

IREM

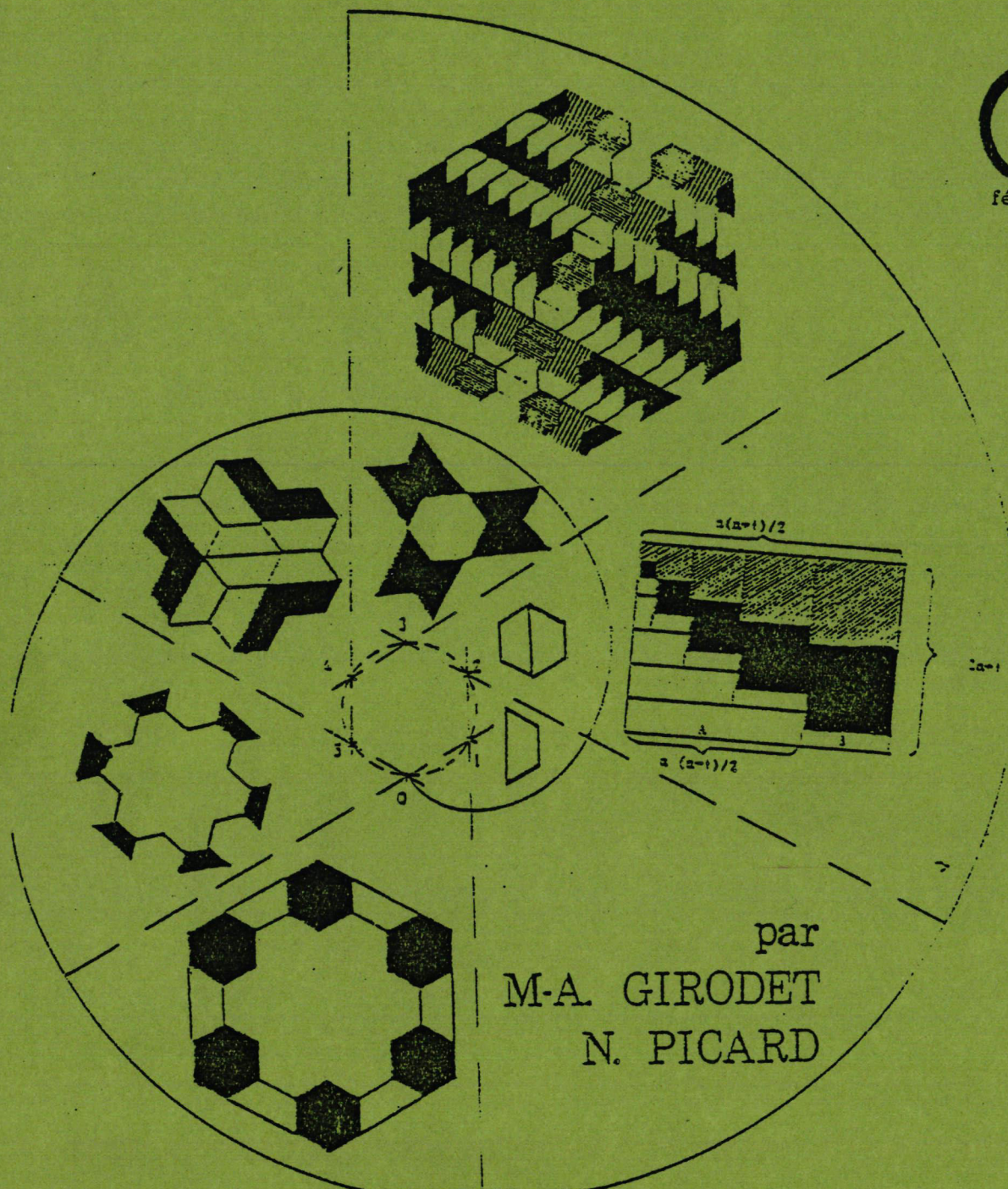
Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITE PARIS VII

récurrence

23

fév. 1981



NIVEAU

Tous niveaux

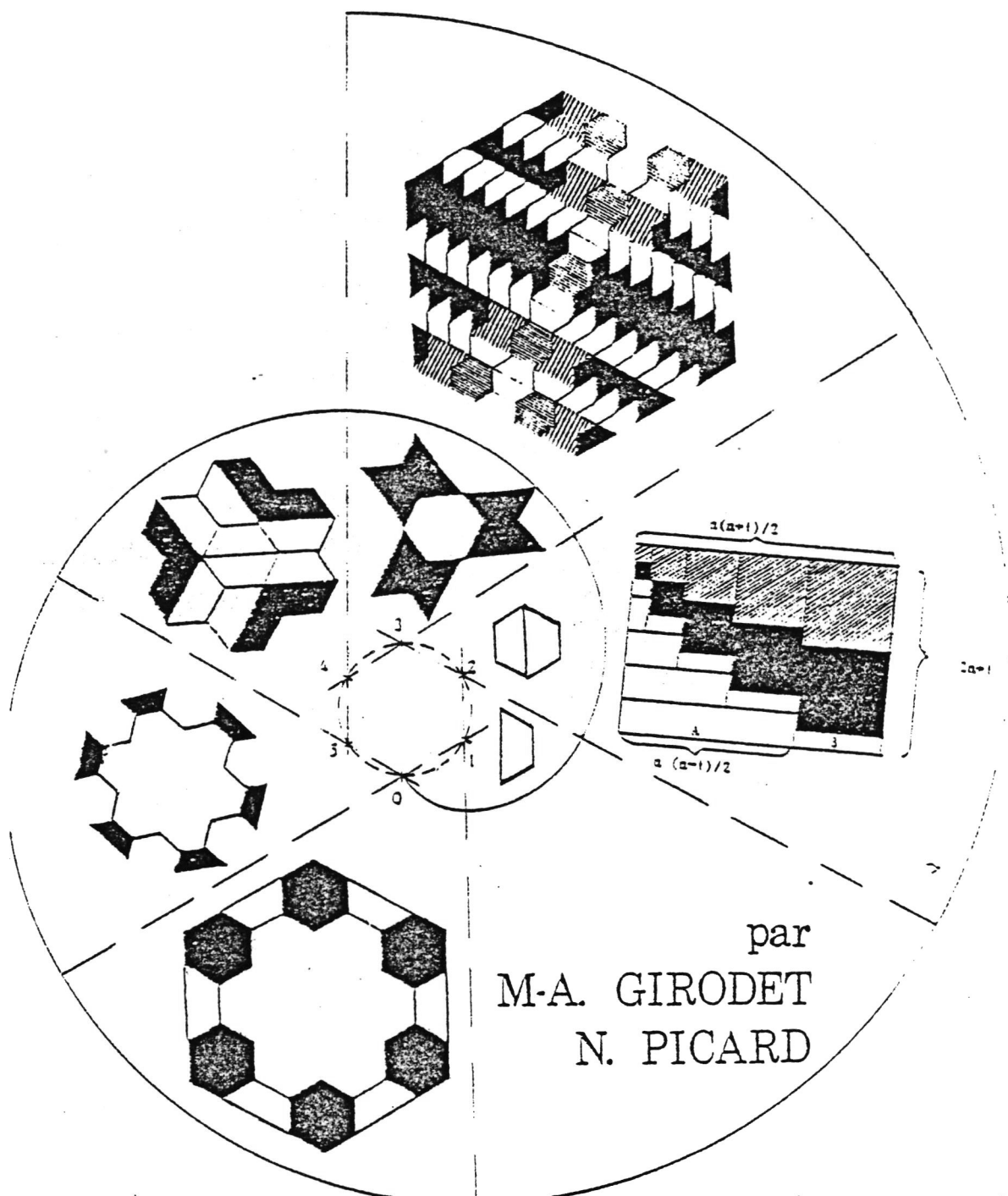
PUBLIC

Elèves élémentaire et secondaire / Club de Maths

OBJECTIF

Constructions et calculs par récurrence

récurrence



S O M M A I R E

Fiches de
travail
sur papier
couleurSolutions
sur pages
blanches

A	CROISSANCE DE CARRES	I	1
		II	2
		III	3
		IV	4
		V	5
		VI	6
		VII	7
B	SOMME DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS		8
	SOMME DES CARRES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS		9
C	ASSEMBLAGE DE LOSANGES		10
D	CROISSANCE DE TRIANGLES	I	11
		II	12
		III	13
		IV	14
E	CHEMINEMENTS DANS NEW-YORK	I	27
		II	33
F	ARBRE	I	37
		II	42
		III	44
G	PHOTOS et PROMENADES		46
H	ASSEMBLAGE DE TRAPEZES	Loi 1	48
		Loi 2	52
		Loi 3	57
		Comparaison des lois	62
J	SPIRALES A CENTRES	1	65
		2	68
K	JEU DE PIONS		71
	RESEAU TRIANGULAIRE (à tirer pour faire des exercices)		74

Comment calculer:

$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$	8
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$	9
$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$	1 - 10 .
$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$	4

Dénombrement des parties d'un ensemble	39
--	----

R E C U R R E N C E

FICHES de TRAVAIL

RECURRENCE

A

CROISSANCE DE CARRES I

Niveaux : 1
2
3

Matériel : carrés en bois ou contrecollé ou papier quadrillé

Loi de récurrence

tous les niveaux :

Trouver les carrés suivants et les dessiner sur un papier quadrillé.

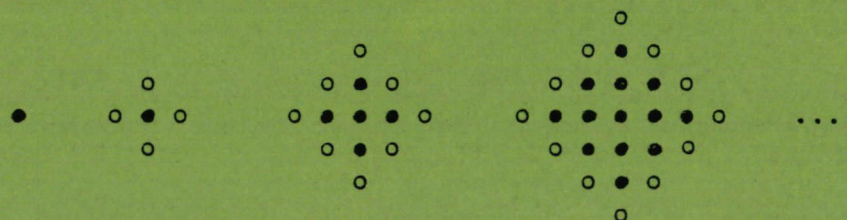
Trouver le nombre de carreaux constituant la figure à chaque étape.

Trouver le nombre de carreaux que l'on ajoute pour passer d'une étape à la suivante.

niveaux 2 et 3 :Comment passe-t-on de l'étape n à l'étape $(n + 1)$ Nombre de carreaux c_n à l'étape n niveau 3 :En déduire la valeur de la somme des nombres impairs de 1 à p

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES II

Niveaux : 1
2
3tous niveaux :

- . continuer
- . nombre de points à chaque étape
- . nombre de points ajoutés pour passer d'une étape à la suivante

niveaux 2 et 3 :

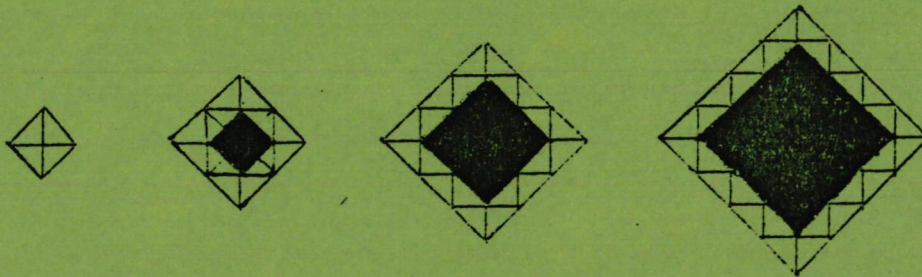
- . Comment passe-t-on de l'étape n à l'étape $(n + 1)$?
- . nombre de points p_n à l'étape n ?

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES III

Niveaux : 1
2
3

L'unité est le carreau

Tous niveaux

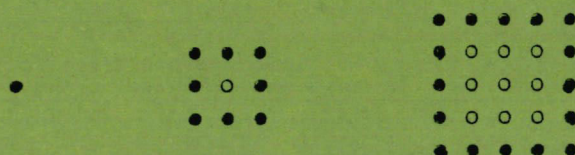
Trouver l'aire à chaque étape

Comment passe-t-on d'une étape à l'étape suivante ?

Niveaux 2 et 3Comment passe-t-on de l'étape $(n - 1)$ à l'étape n ?aire a_n à l'étape n ?

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES IV

Niveaux : 1
2
3tous niveaux

- . continuer
- . nombre de points à chaque étape
- . nombre de points ajoutés pour passer d'une étape à la suivante

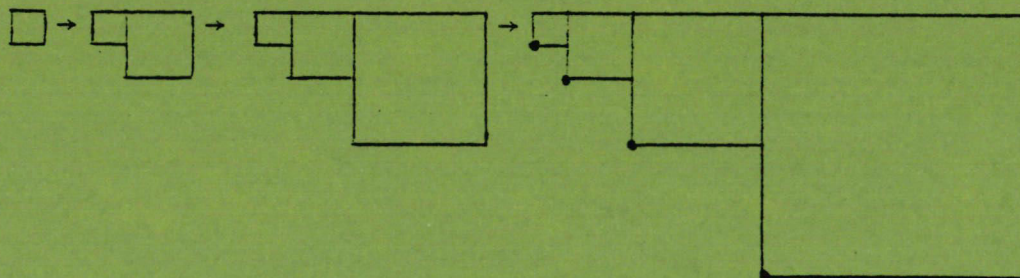
niveaux 2 et 3

- . comment passe-t-on de l'étape $(n - 1)$ à l'étape n ?
- . combien de points p_n à l'étape n ?
- . en déduire la somme des nombres pairs de 2 à $2p$

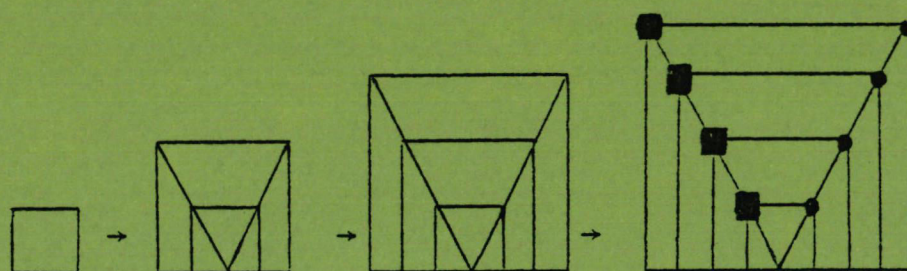
RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES $\vee$

Niveau 1

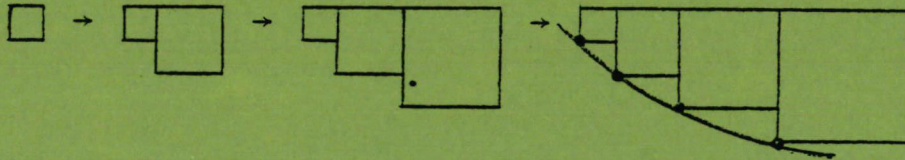


Comment se placent les sommets des carrés successifs ?



Comment se placent les sommets ■ et les sommets ● des carrés successifs?

Loi de récurrence



Les sommets des carrés semblent se répartir sur une courbe^{*}, qu'en pensez-vous ?

^{*} nous appelons courbe un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes satisfont à une égalité $y = g(x)$

RECURRENCE

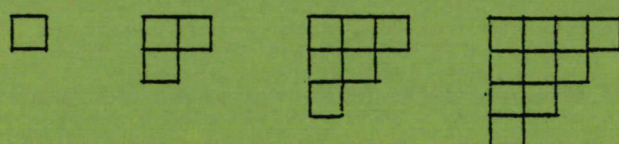
SOMME DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERSNiveaux : 2
3

B

étape



un escalier noir



un escalier blanc

on assemble les deux
escaliersA l'étape n , quelle est la surface d'un escalier ?

quelle est la surface d'un assemblage ?

En déduire la valeur de la somme des n premiers entiers.

RECURRENCE

ASSEMBLAGE DE LOSANGES

Niveaux : 1

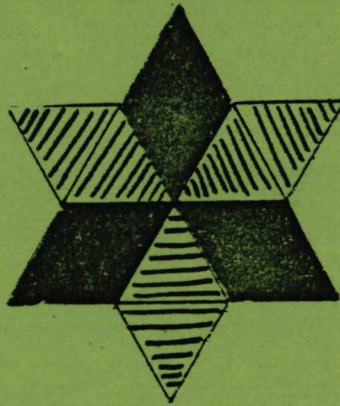
2

3

C

Matériel : Losanges en bois ou contrecollé
Réseau à mailles triangulaires

tous niveaux : On peut à l'aide de losanges former une étoile.



Former des étoiles de plus en plus grandes en utilisant des losanges.

Dessiner les étoiles obtenues sur un réseau à mailles triangulaires.

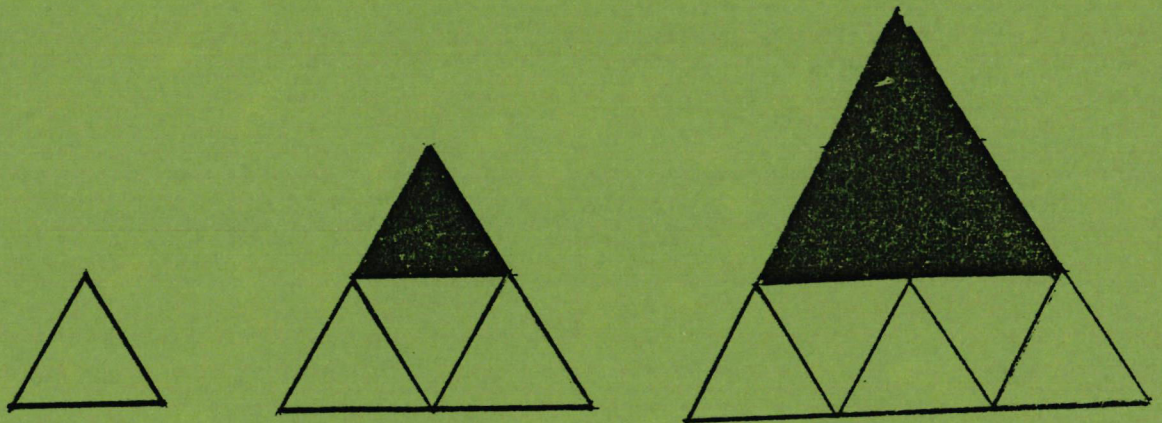
Niveaux 2 et 3

Trouver le nombre de losanges ajoutés quand on passe de l'étape n à l'étape $(n + 1)$

En déduire la valeur de la somme des nombres impairs.

Matériel : triangles équilatéraux en bois ou contrecollé
papier à maille triangulaire

Loi de récurrence



tous niveaux

Trouver les triangles suivants et les dessiner sur le papier à maille triangulaire

Trouver le nombre de triangles constituant la formule à chaque étape

Trouver le nombre de triangles que l'on ajoute pour passer d'une étape à la suivante.

niveaux 2 et 3

Comment passe-t-on de l'étape n à l'étape $(n+1)$?

Nombre de triangles t_n à l'étape n

niveau 3

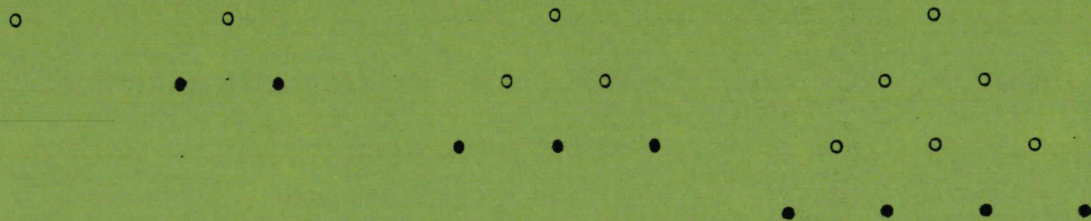
En déduire la valeur de la somme des nombres impairs de 1 à p .

RECURRENCE

CROISSANCE DE TRIANGLES II

niveaux : 1
2
3

Loi de récurrence

tous niveaux

- . Trouver les triangles suivants et continuer
- . nombre de points à chaque étape
- . nombre de points ajoutés pour passer d'une étape à l'étape suivante

niveaux 2 et 3

- . Comment passe-t-on de l'étape n à l'étape $(n+1)$?
- . Nombre de points p_n à l'étape n ?

RECURRENCE

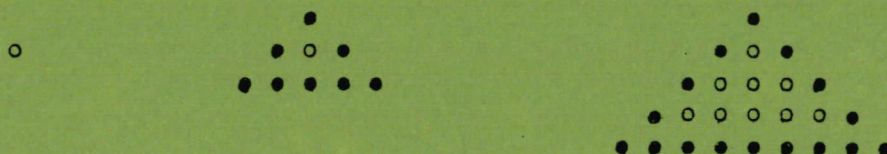
CROISSANCE DES TRIANGLES III

Niveaux : 1

2

3

Loi de récurrence

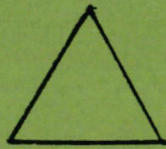


tous niveaux

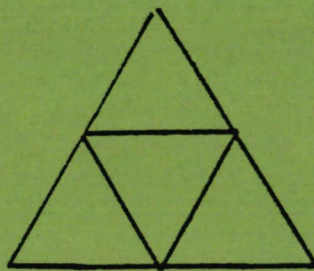
- . continuer
- . trouver le nombre de points à chaque étape
- . trouver le nombre de points ajoutés pour passer d'une étape à l'étape suivante

niveaux 2 et 3

- . Comment passe-t-on de l'étape n à l'étape $n + 1$?
- . Nombre de points p_n à l'étape n

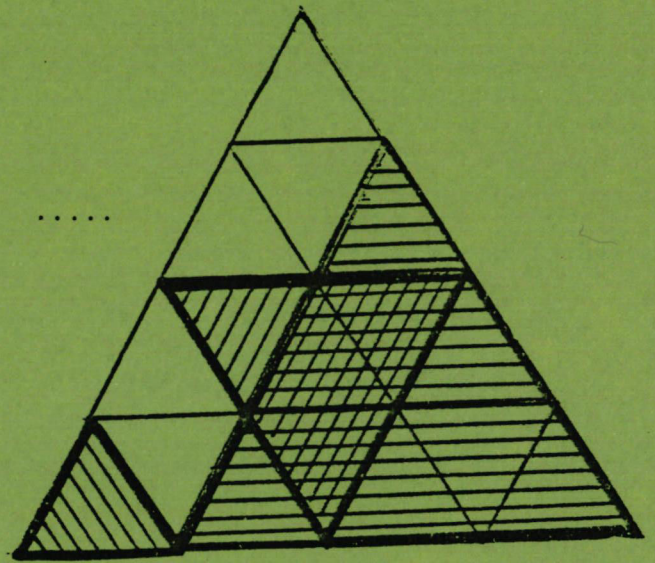


Etape 1

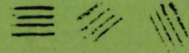


Etape 2

.....



La loi de croissance est la même que celle de la fiche : " Croissance de triangle I "

A chaque étape, on peut identifier différentes sortes de triangles :
ainsi, par exemple, à l'étape 4 les triangles 

Pistes de recherche :

Chercher quels types de triangles on ajoute quand on passe d'une étape à la suivante.

Dénombrer les triangles de chaque type que l'on ajoute quand on passe d'une étape à la suivante.

Dénombrer les triangles à l'étape n.

RECURRENCE

CHEMINEMENTS DANS NEW-YORK

Niveaux 2

E

I

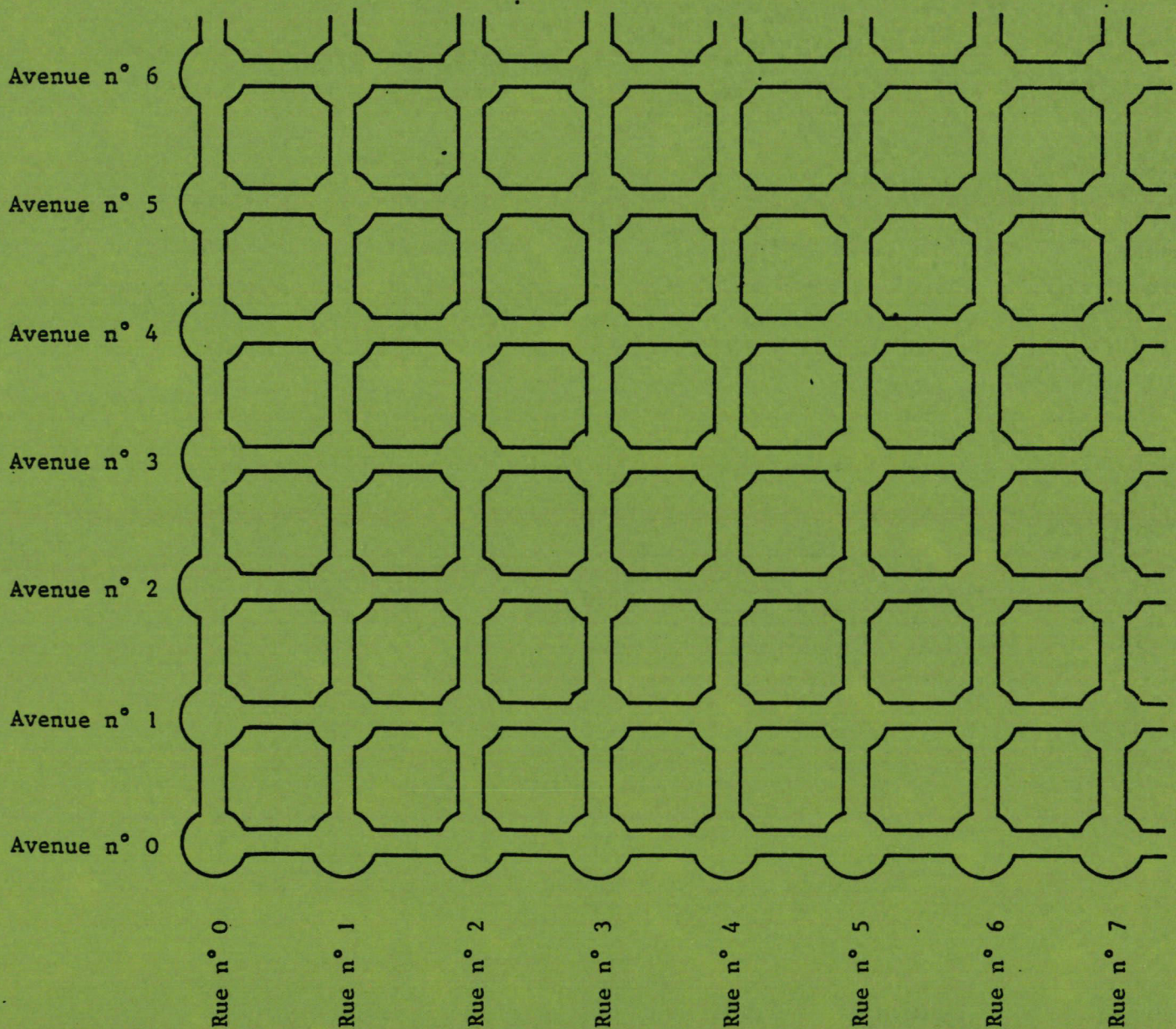
3

Fiche proposée par le CUEP de Lille (Ma2. n°21 sept.73)

"Nous autres, Américains, nous sommes le peuple le plus intelligent, le plus savant de la terre. Donc moi, qui suis américain, et New-Yorkais de surcroît je suis l'un des plus savants et des plus intelligents de la terre. Et pourtant, je n'arrive pas à trouver le nombre de chemins - les plus courts possible - pour rejoindre ma femme.

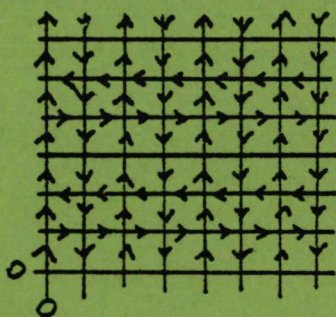
Je suis au carrefour (0,0); ma femme est au carrefour (4,3) (Rue 4; Av.3)
Généraliser.

PLAN DE LA VILLE DE NEW - YORK

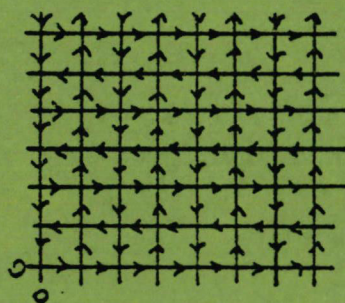


Pour se compliquer l'existence on introduit des sens uniques

Système B



Système C



On se propose :

- de trouver la longueur d'un chemin minimal pour aller du carrefour $(0,0)$ au carrefour (x, y)
- de trouver le nombre de chemins minimaux pour aller de $(0,0)$ à (x, y)
- de chercher s'il existe une relation entre la longueur d'un chemin minimal et le nombre de chemins minimaux pour aller de $(0,0)$ à (x, y)

RECURRENCE

ARBRE I

Niveaux: 2

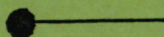
3

F

A la première étape, on trace une branche partant de la racine ●

A chaque étape suivante, on trace une nouvelle branche --- partant de la racine ● et on greffe à son extrémité △ le même arbre que celui de l'étape précédente

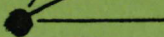
1



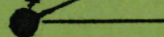
2



3



4



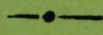
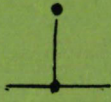
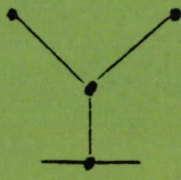
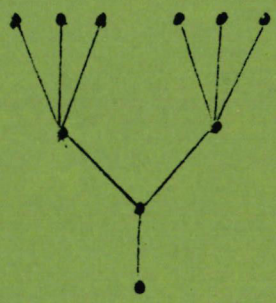
1 - Construire les arbres des étapes 5 et 6

2 - Utiliser cette construction pour trouver le nombre des parties d'un ensemble fini

RECURRENCE

ARBRE II

niveaux: 1
2
3

N° de l'étape	on trace	
0	le noeud-racine	
1	1 branche partant du noeud-racine	
2	2 branches partant du noeud libre	
3	3 branches partant de chaque noeud libre	
N	n branches partant de chaque noeud libre	

Tracer l'arbre à l'étape 5

Combien de branches nouvelles trace-t-on quand on passe de l'étape 4 à l'étape 5 ?

Combien de branches nouvelles trace-t-on quand on passe de l'étape (n-1) à l'étape n ?

Combien de branches y a-t-il à l'étape n ?

RECURRENCE

ARBRE III

niveaux: 1
2
3arbre d'espèce n

étape 0	le noeud racine
étape 1	n branches partant du noeud racine
étape 2	(n-1) branches partant de chaque noeud libre
étape 3	(n-2) branches partant de chaque noeud libre
étape (n-1)	$n - (n-2) = 2$ branches partant de chaque noeud libre
étape n	$n - (n - 1) = 1$ branche partant de chaque noeud libre

Tracer l'arbre d'espèce 5

Combien de branches pendantes dans l'arbre d'espèce 4 ?

Combien de branches pendantes dans l'arbre d'espèce n ?

Combien de branches dans l'arbre d'espèce 5 ?

Combien de branches dans l'arbre d'espèce n ?

RECURRENCE

PHOTOS ET PROMENADES

Niveaux: 2
3

G

Bernadette, Jacky, Marthe, Nicole, René sont des amis

Problème 1

Ils désirent prendre des photos, combien peuvent-ils faire de photos des personnes de leur groupe en s'imposant les conditions suivantes:

- 1° ils se placeront uniquement les uns à côté des autres
- 2° ils peuvent prendre des photos de 1, 2, 3, 4 ou 5 personnes

Problème 2

On dispose d'une minicalculatrice qui dispose d'une touche "factorielle n",
comment calculer le nombre de dispositions de 3 personnes parmi 5
comment calculer le nombre de dispositions de p personnes parmi n

Problème 3

Ils aiment se promener dans la campagne, seuls ou en groupe.
Combien de groupes différents (comportant 1 personne éventuellement!)
peuvent-ils constituer pour ces promenades?

Problème 4

Combien de façons y a-t-il de prendre p objets parmi n objets?

R E C U R R E N C E

H

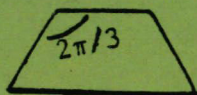
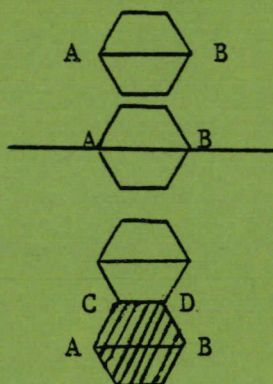
Suivant les niveaux :

Construction géométrique
Calcul

Niveaux: 1

2

3

MATERIEL :1° 100 trapèzes en bois ou contrecollé
les trois petits côtés ont même longueur *2° réseaux à mailles triangulaires
(voir modèle en annexe) **1ère LOI D'ASSEMBLAGES

1ère règle : le premier hexagone est formé de deux trapèzes

2ème règle : les pièces s'assemblent de telle façon que A,B
soit axe de symétrie3ème règle : les hexagones s'empilent verticalement sur
le premier hexagone4ème règle : compléter pour faire le plus rapidement
possible un hexagonetous niveaux : réaliser l'assemblage et le dessiner sur un réseau à mailles
triangulaires

Si vous ne trouvez pas voir fiche solution

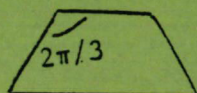
Trouver des colorations des pièces qui font apparaître des régularités
dans l'assemblage1er et 2ème cycles : A partir du décompte des trapèzes à chaque étape, essayer de
trouver le nombre de trapèzes à l'étape n (en utilisant les diffé-
rences premières et secondes)Voir sur le dessin à quoi correspondent les différences premières
et les différences secondes, trouver un moyen de les représenter
(Chaque étape correspond à la constitution d'un hexagone)2ème cycle : calculer le nombre de trapèzes à l'étape n à partir des sommes
des n termes successifs d'une suite

* C'est un des jeux du Club des Cordelières. I IREM Paris-Sud

** On peut aussi se procurer des réseaux à mailles triangulaires
à l'IREM (15 F les 100 feuilles 21 x 29,5)

R E C U R R E N C E

ASSEMBLAGES DE TRAPEZES, LOI 2

Niveaux : 1
2
3suivant les niveaux :
construction géométrique
calculMATERIEL :1° - 100 trapèzes en bois ou contrecollé
les 3 petits côtés ont même longueur

2° - réseaux à mailles triangulaires

2ème LOI d'ASSEMBLAGE

1ère règle : 1ère étape : le premier hexagone est formé de deux trapèzes

2ème règle : deux grands côtés sont toujours assemblés

3ème règle : quand on a le choix dans la position d'une pièce (par assemblage des petits côtés), choisir celle qui permet de fabriquer le plus rapidement possible un hexagone. Chaque étape correspond à la constitution d'un hexagone

On désignera les étapes par k

Mêmes questions que pour la première loi (fiche RECURRENCE - ASSEMBLAGES DE TRAPEZES - LOI 1)

R E C U R R E N C E

Suivant les niveaux :

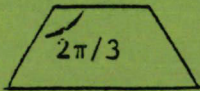
Niveaux: 1

2

3

construction géométriques

calcul

MATERIEL

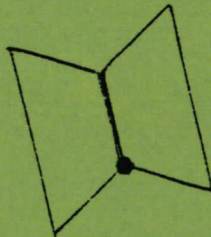
1°-100 trapèzes en bois ou contrecollé
 les 3 petits côtés ont même longueur

2°- Réseaux à mailles triangulaires
 (voir modèle en annexe)

3ème LOI d'ASSEMBLAGE

1ère règle : 1ère étape : Le premier hexagone est formé de deux trapèzes

2ème règle : Quand un hexagone est constitué, on flanque chaque sommet libre d'une "bobine"



3ème règle : deux grands côtés sont toujours bord à bord

4ème règle : on doit constituer un hexagone le plus rapidement possible .

Chaque étape correspond à la constitution d'un hexagone

On désignera les étapes par s

Mêmes questions que pour la Loi 1

Nous avons exhibé trois lois différentes de récurrence à partir des assemblages de trapèzes pour former des hexagones de plus en plus grands :
Chaque étape correspond à la constitution d'un hexagone

1ère Loi de récurrence

1ère règle : Le premier hexagone est formé de deux trapèzes



2ème règle : Les pièces s'assemblent de telle façon que A,B soit axe de symétrie

3ème règle : Les hexagones s'empilent verticalement sur le premier hexagone

4ème règle : Compléter pour faire le plus rapidement possible un hexagone

Si t_n désigne le nombre de trapèzes à l'étape n , nous avons trouvé

$$t_n = 2n^2$$

2ème Loi de récurrence

1ère règle : Le premier hexagone est formé de deux trapèzes

2ème règle : Deux grands côtés sont toujours assemblés

3ème règle : Quand n a le choix dans la position d'une pièce (par assemblage des petits côtés) choisir celle qui permet de fabriquer le plus rapidement possible un hexagone

Si t_k désigne le nombre de trapèzes à l'étape k , nous avons trouvé :

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{(3k-2)^2}{2} & \text{si } k &= 2p \\ t_k &= \frac{(3k-1)^2}{2} & \text{si } k &= 2p + 1 \end{aligned}$$

3ème Loi de récurrence

1ère règle : Le premier hexagone est formé de deux trapèzes

2ème règle : Quand un hexagone est constitué, on flanque chaque sommet libre d'une bobine

3ème règle : Deux grands côtés sont toujours bord à bord

4ème règle : On doit constituer un hexagone le plus rapidement possible

Si t_s désigne le nombre de trapèzes à l'étape s , nous avons trouvé

$$t_s = 2(3s-2)^2$$

EXISTE-T-IL DES PASSAGES ENTRE CES TROIS LOIS ?

(niveau 2 à partir des dessins, niveau 3 par le calcul)

organigramme

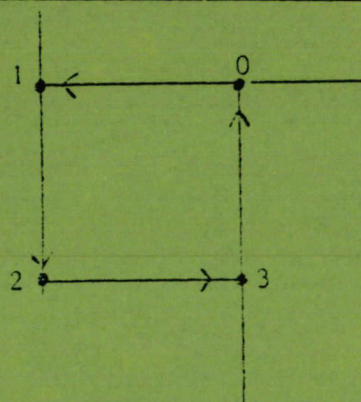
1° Spirale à 4 centres

On numérote les sommets d'un carré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On définit ainsi le suivant et le précédent d'un sommet

1	est le suivant de	0	0 est le précédent de	1
2	est le suivant de	1	1 est le précédent de	2
3	est le suivant de	2	2 est le précédent de	3
0	est le suivant de	3	3 est le précédent de	0

On trace des demi-droites (2,1); (3,2); (0,3); (1,0)



DEPART

Placer la pointe du compas sur un sommet

Ouvrir le compas pour placer le crayon sur le sommet précédent

Tracer l'arc de cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre jusqu'à ce qu'on rencontre une droite: on s'arrête

Placer la pointe du compas sur le sommet suivant

Ouvrir le compas pour placer le crayon sur le point d'arrêt

2° spirale à n centres

L'organigramme est le même : il suffit de définir les relations "est le suivant" et "est le précédent" entre les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

On construit les spirales à partir de CENTRES qui sont les sommets de polygones réguliers.

Le mode de construction est toujours le même.

1. Tracé de la spirale

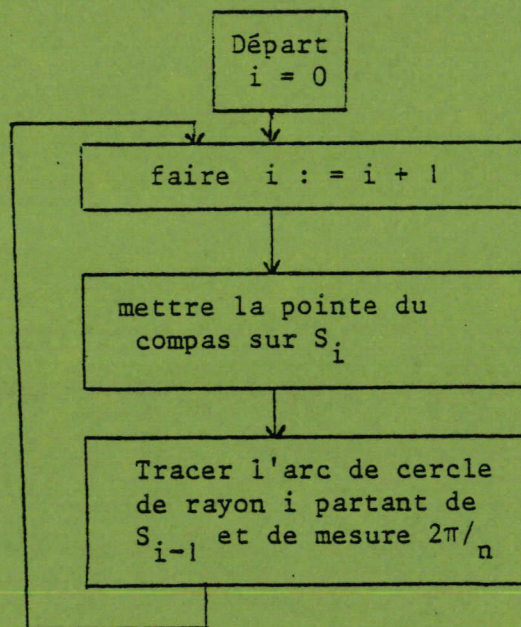
Organigramme (niveau 3)

Tracer un polygone régulier de n côtés de longueur l , numéroté les sommets

On désigne par i le N° de l'étape de construction
par S_i le sommet servant de centre à l'étape i

pour k entier $S_i = S_{i+kn}$

Tracer les demi-droites orientées (S_{i+1}, S_i) : elles serviront à limiter les arcs de cercle.



2. Calculer la longueur des spirales en fonction du nombre de côtés du polygone des centres (on prend l comme valeur de la longueur du côté du polygone des centres).
3. Que se passe-t-il quand le nombre de côtés du polygone des centres augmente indéfiniment?

RECURRENCE

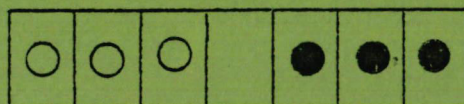
K

JEU DE PIONS

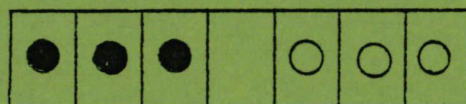
Niveaux : 2

3

On doit passer de la configuration initiale :



à la configuration finale :



On peut déplacer les blancs seulement vers la droite
les noirs seulement vers la gauche

Si un trou le permet, tout blanc peut sauter par-dessus un (un seul) noir
et réciproquement

- 1° Trouver un codage des actions qui permettent, en respectant les règles précédentes, de passer de la configuration initiale à la configuration finale.
- 2° Quand on utilise ce codage, quel est le "mot" qui rend compte de la séquence des actions lorsque l'on a k pions blancs et k pions noirs?
- 3° Etablir la série donnant le nombre des actions nécessaires pour les configurations de 1 à k pions de chaque couleur.

R E C U R R E N C E

SOLUTIONS

—

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES I

SOLUTION

Décompte du nombre de carreaux

étape	nombre de carreaux
1	1
2	4
3	9
4	16
n	n^2

Différences premières

étape	nombre de carreaux	différences premières
1	1	
2	4	+ 3
3	9	+ 5
4	16	+ 7
n - 1		+ (2n-1)
n		

Décompte du nombre de carreaux à l'aide des différences premières

étape	nombre de carreaux C_n	
1	1	$= 1^2$
2	1 + 3	$= 2^2$
3	1 + 3 + 5	$= 3^2$
n	1 + 3 + 5 + ... (2n-1)	$= n^2$

$$C_{n+1} - C_n = 2n+1$$
Somme des nombres impairs de 1 à p

$$1 + 3 + 5 + \dots \quad p = \left(\frac{p+1}{2} \right)^2$$

RECURRENCE

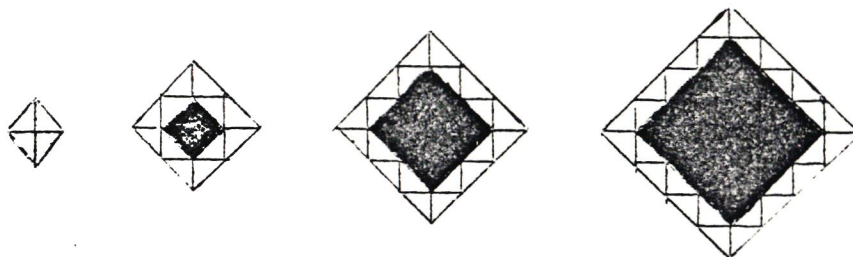
CROISSANCE DE CARRES II
SOLUTIONDécompte du nombre de points

Etape	nombre de points	
1	1	$\downarrow + 4 \times 1$
2	5	$\downarrow + 4 \times 2$
3		$\downarrow + 4 \times 3$
4		
$n - 1$		$\downarrow + 4 \times (n - 1)$
n		$\downarrow + 4 \times n$
$n + 1$		

$$\begin{aligned}
 p_n &= 1 + 4 (1 + 2 + 3 + \dots (n - 1)) \\
 &= 1 + 4 \times \frac{(n - 1) \cdot n}{2}^* \\
 &= 1 + 2 n (n - 1) \\
 &= n^2 + (n - 1)^2
 \end{aligned}$$

* Voir somme des n premiers nombres entiers - solution page 8

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES III
SOLUTION

Etape

aire en carreaux

1

2

2

 $2 + 4 \times 3/2$

3

4

+ 4 x 3/2

+ 4 x 5/2

+ 4 x 7/2

 $n - 1$ n

+ 4 x (2n - 1)/2

$$a_n = 2 + 4 (3 + 5 + 7 + \dots (2n - 1))/2$$

$$= 2 (1 + 3 + 5 + 7 + \dots (2n - 1))$$

$$= 2n^2$$

(voir croissance de carrés I - page 1)

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES IV
SOLUTIONDécompte du nombre de points

étape	nombre de points
1	1
2	$3^2 = 9$
3	$5^2 = 25$
4	$7^2 = 49$
n	$(2n - 1)^2$

Différences premières (voir dessin fiche 4)

étape	nombre de points
1	1
2	+ 4 x 2
3	+ 4 x 4
4	+ 4 x 6
n - 1	
n	+ 4 x 2(n-1)

Décompte du nombre de points à l'aide des différences premières

$$p_n = (2n-1)^2 = 1 + 4 \times (2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1))$$

$$\Downarrow$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1) = \frac{(2n-1)^2 - 1}{4} = n(n-1)$$

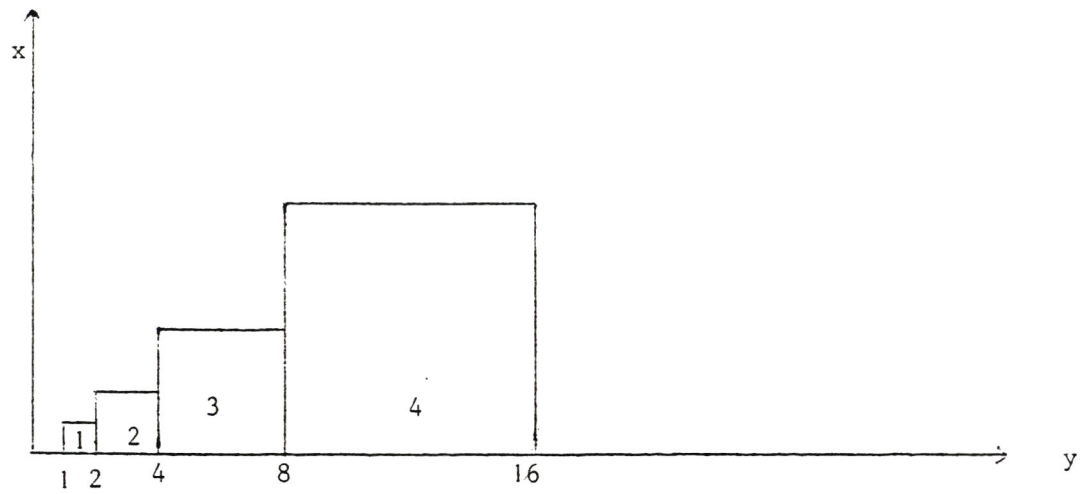
Somme des nombres pairs de 2 à 2 p

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2p = p(p+1)$$

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES V
SOLUTION

Niveau 1



n	x	y
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
n	2^{n-1}	2^{n-1}
	x	x

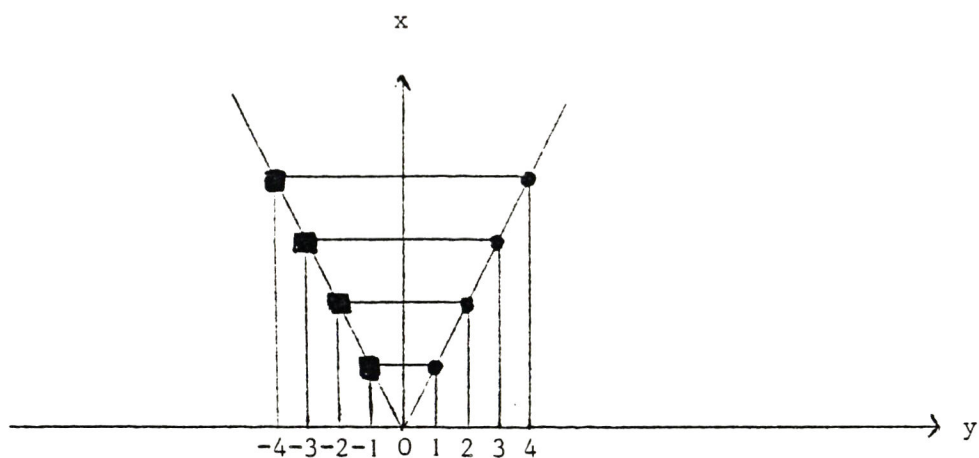
les points se répartissent sur la
droite d'équation

$$y = x$$

RECURRENCE
Fonctions

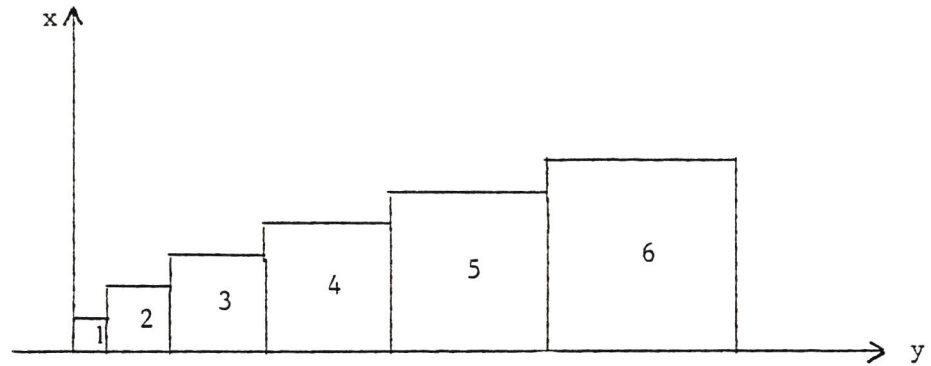
CROISSANCE DE CARRES VI

SOLUTION



n	■		●	
	x	y	x	y
1	-1	2	1	2
2	-2	4	2	4
3	-3	6	3	6
4	-4	8	4	8
n	-n	2n	n	2n
	$y = -2x$		$y = 2x$	

RECURRENCE

CROISSANCE DE CARRES VII
SOLUTION

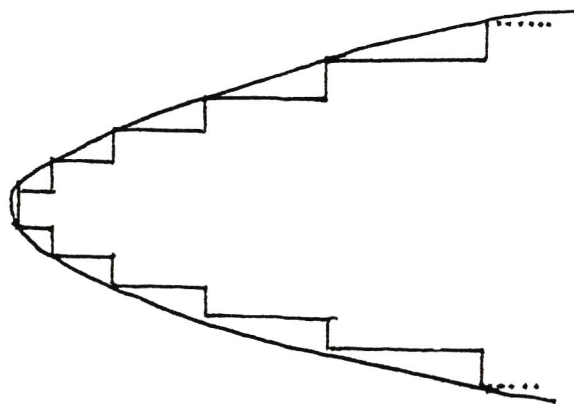
n	x	y
1	1	0
2	2	1
3	3	1 + 2
4	4	1 + 2 + 3
5	5	1 + 2 + 3 + 4
n	n	1 + 2 + 3 + 4 + ... (n - 1)
	x	1 + 2 + 3 + 4 + ... (x - 1)

Les points se répartissent donc sur la courbe d'équation

$$y = \frac{x(x-1)}{2}$$

C'est une parabole dont nous allons chercher le sommet

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x-1}{2} \\ y' &= 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$



RECURRENCE

SOMME DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS
SOLUTION

Etape	1	2	3	n
Nombre de carreaux d'1 escalier	1	1+2	1+2+3	1+2+3+...+n
nombre de carreaux d'1 assemblage	2×1	2×(1+2)	2×(1+2+3)	2(1+2+3+...+n)
	2×1	3×2	4×3	(n+1)×n

$$2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = (n + 1) \times n$$

↓

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

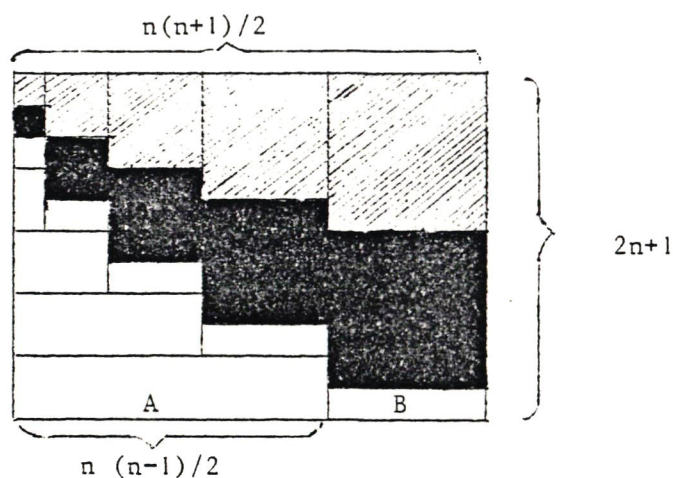
RECURRENCE

SOMME DES CARRÉS DES n PREMIERS NOMBRES
ENTIERS

SOLUTION

$$\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

On trouve $\sum_{l=1}^n n^2$ à partir du schéma suivant



L'aire de ce rectangle est égale à $3 \times \sum n^2$

en effet, on a 1° les carrés 

2° les carrés 

3° les assemblages $A \cup B$

A a pour côtés 2 et $n(n-1)/2$ (voir page 8 : somme des n premiers entiers)

B a pour côtés 1 et n

$$\Rightarrow \text{Aire } (A \cup B) = n(n-1) + n = n^2$$

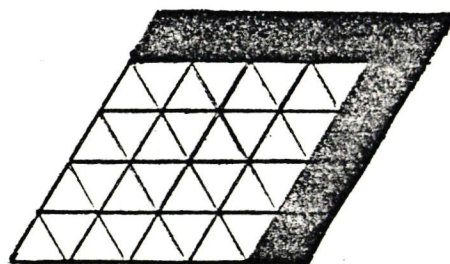
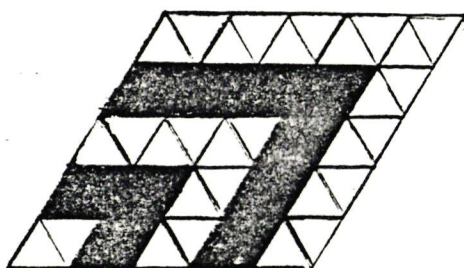
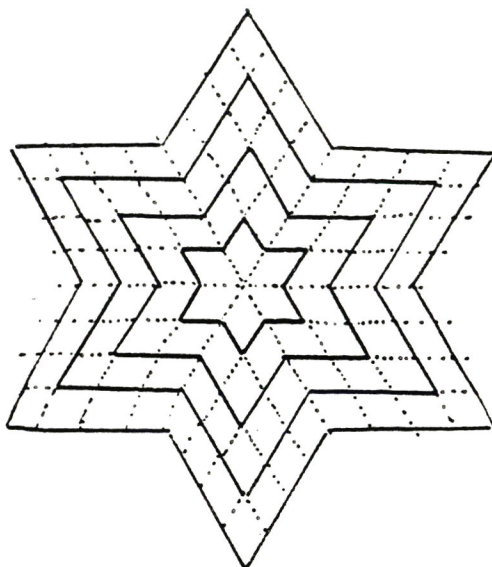
le rectangle réunion a pour aire

$$n(n+1)/2 \times (2n+1) = 3 \sum n^2$$

↓

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

RECURRENCE

ASSEMBLAGE DE LOSANGES
SOLUTION

Pour passer de l'étape n à l'étape $(n+1)$ on ajoute à chaque pointe de l'étoile $(2n+1)$ losanges soit pour l'étoile $6 \times (2n+1)$

N° étape	Nombre de losanges	nombre de losanges
1	1×6	$= 1 \times 6 = 1^2 \times 6$
2	$(1+3) \times 6$	$= 4 \times 6 = 2^2 \times 6$
3	$(1+3+5) \times 6$	$= 9 \times 6 = 3^2 \times 6$

Pour les 3 premières étapes le nombre de losanges est égal à $n^2 \times 6$. Si à l'étape n le nombre de losanges est $n^2 \times 6$ à l'étape $(n+1)$ il est égal à

$$[n^2 + (2n+1)] \times 6 = (n+1)^2 \times 6$$

↓

$$n \quad [1+3+5+ \dots + (2n-1)] \times 6 \quad n^2 \times 6$$

$$n+1 \quad [1+3+5+ \dots + (2n+1)] \times 6 \quad (n+1)^2 \times 6$$

↓

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

RECURRENCE

CROISSANCE DE TRIANGLES I
SOLUTION

Voir page 1 : On remplace le mot carré (ou carreau) par le
mot triangle.

RECURRENCE

CROISSANCE DE TRIANGLES II

SOLUTION

Décompte du nombre de points

étape	nombre de points	
1	1	
2	3	↓ + 2
3	6	↓ + 3
4	10	↓ + 4
$n - 1$		↓ + n
n		↓ + n+1
$n + 1$		

$$p_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}^*$$

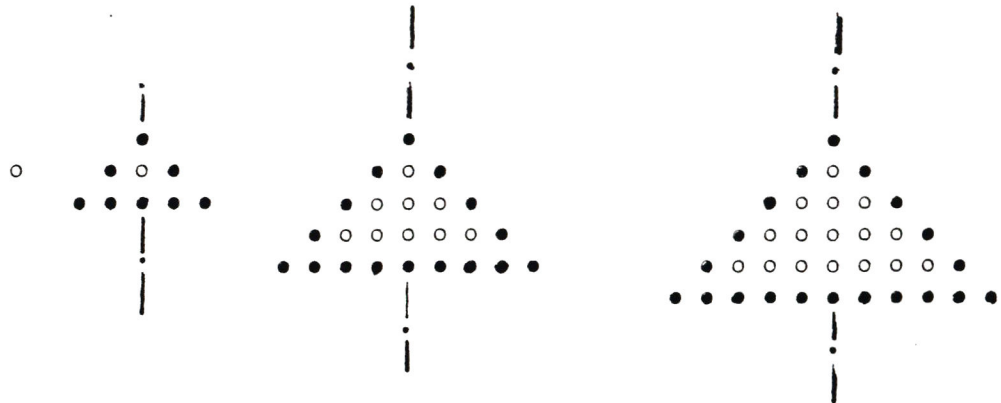
* "Somme des n premiers nombres entiers "solution page 8

RECURRENCE

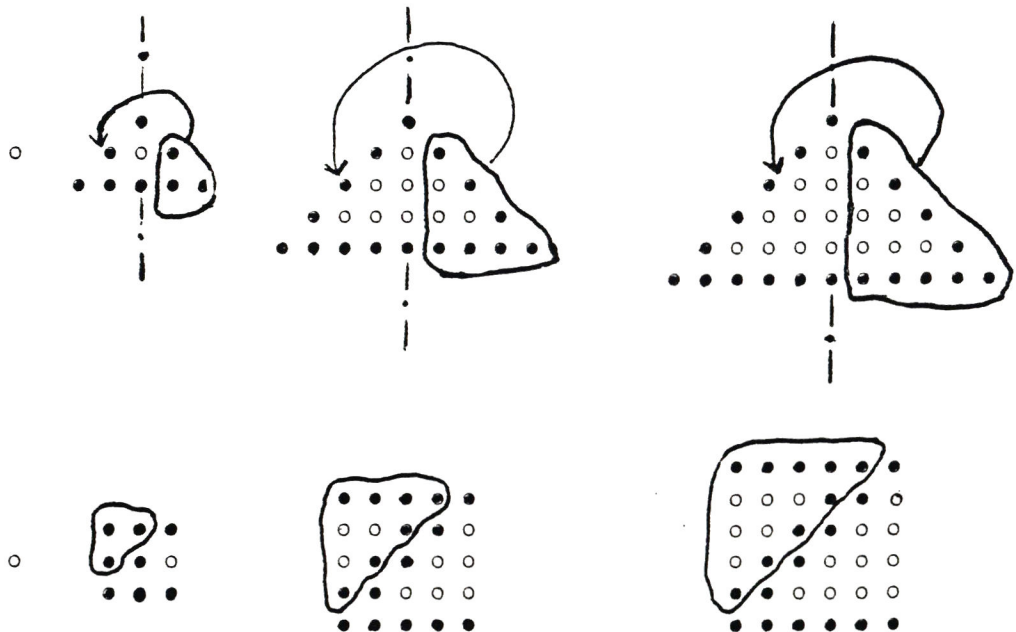
CROISSANCE DE TRIANGLES III

SOLUTION

La loi de récurrence



On peut, par découpage suivant l'axe de symétrie vertical des triangles, obtenir

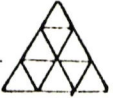
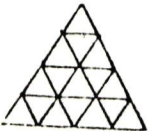
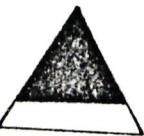
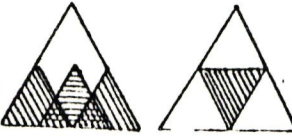
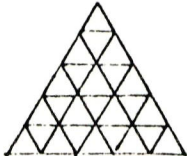
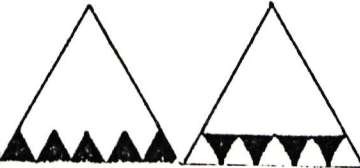
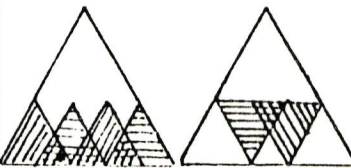
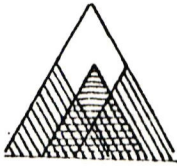
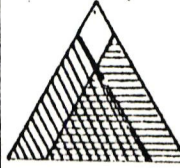


on est ramené à la "croissance de carrés IV" (voir Solution page 4)

RECURRENCE

CROISSANCE DE TRIANGLES IV

SOLUTION

étape n		décompte à l'étape (n-1)	triangles 1	triangle 2	triangles 3	triangles 4	triangles 5	décompte total
1								1
2		 1	 2 + 1	 1				5
3		 5	 3 + 2	 2	 1			13
4		 13	 4 + 3	 3 + 1	 2	 1		27
5		 27	 5 + 4	 4 + 2	 3	 2	 1	48
6			pointe en haut 6 pointe en bas 5	pointe en haut 5 pointe en bas 3	pointe en haut 4 pointe en bas 1	pointe en haut 3 pointe en bas 0	pointe en haut 2 pointe en bas 0...	
n			n n - 1	n - 1 n - 3	n - 2 n - 5	n - 3 n - 7	n - 4 n - 9...	

désignons respectivement par

$$t_h(n, p) \text{ et } t_b(n, p)$$

le nombre de triangles de type p à l'étape n ayant respectivement la "pointe en haut" et la "pointe vers le bas" (voir figure de la page 14)

ex.

$$\begin{aligned} t_h(4, 3) &= 2 & t_b(4, 3) &= 0 \\ t_h(4, 2) &= 3 & t_b(4, 2) &= 1 \\ t_h(5, 2) &= 4 & t_b(5, 2) &= 2 \end{aligned}$$

au donnant le nombre de triangles en haut ajoutés à chaque étape

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	1								
3	3	2	1							
4	4	3	2	1						
5	5	4	3	2	1					
6	6	5	4	3	2	1				
7	7	6	5	4	3	2	1			
8	8	7	6	5	4	3	2	1		
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

du triangle p triangles pointe en haut ajoutés à l'étape n

1	n	- 1
2	$n - 1$	- 1
3	$n - 2$	- 1
4	$n - 3$	- 1
	$\vdots$	
	$n - (p-1)$	- 1

tableau donnant le nombre de triangles pointe en bas ajoutés à chaque étape

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	1									
3	2	1								
4	3	2	1							
5	4	3	2	1						
6	5	4	3	2	1					
7	6	5	4	3	2	1				
8	7	6	5	4	3	2	1			
9	8	7	6	5	4	3	2	1		
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

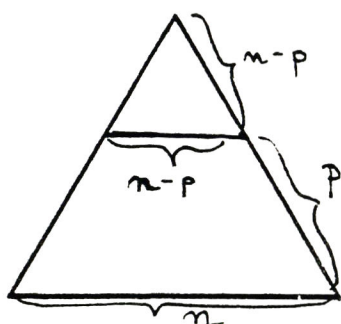
triangles pointe en bas ajoutés à l'étape n

$n - 1$	- 2
$n - 3$	- 2
$n - 5$	- 2
$n - 7$	- 2
$n - 2p + 1$	- 2

Conditions d'obtention des triangles pointe vers le haut

Quel que soit $p \leq n$, il existe au moins un triangle pointe vers le haut

Conditions d'obtention des triangles pointe vers le bas



On peut trouver un triangle pointe vers le bas si et seulement si

$$\begin{aligned} n - p &\geq p \\ \Downarrow \\ p &\leq n/2 \end{aligned}$$

si n est pair $p = n/2$

si n est impair $p = (n-1)/2$

On peut aussi trouver ces conditions à partir de la formule donnant le nombre de triangles p pointe en bas ajoutés à l'étape n

il faut que $n - 2p + 1 \geq 1 \Rightarrow n - 2p \geq 0$

si n est pair, la valeur maximale de p est $n/2$

$n - 2p + 1 = 1$ il y a un triangle de côté $p = n/2$ à l'étape n

si n est impair, la valeur maximale de p est $(n-1)/2$ à l'étape n , il y a deux triangles de côté $(n-1)/2$

Tableau donnant le nombre de triangles de chaque espèce ajoutés à l'étape n

p étape n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	type de triangles
	n n-1	n-1 n-3	n-2 n-5	n-3 n-7	n-4 n-9	n-5 n-11	n-6 n-13	n-7 n-15	n-8 n-17	nombre (pointe en haut) nombre (pointe en bas)
1	①	.	.	.	.	.	.	.	.	
2	3	1	.	.	.	.	.	.	.	
3	5	②	1	.	.	.	.	.	.	
4	7	4	2	1	.	.	.	.	.	
5	9	6	③	2	1	.	.	.	.	
6	11	8	5	3	2	1	.	.	.	
7	13	10	7	④	3	2	1	.	.	
8	15	12	9	6	4	3	2	1	.	
9	17	14	11	8	⑤	4	3	2	1	
10	19	16	13	10	7	5	4	3	2	
11	21	18	15	12	9	⑥	5	4	3	
12	23	20	17	14	11	8	6	5	4	
13	25	22	19	16	13	10	⑦	6	5	
14	27	24	21	18	15	12	9	7	6	
15	29	26	23	20	17	14	11	⑧	7	
16	31	28	25	22	19	16	13	10	8	

La structure du tableau fait apparaître une construction automatique:

une flèche $\dashrightarrow$ signifie "ajouter 1"
 une flèche $\longrightarrow$ signifie "ajouter 2"

Pour établir la colonne des triangles p

- on fait (p - 1) points
- on écrit 1
- on fait (p - 1) flèches $\dashrightarrow$
- autant de flèches $\longrightarrow$ qu'il est nécessaire pour arriver à l'étape n

Remarques sur la structure du tableau de la page précédente

1° On s'intéresse aux triangles de type p

On observe	Justification
Dans une colonne les nombres entourés correspondent au passage d'une flèche $\dashrightarrow$ à une flèche $\longrightarrow$	<u>Pour un triangle de type p</u> (colonne p) le nombre entouré fournit l'étape n^* jusqu'à laquelle il n'y a pas de triangle p pointe en bas $\Downarrow$ pour cette étape $t_b^* = 0$ $\Downarrow$ (p.15) $n^* - 2p + 1 = 0$ $\Downarrow$ $n^* = 2p - 1$
les nombres entourés sont sur les lignes où n est pair	Le nombre entouré indique le nombre de triangles t^* de type p ajoutés à l'étape n^* : $t_b^* = 0$ $t_h^* = n^* - p + 1$ $n^* = 2p - 1$ } $t_h^* = p$ $\Downarrow$
le nombre entouré est égal au numéro de la colonne	$t^* = p$

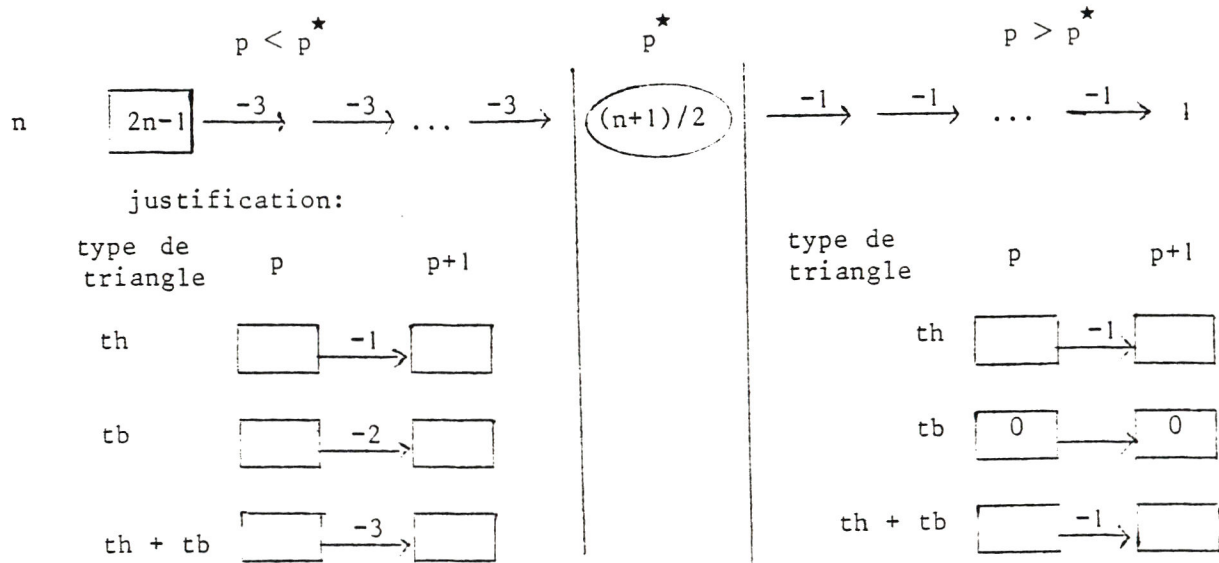
2°) On s'intéresse à une étape donnée n

Pour une étape n donnée, on a une chaîne de nombres dont l'un est entouré

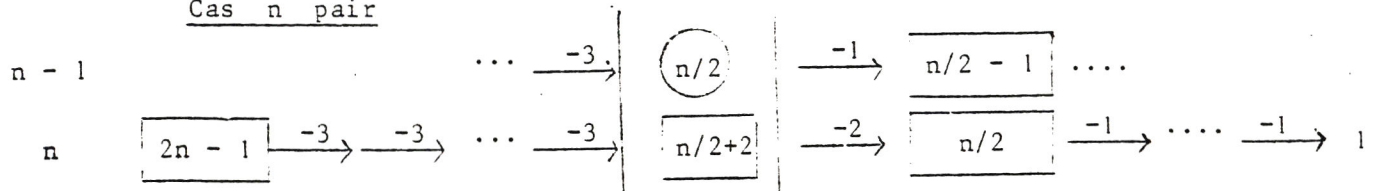
Il y a deux structures de chaînes :

Nous désignons par p^* la colonne du nombre entouré

Cas n impair



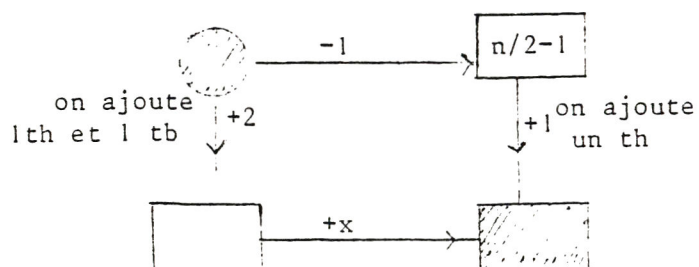
Cas n pair



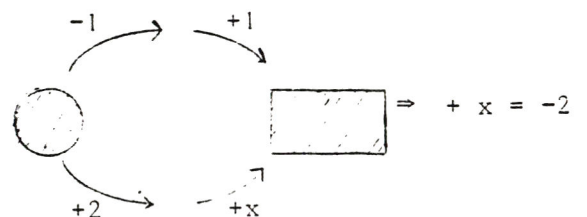
Justification

• $p < p^*$ même situation que n impair

• passage de p^* à $p^* + 1$



• $p > p^* + 1$ même situation que n impair



DENOMBREMENT DES TRIANGLES A L'ETAPE n
--

Les tableaux de la page 15 permettent par additions successives en colonne d'établir les tableaux donnant $t_h(n, p)$ et $t_b(n, p)$

I Tableau donnant $t_h(n, p)$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	3	1								
3	6	3	1							
4	10	6	3	1						
5	15	10	6	3	1					
6	21	15	10	6	3	1				
7	28	21	15	10	6	3	1			
8	36	28	21	15	10	6	3	1		
9	45	36	28	21	15	10	6	3	1	
10	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1

Tableau donnant $t_b(n, p)$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	1									
3	3									
4	6	1								
5	10	3								
6	15	6	1							
7	21	10	3							
8	28	15	6	1						
9	36	21	10	3						
10	45	28	15	6	1					

Tableau donnant le nombre $T(n)$ de triangles à l'étape n

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$T(n)$
1	1	0														1
2	4	1	0													5
3	9	3	1	0												13
4	16	7	3	1	0											27
5	25	13	6	3	1	0										48
6	36	21	11	6	3	1	0									78
7	49	31	18	10	6	3	1	0								118
8	64	43	27	16	10	6	3	1	0							170
9	81	57	38	24	15	10	6	3	1	0						235
10	100	73	51	34	22	15	10	6	3	1	0					315
11	121	91	66	46	31	21	15	10	6	3	1	0				411
12	144	111	83	60	42	29	21	15	10	6	3	1	0			525
13	169	133	102	76	55	39	28	21	15	10	6	3	1	0		658
14	196	157	123	94	70	51	37	28	21	15	10	6	3	1	0	812
15	225	183	146	114	87	65	48	36	28	21	15	10	6	3	1	967

Structure du tableau donnant $T(n)$

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

La structure du tableau fait apparaître une construction automatique

Une flèche $\dashrightarrow$ signifie ajouter 1

Une flèche $\curvearrowright$ signifie ajouter 2

Pour toute colonne p , le premier nombre différent de 0 est un 1

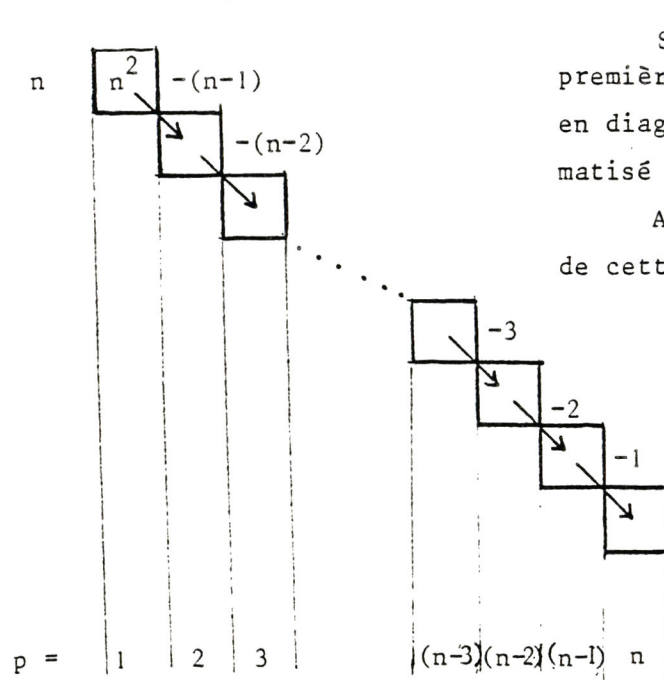
Les 1 se répartissent sur la diagonale

Pour toute colonne p , à partir du dernier 0, on trouve $(p - 1)$

flèches $\dashrightarrow$ suivies de flèches $\curvearrowright$

$\begin{smallmatrix} p \\ \backslash n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	4	$\xrightarrow{-1} 1$										
3	9	$\xrightarrow{-2} 3$	1									
4	16	$\xrightarrow{-3} 7$	$\xrightarrow{-1} 3$	1								
5	25	$\xrightarrow{-4} 13$	$\xrightarrow{-2} 6$	3	1							
6	36	$\xrightarrow{-5} 21$	$\xrightarrow{-3} 11$	$\xrightarrow{-1} 6$	3	1						
7	49	$\xrightarrow{-6} 31$	$\xrightarrow{-4} 18$	$\xrightarrow{-2} 10$	6	3	1					
8	64	$\xrightarrow{-7} 43$	$\xrightarrow{-5} 27$	$\xrightarrow{-3} 16$	$\xrightarrow{-1} 10$	6	3	1				
9	81	$\xrightarrow{-8} 57$	$\xrightarrow{-6} 38$	$\xrightarrow{-4} 24$	$\xrightarrow{-2} 15$	10	6	3	1			
10	100	$\xrightarrow{-9} 73$	$\xrightarrow{-7} 51$	$\xrightarrow{-5} 34$	$\xrightarrow{-3} 22$	$\xrightarrow{-1} 15$	10	6	3	1		
11	121	$\xrightarrow{-10} 91$	$\xrightarrow{-8} 66$	$\xrightarrow{-6} 46$	$\xrightarrow{-4} 31$	$\xrightarrow{-2} 21$	15	10	6	3	1	
12	144	$\xrightarrow{-11} 111$	$\xrightarrow{-9} 83$	$\xrightarrow{-7} 60$	$\xrightarrow{-5} 42$	$\xrightarrow{-3} 29$	21	15	10	6	3	1

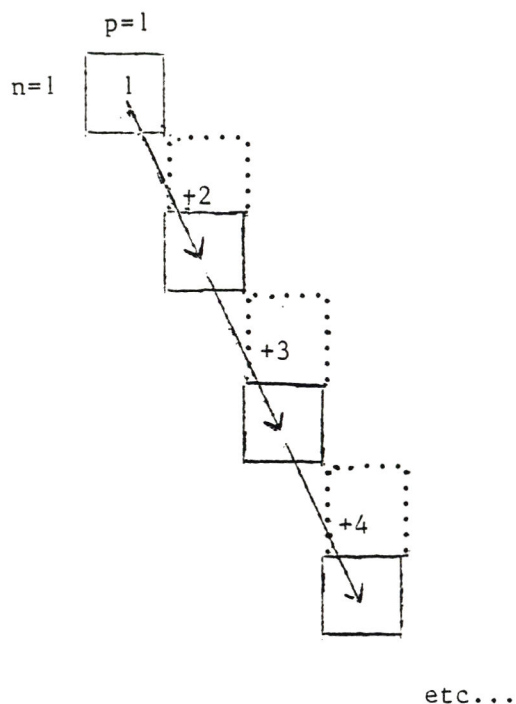
La structure du tableau en diagonale fait apparaître une autre construction automatique :



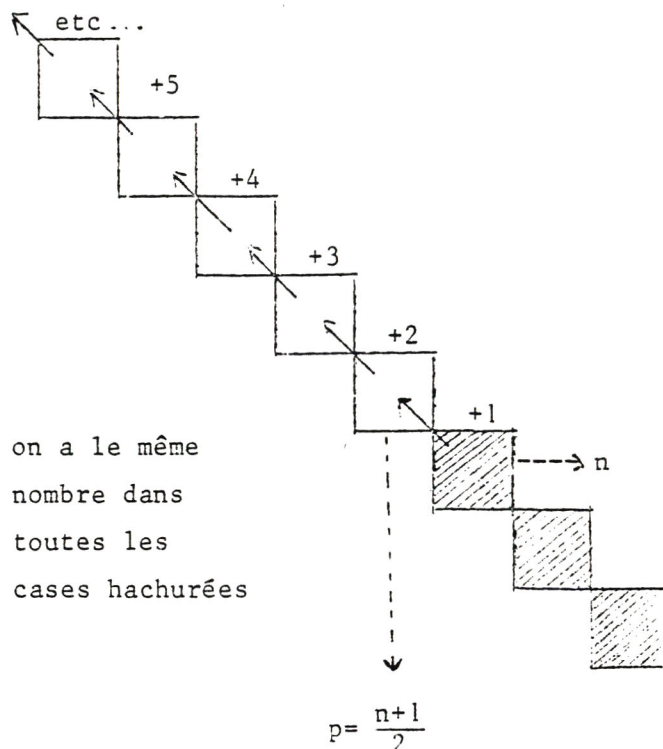
Sur la ligne n écrire n^2 dans la première colonne. A partir de n^2 descendre en diagonale en utilisant l'algorithme schématisé ci-contre.

A partir de la colonne n , les nombres de cette diagonale ne changent pas.

1° remplir les cases $(n; \frac{n+1}{2})$
en utilisant l'algorithme
ci-dessous



à partir de la case $(n; \frac{n+1}{2})$
remplir les cases de la diagonale
en utilisant l'algorithme ci-dessous



on a le même
nombre dans
toutes les
cases hachurées

Nombre de triangles "pointes vers le haut" d'espèce p à l'étape n

Soit $t_h(n, p)$ le nombre de triangles d'espèce p à l'étape n

a) nombre de triangles ajoutés à chaque étape

$n \backslash p$	I	II	III	IV	V	VI
1	1					
2	2	1				
3	3	2	1			
4	4	3	2	1		
5	5	4	3	2	1	
6	6	5	4	3	2	1

$$\left[\begin{array}{l} t_h(n, 1) = t_h(n-1, 1) + n \\ t_h(1, 1) = 1 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} t_h(n, 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ t_h(n, 1) = \frac{1}{2} n (n + 1) \end{array} \quad (1)$$

b) nombre de triangles $t_h(n, p)$

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	I	II	III	IV	V	VI
1	1					
2	3	1				
3	6	3	1			
4	10	6	3	1		
5	15	10	6	3	1	
6	21	15	10	6	3	1

$$t_h(n, p) = t_h(n-1, p-1) = t_h(n-2, p-2) = \dots t_h(n-p+1, 1)$$

$$t_h(n, p) = t_h(n-p+1, 1) \quad (2)$$

$$1 \text{ et } 2 \Rightarrow \boxed{t_h(n, p) = \frac{1}{2} (n-p+1) (n-p+2)} \quad (3)$$

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	1								
2	3	1							
3	6	3	1						
4	10	6	3	1					
5	15	10	6	3	1				
6	21	15	10	6	3	1			
7	28	21	15	10	6	3	1		
8	36	28	21	15	10	6	3	1	
9	45	36	28	21	15	10	6	3	1

Nombre de triangles "pointes vers le bas" d'espèces p à l'étape n

$$t_b(n, p) = t_h(n-p, p) \quad (4)$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	0								
2	1	0							
3	3	0	0						
4	6	1	0	0					
5	10	3	0	0	0				
6	15	6	1	0	0	0			
7	21	10	3	0	0	0	0		
8	28	15	6	1	0	0	0	0	
9	36	21	10	3	0	0	0	0	0

Nombre de triangles à l'étape n

1 - Nombre de triangles "pointes vers le haut": $T_h(n)$

$$(3) \Rightarrow t_h(n, p) = \frac{1}{2} (n - p + 1) (n - p + 2)$$

$$T_h(n) = \sum_{p=1}^n t_h(n, p) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n (n-p+1) (n-p+2)$$

Posons $n - p + 1 = q$

$$\begin{aligned} T_h(n) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n q^2 + q = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n q^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n q \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \right] \end{aligned} \quad \star$$

$$T_h(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \quad (5)$$

2 - Nombre de triangles "pointes vers le bas" $T_b(n)$

$$4 \Rightarrow t_b(n, p) = t_h(n-p, p) = \frac{1}{2} (n-2p+1) (n-2p+2) \quad (3)$$

n pair : la valeur maximale de p est $\frac{n}{2}$ (cf page 16)

$$n = 2m \Rightarrow T_b(n) = \sum_{p=1}^m t_b(n, p) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m (2m-2p+1) (2m-2p+2)$$

Posons $m-p+1 = q$

$$\begin{aligned} T_b(n) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m (4q^2 - 2q) \\ &= 2 \sum_{q=1}^m q^2 - \sum_{q=1}^m q \\ &= \frac{1}{3} 2m(2m+1)(4m+1) - \frac{2m(2m+1)}{2} \quad \star \\ T_b(n) &= \frac{1}{6} \times 2m(2m+1)(8m-1) \end{aligned}$$

$$T_b(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(4n-1)$$

n impair : la valeur maximale de p est $\frac{1}{2}(n-1)$ (cf page 16)

$$n = 2m+1 \Rightarrow T_b(n) = \sum_{p=1}^m t_b(n, p) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m (2m-2p+2) (2m-2p+3)$$

Posons $m-p+1 = q$

$$\begin{aligned} T_b(n) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m (4q^2 + 2q) \\ &= 2 \sum_{q=1}^m q^2 + \sum_{q=1}^m q \\ &= \frac{1}{3} m(m+1)(2m+1) + \frac{m(m+1)}{2} \quad \star \\ T_b(n) &= \frac{1}{6} m(m+1)(4m+5) \end{aligned}$$

$$T_b(n) = \frac{1}{24} (n-1)(n+1)(2n+3)$$

On a donc pour le nombre de triangle à l'étape N : $T(n)$

n pair : $T(n) = T_h(n) + T_b(n) = \frac{1}{8} n(n+2)(2n+1) = \frac{1}{8} (2n^3 + 5n^2 + 2n)$

n impair : $T(n) = T_h(n) + T_b(n) = \frac{1}{8} (2n^3 + 5n^2 + 2n-1) = \text{Entier} \left[\frac{1}{8} (2n^3 + 5n^2 + 2n) \right]$

RECURRENCE

CHEMINEMENTS DANS NEW-YORK

I
SOLUTIONDésignations:

On désigne les carrefours par (x, y) , x désignant le N° de la rue, y le n° de l'avenue

On partira toujours de $(0,0)$

On appelle "chemins minimaux" les chemins les plus courts

Les chemins minimaux sont constitués uniquement de déplacements "vers le haut" et "vers la droite"

On désigne par

a un déplacement unitaire vers la droite $\longrightarrow$

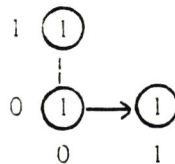
b un déplacement unitaire vers le haut $\dashrightarrow$

On désigne par $M(x,y)$ le nombre de chemins minimaux conduisant de $(0,0)$ à (x, y) .

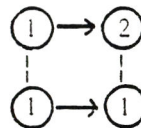
Recherche de proche en proche des chemins minimaux

Remarque 1 : Pour parvenir aux carrefours $(x, 0)$ ou $(0, y)$, il y a un seul chemin minimal

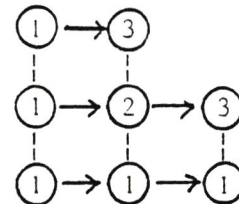
Remarque 2 : On trouve les chemins minimaux de proche en proche en partant de $(0,0)$



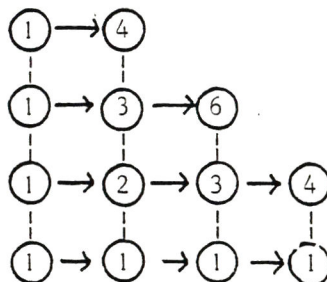
étape 1



étape 2

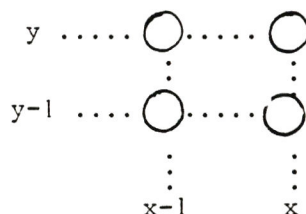


étape 3



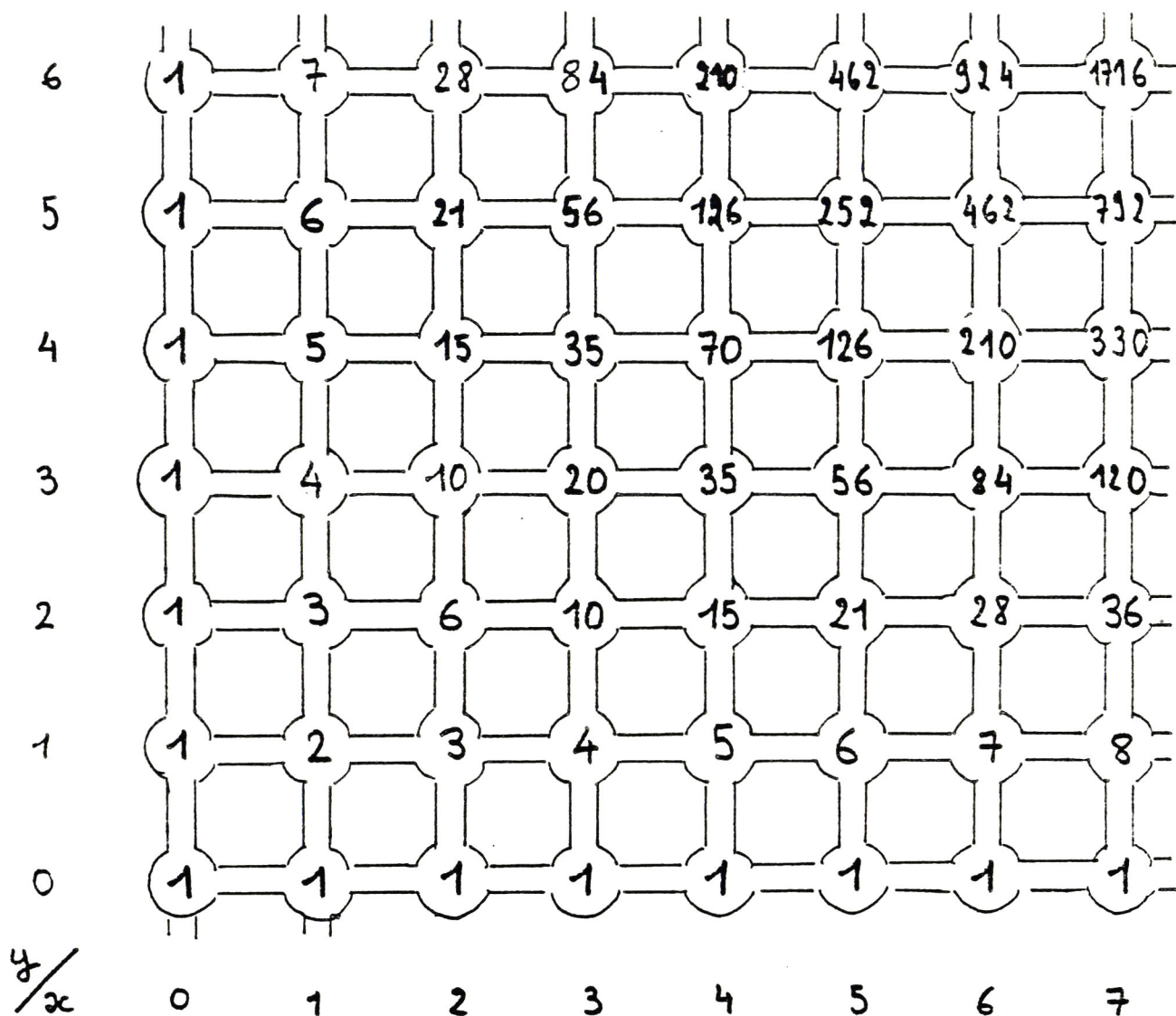
./....

Remarque 3 :



$$M(x, y) = M(x-1, y) + M(x, y-1)$$

La remarque 3 de la fiche pag.27 permet de donner à chaque carrefour le nombre de chemins minimaux.



On peut ainsi répondre pour l'américain situé en (0,0). Le nombre de chemins minimaux pour rejoindre sa femme située au carrefour (4,3) est

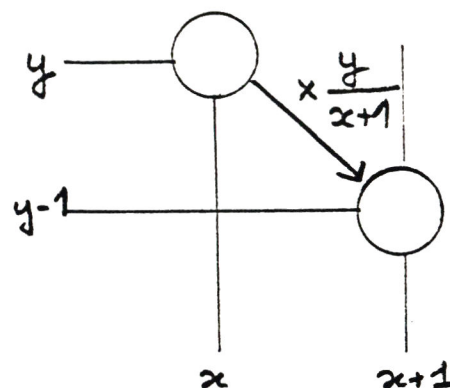
$$M(4, 3) = 35$$

Structure du tableau de la fiche page 28

1° $M(x,y) = M(x-1,y) + M(x,y-1)$

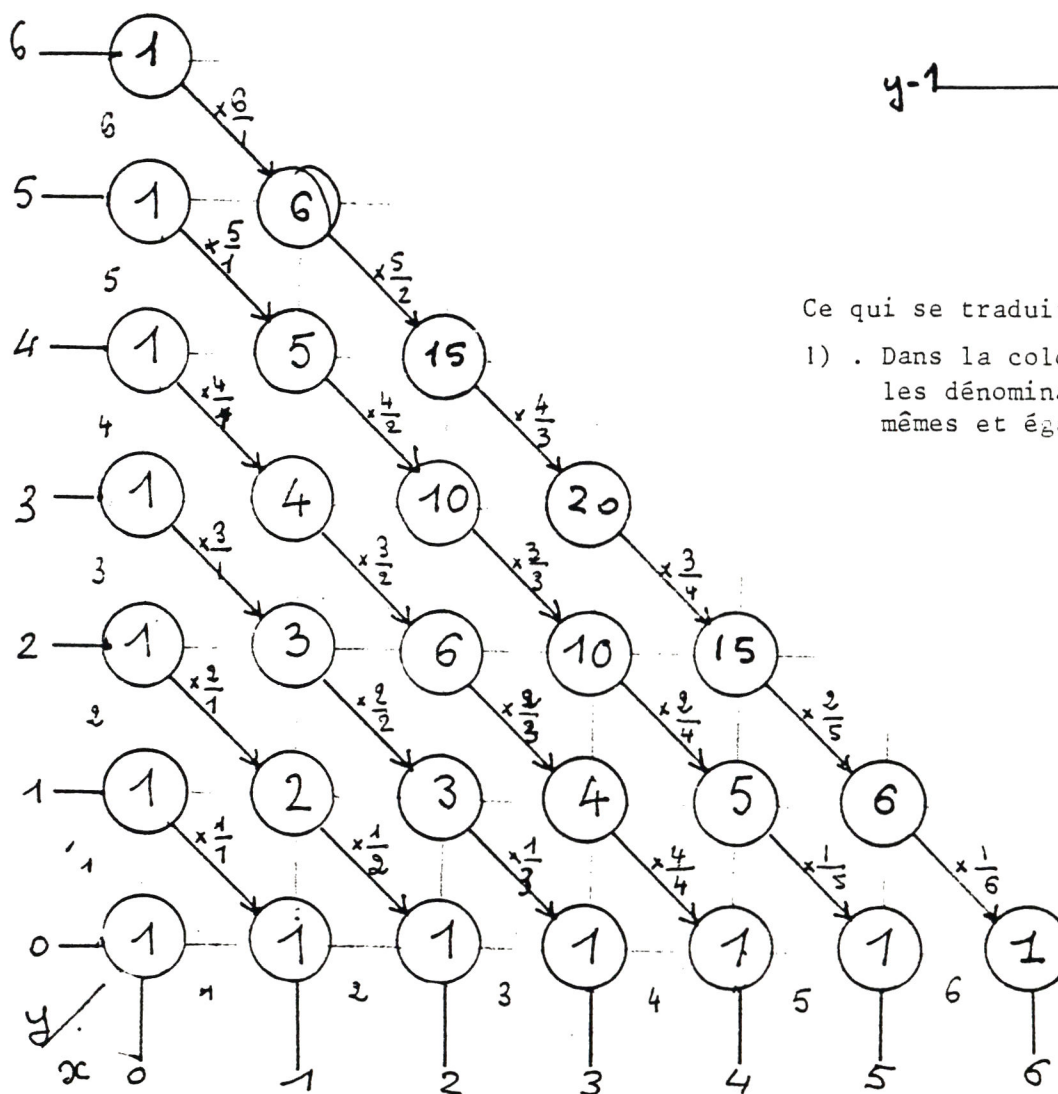
2° $M(x,y) = M(y,x)$

3° Structure des diagonales



Ce qui se traduit de la façon suivante:

- 1) . Dans la colonne $x, x+1$, tous les dénominateurs sont les mêmes et égaux à $x+1$



- 2) . Dans la ligne $y-1, y$ tous les numérateurs sont les mêmes et égaux à y .

- 3) . Sur une même diagonale, les numérateurs des opérateurs sont en progression arithmétique de raison -1

Sur une même diagonale, les dénominateurs des opérateurs sont en progression arithmétique de raison $+1$

REMARQUE : On trouve le triangle de PASCAL qui fournit le dénombrement des parties d'un ensemble (voir ARBRE I, page 39)

Une deuxième manière de calculer $M(4,3)$

La structure de diagonales permet de calculer

$M(x, y)$ à partir de $M(x+y, 0)$

$$M(x+y) \xrightarrow{\times \frac{y}{x+1}} \xrightarrow{\times \frac{y-1}{x+2}} \xrightarrow{\times \frac{y-2}{x+3}} \dots \xrightarrow{\times \frac{1}{x+y}} M(x+y, 0)$$

On sait que quelque soit p $M(p, 0) = 1$, d'où

$$M(x, y) = 1 \times \left(\frac{x+y}{1}\right) \times \left(\frac{x+y-1}{2}\right) \dots \times \left(\frac{x+2}{y-1}\right) \times \left(\frac{x+1}{y}\right)$$

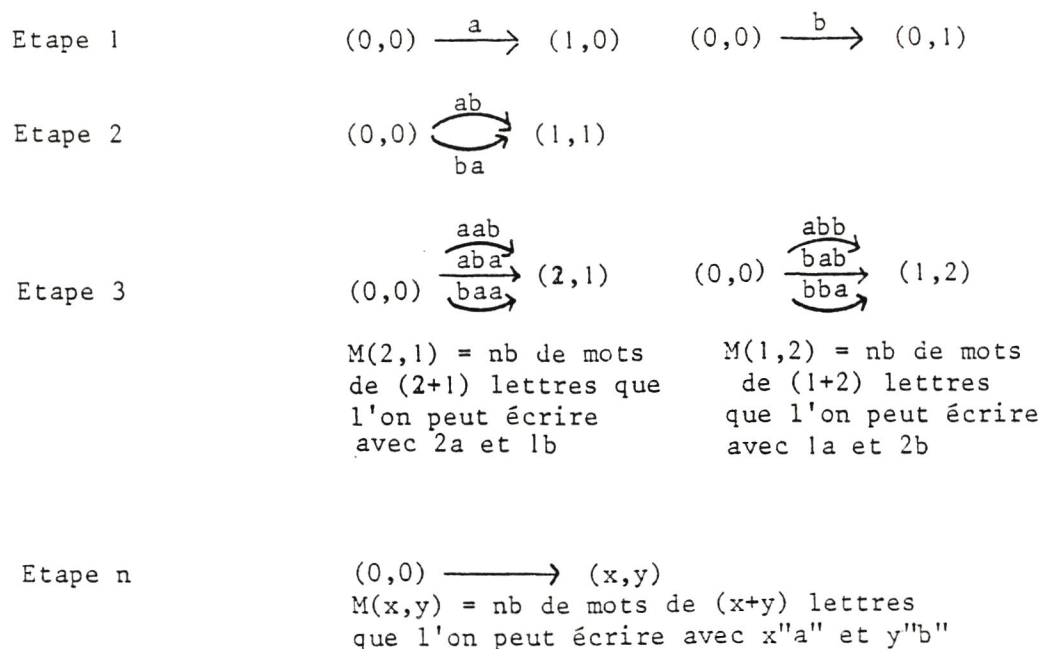
ou

$$M(x, y) = \frac{(x+y)(x+y-1)\dots(x+2)(x+1)}{1.2.3\dots(y-1)(y)}$$

On peut ainsi calculer $M(4,3)$

$$M(4,3) = \frac{7.6.5.}{1.2.3} = 35$$

Une troisième manière de calculer $M(4,3)$



Calcul du nombre de chemins minimaux conduisant de $(0,0)$ à (x, y)

Cela revient à calculer le nombre de mots de $(x+y)$ lettres que l'on peut écrire avec x "a" et y "b"

Exemple : Calculer $M(4,3)$:

1ère Etape : calcul du nombre de mots de 7 lettres que l'on peut écrire avec 7 lettres différentes

rang de la lettre dans le mot	nombre de choix possibles pour la lettre
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

Il y a donc $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$ ^{*} façons d'écrire un mot à l'aide de 7 lettres

^{*} $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

2ème étape

4 lettres sont des "a", 3 lettres sont des "b"

Numérotions les a : a_1, a_2, a_3, a_4

les b : b_1, b_2, b_3 .

Il y a $7!$ mots possibles avec l'alphabet

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$

Voici deux de ces mots $a_1 b a_2 a_3 b b a_4$

$a_2 b a_4 a_1 b b a_3$

Si nous convenons de ne pas distinguer les a

$$a_1 b a_2 a_3 b b a_4 \equiv a_2 b a_4 a_1 b b a_3$$

Il y a d'autres mots équivalents aux précédents.

Pour trouver ces mots équivalents, il suffit de dénombrer le nombre de façons qu'il y a de placer $a_1 a_2 a_3 a_4$ aux rangs 1, 3, 4, 7 dans le mot

rang de la lettre dans le mot	nombre de choix possibles
1	4
3	3
4	2
7	1

Il y a donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ mots équivalents.

Donc du fait que 4 des 7 lettres sont des "a" dans le lot des mots de 7 lettres, on trouve 24 fois le même mot

De même, on trouve $3 \times 2 \times 1 = 3!$ fois le même mot du fait que 3 des 7 lettres sont des "b"

Chaque mot est donc écrit $4! \times 3!$ fois lorsque l'on ne distingue pas les "a" et les "b"

Il y a donc $\frac{7!}{4! \times 3!}$ mots écrits avec 4 "a" et 3 "b"

$$M(4,3) = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

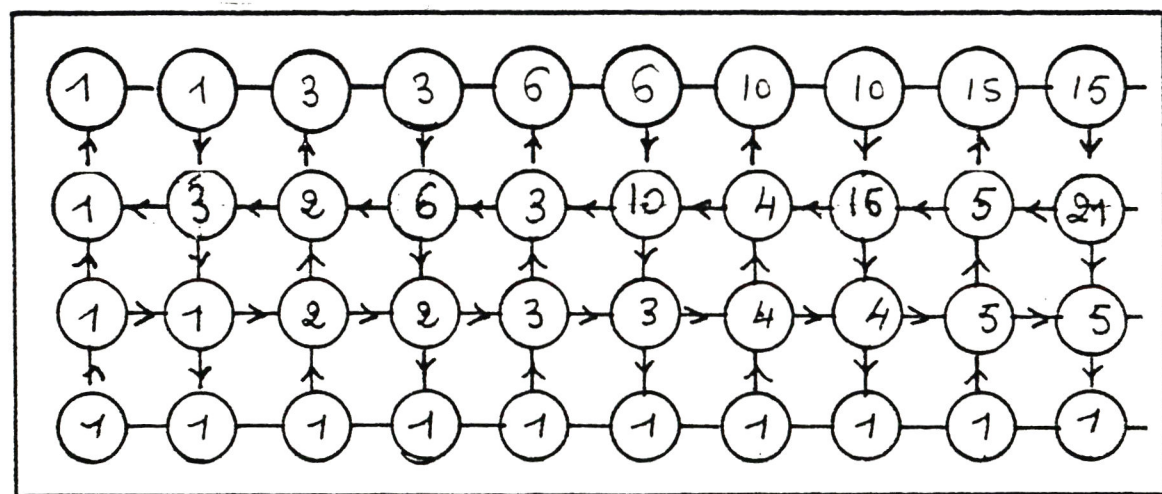
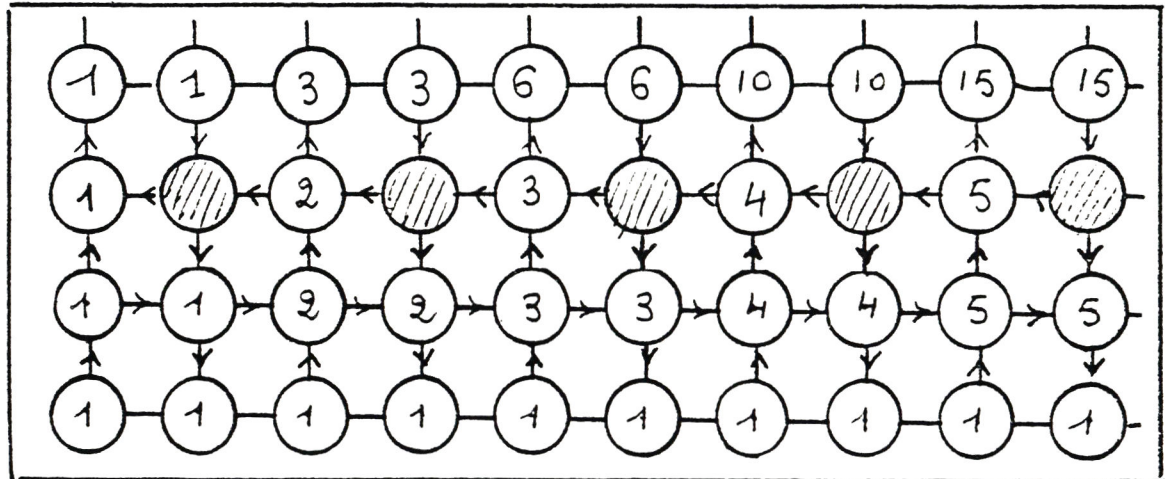
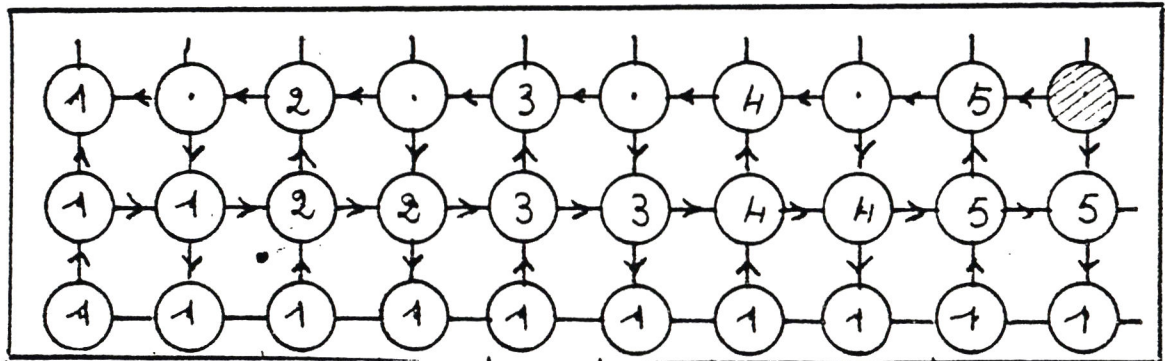
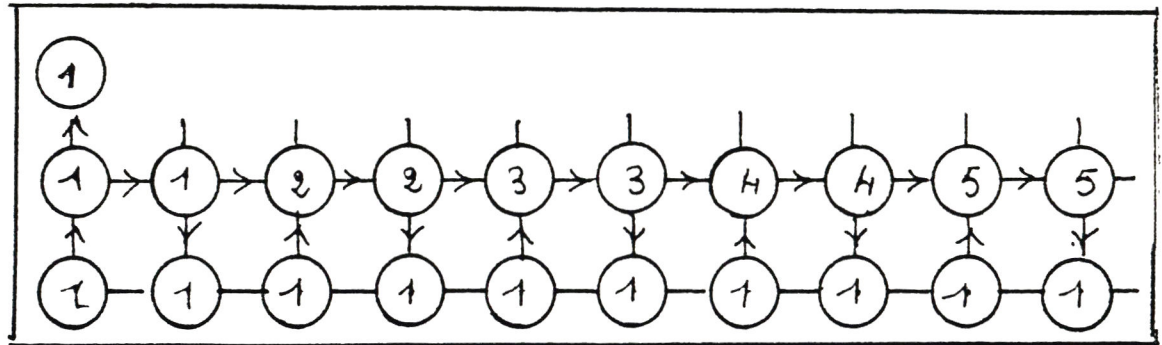
De façon générale $M(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!y!}$

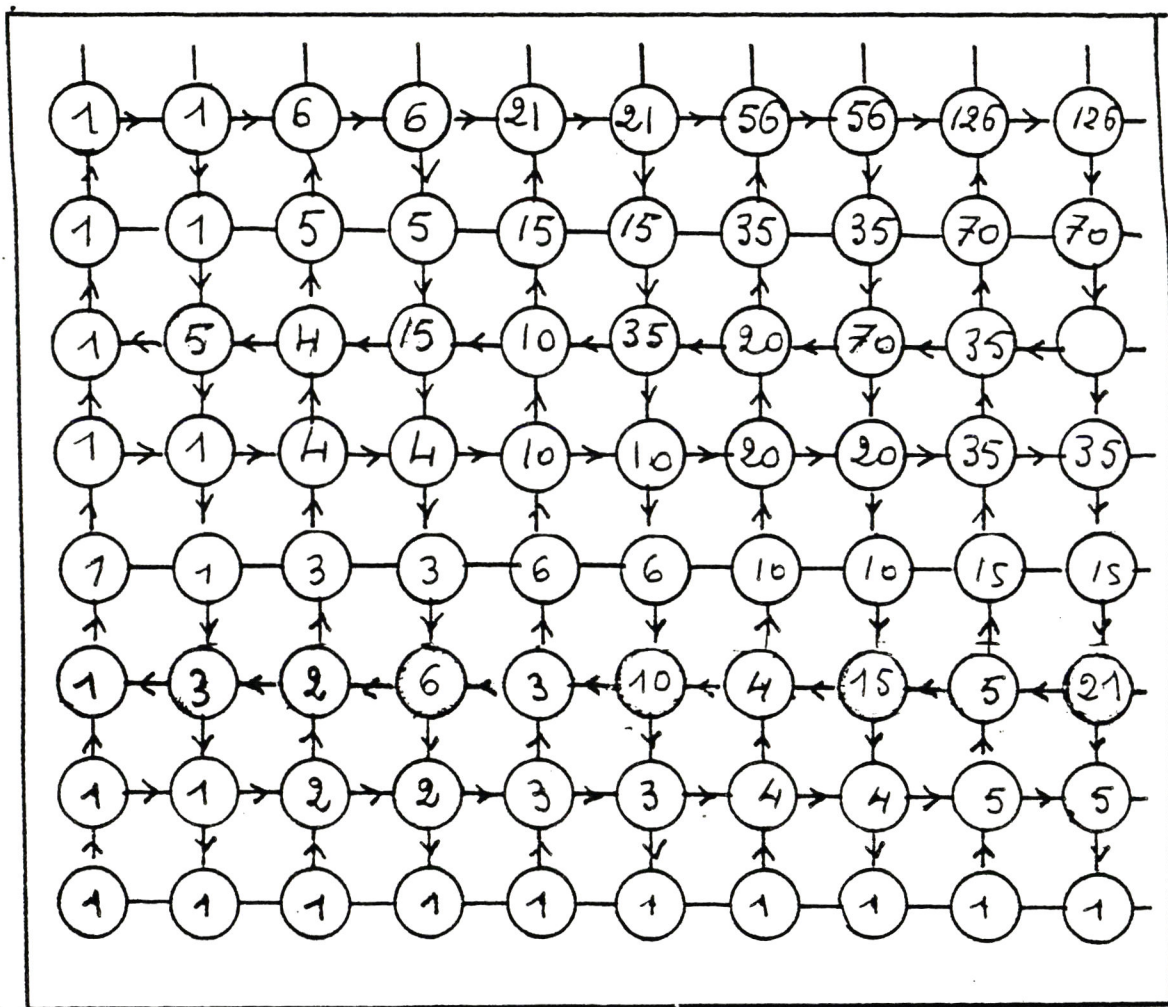
On remarque que $M(x,y) = \binom{x+y}{x}$ (voir Photos et promenades, solution page 47)

RECURRENCE

CHEMINEMENTS DANS NEW-YORK II SOLUTION

SYSTEME B

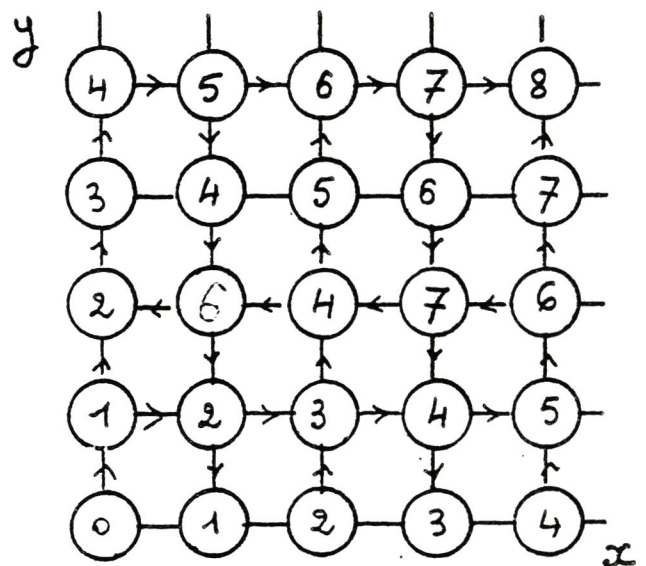




En groupant "géographiquement" les carrefours portant les mêmes nombres, on obtient le schéma suivant où l'on voit nettement le triangle de Pascal. On peut donc continuer automatiquement le travail.

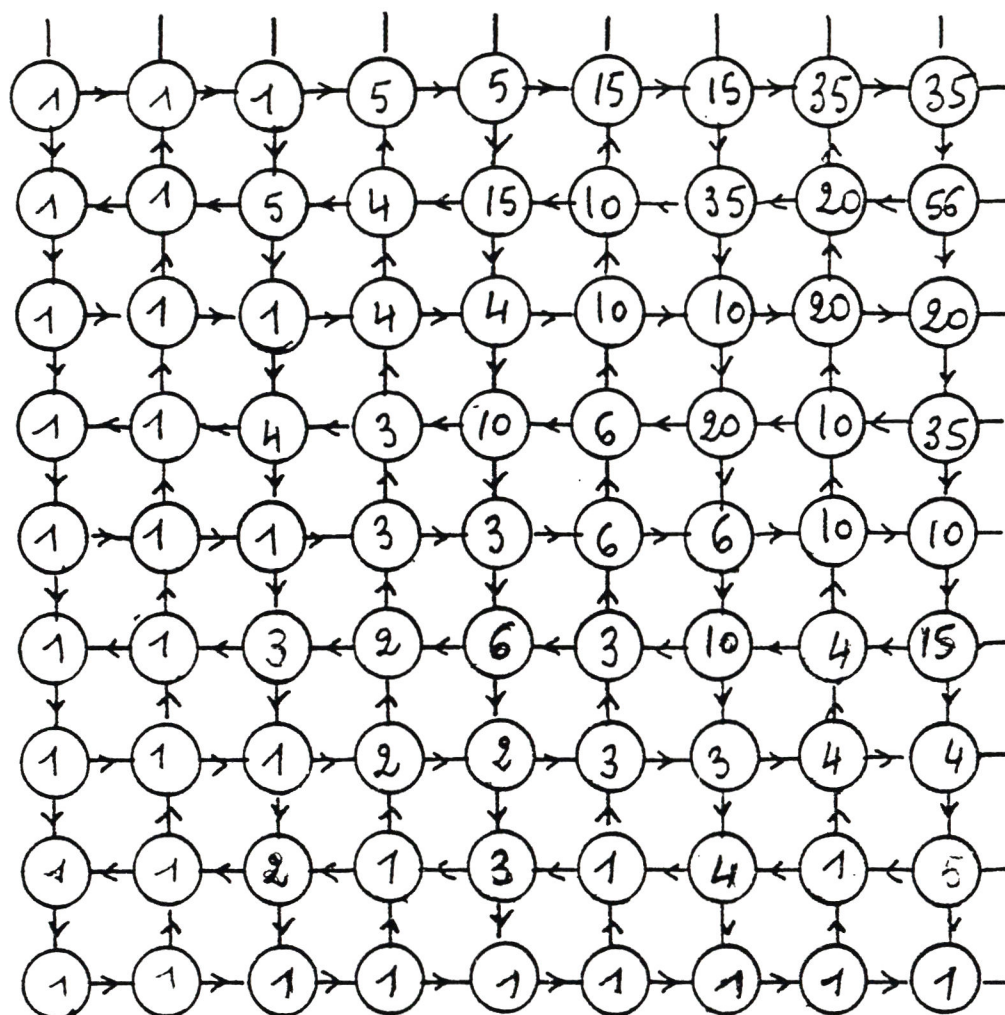
7	7	28	84	210
7	28	84	210	462
1	6	21	56	126
1	5	15	35	70
5	15	35	70	126
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
3	6	10	15	21
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Longueur ℓ des chemins minimaux en (x,y)



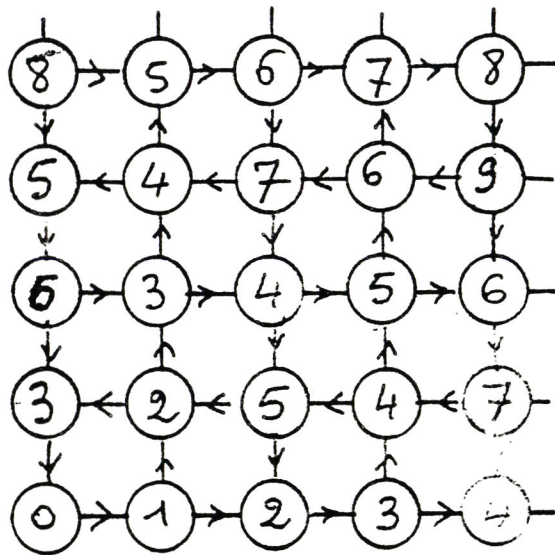
	x pair	x impair
$y \equiv 2 \pmod 3$	$\ell = x+y$	$\ell = x+y+2$
$y \not\equiv 2 \pmod 3$	$\ell = x+y$	$\ell = x+y$

SYSTEME C



1		5		15		35		70		126
	1		4		10		20		35	
	1		4		10		20		35	
	1		3		6		10		15	
	1		3		6		10		15	
		3		6		10		15		21
	1		2		3		4		5	
		2		3		4		5		6
	1		1		1		1		1	

Longueur ℓ des chemins minimaux

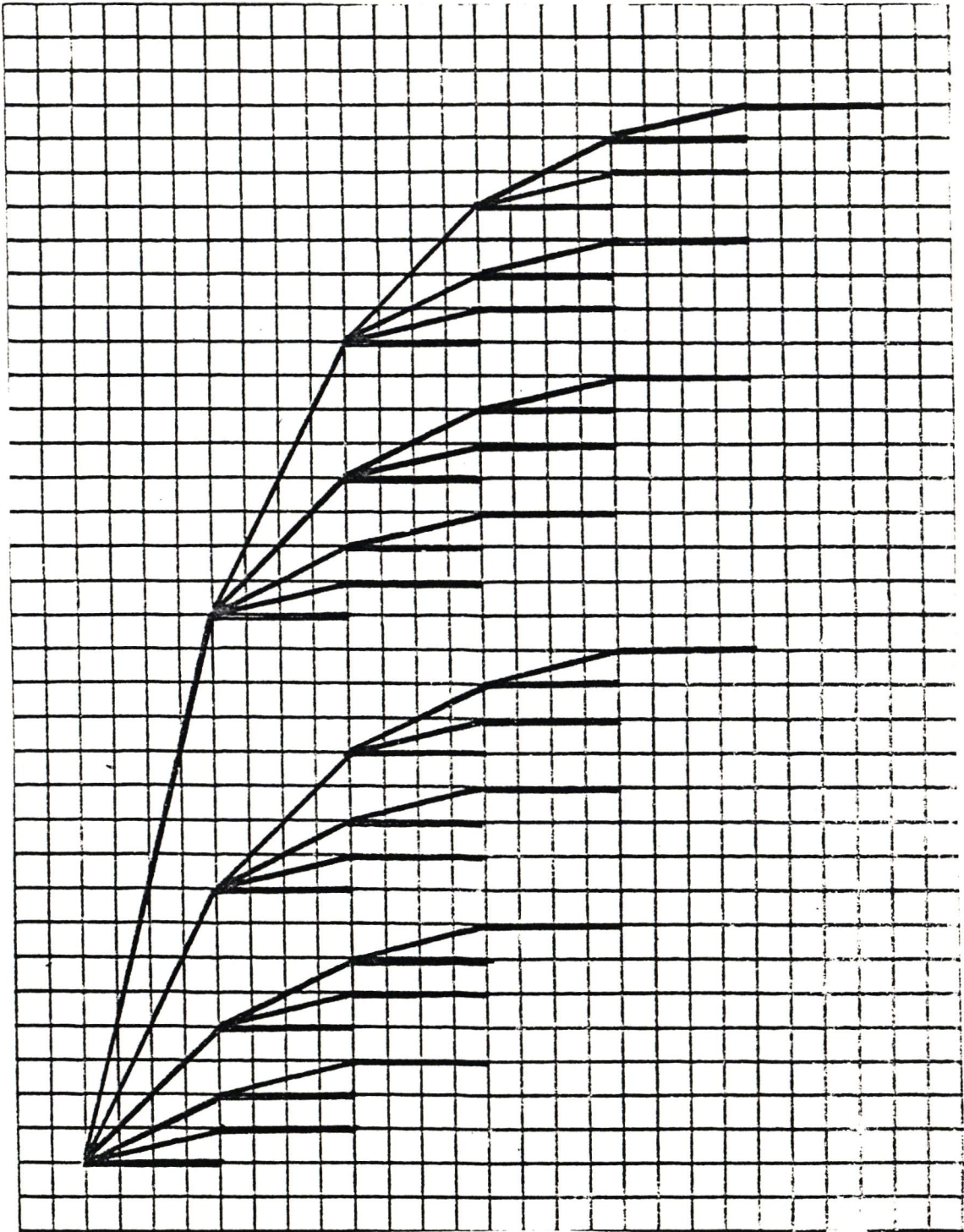


		$y \neq 0$	
		$y = 0$	
$x = 0$		$\ell = x + y$	
		$\ell = x + y + 4$	$\ell = x + y + 2$
$x \neq 0$	x pair	$\ell = x + y$	$\ell = x + y + 2$
	x impair	$\ell = x + y$	$\ell = x + y$

RECURRENCE

ARBRE I
SOLUTION

Arbre à l'étape 6



Cet arbre construit de façon "régulière" semble être enveloppé par une courbe, faire une recherche pour infirmer ou confirmer cette conjecture.

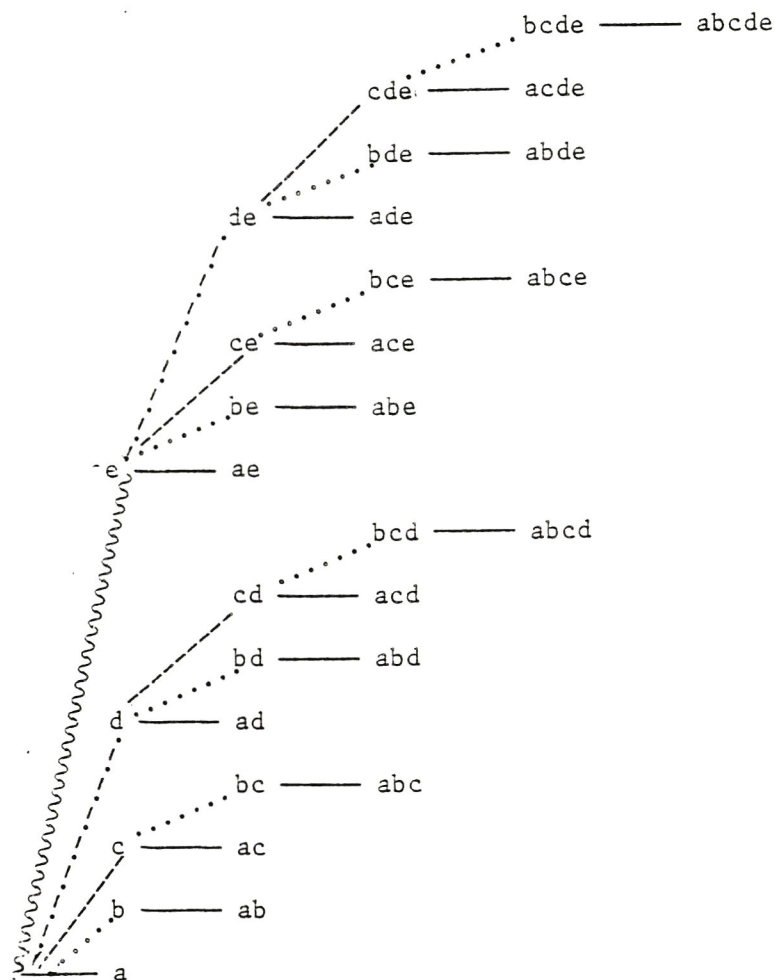
ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Nous prenons l'exemple d'un ensemble à 5 éléments

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

l'arbre I permet de faire l'inventaire des parties de E :

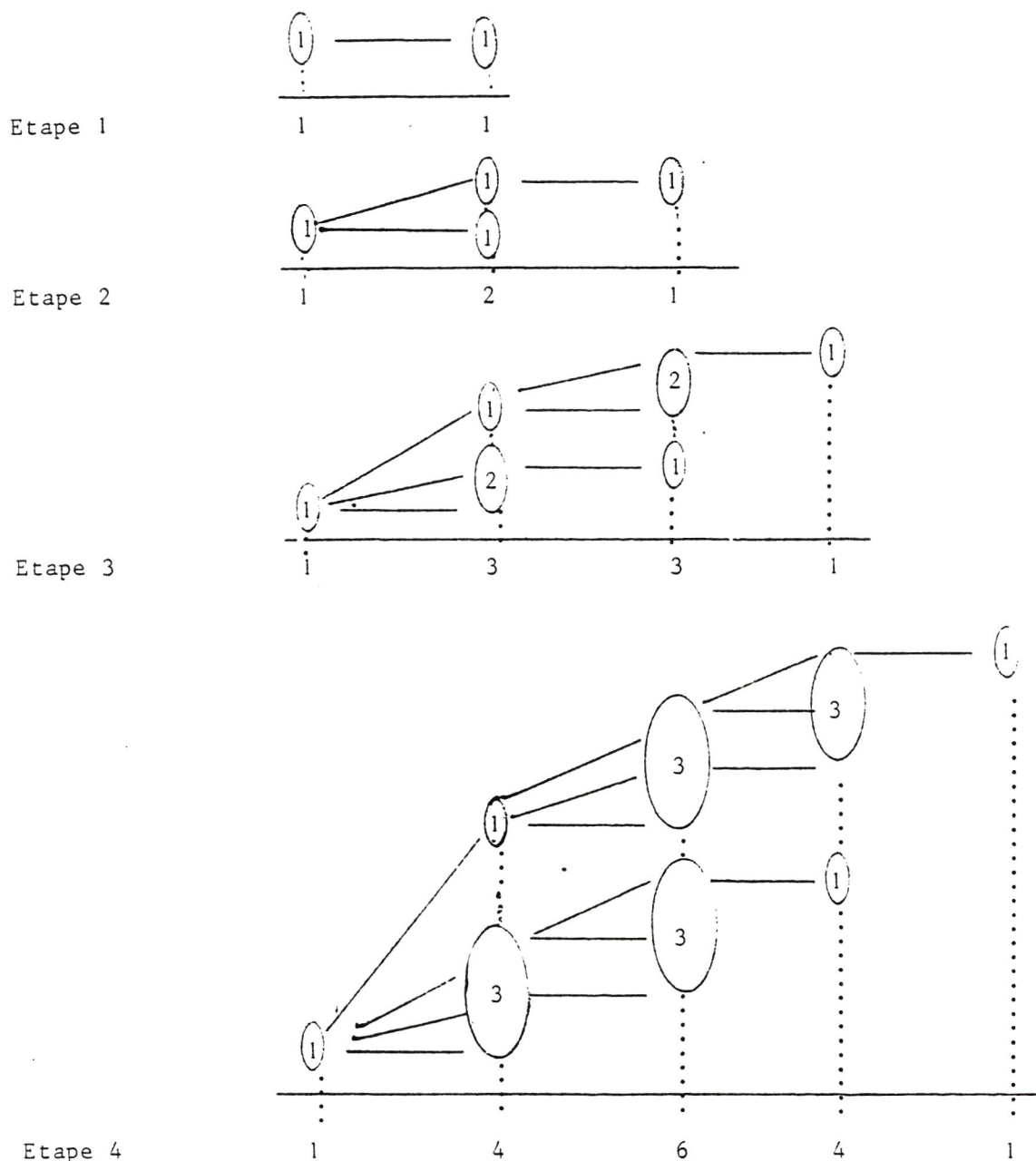
une branche	—————	signifie prendre	a
"		"	b
"	-----	"	c
"	-.-.-.-.-	"	d
"	~~~~~	"	e



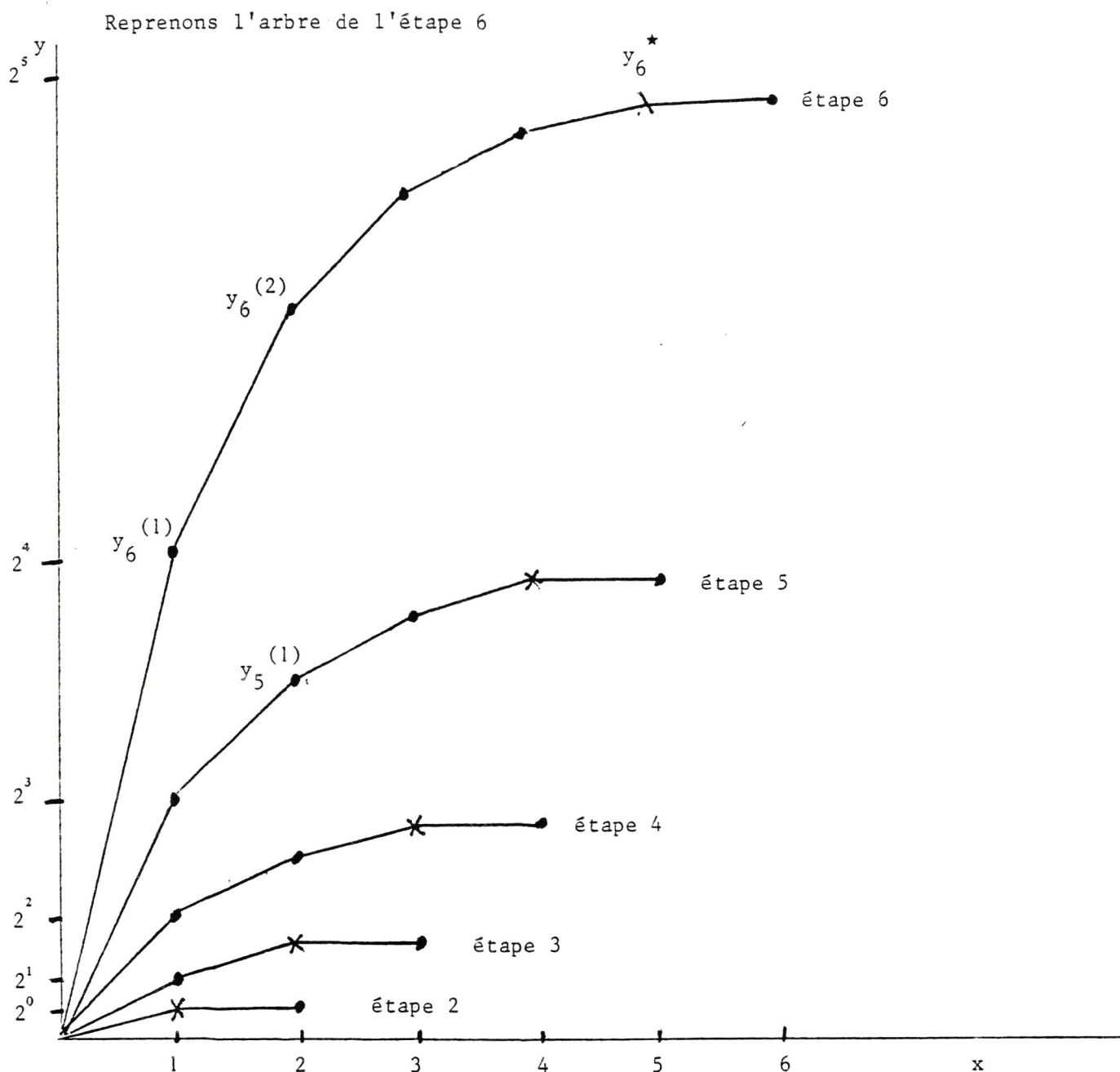
L'arbre permet de dénombrer les parties à 1, 2, 3, 4 ou 5 éléments.

DENOMBREMENT DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Le mode de construction de l'arbre des parties d'un ensemble permet de calculer par récurrence le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de n éléments.



Les séries de nombres ainsi obtenus à chaque étape forment le "TRIANGLE DE PASCAL"



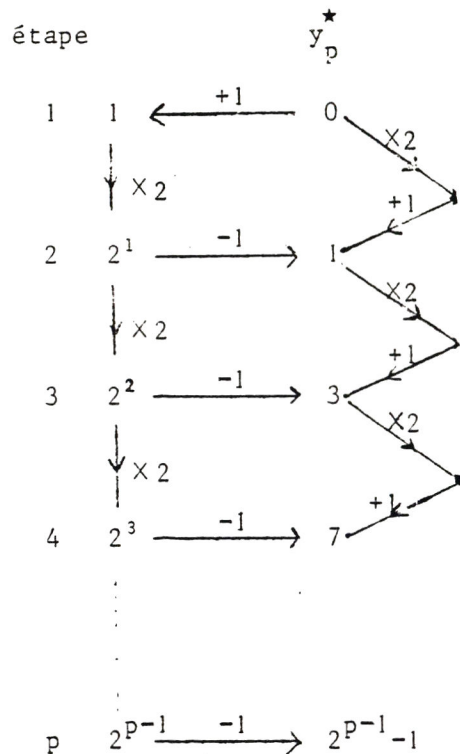
A l'étape p , les $(p-1)$ premiers sommets de l'enveloppe de l'arbre semblent se placer sur une courbe. Donc à chaque étape p , on s'intéresse à l'avant dernier sommet de l'enveloppe (x_p^*, y_p^*)

Par construction $x_p^* = p-1$

$y_p^* = y_{p-1}^* \times 2+1$ puisque pour passer d'une

étape à la suivante on dédouble l'arbre déjà tracé en décalant de 1

On en déduit donc par le schéma de calcul suivant la valeur de y_p^*



Les points y^* se répartissent donc sur une parabole

$$y = 2^x - 1$$

A l'étape p, étude des sommets constituant l'enveloppe de l'arbre

$$\begin{aligned} \text{A l'étape } p \quad y_p^* &= 2^{p-1} - 1 \\ p-1 \quad y_{p-1}^* &= 2^{p-2} - 1 \end{aligned}$$

Pour passer de l'étape $p-1$ à l'étape p , on dédouble l'arbre en décalant de 1 $\Rightarrow$

$$y_p(1) = (2^{p-2} - 1) + 1 = 2^{p-2}$$

Par construction $y_p(2) = y_p(1) + y_{p-1}(1) = 2^{p-2} + 2^{p-3}$

$$y_p(3) = y_p(1) + y_{p-1}(1) + y_{p-2}(1) = 2^{p-2} + 2^{p-3} + 2^{p-4}$$

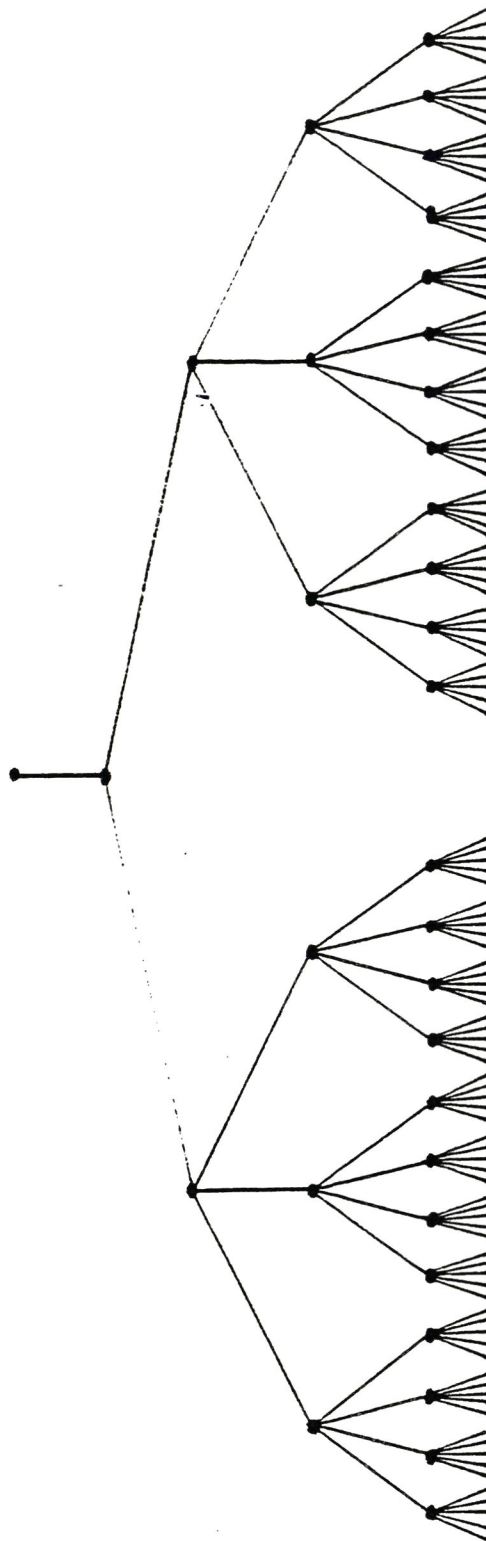
$$\begin{aligned} y_p(n) &= y_p(1) + y_{p-1}(1) + \dots + y_{p-(n+1)}(1) = 2^{p-2} + 2^{p-3} + \dots + 2^{p-(n+1)} \\ &= 2^{p-1} (2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}) \\ &= 2^{p-1} (1 - 2^{-n}) \end{aligned}$$

A chaque étape p , les $(p-1)$ premiers sommets se répartissent donc sur la courbe dont les coordonnées des points satisfont la relation

$$y_p(x) = 2^{p-1} (1 - 2^{-x})$$

RECURRENCE

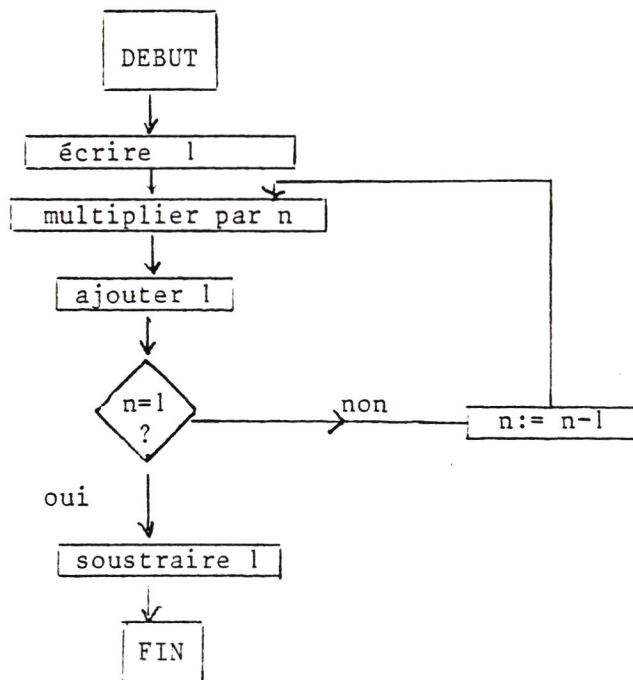
ARBRE II
SOLUTION



A l'étape 5 il y a $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ branches nouvelles, soit 120 branches nouvelles

N° étape	Nombre de branches nouvelles	Nombre de branches
0	0	0
1	1	1
2	$1 \times 2 = 2!$	$1 + 1 \times 2 = 1 (1 + 2)$
3	$1 \times 2 \times 3 = 3!$	$1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3$ $= 1 (1 + 2 (1 + 3))$
4	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$	$= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4$ $= 1 + 1 \times 2 (1 + 3 + 3 \times 4)$ $1 (1 + 2 (1 + 3 (1 + 4)))$
5	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$	$= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ $= 1 (1 + 2 (1 + 3 + 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5))$ $= 1 (1 + 2 (1 + 3 (1 + 4 + 4 \times 5)))$ $= 1 (1 + 2 (1 + 3 (1 + 4 (1 + 5))))$
n	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$	$= 1 (1 + 2 (1 + 3 (1 + 4 (1 + \dots (1 + n - 1$ $((+n))))))$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-1}$ parenthèses

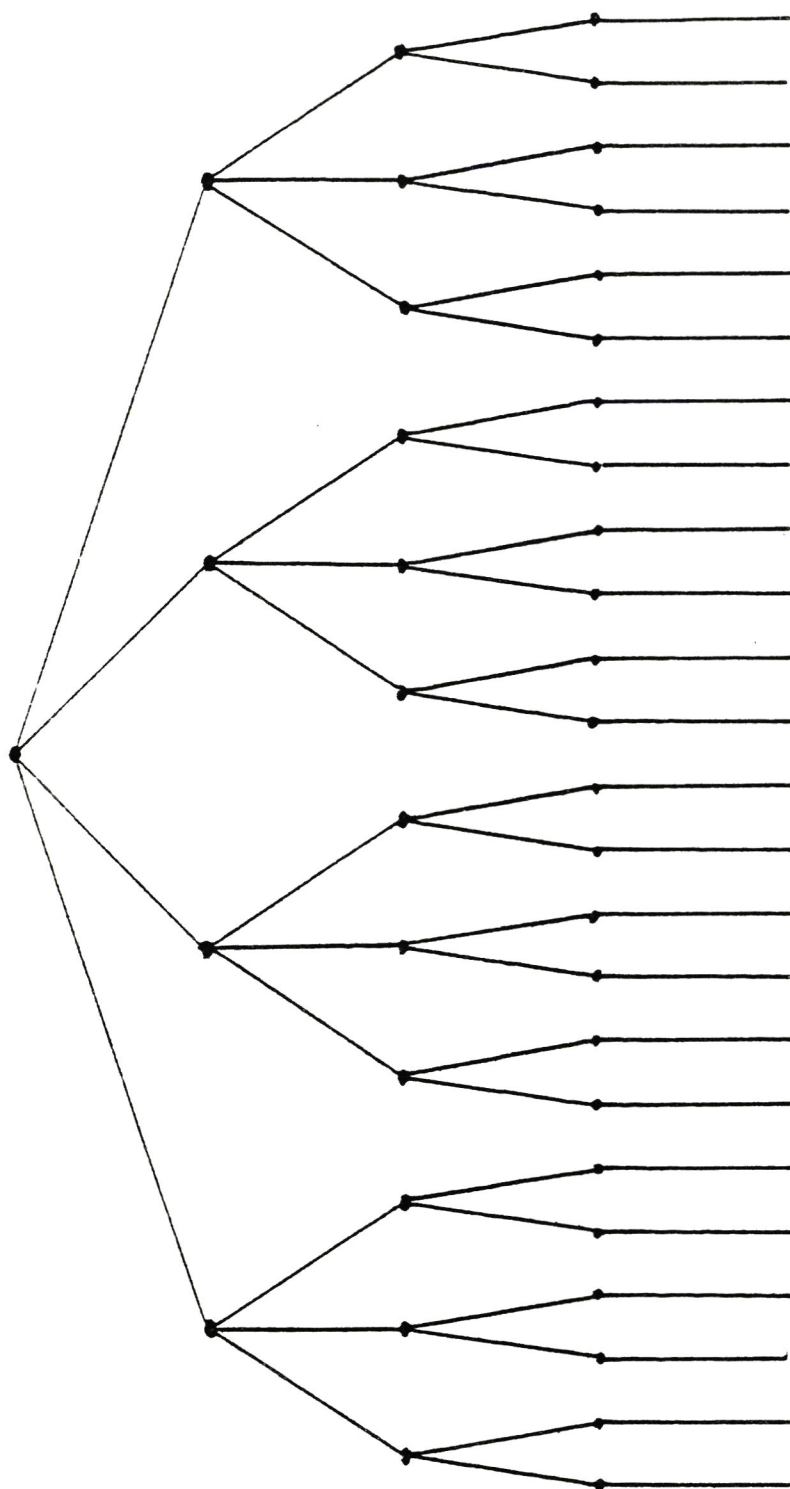
Le calcul du nombre de branches correspond au schéma de calcul suivant:



RECURRENCE

ARBRE III

SOLUTION



Il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1$ branches pendantes dans l'arbre d'espèce 4

Il y a $n(n-1)(n-2) \dots 4 \times 3 \times 2 \times 1$ branches pendantes dans l'arbre d'espèce n .

Nombre de branches dans l'arbre d'espèce 5

N° étape	Nb branches nouvelles	nombre de branches
0	0	
1	5	5
2	5×4	$5 + 5 \times 4 = 5 (1 + 4)$
3	$5 \times 4 \times 3$	$5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 = 5 (1 + 4 + 4 \times 3)$ $= 5 (1 + 4(1 + 3))$
4	$5 \times 4 \times 3 \times 2$	$5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2$ $= 5 (1 + 4 + 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2)$ $= 5 (1 + 4 (1 + 3 + 3 \times 2))$ $= 5 (1 + 4 (1 + 3 (1 + 2)))$
5	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$	$= 5 (1 + 4 (1 + 3 (1 + 2 (1 + 1))))$

le nombre b_5 de branches de l'arbre d'espèce 5 est donc

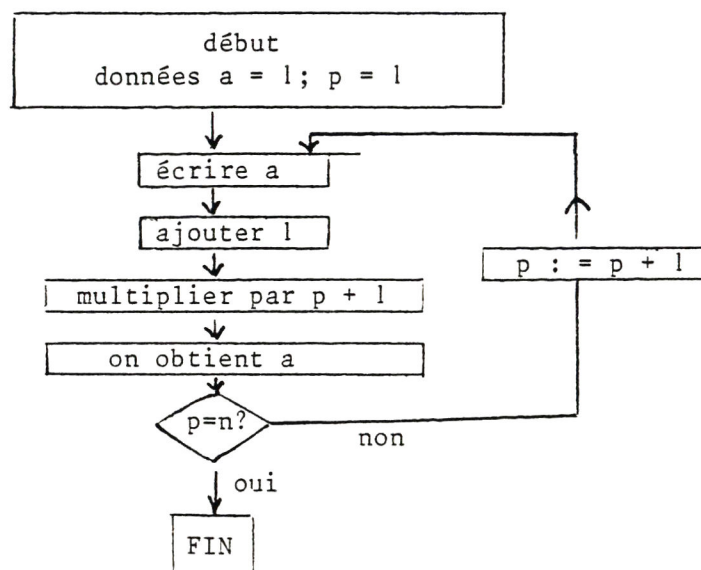
$$b_5 = 5 (1 + 4 (1 + 3 (1 + 2 (1 + 1))))$$

Nombre de branches dans l'arbre d'espèce n

$$b_n = n (1 + ((n-1) (1 + (n-2) (1 + \dots ((n-2) (1 + 2 (1 + 1))) \dots)))$$

n-1 parenthèses

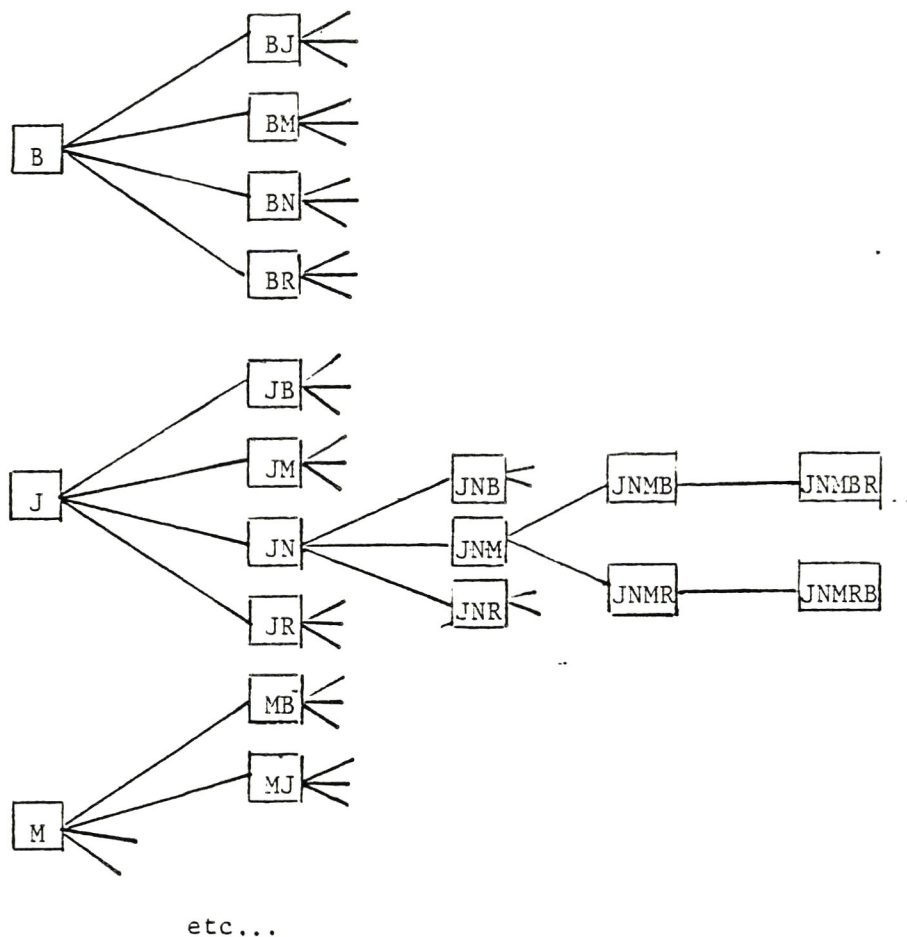
On peut calculer b_n par le schéma de calcul suivant:



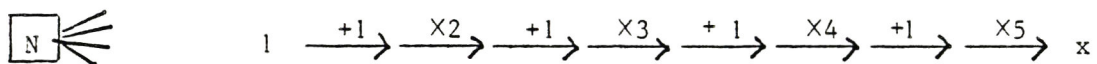
RECURRENCE

PHOTOS ET PROMENADES
SOLUTIONProblème 1

Arbre des dispositions possibles pour les photos



On trouve l'arbre étudié dans "arbre III"

le nombre x de dispositions possibles est donc donné par

Nb de pers.	1	2	3	4	5
Nb de dispositions	5	5×4	$5 \times 4 \times 3$	$5 \times 4 \times 3 \times 2$	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Problème 2

le nombre $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ (factorielle 5)

On peut écrire le nombre de dispositions de 3 personnes parmi 5 sous la forme suivante :

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{(5 \times 4 \times 3) \times (2 \times 1)}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

De la même façon, le nombre de dispositions de p personnes parmi n est égal à

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) &= \frac{[n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)] \times [(n-p) \times (n-p-1) \times \dots \times 2 \times 1]}{(n-p) \times (n-p-1) \times \dots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p \end{aligned}$$

A_n^p désigne l'arrangement de n objets p à p

Problème 3

On part de la solution du problème 2.

Il y a A_5^3 possibilités de disposer 3 personnes parmi 5, or pour la situation concernant la promenade, pour un groupe donné de 3 personnes $\{B, J, M\}$ par exemple les $3!$ dispositions sont considérées comme équivalentes, il y aura donc

$$A_5^3 / 3! \text{ groupes possibles de 3 personnes}$$

$$\text{soit } \frac{5!}{3! (5-3)!} = C_5^3$$

C_5^3 désigne le nombre de combinaisons de 5 objets 3 à 3

Problème 4

De façon générale le nombre de combinaisons de n objets p à p est

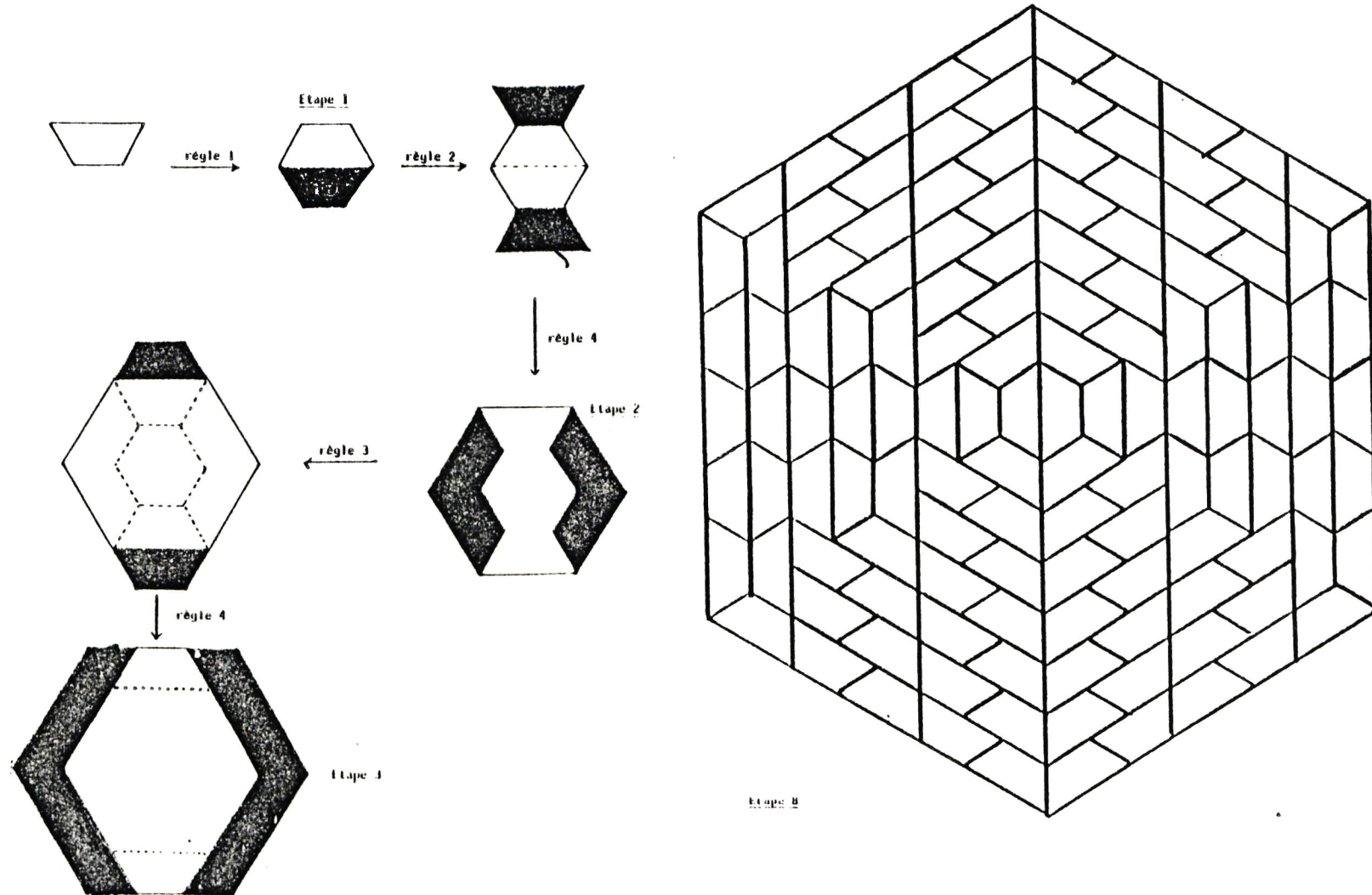
$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

le raisonnement est de même type que celui du problème 3

RECURRENCE

ASSEMBLAGES DE TRAPEZES

LOI I
SOLUTION



Décompte des trapèzes à chaque étape

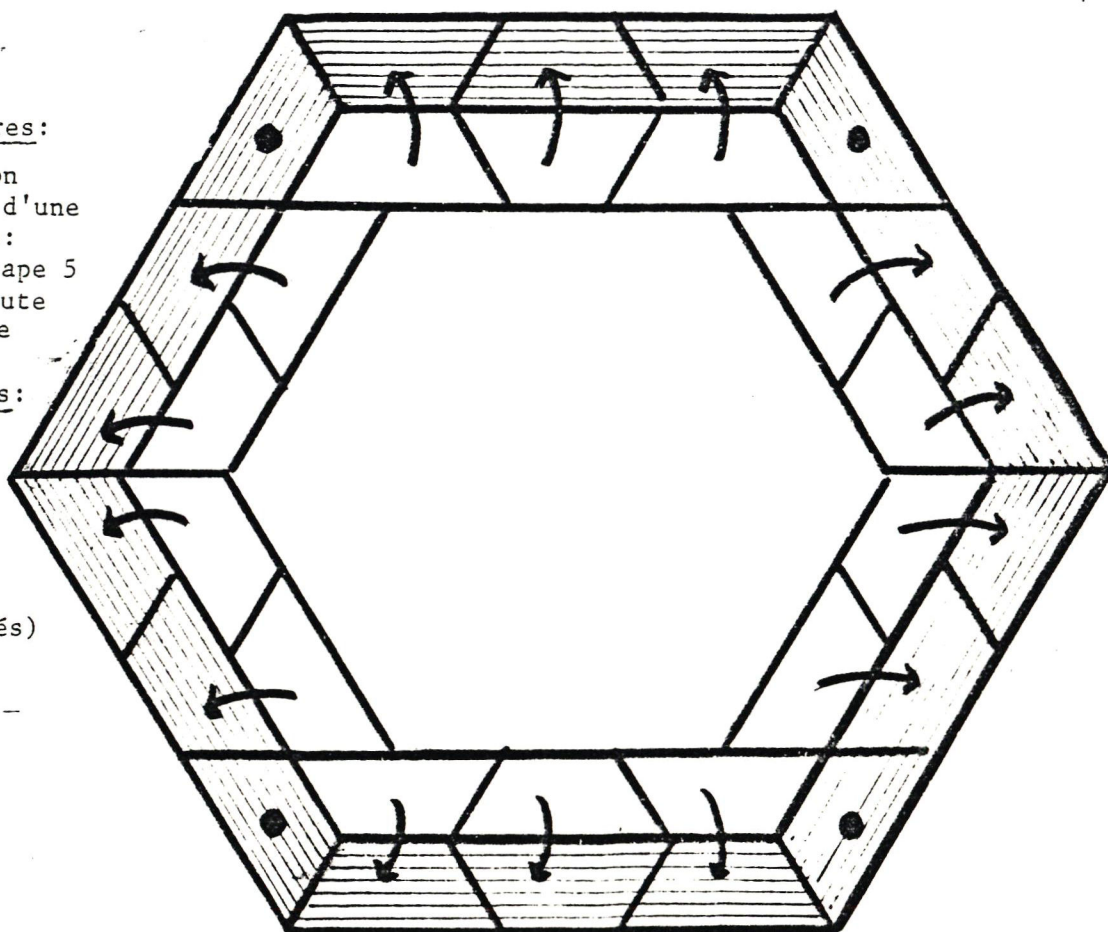
étape	Nombre de trapèzes	différence première	différence seconde
1	2		
2	8	+ 6	+ 4
3	18	+ 10	+ 4
4	32	+ 14	+ 4
5		+ 18	+ 4
6		+ 22	
n - 2			
n - 1			+ 4
n			

différences premières:

la couronne que l'on ajoute pour passer d'une étape à la suivante:
pour passer de l'étape 5 à l'étape 6, on ajoute la couronne hachurée

différences secondes:

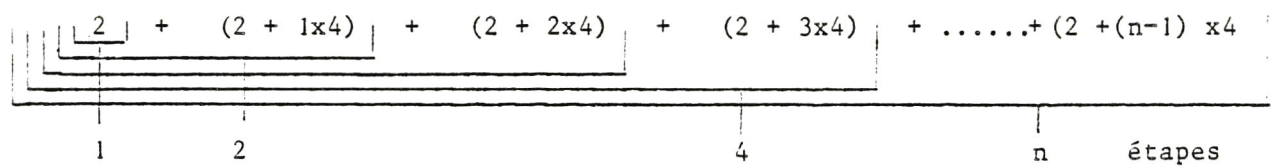
différence entre le nombre de trapèzes ajoutés à une étape et le nombre de trapèzes ajoutés à l'étape précédente (les trapèzes pointés)



Ecriture des différences premières en utilisant les différences secondes
(premier et deuxième cycle)

étape atteinte	n	différence première (pour passer de (n-1) à n)	
2		$6 = 2 + 4$	$= 2 + 1 \times 4$
3		$10 = 6 + 4 = (2+4)+4$	$= 2 + 2 \times 4$
4		$14 = 10 + 4 = (2+2 \times 4)+4$	$= 2 + 3 \times 4$
n			$2 + (n-1) \times 4$

Calcul du nombre t de trapèzes à l'étape n en utilisant les différences premières



à l'étape 1

$$t = 2$$

à l'étape 2

$$t = (2+2) + (1 \times 4) = (2 \times 2) + (1 \times 4)$$

à l'étape 3

$$t = (2+2+2) + (1 \times 4) + (2 \times 4) = (3 \times 2) + (1+2) \times 4$$

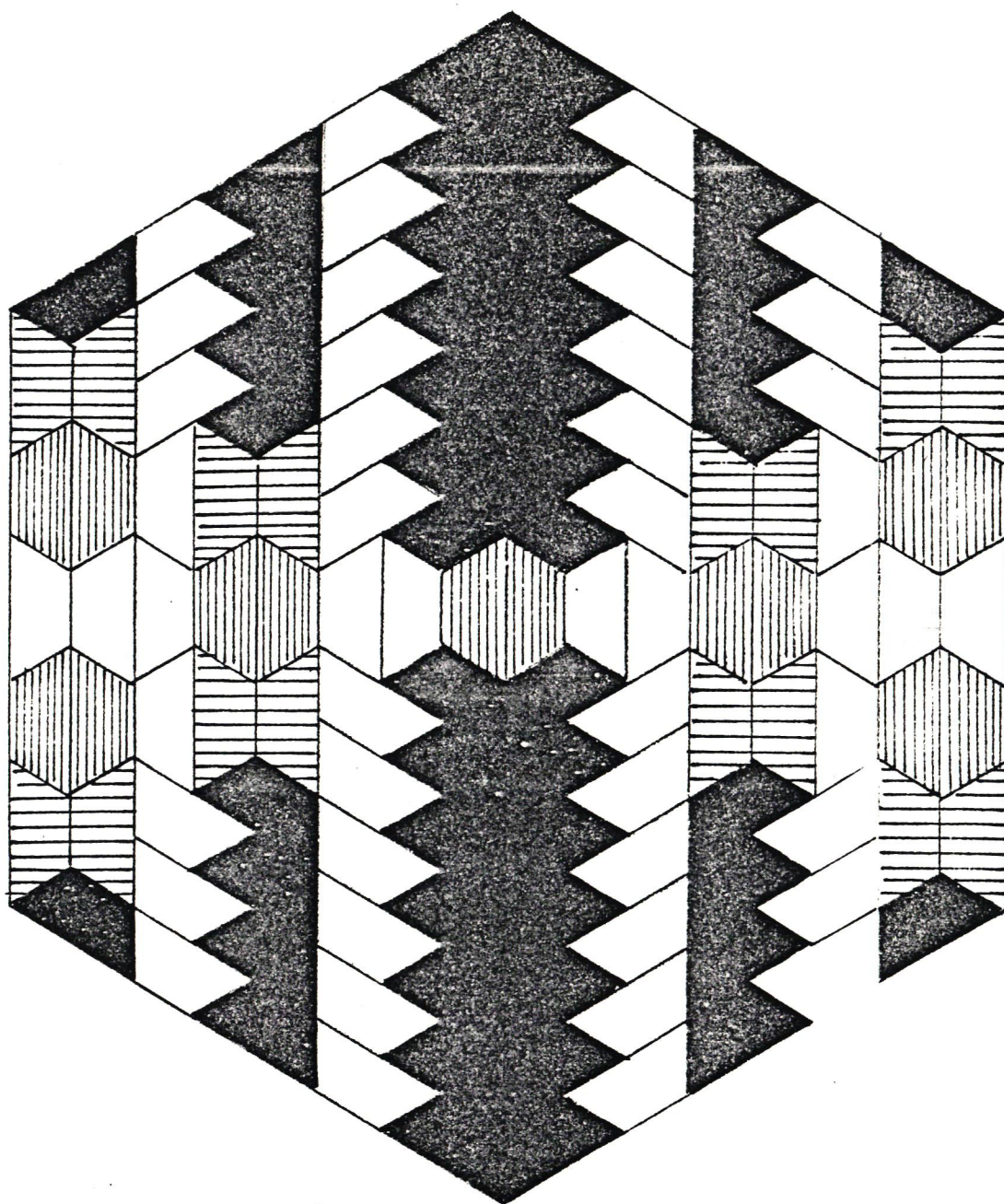
à l'étape n :

$$t = 2 n + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] \times 4$$

ou en utilisant la somme de la suite $(1 + 2 + \dots + (n-1))$ *
(second cycle)

$$t = 2 n + \frac{n(n-1)}{2} = 2 n^2$$

* Voir Somme des n premiers nombres entiers, solutions page 8

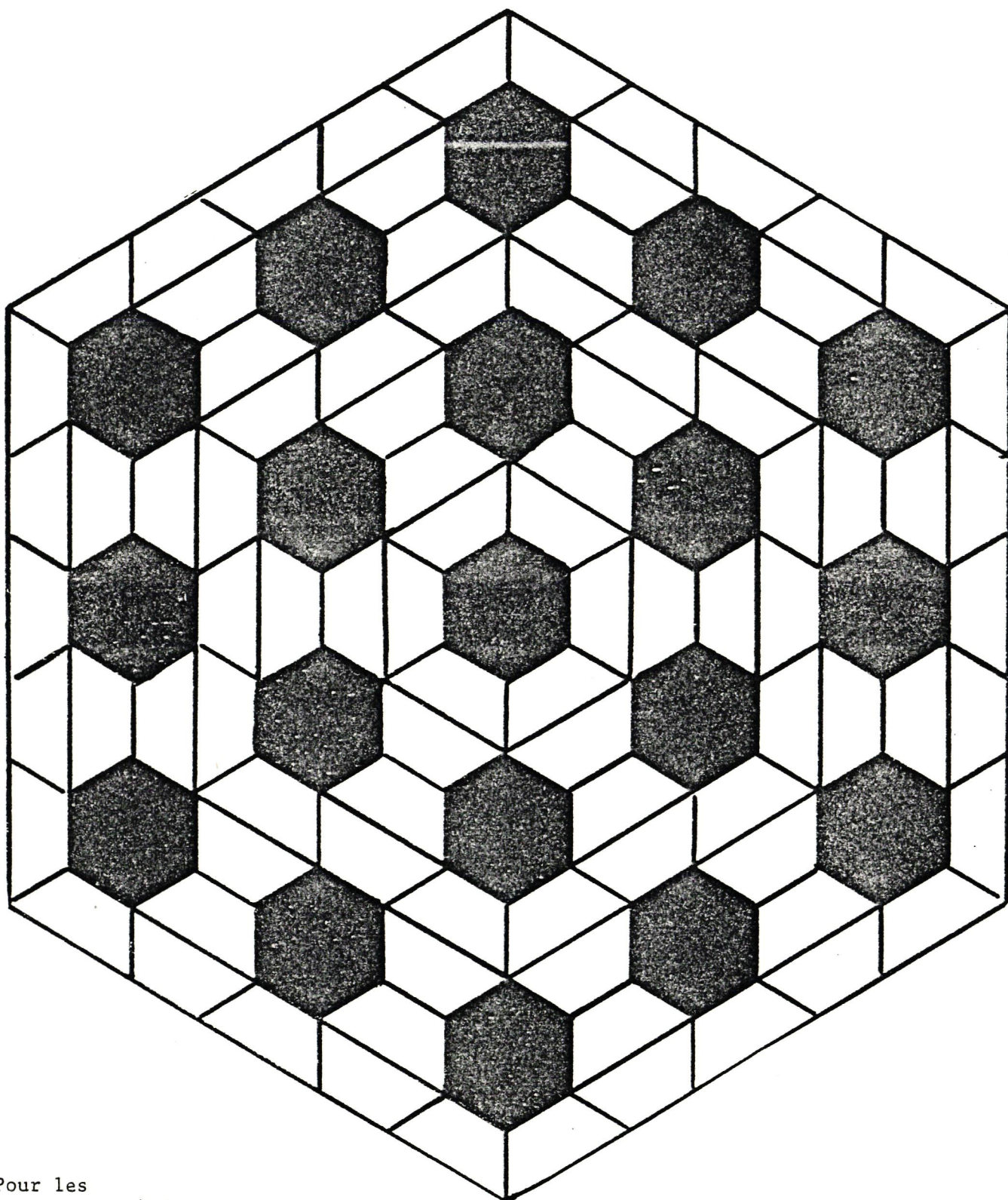


ASSEMBLAGES DE TRAPEZES

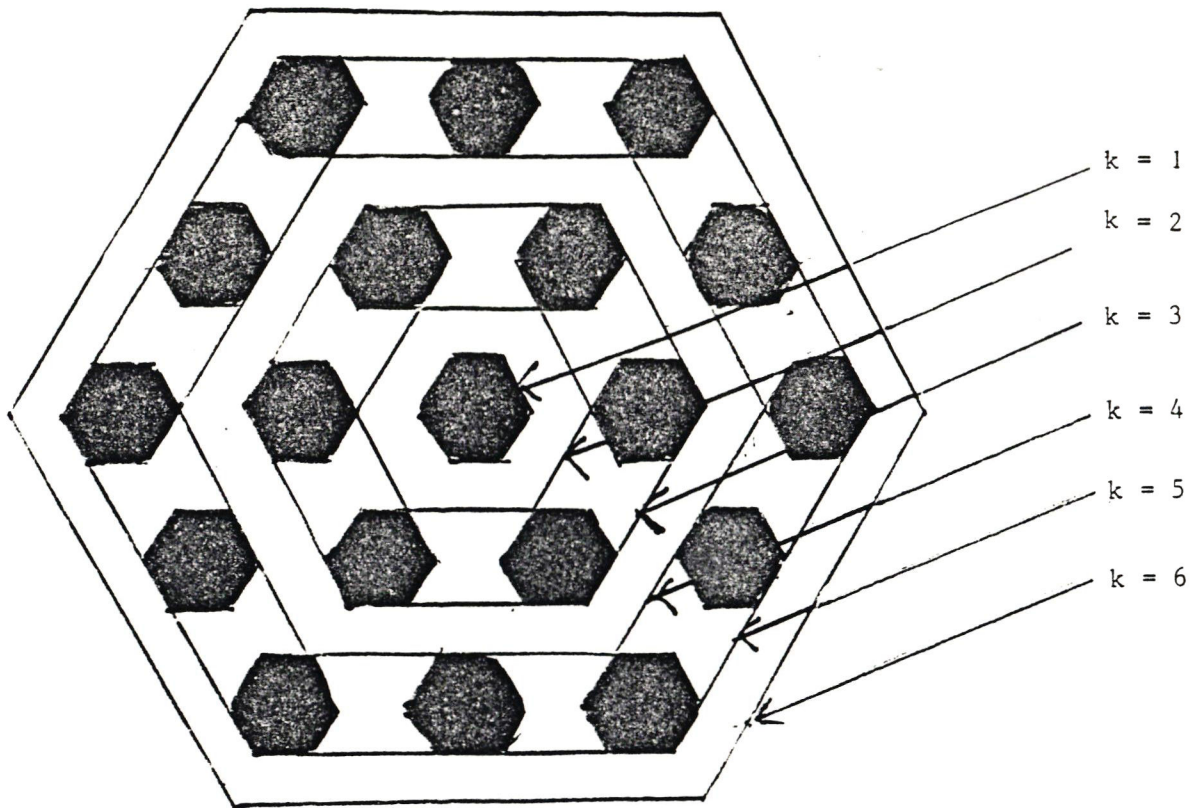
RECURRENCE

Loi 2

SOLUTION



Pour les
hexagones grisés,
l'orientation de
trapèzes est
indifférente



Décompte des trapèzes à chaque étape

étape k	nombres de trapèzes t	différences premières
1	2	
2	8	+ (1 x 6)
3	32	+ 2x (2x6)
4	50	+ (3x6)
5	98	+ 2 x (4x6)
6	128	+ (5x6)
7	200	+ 2 x (6x6)
8	242	+ (7x6)
⋮	⋮	

Il apparaît qu'il faut distinguer les étapes paires et impaires

<u>1er cas</u>	étape	nombre de trapèzes	différences premières
On part d'une étape impaire	$2p - 1$	t_{2p-1}	
On ajoute une couronne simple			$+ (2p-1) \times 6$
On arrive à une étape paire	$2p$	t_{2p}	

<u>2ème cas</u>	étape	nombre de trapèzes	différence première
On part d'une étape paire	$2p$	t_{2p}	
On ajoute une couronne double			$+ 2(2p) \times 6$
On arrive à une étape impaire	$2p + 1$	t_{2p+1}	

Décompte du nombre de trapèzes à l'étape $K = 2p$

$$t = 2 + [1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1)] \times 6 + 2[2 + 4 + \dots + (2p-2)] \times 6$$

$$t = 2 + [1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1)] \times 6 + 24[1 + 2 + \dots + (p-1)]$$

$$t = 2 + 3(2p)^2/2 + 24(p-1)p/2 \quad *$$

$$t_{2p} = 2(3p-1)^2$$

ou, si l'on veut faire intervenir k

$$t_k = \frac{(3k-2)^2}{2} \quad \text{pour } k \text{ pair}$$

* Voir somme des n premiers nombres entiers, solutions p. 8

Décompte du nombre de trapèzes à l'étape $k = 2p + 1$

$$t = 2 + [1 + 3 + 5 + \dots + (2p - 1)] \times 6 + 2 [2 + 4 + \dots + 2p] \times 6$$

$$t = 2 + 6p^2 + 24p(p + 1) / 2$$

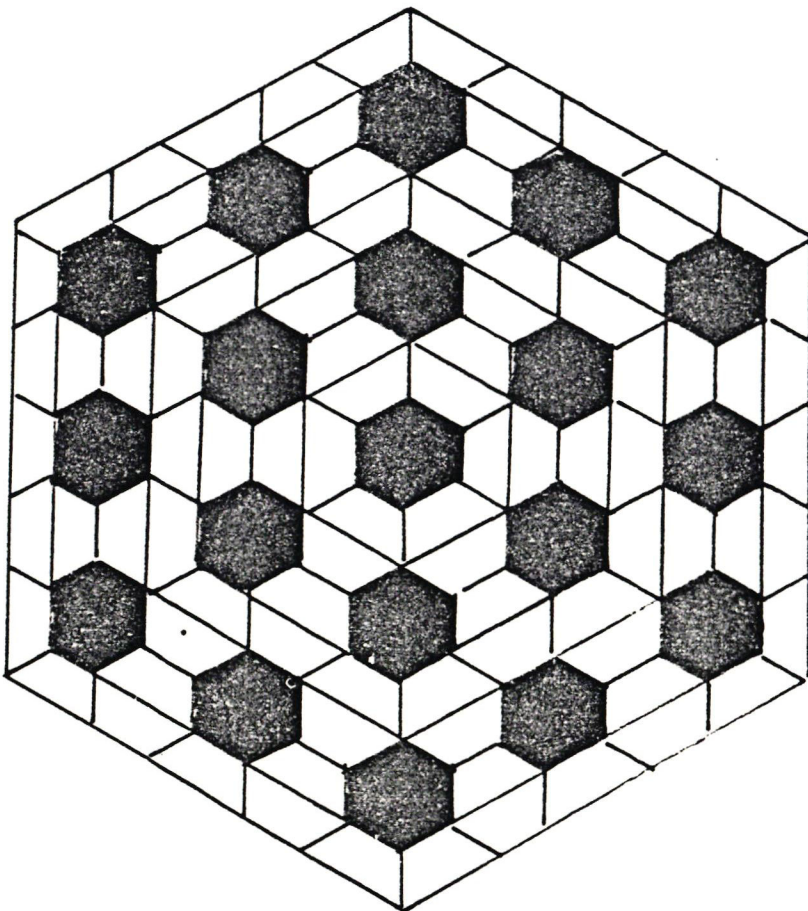
$$t = 2(9p^2 + 6p + 1)$$

$$t_{2p+1} = 2(3p + 1)^2$$

ou si l'on veut faire intervenir k

$$t_k = \frac{(3k - 1)^2}{2} \quad \text{pour } k \text{ impair}$$

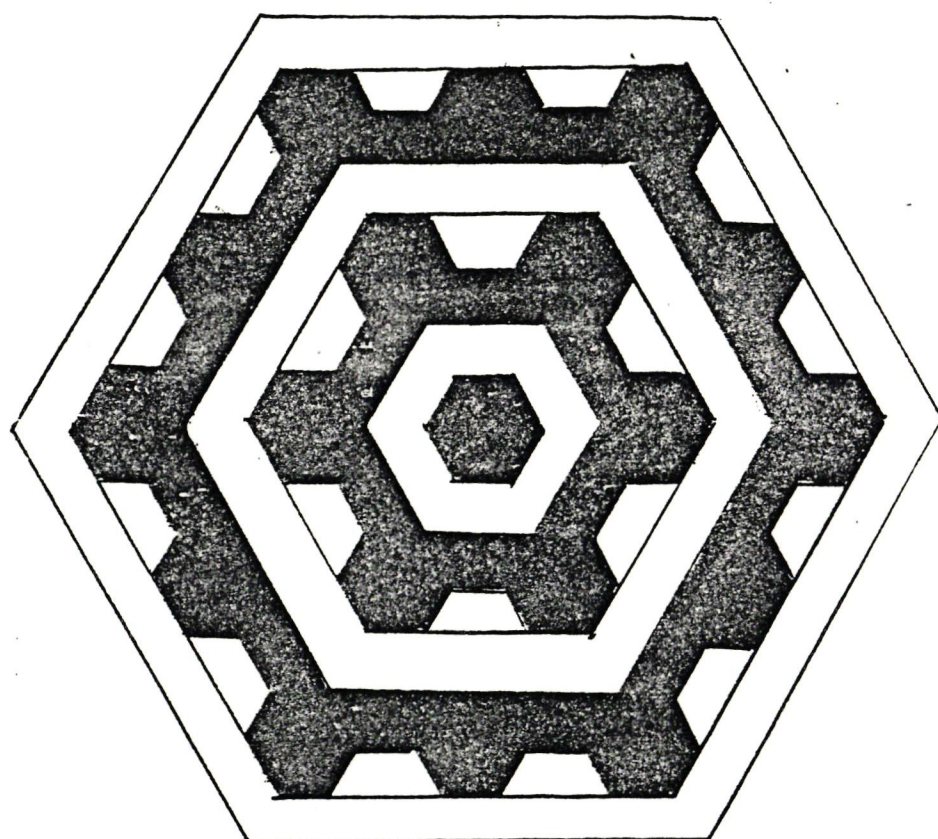
Colorations



Tout hexagone noir est entouré d'hexagones gris

Tout hexagone gris est entouré d'une séquence hexagone gris, hexagone noir répété trois fois

Colorations : suite

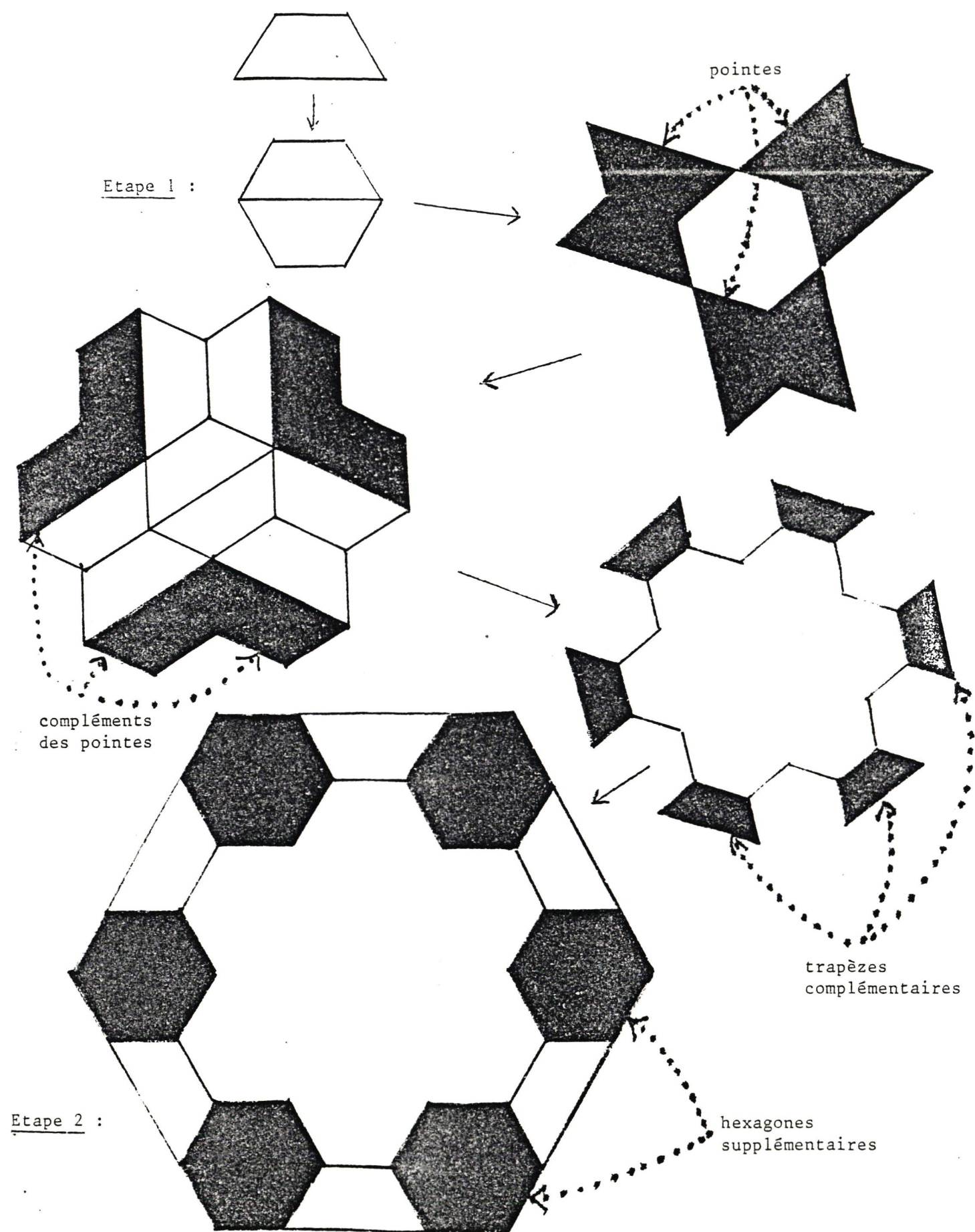


RECURRENCE

ASSEMBLAGES DE TRAPEZES

Loi 3

SOLUTION





:pointes



:compléments
pointes



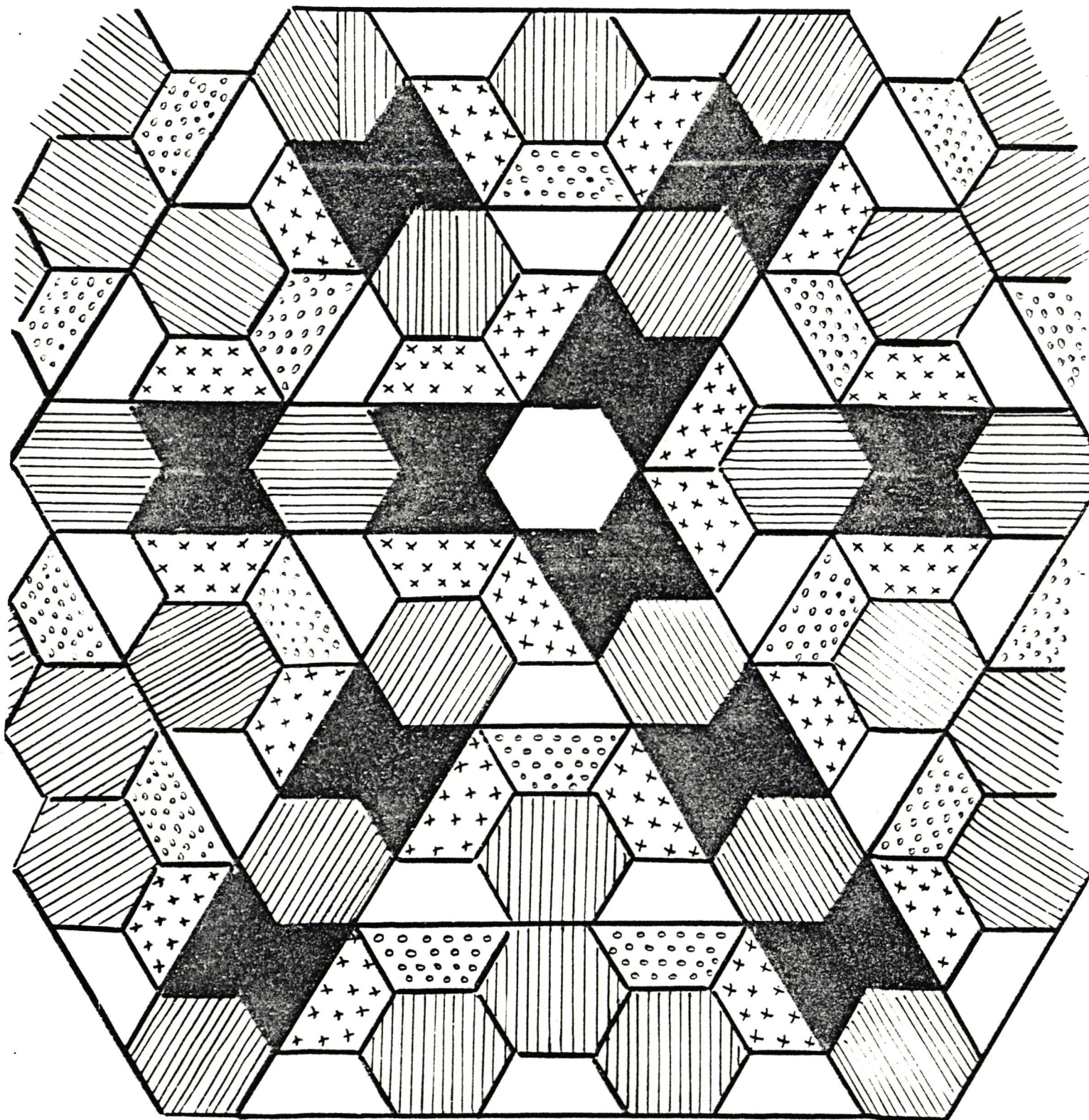
:hexagones supplémentaires



:trapèzes complémentaires



:compléments des
trapèzes de l'étape
5-1



Ecriture des différences premières

étapes s	nombre de trapèzes t _s	différences premières					complément des trapèzes de l'étape s-1			
		pointes	complément pointes	hexagones supplémentaires	trapèzes complémentaires					
1	2	(3x2)	+	(3x2)	+	(6x2)	+	1x6	+	0x6
2	32	(6x2)	+	(6x2)	+	2x(6x2)	+	2x6	+	1x6
3	98	(6x2)	+	(6x2)	+	4x(6x2)	+	3x6	+	2x6
4		(6x2)	+	(6x2)	+	6x(6x2)	+	4x6	+	3x6
5					+	8x(6x2)	+	5x6	+	4x6
6					+	10x(6x2)	+	6x6	+	5x6
7										
s-1		(6x2)	+	(6x2)	+	[2 (s-1)-2] (6x2)	+	(s-1)x6	+	(s-2)x6
s		(6x2)	+	[2 (s-1)]	+	6 x(2s-3)				
				6 x(6 s-7)						

on a donc :

s - 1	t_{s-1}	↓	$6 \times (6s - 7)$
s	t_s		

On vérifie que la formule du passage de l'étape $s-1$ à l'étape s est valable dès le premier passage (de $s = 1$ à $s = 2$)

$$(5 \times 6 = 6(12-7))$$

Nombre de trapèzes à l'étape s à l'aide des différences premières

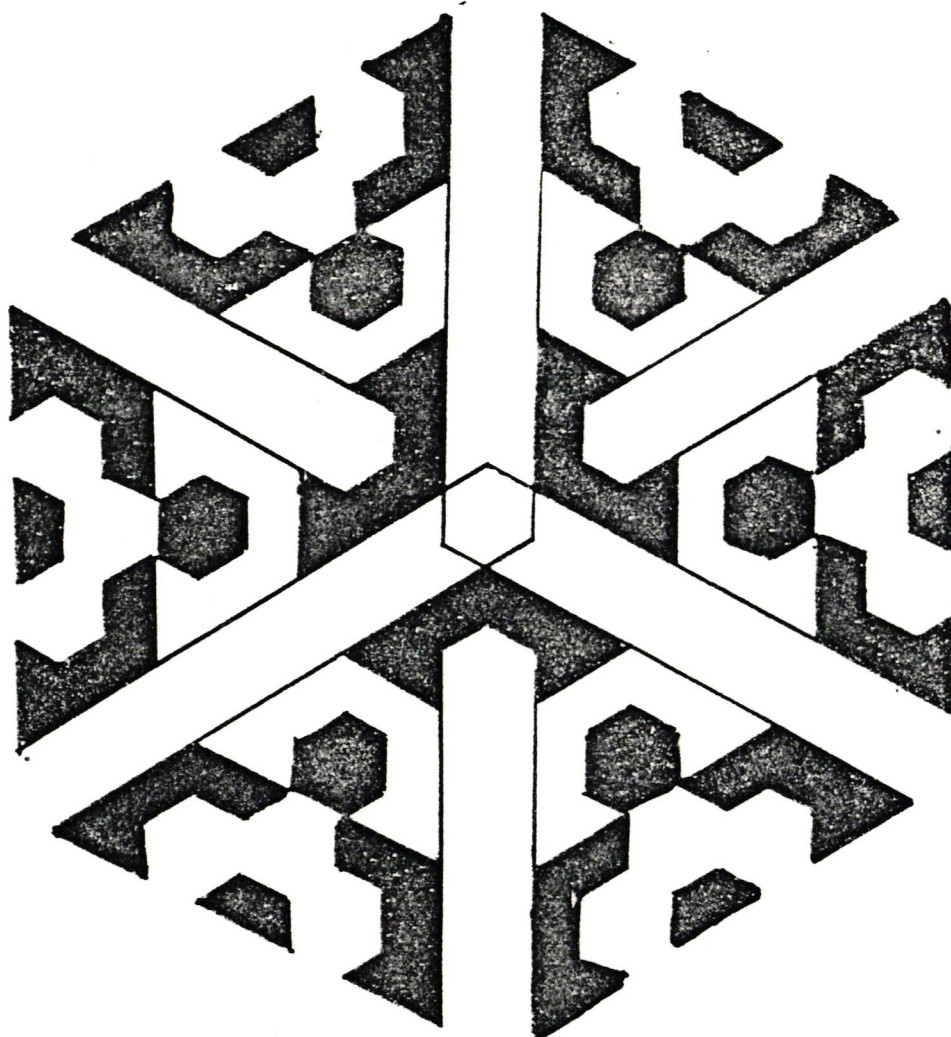
$$t_s = 2 + 6 [6 \times 2 + 6 \times 3 + \dots + 6s] - 6 \times 7 (s-1)$$

$$= 2 - 36 + 36 [1 + 2 + 3 + \dots + s] - 42 (s-1)$$

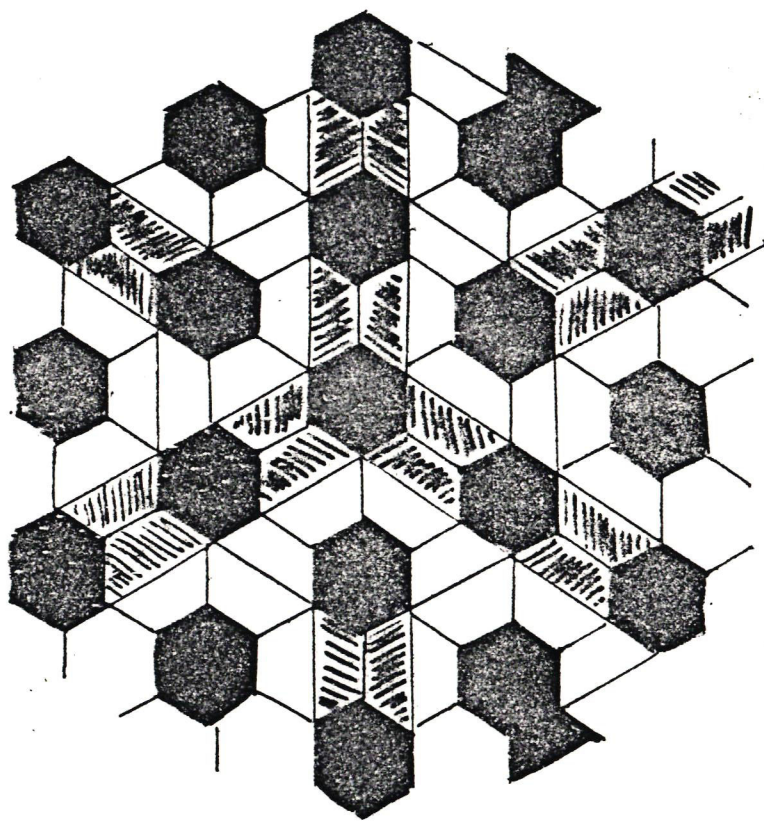
$$t_s = - 34 + \frac{36}{2} s (s + 1) - 42 s + 42$$

$$t_s = 2 (3s - 2)^2$$

Colorations



Colorations (suite)



R E C U R R E N C E

ASSEMBLAGES DES TRAPEZES
COMPARAISON DES LOIS DE
RECURRENCE
SOLUTION

Niveau 2.

Niveau 3

Niveau 2

En observant les dessins, on constate qu'un même hexagone peut être obtenu par plusieurs lois d'assemblage.

On peut établir un tableau donnant les étapes correspondantes suivant les différentes lois.

loi	2	1	3
nom de l'étape	k	n	s
	1	1	1
	2	2	
		3	
	3	4	2
	4	5	
		6	
	5	7	3
	6	8	
		9	
	7	10	4

Niveau 3

On peut trouver les correspondances entre les étapes suivant les lois par le calcul, en identifiant les formules donnant le nombre de trapèzes obtenus à une étape donnée.

1° correspondance entre n et s

$$\begin{array}{c}
 t_n = t_s \\
 2n^2 = 2(3s-2)^2 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 n = 3s - 2 \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{n+2}{3}
 \end{array}$$

pour tout s, il existe 1 n
et un seul

il faut que (n+2) soit multiple de 3
c'est-à-dire n de la forme

$$3m + 1, \quad m \geq 0$$

2° correspondance entre n et k

k impair

$$\frac{(3k-1)^2}{2} = 2n^2$$

$$n = (3k-1)/2$$

$$k = (2n+1)/3$$

k étant impair, (3k-1) est pair

Pour tout k, il existe 1 n et un seul

Pour que k soit entier, il faut que (2n+1) soit multiple de 3

on peut poser :

$$2n+1 = 3t \quad t \geq 1$$

$$n = 3/2t - 1/2$$

$$n = 3/2(t-1) + 1$$

ou, en posant $(t-1)/2 = m$; m impair, $m \geq 0$

$$n = 3m + 1$$

↓

$$k = 2m + 1$$

il existe un k si et seulement si n est de la forme $3m+1$; $m \geq 0$, impair

k pair

$$\frac{(3k-2)^2}{2} = 2n^2$$

$$n = 3k - 2$$

$$k = 2/3(n+1)$$

pour tout k, il existe un n et un seul

Pour que k soit entier, il faut que (n+1) soit multiple de 3 ⇒

$$(n+1) = 3t \quad t \geq 1$$

$$n = 3t - 1$$

$$n = 3(t-1) + 2$$

ou, en posant $(t-1) = m$; $m \geq 0$

$$n = 3m + 2$$

↓

$$k = 2m + 2$$

il existe un k si et seulement si n est de la forme $3m+2$; $m \geq 0$

Pour tout k, il existe un n et un seul

Il existe un k si et seulement si $n \neq 3m$

tableau des correspondances entre n et k

1° $k \mapsto n$

k	1	2	3	4	5	6	7	2p	2p+1
	$\vdots$	$\downarrow$	$\vdots$	$\downarrow$	$\vdots$	$\downarrow$	$\vdots$	$\downarrow$	$\vdots$
n	1	2	4	5	7	8	10	2(3p-1)	3p+1

2° $n \mapsto k$

n	1	2	3	4	5	6	7	3m	3m+1	3m+2
	$\vdots$	$\downarrow$		$\vdots$	$\downarrow$		$\vdots$		$\vdots$	$\downarrow$
k	1	2		3	4		5		2m+1	2m+2

3° correspondance entre k et s

k impair

$$(3k-1)^2 / 2 = 2 (3s - 2)^2$$

$$k = 3s - 1$$

pour tout s, il existe un k
qui est impair

$$s = (k+1)/2$$

pour que s soit entier, il faut
que (k+1) soit pair ce qui est
toujours vrai puisque 1 est impair $\Rightarrow$
pour tout k impair, il existe un s

k pair

$$(3k-2)^2 / 2 = 2 (3s - 2)^2$$

$$k = 2s - 2/3$$

quel que soit s, $k \notin \mathbb{N}$
pour tout s, il n'existe pas
de k pair

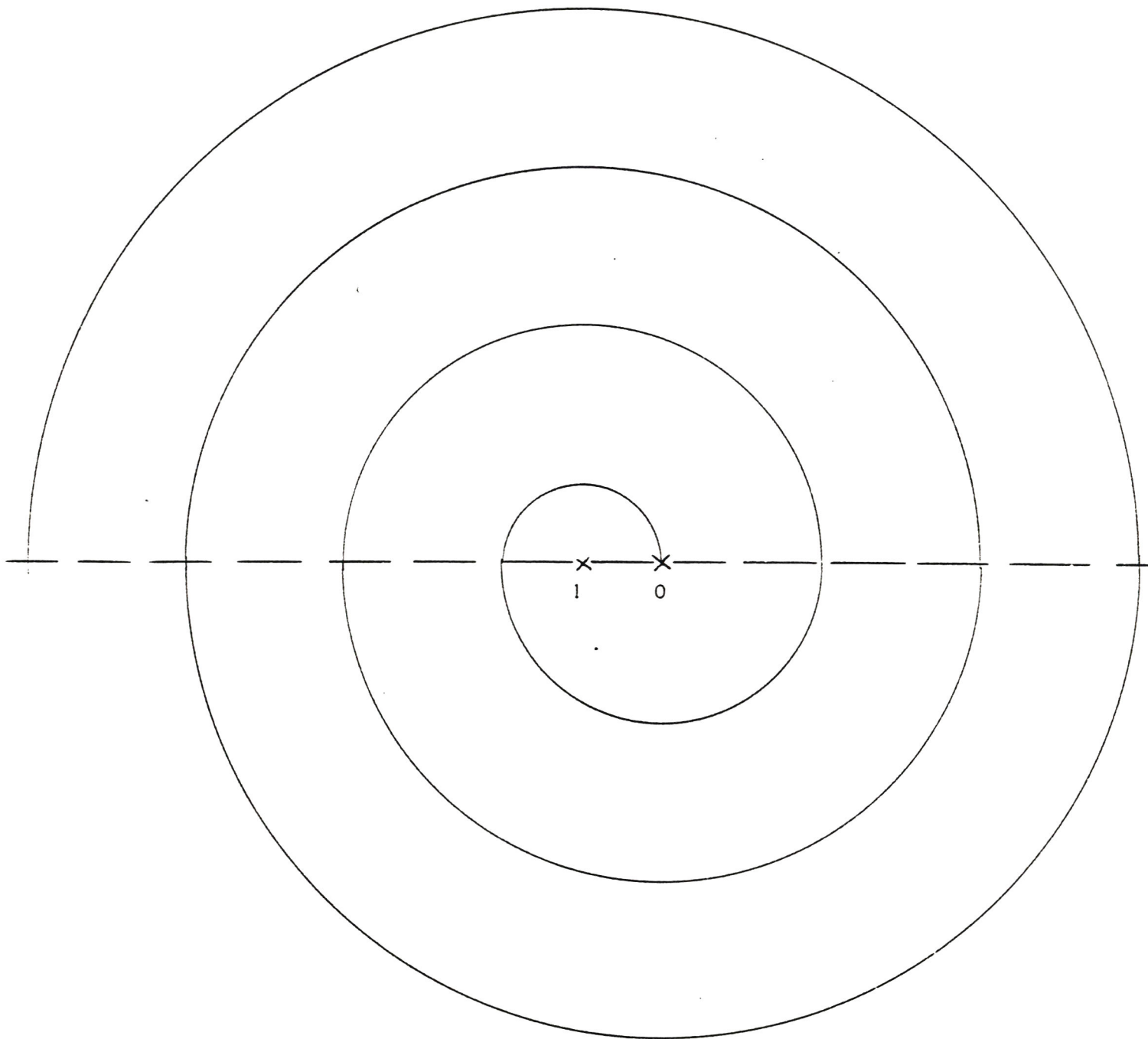
$$s = k/2 + 2/3$$

quel que soit k pair, $s \notin \mathbb{N}$
pour tout k pair, il n'existe pas
de s

RECURRENCE

SPIRALES A CENTRES . 1
SOLUTION

Spirale à 2 centres

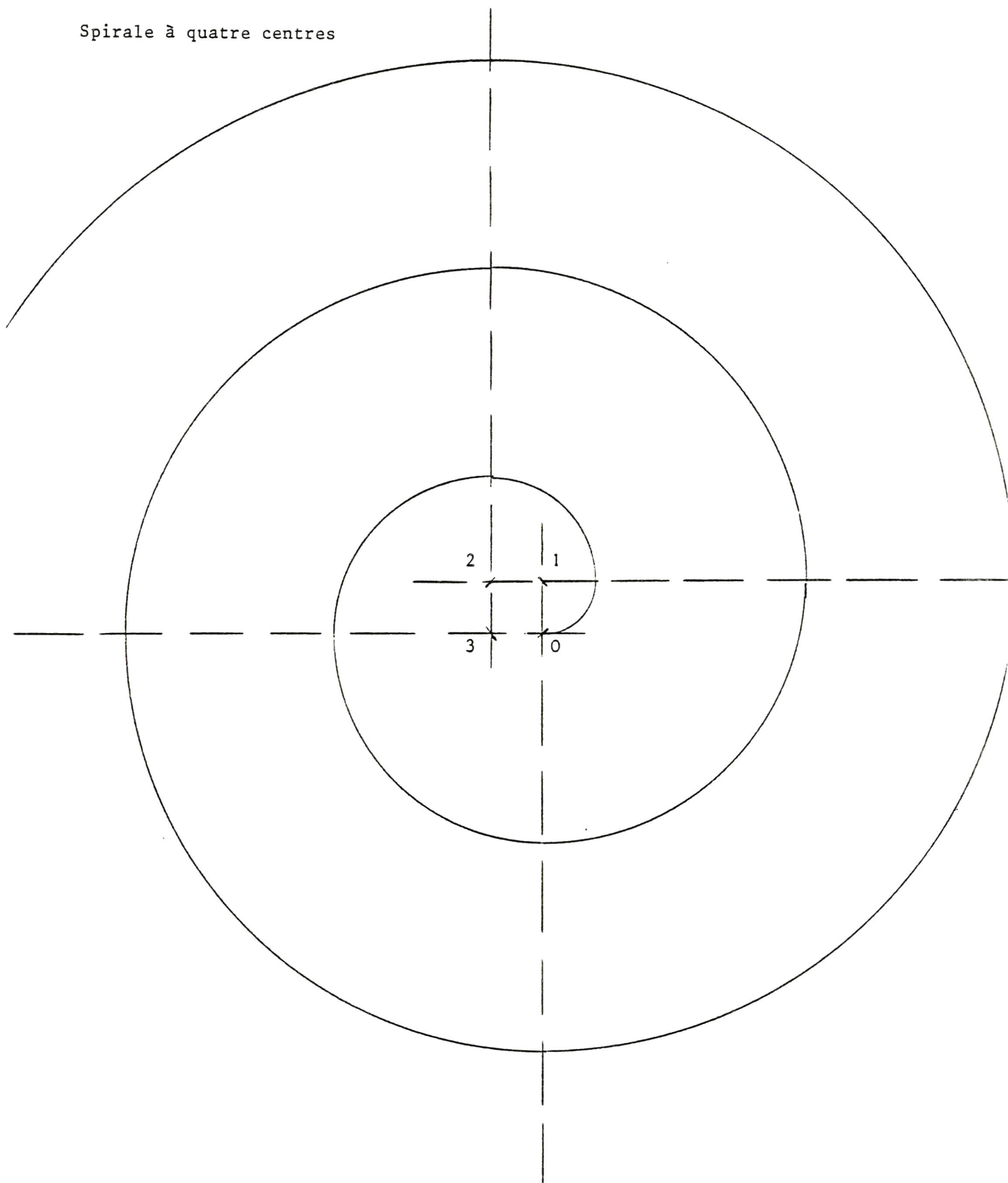


R E C U R R E N C E

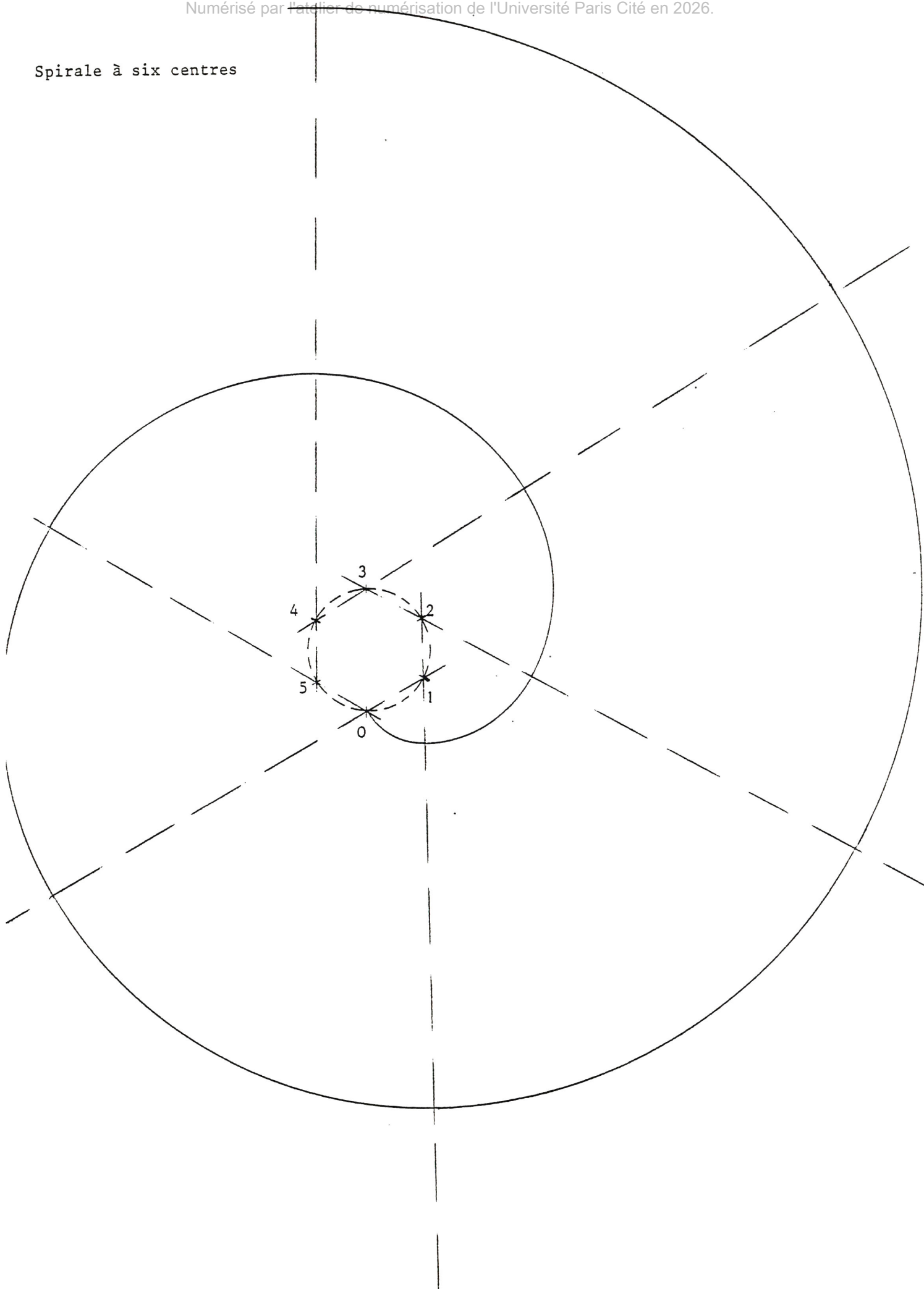
SPIRALES A CENTRES .1

SOLUTION

Spirale à quatre centres



Spirale à six centres



SPIRALES A CENTRES 2

R E C U R R E N C E

SOLUTION

2 - Longueur des spirales en fonction du nombre de côtés du polygone des centres

2.1 - On prend 1 comme valeur de la longueur du côté du polygone des centres.

Exemple de la spirale à 4 centres

On désigne par n le nombre de tours

m le nombre de quarts de tour déjà effectués

Désignation des points d'arrêt : un point d'arrêt est désigné par (n, m)

point d'arrêt	longueur depuis le point d'arrêt précédent	
(0,0)	0	
(0,1)	$2\pi/4$	(la longueur d'un quart de cercle de rayon r est $2\pi r/4$)
(0,2)	$2\pi \times 2/4$	
(0,3)	$2\pi \times 3/4$	
(0,4)	$2\pi \times 4/4$	
(1,1)	$2\pi \times (4 \times 1 + 1)/4$	
(1,2)	$2\pi \times (4 \times 1 + 2)/4$	
(n,m)	$2\pi \times (4 \times n + m)/4$	

Exemple de la spirale à 3 centres

point d'arrêt	longueur depuis le point d'arrêt précédent	
(0,0)	0	
(0,1)	$2\pi/3$	la longueur d'un tiers de cercle de rayon r est $2\pi r/3$
(0,2)	$2\pi \times 2/3$	
(0,3)	$2\pi \times 3/3$	
(1,1)	$2\pi (3 \times 1 + 1)/3$	
(1,2)	$2\pi (3 \times 1 + 2)/3$	
(n,m)	$2\pi (3 \times n + m)/3$	

Spirale à k centres

point d'arrêt	longueur depuis le point d'arrêt précédent
(n,m)	$2\pi (k \times n + m)/k$

longueur d'une spirale à k centres au point d'arrêt (n, m)

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{2\pi}{k} (1 + 2 + 3 + \dots + (kn+m)) \\ &= \frac{2\pi}{k} \frac{(kn+m)(kn+m+1)}{2} \quad \star \end{aligned}$$

$$\ell = \frac{\pi}{k} (kn+m)(kn+m+1)$$

longueur d'une spirale à k centres en un point M situé entre (n, m) et (n, m+1)

en un point M quelconque de la spirale, on a tourné de α

$$\alpha = (n + m/k) \times 2\pi + \beta \qquad 0 \leq \beta < \pi/k$$

$$\ell_M = \frac{\pi}{k} (kn+m)(kn+m+1) + \beta(kn+m)$$

$$\ell_M = \pi \left(n + \frac{m}{k} \right) \left(kn+m+1 + \frac{\beta k}{\pi} \right)$$

2.2. - On donne à la longueur du périmètre du polygone des centres la valeur l

k désigne le nombre de côtés du polygone

↓
longueur d'un côté = l/k

D'après Spirales .2., la longueur du côté étant l/k au lieu d'être l en un point quelconque M

$$\ell = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{m}{k} \right) \left(kn+m+1 + \frac{\beta k}{\pi} \right)$$

$$\ell = \pi \left(n + \frac{m}{k} \right) \left(n + \frac{m+1}{k} + \frac{\beta}{\pi} \right)$$

Voir solutions page 8

3. - Développante de cercle

On s'intéresse à des spirales construites sur des polygones de périmètre 1 ayant k côtés (voir Spirales 3)

Quand $k \rightarrow \infty$ le polygone devient un cercle, la spirale est alors appelée développante de cercle

Calcul de la longueur de la développante du cercle de périmètre 1 en un point quelconque M

En M on a tourné de $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} [(n+m/k) \times 2\pi + \beta]$

$$0 \leq \beta \rightarrow \frac{\pi}{k} \Rightarrow \beta \rightarrow 0$$

$$\text{donc} \quad \alpha = 2\pi n$$

Dans la fiche "Spirales .3.", on a calculé ℓ_M

$$\ell_M = \pi \left(n + \frac{m}{k} \right) \left(n + \frac{m+1}{k} + \frac{\beta}{\pi} \right)$$

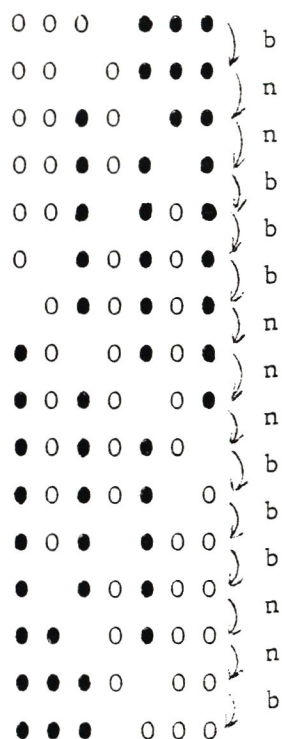
ℓ_M désigne la longueur de la développante de cercle au point M

$$\begin{array}{l} \ell_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_M = \pi n^2 \\ \text{or} \quad n = \alpha/2\pi \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \ell_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_M \\ \text{or} \quad n = \alpha/2\pi \end{array}} \right\} \Rightarrow \boxed{\ell_M = \frac{\alpha^2}{4\pi}}$$

RECURRENCE

JEU DE PIONS

1° b := déplacer un pion blanc
 n := déplacer un pion noir



Le mot des actions schématisées ci-contre est :

$b n n b b b n n n b b b n n b$

que l'on notera par convention :

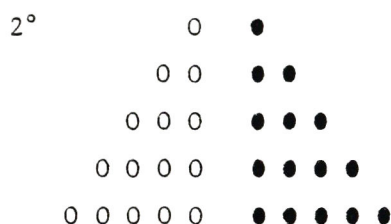
$b n^2 b^3 n^3 b^3 n^2 b$

n^k signifiant que l'on déplace k fois de suite un noir

Les noirs et les blancs jouant le même rôle, on peut également commencer en déplaçant un noir, le mot des actions est alors

$n b^2 n^3 b^3 n^3 b^2 n$

Dans la suite, on choisit de commencer en déplaçant un blanc.



$b n b$
 $b n^2 b^2 n^2 b$
 $b n^2 b^3 n^3 b^3 n^2 b$
 $b n^2 b^3 n^4 b^4 n^4 b^3 n^2 b$
 $b n^2 b^3 n^4 b^5 n^5 b^5 n^4 b^3 n^2 b$

Si le nombre k de pions est pair

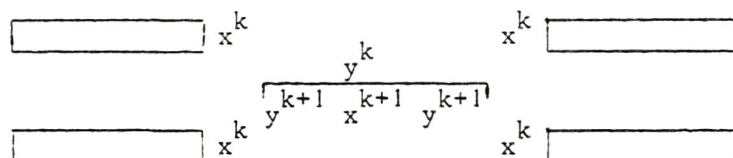
$b \dots n^{k^2} b^{k-1} n^k \textcircled{b^k} n^k b^{k-1} n^{k-2} \dots b$

Si k impair :

$b \dots b^{k-2} n^{k-1} b^k \textcircled{n^k} b^k n^{k-1} b^{k-2} \dots b$

$$3^{\circ} \quad x \in \{b, n\} \quad y \in \{b, n\} \quad x \neq y$$

Passage d'un mot au mot suivant :



les séquences précédant x^k et suivant x^k sont les mêmes pour les deux mots
si u_k désigne le nombre d'actions pour k pions de chaque couleur :

$$u_{k+1} - u_k = 2(k+1) + 1$$

ou $u_k - u_{k-1} = 2k + 1$

$\Rightarrow$

k	u_k
1	$2 \times 1 + 1 = 3$
2	$(2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) = 8$
3	$(2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) = 15$
4	$2 \times (1 + 2 + 3) + 4 = 24$
$\vdots$	
k	$2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + k) + k$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_k	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255	288	323	360	399	440
$u_k - u_{k-1}$		+5	+7	+9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27	+29	+31	+33	+35	+37	+39	+41
		+2	+2	+2	+2															

Calcul de u_k

1ère méthode : on part de la valeur de $(u_k - u_{k-1})$

$$\begin{array}{rcl}
 & \left[\begin{array}{l} u_k - u_{k-1} = 2k + 1 \\ u_k - u_{k-2} = 2(k-1) + 1 \\ u_{k-2} - u_{k-3} = 2(k-2) + 1 \\ \vdots \\ u_2 - u_1 = 2 \times 2 + 1 \end{array} \right. & + \\
 + & & \\
 \left[\begin{array}{l} u_k - u_{k-1} \\ u_k - u_{k-2} \\ u_{k-2} - u_{k-3} \\ \vdots \\ u_2 - u_1 \end{array} \right] & = & 2(2+3+\dots+k) + (k-1)
 \end{array}$$

$$u_k = u_1 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k - 3$$

$$u_1 = k \Rightarrow u_k = 2 \frac{k(k+1)}{2} + k$$

$$u_k = k(k+2)$$

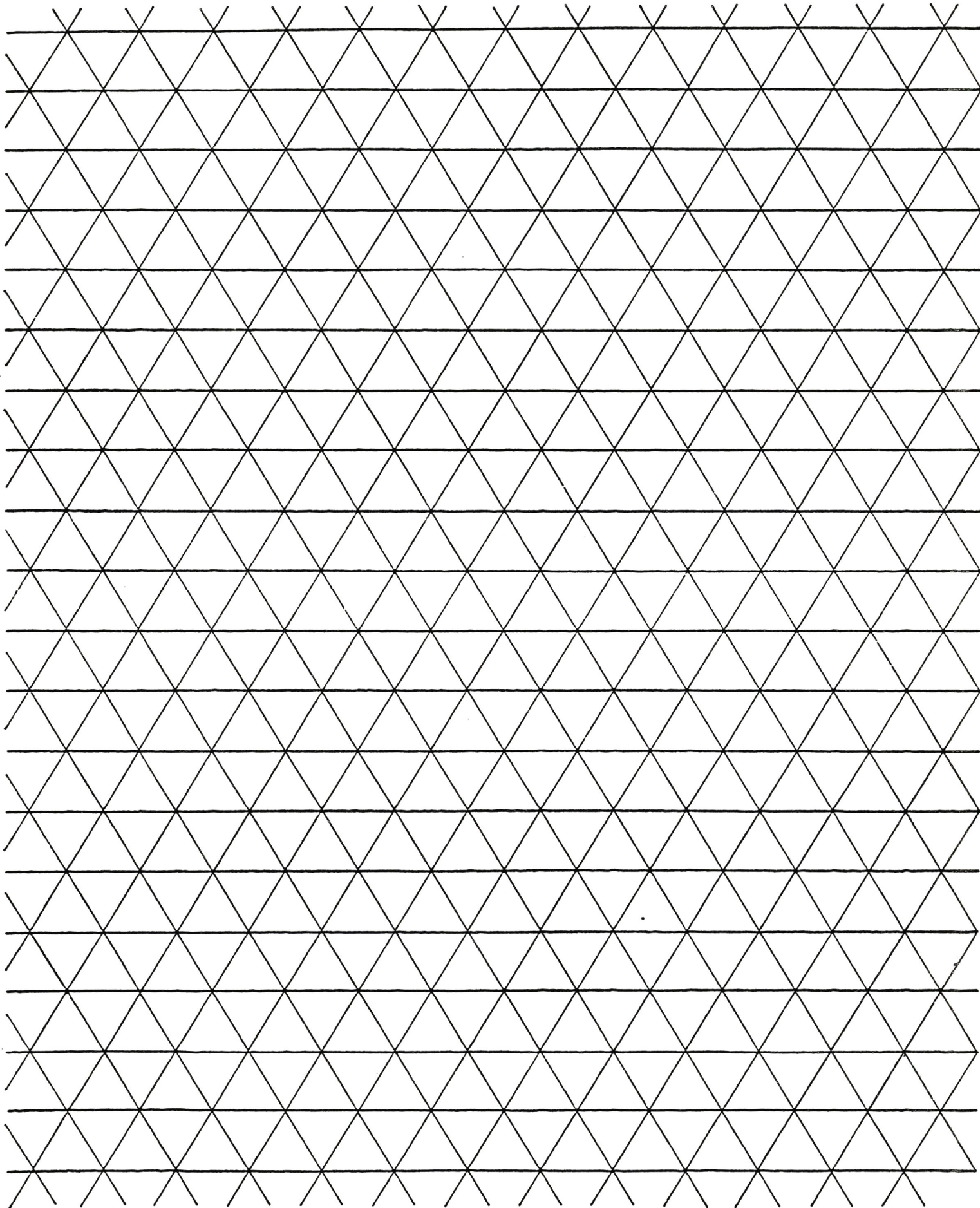
2ème méthode

On utilise le tableau numérique

k	$u_k - u_{k-1}$
1	3
2	3 + 2
3	3 + 2 + 2
4	3 + 2 + 2 + 2
$\vdots$	
k	3 + 2 + 2 + 2 + ... + 2

$$\begin{aligned}
 u_k &= k \times 3 + (k-1) \times 2 + (k-2) \times 2 + \dots + 2 \\
 &= k \times 3 + 2[(k-1) + (k-2) + \dots + 1]
 \end{aligned}$$

$$u_k = k(k+2)$$



PUBLICATIONS DE L'IREM DE PARIS VII

- 3 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 4 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 1
- 7 - PAVAGES ET COLORIAGES
- 9 - DES CHIFFRES ET DES NOTES (3/80)
- 10 - CALCUL MENTAL (3/80)
- 11 - CALCUL 1
- 12 - CALCUL 2 (3/80)
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES Tome 2
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERES
- 17 - COLORIAGES GEOMETRIQUES
- 19 - COCOTTES, DRAPEAUX ET GEOMETRIE
- 20 - QUI COURT ?
- 21 - ALMANACH
- 22 - FRISES
- 23 - RECURRENCE
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - LES FORCES EN STATIQUE
- 26 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 27 - LE NOMBRE D'OR
- 28 - ROTATIONS ANGLES EN SECONDE
- 29 - LA VITESSE
- 30 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 31 - FONCTIONS ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
- 32 - LES ANGLES
- 33 - L'INFORMATIQUE/L'ENSEIGNEMENT
- 34 - METROLOGIE
- 35 - ESPACE (1er cycle)
- 36 - AU PAYS DES CYCLOIDES
- 37 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES
- GAZETTE INFORMATIQUE N° 4

Reproduction de textes anciens

- I - DISME (1585)
- II - GEOMETRIE ELEMENTAIRE F. KLEIN (1896)

Editeur : I.R.E.M.

Directeur/Responsable de la publication : André DELEDICQ