution particulière $y = 0$ que l'on a éliminée en divisant par y)

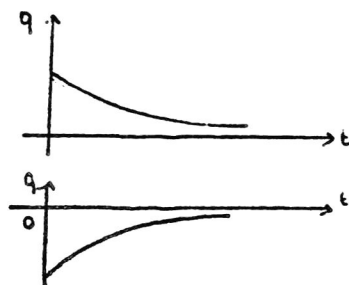
- Il y a
- . une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$
 - . elles forment un espace vectoriel de dimension 1 et $A = y(0)$
 - . Par un point (t_0, y_0) il passe bien une solution et une seule :

$$A = y_0 e^{-\frac{b}{a}t_0}$$

Application en condensateur :

$$q = q(0) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{d'où si } q(0) > 0$$

$$\text{si } q(0) < 0$$



- équation avec second membre

Il faut trouver une solution particulière de l'équation globale.
on va traiter 2 cas particuliers :

- 60 -

a) c est une constante (pour le condensateur tension constante aux bornes)

1) si $b = 0$ l'équation devient $y' = \frac{c}{a} \implies y = \frac{c}{a} t + A$

2) si $b \neq 0$ la fonction constante $y = \frac{c}{b}$ est solution

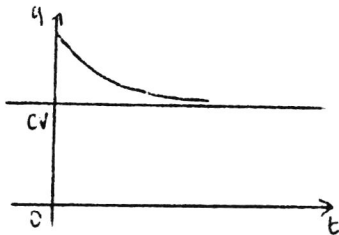
$\rightarrow$ la solution générale : $y = \frac{c}{b} + A e^{-\frac{b}{a} t}$

Cas du condensateur : $Rq' + \frac{q}{C} = V$

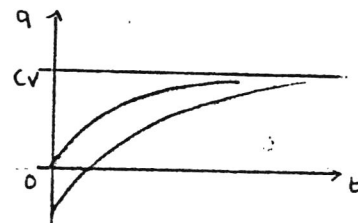
$\rightarrow q = A e^{-\frac{t}{RC}}$

$\rightarrow q = (q(0) - CV) e^{-\frac{t}{RC}} + CV$

d'où si $q(0) > CV$



si $q(0) < CV$



cas important en pratique $q(0) = 0$: on charge le condensateur.

Quel rapport avec la solution de l'équation homogène ?

Faisons : $Q = q - CV$ (translation de l'axe des t à $y = CV$)
dans le nouveau système d'axes.

on a $Q = Q(0) e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow$ on a juste translaté les courbes.

b) $c = c_0 \sin \omega t$ (on rajoute une tension sinusoïdale aux bornes du condensateur : $V = V_0 \sin \omega t$)

on va montrer qu'il existe une solution de la forme

$$q = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$\rightarrow$ l'équation $(\omega RA + \frac{B}{C}) \cos \omega t + (\frac{A}{C} - \omega RB - V_0) \sin \omega t = 0$
qui doit être vraie pour tout t :

- 61 -

$$\rightarrow \begin{cases} \omega R A + \frac{B}{C} = 0 \\ \frac{A}{C} - \omega R B = V_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \frac{V_0 C}{1 + (RC\omega)^2} \quad B = -\frac{V_0 RC^2 \omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

→ la solution générale :

$$q(t) = K e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{V_0 C}{1 + (RC\omega)^2} \sin \omega t - \frac{V_0 RC^2 \omega}{1 + (RC\omega)^2} \cos \omega t$$

graphe et interprétation physique

En fait l'amphi s'arrête à la fin du a)

- 62 -

ANNEXE A₅

Liste des projets de physique

LISTE DE SUJETS DE DOSSIERS

Dossiers expérimentaux

2 ou 3 étudiants

- . Lunette
- . Zoom
- . Aberration des lentilles
- . Télémètre
- . Mirages
- . Spectrophotomètre
- . Mesure des indices de réfraction
- . Pyromètre optique
- . Arc en ciel
- . Focales et caustiques
- . Instrument de musique
- . Filtrage électrique 1
- . Filtrage électrique 2
- . Résonance mécanique
- . Stroboscope
- . Electricité domestique
- . Minuterie
- . Téléphone 1
- . Téléphone 2

Dossiers théoriques

2 ou 3 étudiants

- . Giroscopes
- . Pendule de Foucault
- . Mécanismes des horloges
- . Cames
- . Boomerang
- .
- . Mesures de G
- . 21 Juillet 1969: description complète du vol Terre-Lune-Terre
- . Mécanisme des sports
- . Transport électricité longue distance
- . Traction électrique
- . Horloge à quartz - piezoélectricité
- . Véhicules à 4 roues
- . Electricité atmosphérique

- 64 -

A N N E X E A₆

Modifications prévues pour 80-81

A₆ - MODIFICATIONS POUR L'ANNEE 80-81

HORAIRES :

. En physique, organisation d'un cours magistral annuel de 1 h 30 par semaine occupant la plage horaire prévue en 79-80 pour l'amphi math-physique, par ailleurs horaires inchangés pour les T.D. et T.P.

. L'amphi math-physique est pris sur les horaires du cours de math. Il est prévu environ 13 amphis math-physique de 1 h.30 répartis sur toute l'année (ce qui correspond à un amphi tous les quinze jours). Mais la répartition dans le temps de ces amphis ne sera pas nécessairement régulière.

Les deux premiers amphis se feront sur le thème suivant :

- Différentielles en math et en physique
- Gradient - Potentiel

vers la fin du mois de Novembre et au début de Décembre

Les amphis math-physique ne seront pas nécessairement assurés par les enseignants chargés des cours de math et de physique.

En mathématique, dans ce cas, le système fonctionnera de la façon suivante.: Si un enseignant de rang B assure un amphi, l'enseignant chargé des cours assurera en contrepartie une de ses séances de travaux dirigés.

- Les T.D. de math restent de 4 heures hebdomadaires
- 2 heures de T.D. sont rajoutés tous les quinze jours pour l'utilisation des mini-ordinateurs

(Dans la mesure du possible, nous essaierons d'encadrer à 2 personnes les séances sur machine)

EFFECTIFS : La section sera formée de 120 étudiants répartis en 4 groupes de 30

EVALUATION :

En mathématiques la part du contrôle continu dans l'évaluation est fixée à 50% répartie de la façon suivante :

- 20% pour les notes de problèmes : 1 problème tous les 15 jours
- 20% pour les tests
- 10% pour les activités sur machine exposés
- les tests comprendront - d'une part - les tests math-physique organisés comme l'année précédente - d'autre part des tests réalisés en T.D. de mathématiques tous les 15 jours : Il s'agira alors de rédiger deux ou trois exercices choisis dans la feuille distribuée aux étudiants tous les quinze jours (durée maximum : 30 mn.)
- les 10% restant concerneront les activités sur machine - la forme de l'évaluation pourra varier d'un semestre à l'autre, elle n'est pas encore entièrement fixée. Par exemple : compte-rendu de T.P. au premier semestre, réalisation d'un mini-projet au second semestre. Ce mini-projet donnant lieu à un exposé oral et à un texte écrit.

PROGRAMMES

Le programme de mathématiques en 80-81 du premier semestre se déroulera au début dans l'ordre suivant :

- Fonctions d'une variable réelle, dérivées, différentielles
- Accroissements finis. Formule de Taylor, Développements limités
- Fonctions usuelles et fonctions réciproques
- Espaces vectoriels et applications linéaires : Normes, Familles libres, bases, matrices ...
- Fonctions de plusieurs variables - Continuité, différentiabilité ...

Pour le deuxième semestre, 3 dossiers seront préparés par les enseignants sur les thèmes suivants :

- Equations différentielles
- Algèbre linéaire
- Suites et Séries

ils comprendront, si possible :

- la définition des objectifs de l'enseignement de 1ère année
- des feuilles d'exercices correspondant à ces exigences minimales

- des informations sur la façon dont les concepts mathématiques interviennent actuellement dans le champ scientifique et des propositions d'activités pour les étudiants en T.D. intégrant éventuellement des calculs ou des mini-projets sur machine.
- quelques rappels sur le développement historique des concepts mathématiques correspondants
- les documents pour les étudiants, réalisés en 79-80 :
(résumés de cours, fascicules d'exercices, contenant des exercices corrigés, problèmes, éventuellement remaniés)
- Bibliographie choisie

Une partie des dossiers notamment 1-2-5-6 sera distribuée aux étudiants.

- 68 -

A N N E X E A₇

Un problème d'enseignement - Essai d'analyse

UN PROBLEME D'ENSEIGNEMENT
DIFFERENTIELLES - MISE EN EQUATION DE PROBLEMES -
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Il s'agit ici, en prenant un certain recul par rapport à l'expérience vécue, d'essayer, à postériori, d'analyser le fonctionnement de l'enseignement en mathématiques et en physique sur un thème important du programme, dans la section expérimentale. Si j'ai choisi ce thème, c'est parce que sur lui se sont cristallisées les difficultés d'une coopération entre mathématiciens et physiciens jugée par ailleurs fructueuse par les deux parties.

I. ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT :

Il était convenu par l'équipe enseignante que l'enseignement sur ce thème débiterait en mathématiques. Après des rappels sur les notions d'espaces vectoriels, affines, les problèmes de repérage, les applications linéaires, un minimum de topologie dans les espaces métriques permettrait d'aborder la continuité et la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables*. Parallèlement les physiciens commençaient l'année par un enseignement d'optique à base de T.P. ne nécessitant que peu de connaissances mathématiques, reprenaient en T.D. les problèmes de repérage, de changement de référentiels, de cinématique, thèmes des premiers amphis math-physique. Il était convenu qu'ils attendraient l'amphi math-physique sur les différentielles pour aborder les mises en équation de problèmes.

Cet amphi devait se situer lorsque le cours de mathématiques sur la différentiabilité serait terminé. Après une brève synthèse de ce cours, il s'agirait de le relier à la pratique physicienne.

* Cette pratique était en rupture avec la pratique habituelle en DEUG SSM à Paris 7 où tout ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables et les équations différentielles, est traité en deuxième année. Elle résultait du désir que nous avions de développer en mathématiques, en 1ère année, les outils nécessaires à l'enseignement de la physique de 1ère année.

Remarque : Cette organisation de l'enseignement reposait sur des a priori idéologiques, pour la plupart non explicités. Il me semble que ces a priori étaient, en partie, différents pour les mathématiciens et les physiciens.

- les physiciens attribuaient une grande partie des difficultés constatées dans ce domaine au fait que l'on utilisait les notions mathématiques en physique avant qu'elles n'aient acquis un statut en mathématiques puisque leur enseignement était repoussé en seconde année, que lorsqu'elles étaient enfin abordées en mathématiques, c'était sans le moindre souci d'établir un lien avec une pratique physicienne qui s'était alors vaille que vaille installée. Ce lien ne s'établissait pas miraculeusement, les deux objets d'enseignement restaient totalement séparés.

- De leur côté, les mathématiciens étaient tentés de penser que si les physiciens rencontraient tant de problèmes dans les mises en équation de problèmes et le traitement des différentielles, c'était en grande partie, parce qu'ils faisaient tout cela avec peu de soin, mélangeant petits accroissements et différentielles, approximant avec un haut niveau d'implicite, se répérant eux, par habitude, parce qu'à l'avance, ils savaient ce qu'il était plausible de trouver, ce dont étaient incapables leurs étudiants^{*}. De plus, beaucoup de choses dans leur pratique avaient acquis un tel niveau d'évidence que la nécessité d'une construction pour parvenir à ces évidences ne les effleurait plus.

D'où l'idée de part et d'autre, qu'en traitant dès la première année les aspects élémentaires de la continuité et de la différentiabilité y compris pour les fonctions de plusieurs variables, en greffant quelques exigences de rigueur sur la pratique physicienne et en connectant au moment de l'enseignement les deux points de vue, on allait parvenir à surmonter l'obstacle. C'est cette espérance que concrétisait l'organisation d'un amphi math-physique sur les différentielles.

II - L'AMPHI MATH-PHYSIQUE SUR LES DIFFERENTIELLES

Comme cela a été précisé dans le rapport d'enseignement, la préparation d'un amphi math-physique occupait, en principe, partiellement deux

^{*}cf. les travaux de L. Viennot sur l'algébrisation des calculs [11]

réunions. L'amphi sur les différentielles donna lieu à des discussions passionnées pendant 4 séances et fut finalement assuré seulement par l'enseignant de physique responsable de sa préparation.

Nous essaierons de rapporter ici quelques faits marquants de ces réunions. Ils sont à rapprocher des opinions manifestées par les étudiants lors de l'interview. Il faut souligner que l'enseignant de mathématiques chargé de la préparation de cet amphi était sans doute, parmi nous, celui qui était le plus attaché à la rigueur dans l'expression formelle et la manipulation des concepts mathématiques, que l'enseignant de physique se situait chez les physiciens parmi ceux qui en ressentaient le moins la nécessité. Le heurt de ces deux personnalités a sans doute contribué à rendre les négociations plus difficiles. Mais il est certain qu'on ne peut faire de cette circonstance la principale responsable des problèmes rencontrés. Ils touchent de manière fondamentale aux rapports entre les mathématiques et la physique et au hiatus existant actuellement dans l'enseignement entre deux transpositions didactiques concurrentes d'un objet de savoir scientifique: la différentielle, transpositions qui, dans l'enseignement usuel, s'ignorent mais que nous avons forcées à se rencontrer*

*La notion de transposition didactique a été introduite par Michel Verret [10]. Elle désigne "le travail qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement" et peut se représenter par le schéma suivant:

$\rightsquigarrow$ objet de savoir $\rightarrow$ objet à enseigner $\rightarrow$ objet d'enseignement

dans lequel le premier chaînon marque le passage du préconstruit au construit par ex: - la notion de distance (entre deux points) est utilisée spontanément depuis toujours ($\rightsquigarrow$)

- le concept mathématique de distance est introduit en 1906 par M. Frechet (objet de savoir)

- au niveau du 1er cycle de l'enseignement secondaire français, la distance comme notion mathématique précise figure au programme de 1971 de la classe de troisième (objet à enseigner)

- son traitement didactique varie dans les années suivant sa désignation comme objet à enseigner: le "travail" de la transposition didactique se poursuit.

la prise en compte de la notion de "transposition didactique" apparaît comme un moyen pour le didacticien "de se déprendre des évidences et de la transparence de l'univers d'enseignement qu'il vit en tant qu'enseignant" en s'interrogeant à différents niveaux (objet de savoir - objet à enseigner - objet d'enseignement) et en analysant à la lumière de ce questionnement l'adéquation de l'enseignement.

L'hypothèse que nous faisons ici est qu'il existe dans ces deux transpositions didactiques de la différentielle, un seul objet de savoir scientifique qui n'apparaîtrait distinct aux regards des praticiens des deux disciplines que par le fait d'une représentation exclusive par l'objet d'enseignement qu'ils ont reçu ou véhiculent. La validation d'une telle hypothèse pose de manière cruciale le problème de la saisie de l'objet de savoir scientifique.

Les citations de cette note sont extraites de [2]

Il est apparu dès le début, que, si les physiciens étaient sincèrement désireux de coordonner leur enseignement avec celui des mathématiciens, par contre ils ignoraient presque tout de la transposition didactique que les mathématiciens allaient leur proposer. Ainsi au cours de la première réunion, un matheux ayant souligné la nécessité d'aborder en cours de l'amphi le problème de l'ambiguïté des notations, ils demandèrent de quelle ambiguïté il s'agissait, puis, quelque peu étonnés, ce que représentaient alors pour nous les notations df et dx ... C'est Mr Revuz qui prit alors la parole et expliqua que la différentielle d'une fonction f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant deux espaces affines, c'était une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, E et F étant les espaces vectoriels associés respectivement aux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et $\mathcal{L}(E, F)$ désignant l'espace des applications linéaires de E dans F .

Il précisa qu'en chaque point M

$$\begin{aligned} \text{si } df|_M : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ M &\longmapsto D(f, M, \cdot) \end{aligned}$$

$D(f, M, \cdot)$ est l'application linéaire tangente à f en M , soit, si f est une fonction dérivable d'une variable réelle

$D(f, x, \cdot)$ est l'application qui à h fait correspondre le réel $f'(x) \cdot h$.

Un silence s'établit alors chez les physiciens, tentant de "digérer" cette définition et de l'intégrer à leur propre conception de la différentielle. Puis la question-noeud fut posée.

- Mais, alors, que signifie dx dans l'écriture $df = f'(x) dx$?

Là encore les mathématiciens fournirent la réponse mathématique, dx c'est, s'il s'agit d'une fonction f d'une variable, la différentielle de la fonction identique

Elle ne dépend pas du point M et

$$\forall M \quad dx(M, h) = h$$

Si plus généralement f est une fonction de plusieurs variables, dx , dy , dz ... désignent les différentielles des opérations de projection.

Dès ce moment, le débat entre mathématiciens et physiciens ne se placera au niveau de savoir : Quel est l'objet de savoir différentielle en physique? qu'est-ce qui est enseigné dans les deux disciplines ? Pourquoi ? Faut-il enseigner la différentiabilité de la même façon en

première année et en seconde année, voire en premier cycle et en second cycle ? Quels sont les objectifs de cet enseignement ? Est-ce que l'objet d'enseignement que nous proposons et les uns et les autres est adapté à la réalisation de ces objectifs, compte tenu du public auquel nous nous adressons ? Chacun de nous étant tenu sous le regard "naïf" et extérieur de l'autre de réfléchir et éventuellement remettre en question sa pratique. En fait, il se placera plutôt au niveau bien connu des rapports math-physique, où les mathématiques représentent la rigueur, en quelque sorte la loi, cette rigueur suffisant à elle seule à justifier le choix de l'enseignement, où la physique fait partie du monde où les nécessités de l'action priment et imposent de transiger avec la loi, et où de ce fait, un souci d'efficacité immédiate suffit à justifier le choix de l'enseignant.

Est significative de cet état d'esprit l'attitude des physiciens et des mathématiciens au cours de la suite de la réunion. Les premiers demandent aux seconds: Est-ce que nous avons de droit d'écrire $\frac{df}{dx} = f'(x)$. pour exprimer que df et dx sont proportionnels et que le coefficient de proportionnalité est $f'(x)$?

Est-ce que, quand nous traitons ainsi la recherche du minimum de déviation du prisme, vous êtes d'accord avec notre manière de manipuler les différentielles ?

Les seconds se prenant au jeu, expliquant, tranchant et semblant acquiescer de la sorte un statut supérieur.

Et, en fait, bien que tous les enseignants de maths ne soient pas d'accord avec la stratégie d'enseignement proposée, estimant qu'elle n'est pas bien adaptée au niveau des étudiants, qu'elle gomme le point de vue "approximation" au profit du point de vue "algébrique", que le fait de grimper si vite dans la hiérarchie des structures (application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}(E, F)$) ne peut manquer de provoquer chez les étudiants des risques de dérapage formel, enfin qu'il doit être possible au niveau de la première année de concevoir d'autres stratégies d'enseignement, bien que d'autre part, plusieurs enseignants de physique ressentent la nécessité de modifier leur enseignement dans le sens d'une plus grande précision, en fait, la dynamique du groupe ne va pas permettre de faire jouer à ces tendances médiatrices le rôle qu'elles auraient pu jouer et nous n'arriverons pas à sortir du type de rapports qui s'est installé au cours de la première réunion.

Ainsi dès le début de la deuxième réunion, le physicien chargé de l'amphi fera part au groupe de ses inquiétudes. Il trouve que le hiatus complet qu'il perçoit entre ce qu'il nomme les points de vue mathématiques et physiciens met en cause, la possibilité même d'un amphi commun, ce qu'il résume en :

"Pour vous, la différentielle c'est une application, pour nous c'est un petit bout de truc"

Les autres physiciens ont, quant à eux, quelques difficultés à lire le photocopié de mathématiques qui a été distribué aux étudiants. L'objet mathématique leur y apparaît comme un véritable monstre qu'ils ne veulent pas intégrer tel quel à leur pratique.

Si, à l'origine, l'objectif du groupe était de trouver un langage commun qui permette l'harmonisation des deux enseignements, dès cette deuxième réunion, cela paraît irréalisable et l'équipe semble s'orienter plutôt vers la stratégie suivante :

- explication auprès des étudiants des deux niveaux de langage^{*}, des différences qui existent entre eux et des passerelles permettant de passer de l'un à l'autre.

- attention portée sur les risques présentés par une utilisation simplement automatique des différentielles dans les calculs.

Un moment, l'accord semble se faire sur le scénario suivant pour le début de l'amphi (proposé par un enseignant de physique).

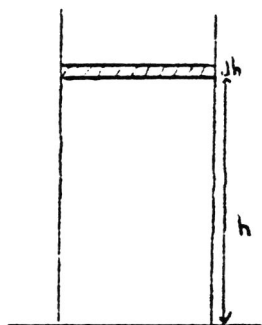
- Bref rappel des principaux points du cours de maths (par l'enseignant de maths)

- Mise en équation d'un problème de physique, à la manière physicienne (par l'enseignant de physique)

- Commentaire de l'enseignant de maths à propos de cette mise en équation - liens entre les deux langages - formulation des implicites.

^{*}L'expression "deux niveaux de langage" utilisée ici reflète la façon dont était décrite la situation pendant cette deuxième réunion. Elle constitue en elle-même une hypothèse réductionniste: réduire les divergences constatées à des différences de niveau de langage et exclure l'hypothèse de divergences de signifié. Où se situent exactement les différences, au niveau des signifiés, au niveau du langage, ou plus simplement au niveau de la quantité d'implicites sous-jacents à chaque enseignement ? la question est ouverte.

L'exemple proposé concerne l'évaluation de la pression d'un gaz dans un tuyau cylindrique, que les physiciens ont l'habitude de traiter de la façon suivante :



S désigne la section du tuyau, h la hauteur de gaz, $\varphi(h)$ la densité de gaz à la hauteur h , $p(h)$ la pression à la hauteur h .

$$\text{on a : } p(h+dh) \cdot S - p(h) \cdot S = -\varphi(h) \cdot dh \cdot g \cdot S$$

$$\text{d'où } p(h+dh) - p(h) = -\varphi(h)gdh.$$

$$\text{soit } \frac{dp}{dh} \cdot dh = -\varphi(h)gdh$$

$$\text{et finalement } \frac{dp}{dh} = -\varphi(h) \cdot g$$

Traitement complet dans le cas où la densité de gaz est constante tout le long du tuyau.

Cet exemple ne plait guère à l'enseignante de maths chargée de l'amphi qui estime que dans une situation aussi simple, on effleure à peine le calcul différentiel. A cette objection, les physiciens répondent que c'est peut-être élémentaire mais que c'est typique de l'utilisation des différentielles en physique au niveau du DEUG.

Mr Revuz intervient alors pour dire que, même sur un exemple aussi banal, un mathématicien a des commentaires à faire :

Dans cet exemple, effectivement dh a le statut d'un petit accroissement. Pourquoi dans ce cas là, ne pas utiliser la notation Δh et faire ensuite intervenir la dérivée de la fonction p de façon tout à fait conforme à sa définition, c'est-à-dire par passage à la limite; car dans toute la mise en équation ci-dessus, le passage à la limite est traité de façon implicite. On ne sait même pas à quel moment exact il intervient. On suppose de plus sans le dire que la fonction p est différentiable, alors qu'on pourrait le déduire de la continuité de la fonction p en présentant la mise en équation comme suit :

$$p(h+\Delta h) - p(h) = \int_h^{h+\Delta h} \varphi(u) g du \quad \text{la densité } \varphi \text{ n'ayant aucune}$$

raison, a priori, d'être supposée constante sur la tranche Δh

$$\text{D'où } \frac{p(h+\Delta h) - p(h)}{\Delta h} = \frac{1}{\Delta h} \int_h^{h+\Delta h} \varphi(u) g du$$

Si la fonction φ est continue, le second membre a pour limite $\varphi(h).g$ quand h tend vers 0, donc la fonction p est dérivable en h et de dérivée $\varphi(h).g$ ce qui peut s'écrire

$$p'(h) = \varphi(h).g \quad \text{ou} \quad dp = \varphi(h).g.dh$$

Même si sur l'instant, un accord paraît se réaliser autout d'un tel scénario pour la conduite de l'amphi, en fait, quand les deux enseignants responsables se rencontreront par la suite pour terminer la mise au point, leurs deux points de vue se heurteront à nouveau et ils ne pourront progresser. Au cours de la dernière réunion, des propositions plus farfelues seront envisagées : demander à chaque enseignant de jouer le rôle de l'autre, ce qui amène une réaction passionnée de l'enseignante de maths "je ne pourrai pas dire que la différentielle est un petit bout de truc, jamais!". Finalement l'amphi sera assuré par l'enseignant de physique seul; en quelques phrases, au début, il rappellera les définitions du cours de maths puis il n'en sera plus question du tout (voir A_8).

Finalement, la distance entre les deux points de vue extrêmes étant trop grande, aucune négociation n'aura été possible entre les deux protagonistes. Et toutes les discussions que nous aurons eues seront absolument sans effet sur la pratique enseignante des uns et des autres. Ceci sera très clairement perçu par les étudiants (voir A_2)

Il serait essentiel pour progresser maintenant dans l'analyse, de déterminer à quelles transpositions didactiques nous avons affaire dans chacun des cas, en fonction de quels impératifs elles se sont constituées, nous nous contenterons ici d'énoncer à ce sujet quelques hypothèses :

- L'enseignement mathématique tel qu'il a été pratiqué ici consiste à donner en premier lieu un statut à la différentielle, par une définition formelle, dans un cadre très général (différentielle d'une application entre deux espaces affines quelconques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de dimension finie). A partir de cette définition, il s'agit ensuite de descendre en quelque sorte et retrouver les notions de dérivées partielles et de matrice Jacobienne qui permettront à l'étudiant d'algorithmer sa pratique.

Les exercices proposés dans cette optique viseront donc d'une part à asseoir cette définition formelle, d'autre part à instaurer une pratique calculatrice.

On peut se demander à quoi aboutit chez les étudiants une telle pratique, extrêmement classique au niveau de l'enseignement supérieur. Qu'est pour eux l'objet différentielle si tant est qu'il existe? L'interview réalisé en fin d'année nous porterait à croire qu'il n'existe pas : la seule chose qu'évoque pour eux la notion de différentielle, c'est un espace vectoriel! Cet enseignement semble de plus renforcer chez eux la perception des mathématiques comme un simple langage. Ce qui les a frappés dans l'activité mathématique, c'est la complexité du discours à mettre en place pour avoir le droit de faire sur les écritures des transformations qu'ils jugent évidentes*

Ce discours n'est pas chargé de sens mais apparaît plutôt comme une sorte de cérémonial nécessaire, qu'ils se sentent incapables de reproduire. Et la pratique physicienne concomitante ne fait que renforcer cette vision des mathématiques, qui n'est sûrement pas celle que souhaitent privilégier les enseignants.

- En physique, ce qui frappe dans l'objet d'enseignement c'est qu'il s'agit d'un très vieil objet, l'enseignement en la matière (contrairement à ce qui s'est passé en mathématiques) n'ayant guère changé depuis une centaine d'années. Comme le résume très bien un étudiant: "la différentielle, c'est un petit truc que l'on somme". On ne semble guère éloigné ici des infiniments petits de l'aube de l'analyse (cf [1] et [7]) et le dx considéré en référence à une sommation "infinie" n'a que peu de rapport avec la différentielle, application linéaire tangente, excepté lors des changements de variable. L'aspect fonctionnel est complètement évacué et ceci rejaillit dans la pratique des enseignants et des étudiants à propos des mises en équation comme nous allons essayer de la montrer.

III-MISE EN EQUATIONS DE PROBLEMES

Un mois après l'amphi math-physique sur les différentielles, deux tests math-physique ont été passés par les étudiants. Dans le second de ces tests deux exercices comportant une mise en équation étaient proposés (cf. A_3). Le premier où il s'agissait d'une absorption de rayonnement conduisait à une équation différentielle. Le second, sur le champ électrique créé par un fil conducteur, conduisait à une intégration.

* Il est d'ailleurs significatif que, lors de l'interview, cherchant à éveiller à tout prix eu eux un souvenir, je me réfère spontanément non à la définition de la différentielle mais à ce qui est majeur dans l'algorithmisation: la notation de dérivée partielle.

- 78 -

Lors de la résolution du premier exercice, la majorité des étudiants après avoir écrit l'équation:

$$dI = -\mu I dx$$

écrit $I - I_0 = -\mu I e$ (e étant l'épaisseur de l'échantillon, et I_0 l'intensité du rayonnement incident) c'est-à-dire, la traite comme s'il s'était agi de l'une des deux équations suivantes :

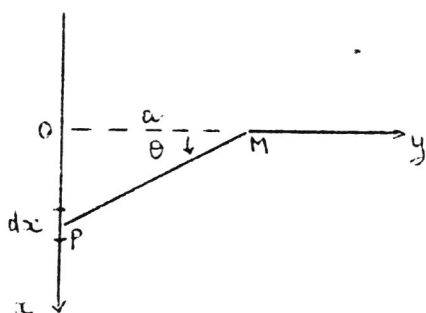
$$\begin{cases} dI = -\mu I_0 dx. \\ \Delta I = -\mu I_0 \Delta x. \end{cases}$$

- Dans le second exercice, ayant calculé le champ créé en M par l'élément de fil dx , les étudiants obtiennent une expression de la forme

$$A \cdot dx.$$

On leur suggère d'intégrer en prenant θ comme variable d'intégration - Ils le font, mais dans le changement de variable, la plus grande partie (80%) d'entre eux écrit

$$dx = PM \cdot d\theta$$



Ces erreurs ont été commises par trop d'étudiants pour résulter du seul hasard. On peut faire à leur sujet plusieurs hypothèses.

- La seconde, par exemple, s'interprète assez aisément, si l'on admet que l'étudiant voit dans la différentielle "un petit élément que l'on somme", en évacuant l'aspect fonctionnel.

Ayant calculé le champ élémentaire créé par dx : dE , champ qui se présente sous la forme $A \cdot dx$, pour calculer le champ créé par le fil entier, l'étudiant n'a qu'une conduite possible : sommer les champs élémentaires. A ce niveau, il est certain que des indicateurs comme le terme "élémentaire" répété à plusieurs reprises dans le texte, la notation différentielle elle-même, jouent le rôle de surdéterminateurs de sa conduite. Qu'il perçoive ou non un rapport entre cette sommation de champs élémentaires et la notion d'intégrale vue en terminale, il ne peut qu'écrire une intégrale. Donc le fait qu'il écrive correctement $\int_0^{+\infty} \dots dx$ n'est sans doute que peu significatif du point de vue de sa compréhension profonde du problème.

Par contre le fait que dans le changement de variable, il écrive $dx = PMd\theta$, peut être lui jugé significatif de sa conception de la différentielle. En effet, si dx n'est relié pour lui en rien à la dérivée d'une fonction x de θ , mais ne constitue qu'un petit élément qui se promène le long du fil, il est assez normal que, fonctionnant de manière automatique, il se raccroche au souvenir d'un élément différentiel où intervient $d\theta$. Or l'élément différentiel où intervient $d\theta$ le plus rencontré dans les intégrations en physique est certainement le : $ds = R d\theta$. Ici PM jouant le rôle de R , on obtient $dx = PMd\theta$.

Bien sûr, il ne s'agit là que d'une hypothèse de fonctionnement mais elle mériterait, à notre avis d'être testée.

. Dans le premier exercice, visiblement les étudiants n'ont pas reconnu une équation différentielle. Cela peut paraître assez normal, dans la mesure où les étudiants à cette époque n'avaient pas abordé, en mathématiques, la résolution des équations différentielles, et n'avaient traité, en physique que quelques cas de mises en équations de problèmes.

Mais il se peut aussi qu'intervienne dans leur attitude, la perception qu'ils ont de la différentielle: chaque tranche élémentaire absorbe le rayonnement dI et il s'agit de sommer les absorptions dI correspondant aux diverses tranches. Rien dans le discours et le traitement habituel du physicien ne laisse percevoir que cette situation est d'une nature fondamentalement différente de celle du fil conducteur :

- dans le cas du fil conducteur, la contribution de chaque tranche au champ global est indépendante de celles des autres
- dans le cas de l'absorption de rayonnement, l'absorption d'une tranche dépend de l'intensité à l'entrée de la tranche donc des absorptions précédentes. On ne peut sommer directement les dI , on ne peut que sommer les absorptions relatives $\frac{dI}{I}$. C'est d'ailleurs de cette façon que le problème sera traité en

général en physique : - après $dI = -\mu I dx$

on écrira $\int \frac{dI}{I} = -\mu \int dx$ sans autre commentaire

et non : $I' = -\mu I$

Il n'y aura à aucun moment, référence explicite à l'objet : Equation différentielle.

Il ne serait donc pas étonnant que l'étudiant, même si l'objet "équation différentielle" est pour lui un objet identifié, face à un tel problème posé en des termes physiques, fasse uniquement référence à sa pratique physicienne et ne reconnaisse pas ici une équation différentielle. A ce moment là, la réduction $I = I_0$ n'a d'autre but que de rendre possible la sommation directe des dI .

Ceci n'est encore une fois qu'une hypothèse, mais le fait que l'enseignement mathématique sur les équations différentielles n'ait que peu influé sur de tels comportements, comme nous avons pu le constater au cours du troisième test math-physique, laisse à penser qu'il faut l'envisager au moins comme agent renforçateur du modèle linéaire, modèle que l'on sait particulièrement prégnant et qui est appelé ici par le mot "proportionnel" agissant comme surdéterminateur de la conduite de l'étudiant.

Au cours du troisième test math-physique qui eut lieu à la suite des amphis math-physique sur les équations différentielles et des T.D. de maths, furent proposés aux étudiants 4 exercices, 2 sous une forme strictement mathématique, 2 sous une forme plus "physique". Les deux exercices mathématiques qui concernaient des équations linéaires à coefficients constants du premier et second ordre furent bien réussis.

L'un des exercices de physique donna lieu à de nombreuses erreurs :
Le texte en était le suivant :

La vitesse de refroidissement d'un liquide placé dans une pièce plus froide est proportionnelle à la différence existant entre la température T de ce liquide et celle de la pièce : T_a

On place de l'eau bouillante dans une pièce où la température est 20°C . Au bout de 20 min., la température de l'eau est de 60°C .

Au bout de combien de temps sera-t-elle de 30°C ?

Alors que les étudiants venaient de résoudre une équation de la forme : $y' = ay + F(t)$
en écrivant presque tous : "Je résous l'équation homogène $y' = ay$ les solutions sont de la forme $y = C e^{at}$
puis je cherche une solution de l'équation avec second membre
(se référant ainsi à la pratique qu'ils avaient en T.D. de mathématiques).

pour l'exercice sur les températures, après avoir écrit :

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a)$$

presque aucun n'adopte une stratégie analogue. Certains écrivirent $\frac{dT}{T-T_a} = K dt$ et intégrèrent.

- . d'autres restèrent bloqués à ce niveau là ou au niveau même de l'équation
- . quelques-uns confondant les variables t et T se perdirent dans la résolution.
- . Une quantité non négligeable fournit des réponses du style suivant :

$$\frac{dT}{dt} = K(T - t_a) \quad \text{à } t = 0 \quad T_0 = 100^\circ \text{ C}$$

$$\text{à } t = 20 \text{ min.} = 1200, \text{ on a } T = 60^\circ \text{ C}$$

$$\frac{100-60}{1200} = K (60-20) \quad K = \frac{1}{1200}$$

$$\frac{100-30}{t_1-t_0} = \frac{1}{1200} (30-20)$$

$$\frac{70}{t_1} = \frac{1}{1200} \times 10$$

$$t_1 = 70 \times 120 = 8400$$

$$t_1 = 1 \text{ h. } 8 \text{ min.}$$

c'est-à-dire révélant un comportement proche de celui adopté lors du second test math-physique $\frac{dT}{dt} = K (T - T_a)$ devenant $\frac{\Delta T}{\Delta t} = K (T_0 - T_a)$ puis

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = K (T_1 - T_a)$$

La résolution de ce problème ne relevait donc pas pour la quasi-totalité des étudiants de la rubrique : Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Pourtant nous avons eu l'impression de réussir sur ce thème, la coordination math-physique. La réalisation des deux amphis communs m'avait soulevé aucun problème. Les étudiants les avaient bien appréciés. Il est sûr qu'en mathématique, disposant de peu de temps pour cet enseignement traditionnellement au programme de la seconde année, désirant élargir le champ de notre

enseignement en mettant l'accent sur des procédures graphiques et numériques de résolution, nous n'avions fourni aux étudiants que des objets sans histoire, laissant aux physiciens l'entière responsabilité des mises en équation. En fait, nous admettions implicitement que le transfert se ferait, que l'objet serait identifié.

Il a fallu le choc du test math-physique pour nous faire prendre conscience du fait que, sans une analyse plus approfondie du fonctionnement de notre enseignement aux uns et aux autres, de tous les présupposés implicites qui les gouvernent, notre effort ne serait que de peu d'efficacité auprès des étudiants.

IV - CONCLUSION

De ce qui précède, je voudrais conclure, non qu'il n'y a pas d'amélioration possible de l'enseignement, mais qu'une amélioration passe nécessairement pour le moins, par une analyse approfondie de son fonctionnement et ne peut s'opérer de façon purement empirique. Il est nécessaire d'essayer de comprendre pourquoi un enseignement "marche" ou pour quoi il "ne marche pas". Comme le souligne Y. Chevallard dans [3], cette tâche suppose un détour théorique et ne peut être considérée comme du seul ressort de l'enseignant.

Il suffit de songer au nombre de problèmes évoqués en ces quelques pages, à l'importance et à la nature des recherches qui, seules permettraient, en les élucidant, de mieux maîtriser l'enseignement, pour en être persuadé.

A un niveau tout autre, il semble difficile de se satisfaire tant des résultats de l'enseignement mathématique sur les différentielles et sur les équations différentielles qui a été conçu ici, vu le public auquel il s'adressait, que de la coupure totale qui existe chez les étudiants entre leur pratique en mathématiques et leur pratique en physique.

En mathématiques on a voulu donner d'emblée, une vision globale, unifiée du concept. Ceci oblige à grimper dans la hiérarchie des structures et à employer, pour être rigoureux, un langage extrêmement lourd (donc d'une exportation difficile). L'attention des étudiants se focalise, sur les règles de fonctionnement de ce langage, au détriment du sens de la notion.

Les exercices proposés en travaux dirigés, s'ils ne renforcent pas ce point de vue, en tout cas ne parviennent pas à le modifier. N'y aurait-il pas d'autres stratégies d'enseignement envisageables ?

Par exemple, partir de situations nécessitant l'approximation linéaire, développer les outils mathématiques qui lui sont associés, dérivées, dérivées partielles pour les fonctions de plusieurs variables, matrices jacobiniennes pour les fonctions vectorielles et n'aborder qu'à la fin de cet enseignement de première année, le cadre général qui l'unifie.

En physique, on cherche à gommer le plus possible, le côté fonctionnel. Comme on peut le lire dans le poly distribué aux étudiants à l'issue de l'amphi "math-physique" sur les différentielles :

"Alors que les expressions ci-dessus constituent des relations entre applications, les physiciens les utiliseront comme relations entre grandeurs physiques".

L'expression semble attribuer une certaine fixité aux grandeurs physiques, et leur interdire d'être elles-mêmes des fonctions de telle ou telle variable. Cela ne semble pas sans danger pour les étudiants. Là aussi n'y a-t-il pas d'autre stratégie possible ?

- 84 -

A N N E X E A 8

Textes distribués en mathématiques et en physique
à propos de différentielles.

Notes de préparation de l'amphi Math-Physique sur les
différentielles.

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Pour une application f d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et un point x de $]a, b[$ les trois définitions suivantes sont équivalentes :

1° f est dérivable en x , c.à.d. $h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite finie ℓ quand h tend vers 0. Cette limite est appelée la dérivée de f en x et se note $f'(x)$.

2° f est différentiable en x , c'est à dire que l'on peut écrire pour tout h tel que $x+h \in]a, b[$, $f(x+h) - f(x) = \ell h + \varepsilon(h)|h|$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

L'application linéaire $h \mapsto \ell h$ est appelée la différentielle de f au point x .

3° La fonction f possède en x une meilleure approximation linéaire locale, c.à.d. qu'il existe une application linéaire $h \mapsto \ell h$ (la différentielle de f en x) telle que pour tout autre application linéaire $h \mapsto kh$ avec $k \neq \ell$, il existe un nombre h_0 tel que

$$\forall h \quad |h| < h_0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x) - \ell h| < |f(x+h) - f(x) - kh|$$

C'est la deuxième définition qui se généralise avec le plus de fécondité au cas d'une application d'un ouvert d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{F}$.

I. Situation générale .

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ des espaces affines et E, F les espaces vectoriels associés. On suppose E et F de dimensions finies et normés. Dans ce cas toutes les normes sur E (resp. sur F) sont équivalentes.

Définition : Une partie Ω de $\mathcal{E}$ est un ouvert si tout point de Ω est le centre d'une boule ouverte incluse dans Ω .

Définition : Soit f une application d'un ouvert Ω de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. On dit que f est différentiable au point M de Ω s'il existe $\ell : E \rightarrow F$ linéaire et continue et $\varepsilon : E \rightarrow F$ telles que

$$\forall \vec{u} \in E \quad M + \vec{u} \in \Omega \Rightarrow f(M + \vec{u}) = f(M) + \ell(\vec{u}) + \varepsilon(\vec{u}) \|\vec{u}\|$$

avec $\lim_{\vec{u} \rightarrow 0} \varepsilon(\vec{u}) = 0$.

Remarque : E et F étant supposés de dimensions finies, toute application linéaire de E dans F est continue.

Interprétation de la définition : l'idée est de pouvoir, au voisinage de M , approximer f par une application affine. En effet soit $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par $g(N) = f(M) + \ell(\vec{MN})$; g est affine et on a :

- 86 -

$$f(N) - g(N) = \varepsilon(\vec{MN}) \|\vec{MN}\|.$$

Les applications affines constituent donc l'exemple le plus simple d'applications différentiables.

Notations et terminologie :

ℓ s'appelle la différentielle de f en M . On écrit $\ell(\vec{u}) = D(f, M, \vec{u})$ ou $\ell(\vec{u}) = d_M f(\vec{u})$, autrement dit l'application linéaire ℓ se note soit $D(f, M, \cdot)$ soit $d_M f$.

Remarque : Si g est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, g est différentiable en tout point M de $\mathcal{E}$ et sa différentielle $d_M g$ en ce point est l'application linéaire associée à g ; donc $d_M g$ ne dépend pas du point M , et l'application $dg : M \mapsto d_M g$ est constante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Cas particulier où $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$:

Dire que f est différentiable en M revient à dire que f est dérivable en M . Dans ce cas $d_M f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit une homothétie, et c'est l'homothétie de rapport $f'(M)$.

Propriété fondamentale des applications différentiables :

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ des espaces affines ayant pour e.v. associés E, F, G . Si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable en M et si $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est différentiable en $f(M)$ alors $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est différentiable en M et $d_M(g \circ f) = d_{f(M)} g \circ d_M f$.

II. Cas des applications à valeurs dans un espace vectoriel.

Nous supposons dans ce paragraphe que $\mathcal{F} = F$.

Si f_1 et f_2 sont deux applications différentiables de Ω dans F , $f_1 + f_2$ est différentiable et $\forall M \in \Omega \quad d_M(f_1 + f_2) = d_M f_1 + d_M f_2$.

Si f est différentiable de Ω dans F , alors $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f$ est différentiable et $\forall M \in \Omega \quad d_M(\lambda f) = \lambda d_M f$.

Il en résulte que l'ensemble des applications différentiables de Ω dans F est un espace vectoriel.

Lorsque $F = \mathbb{R}$ on peut ajouter que le produit de deux fonctions différentiables f et g est différentiable et que $\forall M \in \Omega \quad d_M(fg) = f(M)d_M g + g(M)d_M f$.

Donc l'ensemble des applications différentiables de Ω dans $\mathbb{R}$ a une structure d'anneau pour la somme et le produit.

III. Applications à valeurs dans un espace produit.

On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des espaces affines.

Alors si F_1 et F_2 sont les e.v. associés à $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ l'e.v. F associé à $\mathcal{F}$ est $F_1 \times F_2$.

Dans ce cas, la donnée d'une application f de Ω dans $\mathcal{F}$ équivaut à la donnée de deux applications f_1 et f_2 , f_1 de Ω dans $\mathcal{F}_1$ et f_2 de Ω dans $\mathcal{F}_2$:

$$\forall M \in \Omega \quad f(M) = (f_1(M), f_2(M)).$$

Proposition : f est différentiable en M si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiables en M . Dans ce cas, l'application linéaire $d_M f$ de E dans $F_1 \times F_2$ est l'application $\vec{u} \mapsto (d_M f_1(\vec{u}), d_M f_2(\vec{u}))$.

IV. Applications bilinéaires continues.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Proposition : Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) B est continue.
- (b) B est continue en $(0,0)$.
- (c) Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \vec{u} \in E \quad \forall \vec{v} \in F \quad \|B(\vec{u}, \vec{v})\| \leq k \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Proposition : Si B est une application bilinéaire continue, B est différentiable et on a, en tout point $(\vec{u}, \vec{v})$ de $E \times F$:

$$\forall (\vec{h}, \vec{k}) \in E \times F \quad [d_{(\vec{u}, \vec{v})} B](\vec{h}, \vec{k}) = B(\vec{h}, \vec{v}) + B(\vec{u}, \vec{k}).$$

Exemples d'applications bilinéaires continues :

- a) $E = \mathbb{R}, F = G \quad B(\lambda, \vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- b) $E = F$ est un e.v. euclidien, $B(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ produit scalaire.
- c) $E = F$ est un e.v. euclidien orienté, $B(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$ produit vectoriel.

Conséquences :

- a) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et si $g : \Omega \rightarrow F$ est différentiable, alors l'application $fg : M \mapsto f(M)g(M)$ est différentiable et $d_M(fg) = f(M)d_M g + g(M)d_M f$.
- b) Si $f : \Omega \rightarrow F$ et $g : \Omega \rightarrow F$ sont différentiables et F euclidien, l'application $f.g : M \mapsto f(M).g(M)$ (produit scalaire) est différentiable et $d_M(f.g)(\vec{u}) = f(M).d_M g(\vec{u}) + g(M).d_M f(\vec{u})$.
Si de plus F est orienté, l'application $f \wedge g : M \mapsto f(M) \wedge g(M)$ est différentiable et $d_M(f \wedge g)(\vec{u}) = f(M) \wedge d_M g(\vec{u}) + d_M f(\vec{u}) \wedge g(M)$ (cette fois attention à l'ordre).

V. Notations.

Soit $(0, (\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n})$ un repère cartésien de E .

On définit les applications "coordonnées" x_i par $\vec{OM} = \sum_{i=1}^n x_i(M) \vec{e}_i$.

L'application $x_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ est affine, l'application linéaire associée étant

$p_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p_i(\sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j) = u_i$.

Autrement dit p_i est l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$p_i(\vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Proposition : $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Les éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ s'appellent des "formes linéaires" sur E et l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, noté E^* , est le dual de E .

On dit que $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ est la base duale de la base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$.

Remarque : L'application affine x_i est donc trivialement différentiable et $\forall M \in E \quad d_M x_i = p_i$; autrement dit l'application $dx_i : M \mapsto d_M x_i$ de E dans E^* est constante.

Soit maintenant $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable.

On a $\forall \vec{u} \in E$ tel que $M + \vec{u} \in \Omega \quad f(M + \vec{u}) = f(M) + d_M f(\vec{u}) + \varepsilon(\vec{u}) \|\vec{u}\|$ avec $\lim_{\vec{u} \rightarrow 0} \varepsilon(\vec{u}) = 0$.

Si $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$, on a $d_M f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u_i d_M f(\vec{e}_i)$.

$d_M f(\vec{e}_i)$ qui est un élément de $\mathbb{R}$, s'appelle la dérivée partielle de f suivant $\vec{e}_i$ (ou suivant x_i), en effet

$$d_M f(\vec{e}_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{e}_i) - f(M)}{t}.$$

Au lieu de $d_M f(\vec{e}_i)$ on écrit souvent $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$.

Dans la base $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ de E^* , $d_M f$ s'écrit donc

$$d_M f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) p_i.$$

Il arrive - souvent en mathématiques, et toujours en physique - que l'on remplace p_i par $d_M x_i$.

On obtient $d_M f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) d_M x_i$

où - les $d_M x_i$ et $d_M f$ sont des éléments de E^*
- les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ sont des réels.

Si ensuite, on note df l'application $M \mapsto d_M f$ de Ω dans E^* et

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ les applications $M \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ de Ω dans $\mathbb{R}$, on a l'égalité

suivante, entre applications de Ω dans E^* :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Terminologie : D'une manière générale une application de Ω dans E^* s'appelle un forme différentielle sur Ω .

Une forme différentielle ω sur Ω est donc la donnée pour chaque point M de Ω d'un élément $\omega(M)$ de E^* . Cet élément se décompose dans la base $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ de E^* :

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^n g_i(M) p_i \quad \text{où } \forall i \quad g_i(M) \in \mathbb{R}.$$

Se donner ω revient donc à se donner n applications g_i de Ω dans $\mathbb{R}$ et on a alors $\omega = \sum_{i=1}^n g_i p_i$.

Ici encore il est usuel de remplacer p_i par $d_M x_i$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \omega(M) &= \sum_{i=1}^n g_i(M) d_M x_i \quad (\text{égalité dans } E^*) \\ \text{ou} \quad \omega &= \sum_{i=1}^n g_i dx_i \quad (\text{égalité entre formes différentielles}). \end{aligned}$$

Remarque : comme dx_i est une forme différentielle constante on ne distingue pas toujours entre dx_i et $d_M x_i$.

VI. Matrices jacobiennes.

On revient au cas général étudié en I.

Soit $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de E et $(\vec{f}_j)_{j=1, \dots, p}$ une base de F .

La matrice de $d_M f$ dans ces bases est la matrice ayant pour colonnes les coordonnées des vecteurs $d_M f(\vec{e}_i)$ dans la base $(\vec{f}_j)_{j=1, \dots, p}$; on la note $J_M f$ et on dit que c'est la matrice jacobienne de f en M .

Dans la pratique se donner des bases dans E et F et se donner des origines dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ revient à se ramener au cas où f est une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Or une application f d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est la donnée de p applications de Ω dans $\mathbb{R}$, avec $\forall M \in \Omega \quad f(M) = (f_1(M), \dots, f_p(M))$.

Dans ce cas

$$J_M f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(M) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(M) \end{bmatrix}.$$

Il résulte du théorème sur la composée des applications différentiables que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ sont différentiable $J_M(g \circ f)$ est égale au produit des deux matrices $[J_{f(M)} g][J_M f]$.

Remarque : Si $n = p$ et si $\det(J_M f) \neq 0$, la matrice $J_M f$ est inversible, ce qui revient à dire que $d_M f$ est inversible. Donc au voisinage de M , f est peu

- 90 -

différente d'une application affine bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On peut alors penser que, dans un voisinage convenable de M (c.à.d. suffisamment petit) f est également bijective . Ce résultat est vrai mais techniquement long à démontrer bien que l'idée initiale soit simple (pour la démonstration attendre un ou deux ans).

IS SS M 1

Chap 1

REMBULE

Différentielles

- 91 -

22/11/79

Notes de préparation de l'amphi.

Math-Physique sur les différentielles.

Rappels mathématiques

Etant donné deux espaces affines $\vec{E}$ et $\vec{F}$ et les espaces vectoriels associés E et F normés, on dit qu'une application $h: \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ est différentiable en $M \in \vec{E}$, s'il existe une application linéaire ℓ de E dans F telle que $\forall \vec{u} \in E$

$$h(M + \vec{u}) = h(M) + \ell(\vec{u}) + \varepsilon(\vec{u}) \|\vec{u}\|$$

où $\lim_{\vec{u} \rightarrow 0} \varepsilon(\vec{u}) = 0$

ℓ , qui est unique, est la différentielle de h en M , notée $d_M h$ ($= D_{F,M} h$).
la différentielle peut s'écrire

$$d_M h(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\vec{M})}{\partial x_i} d_{x_i}(\vec{u})$$

Utilisation par les physiciens

Mais que les expressions ci-dessus constituent des relations entre applications les physiciens les utilisant comme relations entre grandeurs physiques ce qui se traduit par un allègement des notations

- d'une part on se place dans les espaces vectoriels E et F , ce qui s'écrit que $M \rightarrow \vec{OM}$ (et par ailleurs $\vec{u} = \vec{MM'} = \Delta \vec{OM}$)

- on sous-entend les indices relatifs au point M .

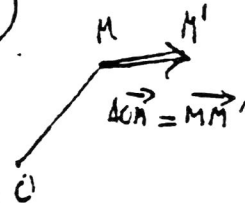
d'où l'écriture

$$h(\vec{OM} + \Delta \vec{OM}) - h(\vec{OM}) = dh + \varepsilon$$

$$dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$$

(1)

(2)



Enfin et surtout souhaitant pouvoir assimiler la variation $\Delta h = h(\vec{OM} + \Delta \vec{OM}) - h(\vec{OM})$ à la différentielle dh , afin de bénéficier de la relation linéaire entre les dx_i et dh , le physicien se restreindra aux dx_i petits, afin que le terme correctif de (1) puisse être négligé.

les dx_i peuvent représenter une variation - une infinitésimale

UTILISATION des DIFFERENTIELLES**[1] Espace E à une dimension**

Par une fonction h d'une seule variable x , (2) s'écrit

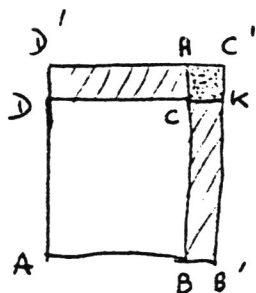
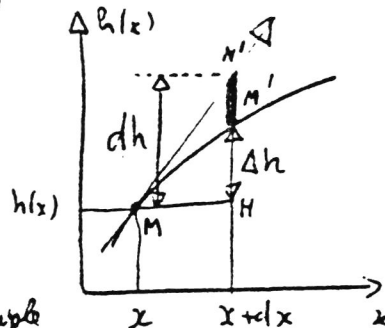
$$dh = h'(x) dx \quad (3)$$

La différence entre la variation exacte $\Delta h = h(x+dx) - h(x)$ et la différentielle permet de mise en évidence supplémentaire.

a) sur le graphe $h(x)$

$$\begin{aligned} M'H &= \Delta h \\ N'H &= dh \end{aligned}$$

$\rightarrow M'N' \Leftrightarrow \varepsilon(h) \| dx \|$
(qui tend vers 0 en $dx \rightarrow 0$
par toute fonction continue)



b - Géométriquement, par exemple la fonction $h = x^2$ représente l'aire d'un carré de côté x

dh est représenté par l'aire hachurée

L'aire du carré $HC'KC$ représente le terme correctif ε

Ici $h = x^2 \quad \Delta h = h(x+dx) - h(x) = 2x dx + (dx)^2$
d'où analytiquement $dh = h' dx = 2x dx$

Dans l'expression (3) dh et dx apparaissent comme des grandeurs algébriques autonomes, on peut, entre autres, écrire

(on peut appliquer les règles d'algèbre habituelle)

$$h'(x) = \frac{dh}{dx}$$

qui rappelle $h' = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x}$

cf dérivée $dM = n dV$

C'est plus qu'une écriture. Ainsi cela permet d'exprimer la dérivée

* d'une fonction paramétrisée

$$x = f(t) \quad dx = f'(t) dt$$

$$y = g(t) \quad dy = g'(t) dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'}{f'} = y'_x \text{ (elle est paramétrisée)}$$

* de la fonction impliquée $F(x,y)=0$

* de la fonction inverse (si elle existe !)

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(y) = G(y)$$

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{f'_x}$$

Exemple

$$\text{Ex: } y = e^x \Leftrightarrow x = G(y) \text{ avec } \frac{dx}{dy} = G' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow G'(y) = \frac{1}{y} \quad (G \equiv \text{Log})$$

$$y = \sin x, \cos x, \dots$$

les règles et résultats connus pour ces dérivées, se transposent aisément pour les différentielles. Ainsi

y	$u(v(x))$	$u/v(x)$	$u(v^h)$
dy	$u dv + v du$	$\frac{v du - u dv}{v^2}$	$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} dx$

y	x	x^α	$\text{Log } x$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\text{Arcsin } x$
dy	dx	$\alpha x^{\alpha-1} dx$	$\frac{dx}{x}$	$\cos x dx$	$-\sin x dx$	$e^x dx$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Formule d'approximation : $h(x+\epsilon) \approx h(x) + \epsilon h'(x)$ cf. ci-dessus

2) [2] Espace à plusieurs dimensions

- En mécanique il s'agit de 2 (ou 3) variables d'espace (x, y ou x, y, z) et du temps.

Dans d'autres cas il pourra s'agir du volume et de la température (en thermodynamique, cf $pV = nRT$), ou de la vitesse et de la pression (en hydro- ou aérodynamique) etc...

- La relation (2) fait intervenir les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ définies comme dérivées par rapport à la variable x_i lorsque toutes les autres sont momentanément fixées

Exemples $h = x \sin y$ $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \sin y \\ \frac{\partial h}{\partial y} = x \cos y \end{cases}$

$h = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{h} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{h} \end{cases}$

Les expressions ainsi obtenues peuvent être à nouveau différenciées. On vérifie que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)$

Autre exemple

- Remarque $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ est une notation symbolique, pas un quotient

- Le développement $dh = \sum \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$ est unique, ce qui autorise d'identifier terme à terme si deux expressions ont été obtenues par des voies différentes (conf. GRADIENT)
- L'expression (2) est à la base du Calcul (d'incertitude)

[3] Fonction vectorielle d'une variable 10h 40

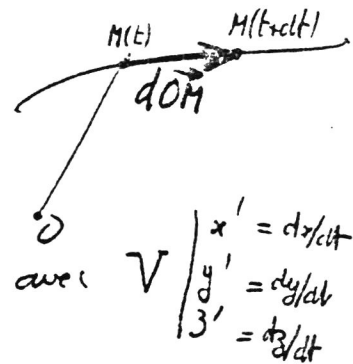
9.4-

La différentielle d'un vecteur est le vecteur ayant pour composantes les différentielles des composantes respectives.

Exemple : le vecteur position $\vec{r} \equiv \vec{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

La courbe on assimile

$$\Delta \vec{OM} \equiv \overrightarrow{M(t)M(t+dt)} \quad \text{et} \quad d\vec{OM} = \vec{V}(t) dt$$



En particulier la distance parcourue entre t et $t+dt$ est

$$dl = |\vec{V}(t)| dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

En outre l'expression (2) peut s'interpréter comme le produit scalaire du vecteur

$$d(\vec{OM}) \begin{cases} dx_1 = dx \\ dx_2 = dy \\ dx_3 = dz \end{cases}$$

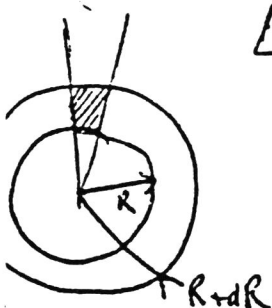
et d'un certain vecteur $\vec{X} \begin{cases} X_1 = \frac{\partial h}{\partial x} \\ X_2 = \frac{\partial h}{\partial y} \\ X_3 = \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases}$

$$dh = \vec{X} \cdot d\vec{OM} \quad (3)$$

L'expression (4) apparaît bien comme l'extension à plusieurs dimensions de $dh = h' dx$, la "Variation". dh est "proportionnelle" au déplacement élémentaire $d\vec{OM}$

[4] Quelques exemples

Deux exemples géométriques utiles



[1] Aire d'une couronne cylindrique $R, R+R$

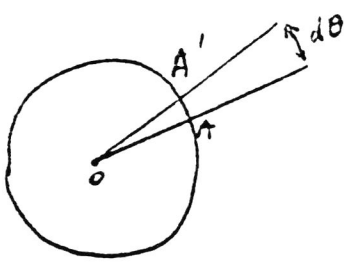
Deux rayons perpendiculaires déterminent un "rectangle annulaire". L'ensemble de tous ces éléments qui constituent la couronne est assimilable à un rectangle de longueur R et de largeur le périmètre $2\pi R$

$$dA = 2\pi R dR$$

Si A désigne l'aire du cercle, de rayon R , une variation dR du rayon entraîne une variation de surface

$$dA = d(\pi R^2) = 2\pi R dR$$

(CQFD)

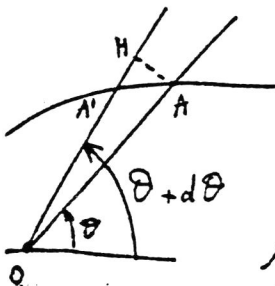


2) Aire d'un secteur

Sur un disque de rayon R un angle $d\theta$ détermine un triangle isocèle OAA' d'aire

$$dS = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

Pour une fois, cette expression représente rigoureusement l'aire dS , puisque la surface est une fonction linéaire de l'angle



Pour les courbes autres que le cercle, on continue à utiliser la même relation

$$dS = \frac{1}{2} S^2(\theta) d\theta$$

Pourvu que $d\theta$ soit petit, l'erreur est le triangle AHA' .

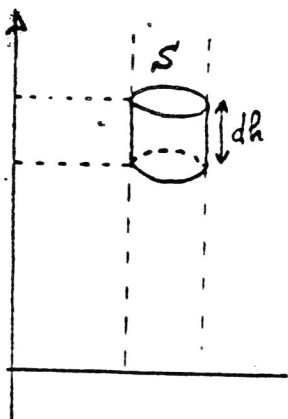
3) Un exemple physique

Établissement de la variation de la pression avec l'altitude dans une colonne de gaz au repos.

Tout élément étant au repos, est soumis à une force résultante nulle. (pression et poids)

$$\sum F_i = S p(h) - S p(h+dh) - \rho S dh \cdot g = 0$$

$$dp = -\rho(h) g(h) dh$$



Couplé - tenu. de la relation de Manette $pV = nRT \Rightarrow p = \frac{RT}{M} \rho$

• que g varie peu avec l'altitude

$$dp = -\frac{M g_0}{RT} p dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M g_0}{RT} dh$$

$$\rightarrow p = p_0 e^{-\frac{M g_0}{RT} h}$$

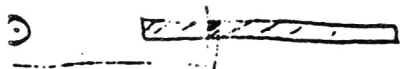
Ex Num $M \sim 30 \cdot 10^{-3}$, $g \sim 10$; $R = 8,2$; $T \approx 300$ $p = p_0 \exp(-h/8103)$

En particulier p diminue de moitié sur environ 4000 m.

4) Attraction d'une bille par un barreau

10 h 50

$$dF = G \frac{(p dx) m}{x^2}$$



Université Paris 7
1979 - 80

7^e Semaine :

DEUG - SSM 1.

Propositions d'exercices sur les différentielles

 Section E

- Calculer la différentielle des fonctions $y=y(x) = \frac{a-x}{a+x}$, x^x , $\sin^2 x$, $\text{Log}(\text{Log} x)$
des fonctions $p(V,T) = RT/V$, $g(h) = g_0 / (1 + \frac{h}{R})^2$
- Calculer approximativement $\sqrt{66}$, $\cos(87^\circ)$, $\log(2,005)$
- Montrer que pour la fonction paramétrée $x = a \cos 2t$, $y = b \sin^2 t$: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$
- Quelle erreur relative sur la période du pendule simple commet-on si l est connu à 1% près et g à 5% près ?
- Quel est le volume d'une tranche de sphère comprise entre deux plans parallèles distants de a et $a+da$ du centre ?
- Quel travail (élémentaire) faut-il fournir pour allonger un ressort de dl ?
- Quel travail (élémentaire) faut-il fournir pour soulever une masse M de dh - lorsqu'on néglige la variation de pesanteur
- lorsqu'on ne la néglige pas.
- En vue de calculer l'énergie cinétique d'un disque plein, de rayon R , de masse M tournant à la vitesse angulaire ω autour de son axe, on calcule d'abord l'énergie cinétique d'une couronne comprise entre les rayons r , et $r+dr$.
- Pour l'étude des propriétés dynamiques des véhicules on utilise parfois le diagramme donnant l'inverse de l'accélération en fonction de la vitesse. Quelle est la signification de l'élément d'aire comprise entre cette courbe l'axe des abscisses et deux verticales d'abscisses v et $v+dv$?
- Lorsque de l'énergie (optique, acoustique ...) traverse un milieu, celui-ci en absorbe une partie. Calculer la diminution d'énergie lors de la traversée d'une épaisseur dx sachant que l'absorption est proportionnelle à l'énergie présente au point considéré et à l'épaisseur traversée
- De combien baisse le niveau dans une cuve à mazout assimilable à un cylindre de rayon $R = 1\text{m}$ et de hauteur $h = 2\text{m}$ posé horizontalement sur le sol, lorsqu'on prélève 20 litres ?

ITE PARIS VII
DE MATHÉMATIQUES

NN.121. 122, SECTION E
M.A.REVUZ

PROBLEME N° 4

A remettre en T.D. de Maths le mardi 27 novembre ou le mercredi 28 novembre

- 1° Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit les deux applications de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$N_1 : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto \sup (|a| + |b|, |c| + |d|)$$

$$N_2 : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto \sup (|a| + |c|, |b| + |d|)$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathcal{M}$.

- 2° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E . On définit les deux normes suivantes sur E :

$$n_1 : x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \longmapsto |x_1| + |x_2|$$

$$n_2 : x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \longmapsto \sup (|x_1|, |x_2|)$$

A tout endomorphisme f de E on associe sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base B . Montrer que

a) $\forall \vec{x} \in E \quad n_1(f(\vec{x})) \leq N_1(M) n_1(\vec{x})$

b) $\forall \vec{x} \in E \quad n_2(f(\vec{x})) \leq N_2(M) n_2(\vec{x})$

- c) et que dans chacun des deux cas précédents la majoration obtenue est la meilleure possible.

- 3° Etudier la différentiabilité des deux applications N_1 et N_2 en $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

UNIVERSITE PARIS VII
SERVICE COMMUN A
MATHEMATIQUES
MC.11/79

ANNEE UNIVERSITAIRE 1979/1980
NN 121.122 SECTION E - A.REVUZ
R. GRUNIG

PROBLEME 5

(à remettre en T.D. de Math. le mardi 4 décembre ou le mercredi 5 décembre)

Soit $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F_1(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$
et $F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F_2(\rho, \theta, \psi) = (\rho \sin \psi, \theta, \rho \cos \psi)$.

1/ Si (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace affine euclidien orienté de dimension 3 ξ , par rapport à un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, et si l'on a $(x, y, z) = F_1(r, \theta, z) = (F_1 \circ F_2)(\rho, \theta, \psi)$, que représentent (r, θ, z) et (ρ, θ, ψ) ?

2/ On appelle $G_1 : \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $G_2 : \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$.
Les restrictions de F_1 et F_2 au domaine de départ indiqué. Montrer que G_1 et G_2 sont injectives et que le composé $G_1 \circ G_2$ existe.

3/ Montrer que G_1 et G_2 sont différentiables en tout point de leur domaine de définition. Calculer leur matrice jacobienne en tout point et le déterminant de celle-ci.

Calculer $G_1 \circ G_2$, sa matrice jacobienne, le produit des matrices jacobienes de G_1 et G_2 . Que vérifie-t-on ?

4/ Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On définit g par $f \circ G_1 \circ G_2$.

Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial g}{\partial \psi}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ et inversement.

Vérifier le résultat obtenu dans le cas où f est définie par $f(x, y, z) = x e^{y(z^2+1)}$.

UNIVERSITE PARIS VII
SERVICE COMMUN A
MATHEMATIQUES

ANNEE UNIVERSITAIRE 79/80
NN 121.122 SECTION E - A.REVUZ
J. PICHAUD

PROBLEME N° 6

A remettre en TD de maths le mardi 11 ou le mercredi 12 décembre 1979.

1°/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (xy, x^2+y^2)$$

Montrer que f est différentiable.

Quelle est la matrice jacobienne de f au point (x,y) ?

2°/ Soient $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x$ $(x,y) \mapsto y$

On notera dx et dy les formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$ qui à un point M de $\mathbb{R}^2$ associent respectivement p_1 et p_2 .

Soit ω une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$; on a $\omega = Pdx + Qdy$ où P et Q sont des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

A ω on associe une autre forme différentielle $\bar{\omega}$ définie par :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{\omega}(M) = \omega(f(M)) \circ d_M f.$$

Déterminer en fonction de P et Q , les applications $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\omega = \bar{P}dx + \bar{Q}dy$.

3°/ Soient $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy$ et $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy$ avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
 $P_1(x,y) = y^2$ $Q_1(x,y) = 2xy$
 $P_2(x,y) = 2xy$ $Q_2(x,y) = x+y$.

a/ ω_1 et ω_2 sont-elles exactes ?

b/ calculer $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$. Sont-elles exactes ?

4°/ Soit $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Calculer les intégrales des formes ω_1 , ω_2 , $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ sur le chemin φ .

B I B L I O G R A P H I E

- (1) N. BOURBAKI : Eléments d'histoire des mathématiques 1974 - Hermann
 - (2) Y. CHEVALLARD : La transposition didactique
Cours rédigé pour l'Ecole d'été de didactique 1980.
 - (3) Y. CHEVALLARD : The didactics of mathematics : its problematic and
related research
Communication présentée au Congrès ICME IV
sur l'enseignement des mathématiques
Berkeley 1980
 - (4) Y. CHEVALLARD : La politique de l'ignorance
Revue Recherches n° 42 - 1980
 - (5) B. CORNU : Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage
de la notion de limite

Séminaire de Recherche pédagogique n° 8 - 1980
Université Scientifique et médicale de Grenoble
 - (6) J. DHOMBRES Nombre, mesure et continu
1978 - Editions CEDIC
 - (7) C. HOUZEL, J.L. OVAERT, Philosophie et calcul de l'infini
P. RAYMOND, J.J. SANSUC : 1976 - Maspéro
 - (8) A. ROBERT : Essai sur la description de l'acquisition du concept
de convergence de suites numériques
(notes communiquées personnellement)
 - (9) B. ROZOY-SENECHAL : Enseigner des mathématiques à l'Université en 1980?
Bulletin APMEP 1980
 - (10) M. VERRET : Le temps des études - Tome I - 1975
Librairie Honoré Champion - Paris
 - (11) L. VIENNOT : Pratique de l'algèbre élémentaire chez les étudiants
en physique.
Bulletin de l'Union des Physiciens n° 622 - 1980.
-

