



Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITÉ PARIS VII



mars 1981

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT D'UN FILM RÉALISÉ À L'UNIVERSITÉ PARIS VII PAR :
F. CHANTEREAU, M-F. GOUZOU, R. GRÜNIG, J-P. KEMPF, J. LAFONTAINE, M-C. MILOT
J. PICHAUD, C. RAVEZ, A. REVUZ

DE L'EXPERIENCE AU MODELE : les forces en statique

groupe math/physique

<u>NIVEAU</u>	Second cycle
<u>PUBLIC</u>	Enseignants de mathématiques et de physique
<u>SUJET</u>	Introduction de la notion de ' force ' en classe de seconde
<u>OBJECTIF</u>	Coordination des enseignements de mathématiques et de physique

DE L'EXPERIENCE AU MODELE :

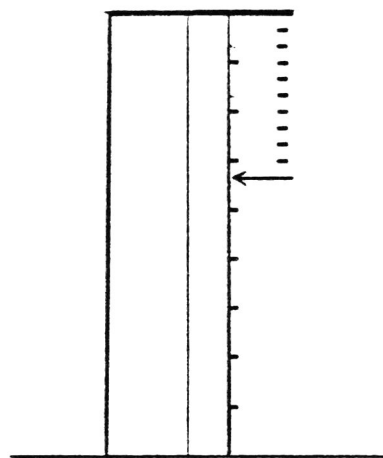
LES FORCES EN STATIQUE.

INTRODUCTION.

Nous présentons ici une introduction à la notion de force en classe de seconde en nous plaçant au point de vue de la statique. Si après les multiples présentations du même thème, et au moment où un changement de programmes de physique n'impose plus cette approche, nous avons tout de même décidé de rédiger ce qui suit, c'est que la démarche générale que nous avons adoptée nous paraît plus importante que le sujet lui-même et facilement transposable à d'autres questions. Pour nous, en effet, introduire une théorie physique à des élèves ne doit pas consister à poser à priori, un certain nombre de définitions, ni être ressenti comme le lieu privilégié où l'on applique des constructions mathématiques déjà connues. Il faut au contraire commencer par observer certains phénomènes (ce qui n'est pas une activité passive ou simplement contemplative) puis effectuer systématiquement et méthodiquement de nombreuses expériences avant de construire un modèle mathématique qui permette de donner une description raisonnable de ce que l'on a observé et expérimenté. C'est pourquoi notre présentation comporte plusieurs expériences classiques et simples que les élèves peuvent faire eux-mêmes et qui ont été faites dans des travaux dirigés précédant le cours proprement dit. En effet, de même que l'enseignement de la physique peut et doit précéder l'introduction des notions mathématiques qu'il utilise et dont il constitue souvent la meilleure motivation, de même à l'intérieur de l'enseignement de la physique l'expérimentation en travaux dirigés peut et doit précéder le cours proprement dit. Lors de ces expériences certaines des idées spontanées des élèves sont confirmées, d'autres, comme par exemple une composition trop simpliste des forces, sont infirmées. Cette expérimentation s'accompagne d'une réflexion qui la sous-tend et qui la dirige, et qui procède plutôt par une suite de remarques plausibles que par une chaîne de démonstrations pour aboutir à un schéma mathématique dont l'intérêt majeur est le caractère opératoire. Le schéma mathématique obtenu ici est relié à l'acquis vectoriel des élèves à la sortie du premier cycle en ce sens qu'il présente par rapport à cet acquis des analogies et des différences qu'il sera important de faire comprendre.

1 - QUELQUES EXPERIENCES FAUSSEMENT NAÏVESa) Etude de l'allongement d'un ressort.

On utilise un ressort à boudin suspendu à une potence. Son extrémité supérieure est donc fixe et l'autre est munie d'un index se déplaçant devant une règle disposée verticalement et graduée en cm.



(fig. 1)

On accroche successivement à l'extrémité inférieure du ressort des objets (masses marquées ou autres) d'un poids "raisonnable", c'est-à-dire tel que l'on puisse constater un déplacement de l'index mais que le ressort ne se détende pas "trop". Ceci permet de faire les observations suivantes :

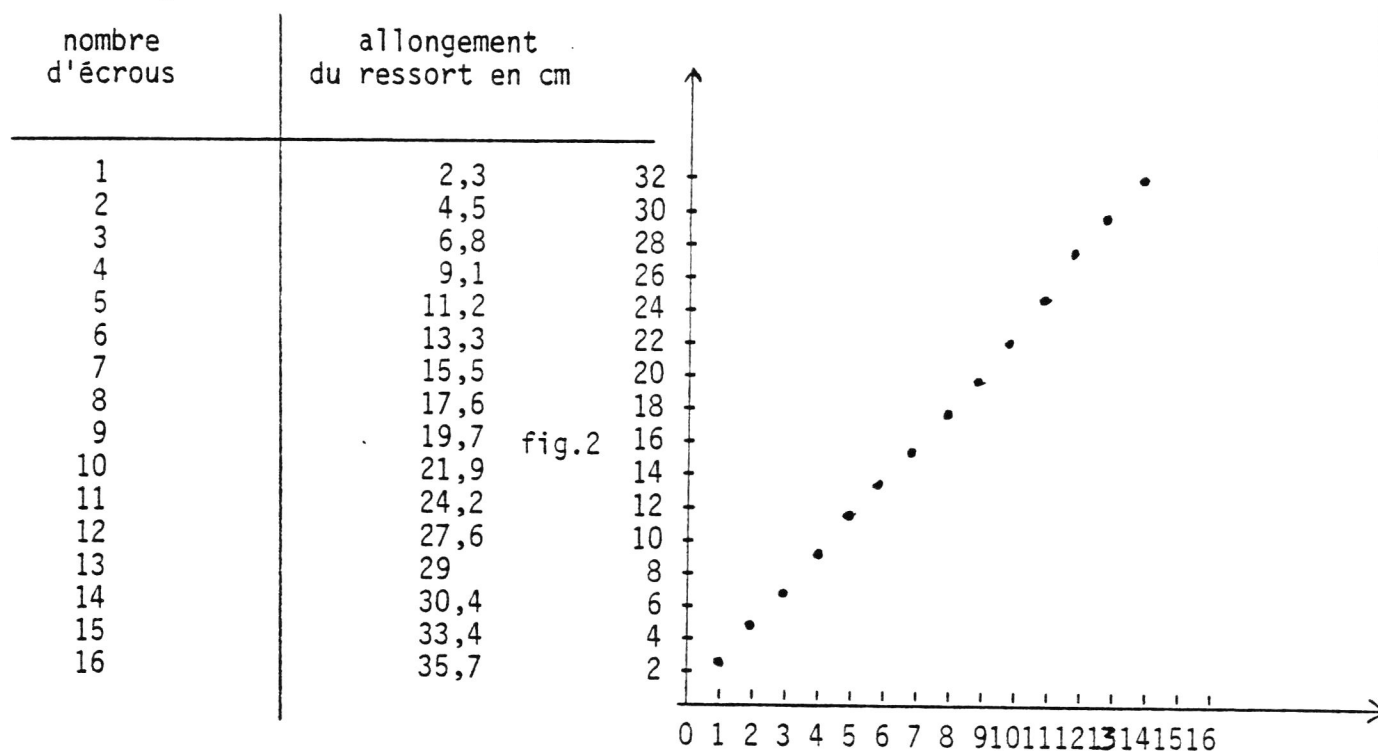
- lorsqu'on décroche l'objet, l'index revient à sa position initiale.
- le même objet accroché à plusieurs reprises provoque le même allongement du ressort.
- en accrochant des objets différents, on constate en général des allongements différents
- le même objet accroché non plus à l'extrémité inférieure du ressort mais à une autre spire n'agit pas de la même façon sur le ressort

Si on accroche au ressort des objets très lourds, il peut arriver que l'index ne revienne plus à sa position initiale et on constate que le ressort n'est plus fidèle.

Dans la limite de fidélité d'un ressort, il semble donc que l'on puisse

établir une correspondance entre les objets accrochés et l'allongement du ressort qu'ils provoquent ou plus précisément entre les actions exercées par ces objets sur l'extrémité inférieure du ressort, verticalement et vers le bas et les allongements constatés.

Afin d'étudier cette correspondance, on utilise des écrous identiques, c'est-à-dire qui provoquent le même allongement du ressort, et on accroche successivement 1, 2, 3 ... écrous en notant la position correspondante de l'index. Voici un exemple de résultats obtenus au cours d'une telle expérience. On a représenté sur un graphique l'allongement du ressort en fonction du nombre d'écrous. A partir de 12 écrous, le ressort ne revenait plus dans sa position initiale.



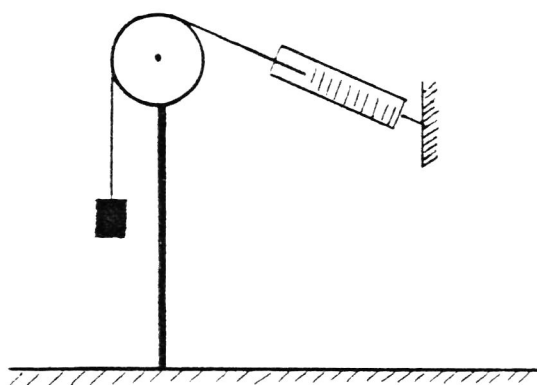
On remarque que l'application qui au nombre d'écrous associe l'allongement du ressort est approximativement linéaire sur 0, 1, ... , 11 et ne l'est plus au delà.

b) Etude de dynamomètres

On trouve dans le commerce des dynamomètres qui sont des ressorts tous étalonnés avec la même unité et qui ne peuvent fonctionner que dans leur limite de fidélité. Le fait que les graduations de ces dynamomètres soient équidistantes

signifie que dans cette limite, (comme pour les ressorts que nous avons étudiés) leur course d'étalonnage est une droite.

Au cours des expériences précédentes, les axes des ressorts étaient toujours verticaux. Pour modifier cette direction on peut, soit tirer à la main dans une direction quelconque sur un ressort dont l'une des extrémités est fixe, soit tirer dessus par l'intermédiaire d'un fil passant sur une poulie et auquel est accroché un objet quelconque. On réalise diverses positions d'équilibre, la poulie, le fil et le dynamomètre étant dans un même plan.



(fig. 3)

Lorsqu'un même objet reste accroché au fil, la position de l'index est constante, quelle que soit la direction commune du fil et de l'axe du dynamomètre, et est la même lorsque le dynamomètre est vertical.

Il semble donc raisonnable d'admettre que l'utilisation d'un dispositif poulie-fil modifie seulement la direction et le sens de l'action exercée sur l'extrémité du ressort. D'autre part, si l'on fixe l'extrémité d'un dynamomètre et si on accroche l'autre extrémité par exemple à un ressort, et si l'index du dynamomètre est devant la graduation x , il semble aussi raisonnable d'admettre que l'action exercée par le ressort est équivalente à celle que produirait un objet par l'intermédiaire d'un dispositif poulie-fil adéquat, cet objet étant choisi tel qu'en l'accrochant au dynamomètre il amène l'index sur la graduation x . C'est pourquoi, dans certaines expériences nous utiliserons uniquement des dynamomètres et non plus des objets quelconques ou des masses marquées.

c) Actions simultanées exercées sur l'extrémité d'un ressort.

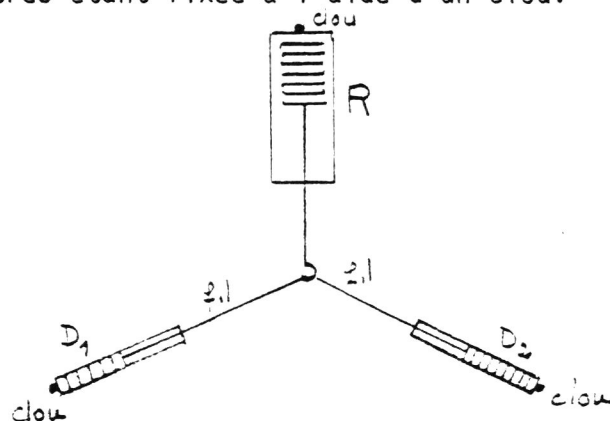
Nous utilisons dans les expériences suivantes :

- d'une part, un ressort R . Il est posé sur un plan horizontal, une de ses extrémités est fixée par un clou et on peut facilement reporter sa position et son allongement avec un crayon sur une feuille de papier collée sur le plan horizontal (par exemple un ressort fixé dans un cadre métallique et terminé par une tige rigide coulissant dans le cadre, une sorte de dynamomètre non gradué).

- d'autre part des dynamomètres D_1 , D_2 ... étalonnés avec la même unité.

1ère expérience

On réalise une position d'équilibre (c.f. dessin), une des extrémités des dynamomètres étant fixée à l'aide d'un clou.



(fig . 4)

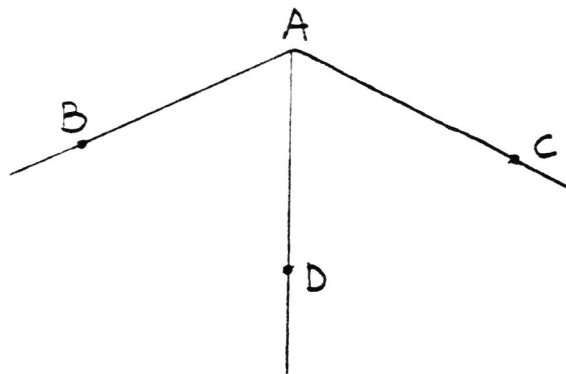
On reporte sur le papier la position de R et celle des axes de D_1 et D_2 .
On note les allongements x_1 et x_2 de D_1 et D_2 .

On cherche maintenant si on peut remplacer l'action de D_1 et de D_2 sur l'extrémité de R par celle d'un seul dynamomètre D_3 . On accroche D_3 à l'extrémité du ressort R ; par tâtonnements on amène R dans la même position que précédemment et on fixe alors l'extrémité libre de D_3 avec un clou. On repère son axe sur le papier et on note son allongement x_3 . Le dessin obtenu sur la feuille de papier est le suivant :



(fig. 5)

On constate immédiatement que l'axe de D_3 et celui de R coïncident pratiquement et que $x_1 + x_2 \gg x_3$. Sur les demi-droites d'origine A déterminées par les axes des dynamomètres on repère des points B , C , D situés à des distances de A proportionnelles à x_1 , x_2 , x_3 .



(Fig. 6)

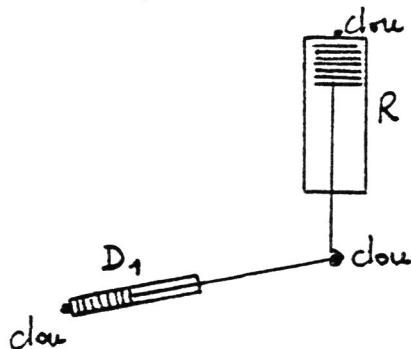
A l'aide d'une règle et d'une équerre, on constate que la figure obtenue est approximativement un parallélogramme - ceci se traduit par :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

On peut donc admettre que les actions exercées sur l'extrémité du ressort R , assimilée au point A , peuvent se composer et que leur composition "satisfait à la règle du parallélogramme".

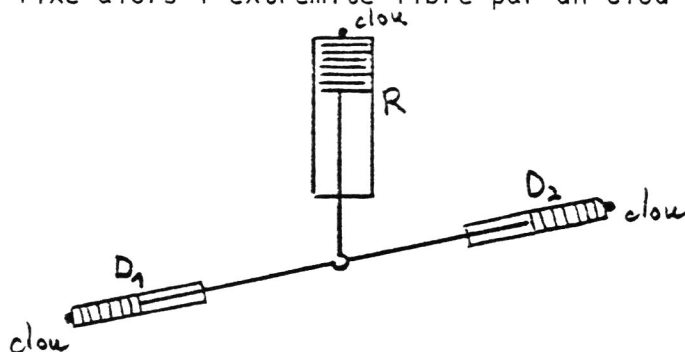
2ème expérience.

On vérifie ici cette règle de composition dans un cas très particulier, celui où le ressort R ne subit aucun allongement. Les deux extrémités du ressort R au repos sont clouées sur le plan horizontal. Un dynamomètre D_1 est aussi cloué à ses deux extrémités, l'une commune avec l'extrémité de la tige rigide de R , de façon à avoir un allongement x_1 non nul.



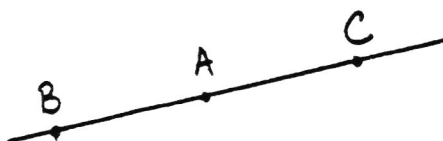
(Fig. 7)

On reporte sur le papier la position de R et celle de l'axe de D_1 .
On enlève le clou maintenant l'extrémité commune et par tâtonnement on ramène R dans sa position précédente en tirant à l'aide d'un dynamomètre D_2 dont on fixe alors l'extrémité libre par un clou .



(Fig. 8)

On repère l'axe de D_2 et on note son allongement x_2 . On constate que l'axe de D_2 est pratiquement confondu avec celui de D_1 et que les allongements sont égaux. On obtient alors le schéma suivant où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0$



(Fig. 9)

2 Que l'on essaie de modéliser.

D'après certains collègues, les dessins que nous venons de faire suscitent souvent cette réaction des élèves : "C'est pareil que les vecteurs". Réaction excellente mais dont l'exploitation est moins simple qu'il n'y paraît.

Tout d'abord, le mot "vecteur" n'a peut-être pas le même sens pour les élèves, pour le professeur de mathématiques et pour le professeur de physique.

Le point de vue du mathématicien est simple à exprimer et peut paraître provocateur : un vecteur est un élément d'un espace vectoriel. C'est dire que, ce qui importe, ce ne sont pas les objets individuellement mais l'ensemble de ces

objets et les structures dont on peut munir cet ensemble.

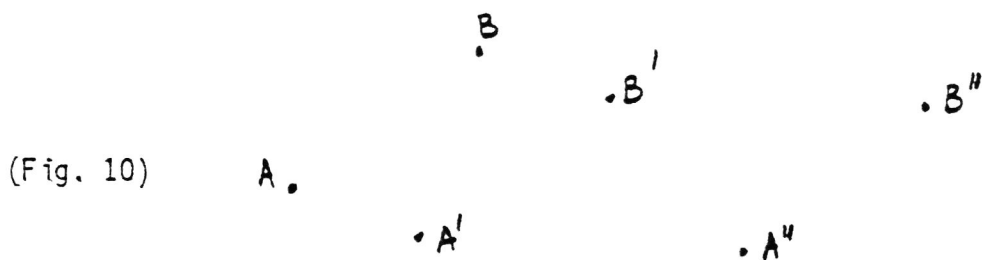
Commençons d'abord par faire un bilan rapide de ce que le mot "vecteur" est censé évoquer chez les élèves.

LES VECTEURS DU PREMIER CYCLE.

Ce qui suit est un schéma d'une partie du cours de géométrie de 4ème et utilise parfois un vocabulaire qui n'est pas celui du programme (homomorphisme, transport de structure, etc...) mais qui a l'avantage d'être concis.

En classe de 4ème un vecteur $\vec{u}$ d'un plan affine P est défini comme étant une classe d'équivalence de bipoints équipollents (donc une partie de $P \times P$) ; à ce vecteur $\vec{u}$ on associe une application $t_{\vec{u}}$ de P dans lui-même, appelée translation de vecteur $\vec{u}$, et définie par :

$$\forall A \in P \quad t_{\vec{u}}(A) = B \iff (A, B) \text{ est un représentant de } \vec{u}, \text{ c'est-à-d.}$$



c'est-à-dire que $t_{\vec{u}}$ est l'application ayant pour graphe la partie $\vec{u}$ de $P \times P$. L'application $t_{\vec{u}}$ est une bijection de P sur lui-même.

On démontre les résultats suivants :

(1) la composée de deux translations est une translation.

(2) L'application inverse d'une translation est une translation. En d'autres termes l'ensemble $\mathcal{G}$ des translations est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{G}(P), o)$ où $\mathcal{G}(P)$ désigne l'ensemble des bijections de P et o la composition des applications.

Nous nous trouvons alors dans la situation suivante :

- on a d'une part l'ensemble V des vecteurs de P ,
- on a d'autre part l'ensemble $\mathcal{O}$ des translations
- on dispose d'une application bijective

$$t : V \longrightarrow \mathcal{O}$$

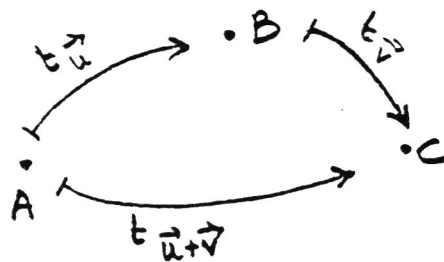
$$\vec{u} \longrightarrow t_{\vec{u}}$$

- et $(\mathcal{O}, \circ)$ est un groupe.

On peut transporter la structure de groupe de $(\mathcal{O}, \circ)$ à V , au moyen de l'application t , en munissant V de la loi suivante :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de V , on sait que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation ; comme t est bijective, il existe un unique vecteur $\vec{w}$ tel que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{w}}$.

On définit alors une loi, notée $+$, sur V en posant $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.



$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(A) &= B \\ t_{\vec{v}}(B) &= C \\ t_{\vec{u}+\vec{v}}(A) &= C \end{aligned}$$

(Fig. 11)

Autrement dit, on munit V d'une loi de telle sorte que t devienne un homomorphisme, puisque l'on aura :

$$\forall \vec{u} \in V \quad \forall \vec{v} \in V \quad t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}.$$

Comme $(\mathbb{R}, +, 0)$ est un groupe commutatif, ce transport de structure fait de $(V, +, 0)$ un groupe commutatif.

Ensuite on munit V d'une loi externe, à savoir la multiplication par un scalaire réel, et on peut dresser la liste suivante de propriétés de $(V, +, 0)$:

(1) $(V, +)$ est un groupe commutatif,

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$
 $\forall \vec{u} \in V$

$$\alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u}$$

(3) $\forall \vec{u} \in V \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in V$
 $\forall \vec{v} \in V$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

(5) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in V$
 $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

Ces propriétés se résument en disant que $(V, +, 0)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Comme c'est le seul exemple d'espace vectoriel rencontré par les élèves en 1er cycle, il n'y a aucun doute, qu'en début de classe de seconde, le mot "vecteur" évoque pour eux un élément de V , ce que l'on appelle parfois un "vecteur géométrique", et se représente donc par un bipoint.

REVENONS A NOS DESSINS ET INTERPRETONS LES. C'est cette image géométrique du vecteur qui a provoqué le "c'est pareil que les vecteurs!". En effet, l'image que nous avons donnée des actions exercées par des ressorts en un point et la composition de ces actions présentent une très grande analogie avec la représentation des vecteurs et leur addition.

Cette image est, ici, plane, ce qui est restrictif, mais on peut vérifier expérimentalement que dans le cas d'actions s'exerçant non pas dans un

plan mais dans l'espace, on aurait la même analogie en remplaçant V par l'espace vectoriel V des vecteurs d'un espace affine de dimension 3, espace affine que nous choisissons comme modèle de l'espace ambiant dans lequel nous expérimentons.

La correspondance "action exercée en $A \mapsto$ bipoint d'origine A " peut se traduire au niveau du modèle, par une bijection de l'ensemble de ces actions sur V , et le dessin n°6 s'interprète alors en disant que cette bijection est un isomorphisme, d'où il résulte que l'ensemble $\mathcal{F}_A$ des actions exercées en A a, pour la composition de ces actions, la même structure que V , c'est-à-dire une structure d'espace vectoriel. C'est ce que l'on exprime souvent dans un langage moins précis en parlant du caractère vectoriel de ces actions auxquelles il est d'usage de donner le nom de forces.

Il faut tout de même remarquer que pour faire le dessin n° 6 nous avons fait des choix : un étalonnage des dynamomètres et une unité de longueur. Si nous utilisons un autre étalonnage des ressorts ou une autre unité de longueur, nous obtenons d'autres bipoints (A, B') , (A, C') , (A, D') et on constate que les points B' , C' , D' se déduisent des points B , C , D par une homothétie de centre A et de rapport positif.

Ce qui est donc intrinsèque à cette situation - au niveau du dessin - ce n'est pas le seul dessin n°6 mais toute la collection des dessins obtenus à partir de celui-ci par les homothéties de centre A et de rapport positif.

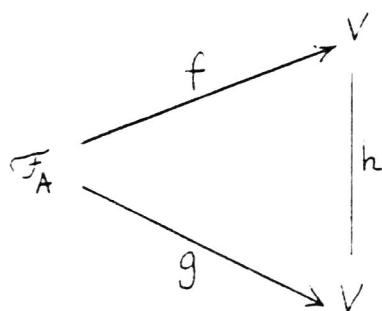
Ce phénomène a une traduction extrêmement importante au niveau du modèle :

si on admet - ce que nous avons fait - que chaque dessin est la matérialisation graphique d'un isomorphisme de $\mathcal{F}_A$ sur V , on est conduit à supposer que ces isomorphismes se déduisent les uns des autres par composition avec des homothéties vectorielles positives.

Par exemple, si on considère les isomorphismes f et g correspondant aux choix d'unités suivants :

- pour f , 1 cm représente 1/10 N
- pour g , 1 mm représente 1Kgf

on a le diagramme commutatif suivant :



i.e. $h_0 f = g$,

où h est l'homothétie de rapport 1/981.

Remarque : Ce n'est pas la première fois qu'un ensemble (ici $\mathcal{F}_A$) se trouve muni d'une famille de bijections sur un autre ensemble (ici V) qui se déduisent les unes des autres par composition avec les éléments d'un groupe d'automorphismes de V (ici le groupe des homothéties vectorielles positives). Pensons en effet à la structure de droite affine. Une telle droite D est munie d'une famille de bijections de D sur $\mathbb{R}$ qui se déduisent les unes des autres par composition avec une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ du type

$$x \longmapsto ax + b$$

avec $a \neq 0$, c'est à dire par composition avec un élément du "groupe affine" de $\mathbb{R}$.

Bien sûr il peut paraître monstrueux de vouloir considérer globalement tous ces isomorphismes de $\mathcal{F}_A$ sur V , car dans la pratique on en choisit un et on ne fait qu'un dessin pour le représenter.

Mais la considération de toute cette famille $\mathcal{J}$ d'isomorphismes montre que dans la représentation d'une force appliquée en A par un bipoint (A, B) il y a une chose qui est intrinsèque à la force : la demi-droite d'origine A contenant B ; en effet cette demi-droite ne dépend pas du choix d'un des isomorphismes.

Ceci permet d'associer à tout élément de $\mathcal{F}_A$ une demi-droite vectorielle de V , et de dire qu'une force a dans V une direction et un sens bien déterminés.

Si nous supposons de plus que V est muni d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire), le choix d'un élément φ de $\mathcal{J}$ permet de munir $\mathcal{F}_A$ d'une norme, en posant

$$\forall \vec{F} \in \mathcal{F}_A \quad \|\vec{F}\| = \text{norme euclidienne de } \varphi(\vec{F}) \text{ dans } V,$$

et on dit que $\|\vec{F}\|$ est l'intensité de la force $\vec{F}$.

Evidemment le choix d'un autre élément de $\mathcal{J}$ conduit à une autre norme qui est proportionnelle à la précédente.

ENFIN DEPLAÇONS-NOUS.

Que se passerait-il si nous transportions notre matériel dans une autre pièce, pour y faire les mêmes expériences ?

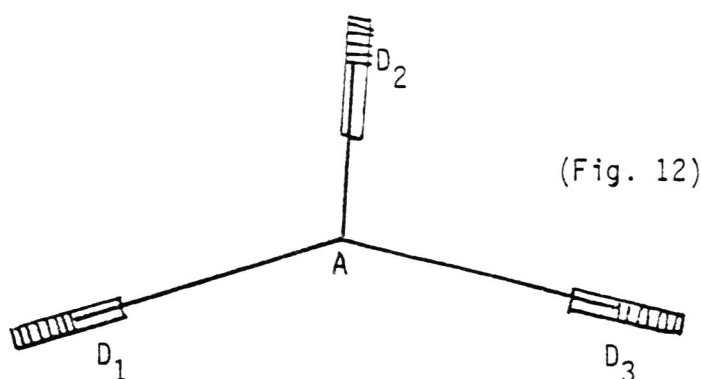
A l'échelle macroscopique, sans aucun doute, obtiendrait-on les mêmes résultats. Ceci nous conduit à admettre que pour deux points A et B distincts les espaces vectoriels $\mathcal{G}_A$ et $\mathcal{G}_B$ sont canoniquement isomorphes. Autrement dit, on peut supposer que l'on dispose d'un espace vectoriel type $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}_A$ n'est autre que la donnée du couple $(A, \mathcal{F})$.

3.- REFLEXIONS SUR LE MODELE.

Dans cette partie nous allons préciser des limites de validité du modèle qui vient d'être construit, et ensuite nous ferons fonctionner ce modèle dans d'autres situations pour vérifier son caractère opératoire et son adéquation à la réalité, c'est-à-dire pour voir dans quelle mesure il nous permet d'expliquer ou de prédire certains résultats d'expérience.

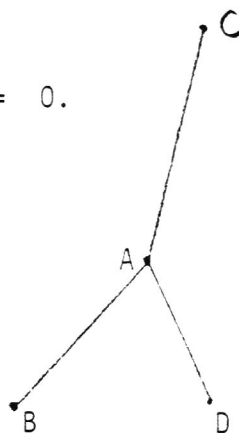
ETUDE D'UN EQUILIBRE.

Etudions maintenant les forces qui s'exercent au point d'attache de trois fils reliés à trois dynamomètres dont une extrémité est clouée. L'intensité de la force exercée par le dynamomètre D_i est mesurée par ce dynamomètre, sa direction est celle de son axe et est repérée sur le papier.



Comme il y a équilibre, on s'attend à ce que la somme des trois forces appliquées au point d'attache soit nulle. Pour le voir, on emploie la même méthode graphique que précédemment. En fait utiliser cette méthode revient à prendre les images des vecteurs-force par un isomorphisme de la famille entre l'espace vectorielle des forces appliquées en un point et l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie. On repère donc sur les demi-droites d'origine A déterminées par les dynamomètres des points B, C, D situés à des distances de A proportionnelles aux allongements x_1, x_2, x_3 et on constate avec une assez bonne appro-

ximation que $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 0$.



(Fig. 13)

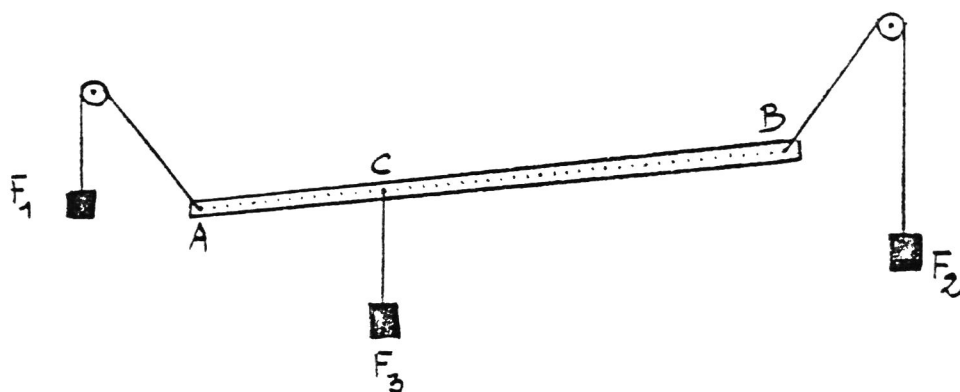
DESLIMITES DE VALIDITE.

Jusqu'à présent nous avons considéré des forces qui agissaient sur un point bien déterminé. En fait, sur un corps, crochet de ressort ou noeud - que nous avons représenté par un point, le "point matériel" de la mécanique.

Cette représentation a été justifiée a posteriori par l'extrême simplicité du résultat ainsi obtenu : pour qu'un point matériel soit en équilibre il faut et il suffit que la somme des vecteurs représentant les forces qui s'y appliquent soit nulle.

Il est temps de préciser, et ce ne sera pas toujours très facile, les limites de validité de notre modèle. Pour cela, nous allons étudier l'équilibre d'un corps solide auquel s'appliquent des forces du même ordre de grandeur (quelques newtons) que dans les expériences précédentes.

Une règle d'une vingtaine de centimètres de long, perforée de façon à pouvoir y accrocher des masses marquées en différents endroits, fera l'affaire. Dans le dispositif suivant la règle est accrochée par ses extrémités à deux fils qui passent sur des poulies et auxquels on accroche des masses.



(Fig. 14)

On accroche de plus une masse à un trou de la réglette, et on arrive sans trop de mal à trouver 3 masses telles que la réglette soit en équilibre. Il y a alors 3 forces qui s'exercent sur cette réglette, en plus de son poids $\vec{p}$, les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ transmises par chacune des poulies, appliquées en A et B respectivement, et le poids $\vec{F}_3$ de la masse accrochée en C.

On peut vérifier facilement que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{p} = 0$.

Mais si on accroche en un autre point de la réglette la masse jusqu'ici accrochée en C, c'est-à-dire si on remplace la force qu'elle exerce par une autre force ayant même intensité, même direction et sens, mais un point d'application différent, l'équilibre est rompu. La réglette effectue un mouvement oscillatoire amorti dont l'étude constituerait un joli exercice de mécanique du solide ; on arrive à une nouvelle position d'équilibre où les forces $\vec{F}'_1$ et $\vec{F}'_2$ appliquées en A et B ont même intensité que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ mais des directions différentes.

Et on a encore $\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{p} = 0$.

D'autres expériences confirmeraient ce que nous avons vérifié ici : la somme des vecteurs - force appliquée à un corps solide en équilibre est nulle.

On obtient ainsi une condition nécessaire pour qu'il y ait équilibre et notre expérience montre que cette condition n'est nullement suffisante.

Ainsi notre modèle d'espace vectoriel des forces qui rendait pleinement compte des situations expérimentales tant que nous nous limitions à étudier des forces appliquées en un même point, est devenu non pas inadéquat, mais insuffisant parce que trop pauvre.

Sans rentrer dans les détails de ce sujet, signalons que la notion de torseur qui généralise le modèle force-vecteur permet de rendre pleinement compte de cette situation qui relève de la mécanique des solides.

UNE FORCE A NE PAS OUBLIER : LA REACTION.

En analysant une expérience classique comme celle du plan incliné, où on étudie l'équilibre d'un chariot qui roule sur un rail, on est tout de suite amené à se demander si on peut assimiler le chariot à un point. Vu ses dimensions, cette assimilation est abusive si l'on s'en tient à des considérations géométriques. Deux raisons légitiment pourtant l'application du modèle "forces-vecteurs", l'une de principe, l'autre particulière à l'expérience envisagée:

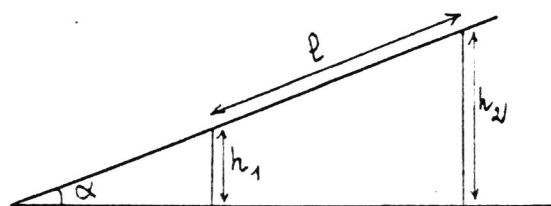
1°) Nous avons vu que l'on obtient ainsi une information intéressante de toute façon : la somme des forces appliquées au chariot est nulle en cas d'équilibre. Cette information risquerait tout au plus de ne pas rendre suffisamment compte de la situation.

2°) L'expérience montrera que contrairement au cas de la règle, la condition $\sum \vec{F} = 0$ est ici une condition suffisante d'équilibre. Si on appliquait le modèle "forces-vecteurs glissants" on verrait que le "moment résultant" est ici constamment nul.

Cela étant posé, venons en à l'expérience proprement dite.

Le rail fait un angle α avec l'horizontal, que l'on repère par l'intermédiaire de son sinus.

Si h_1 et h_2 sont les hauteurs par rapport à la table sur



(Fig. 15)

laquelle on travaille de deux points du rail dont la distance sur ce dernier est l , on a $\sin \alpha = \frac{h_2 - h_1}{l}$.

$$\text{Ici } h_1 = 0,265 \text{ m} \quad h_2 = 0,561 \text{ m} \quad l = 1 \text{ m},$$

$\sin \alpha = 0,206$ ce qui correspond à un angle α ayant pour mesure approximativement 17° . Au chariot, dont la masse est ici $P = 760 \text{ g}$, est accroché un fil parallèle au rail et qui passe sur une poulie. On cherche, pour différents angles α , quelle masse P' accrocher au fil de l'autre côté de la poutre pour obtenir un équilibre.

On aimerait bien ensuite représenter graphiquement P' en fonction de α , et trouver une fonction de l'angle qui rende compte de notre expérience. Mais dire que P' est fonction de l'angle α est lourd de signification du point de vue physique : cela veut dire que si, partant d'une position d'équilibre (α, P') on modifiait P' si peu que ce soit, disons de $\pm 1\text{g}$, l'équilibre serait rompu. Cela ne pourrait se produire qu'en l'absence totale de frottement.

Et l'expérience montre, pour notre angle α de 17° , que l'équilibre est réalisé quand P' est compris entre 220g et 230g . Le rapport $P'_{\text{max}} - P'_{\text{min}} / P'$ étant de l'ordre de 5% nous ne prendrons qu'une valeur de P' , par exemple la valeur moyenne $\frac{P'_{\text{max}} + P'_{\text{min}}}{2}$, ce qui revient à négliger le frottement. Une série de mesures donne alors le tableau de valeurs suivant :

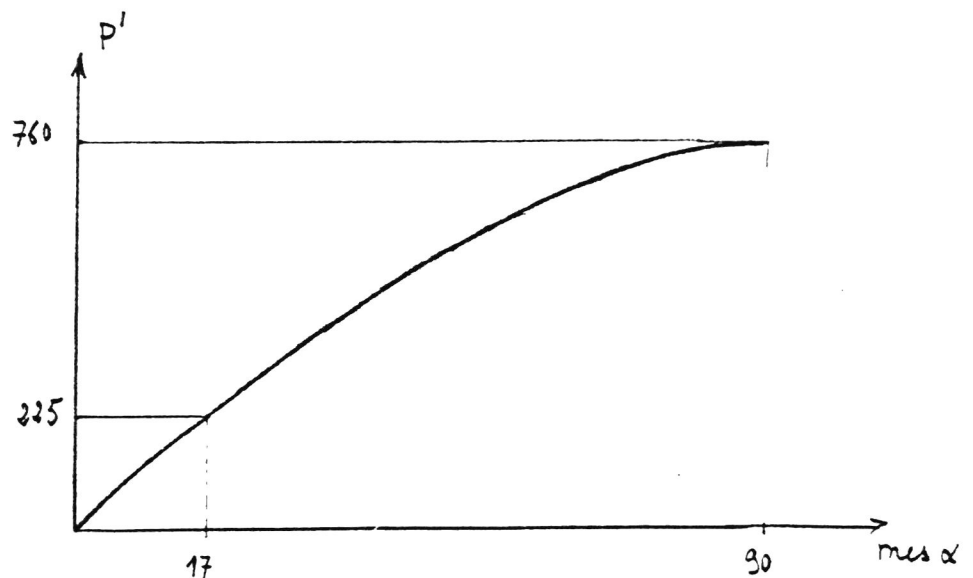
Mes α	P'
$8^\circ 30$	110
$10^\circ 50$	138
17°	225
$21^\circ 20$	277

De plus, aucune masse n'est évidemment nécessaire pour équilibrer le chariot quand il est horizontal, et quand il est vertical $P' = P$. Nous pouvons donc considérer comme plausibles les propriétés suivantes de la fonction f qui à la mesure de α exprimée en degrés associe P' exprimé en grammes :

- f est définie sur $[0, 90]$, à valeurs réelles
- f est croissante
- $f(0) = 0$ $f(90) = P$

Ces propriétés ne suffisent évidemment pas à caractériser f . Une idée peut nous guider, celle de chercher un modèle qui rende compte des résultats de notre expérience tout en étant le plus simple possible. L'allure de la courbe amène à essayer la fonction sinus, et les valeurs mesurées de P' montrent que cela donne un modèle très satisfaisant.

(Fig. 16)



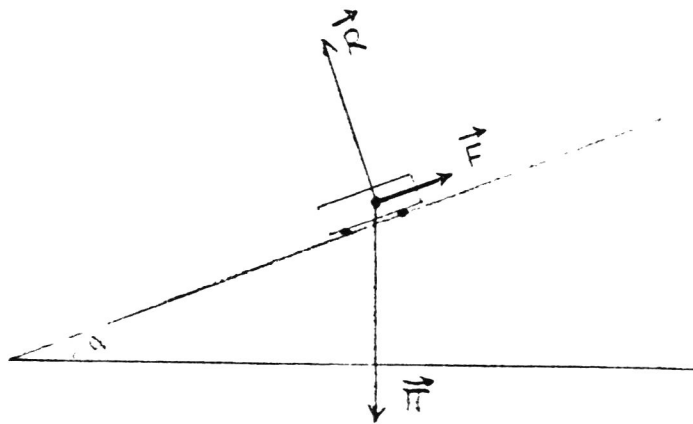
Le fait que ce soit le sinus de α , et non par exemple la mesure de α qui intervienne ne devrait pas nous étonner. Cela aurait pu être prévu grâce à des considérations qui, pour provocatrices qu'elles soient aux yeux de nos collègues physiciens, concernent une question fondamentale, tant pour les mathématiciens que pour les physiciens : pourquoi les fonctions trigonométriques interviennent-elles si souvent dans l'énoncé des lois physiques ?

Ce qu'on appelle bien improprement la mesure d'un angle - nous sommes ici prisonniers d'un vocabulaire inadéquat, mais si répandu que le modifier est devenu inopportun - c'est le repérage d'un angle géométrique par un nombre réel. Un tel repérage, que l'on représente à juste titre par l'enroulement d'un fil autour d'un cercle, n'est pas défini de façon unique, mais à un multiple entier près de la plus petite mesure non nulle de l'angle nul (360 pour les mesures en degrés, 2π pour les mesures en radians).

Nous avons ici représenté p' par une fonction d'une mesure de α ; mais P' dépend uniquement de l'inclinaison du rail, c'est-à-dire de l'angle géométrique α . Dire que P' ne change pas quand on remplace une mesure de α (ici en degrés) par une autre mesure de α en degrés signifie que f est une fonction périodique de période 360. Et les fonctions trigonométriques sont parmi les fonctions périodiques les plus simples. Des considérations analogues peuvent s'appliquer à des situations physiques très différentes, par exemple aux lois de Descartes.

Revenant au rail incliné, il s'agit maintenant d'interpréter la loi $P' = P \sin \alpha$ à l'aide du modèle (forces-vecteurs) dont nous avons justifié l'application au début du paragraphe. A priori, les forces qui interviennent sont le poids $\vec{P}$ du chariot, vertical, dirigé vers le bas, de norme P , et la force $\vec{F}$, transmise par la poulie, parallèle au rail, dirigée

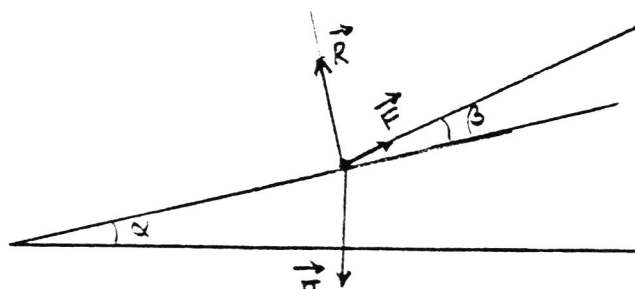
vers le haut, de norme $P \sin \alpha$. La somme $\vec{F} + \vec{\pi}$ est un vecteur non nul perpendiculaire au rail. Si nous voulons garder notre modèle vectoriel, dans lequel la somme des forces appliquées est nulle en cas d'équilibre, nous devons considérer que le chariot, du fait qu'il est astreint à glisser sur le rail, est aussi soumis à une force $\vec{R}$ telle que $\vec{F} + \vec{\pi} + \vec{R} = 0$.



(Fig. 17)

Ainsi notre modèle vectoriel, appliqué à une série d'expériences où le chariot était soumis à une force parallèle au rail, nous a conduits à faire l'hypothèse d'une force $\vec{R}$, dite de réaction, perpendiculaire à ce rail. Notons d'ailleurs qu'inversement, la relation $P' = P \sin \alpha$ résulte de l'égalité $\vec{F} + \vec{\pi} + \vec{R} = 0$ et de cette seule hypothèse de direction pour $\vec{R}$.

Pour tester la validité de cette hypothèse, c'est-à-dire son caractère opératoire, nous allons l'appliquer à la situation plus générale où le chariot est accroché à un fil qui fait un angle β avec le rail. Comme il s'agit ici de vérifier une hypothèse, nous allons procéder à l'inverse de l'expérience précédente : tout d'abord calculer P' en fonction de P , α , β , puis le comparer à la valeur mesurée de P' dans l'expérience.



(Fig. 18)

Pour une position d'équilibre, de l'égalité $\vec{F} + \vec{T} + \vec{R} = 0$ on déduit, en projetant orthogonalement ces trois vecteurs sur la droite qui représente le rail : $P' \cos \beta = P \sin \alpha$ soit $P' = \frac{P \sin \alpha}{\cos \beta}$

on mesure α comme précédemment, en calculant son sinus. Ici $\sin \alpha = 0,125$. Quant à β , il sera plus commode de calculer sa tangente, en mesurant à l'aide d'une équerre graduée les distances x_1 et x_2 au rail de deux points du fil dont les projections orthogonales sur le rail sont à une distance d . Ici $x_1 = 14,5$ cm ; $x_2 = 23,9$ cm ; $d = 15$ cm ; $\text{tg } \beta = \frac{x_2 - x_1}{d}$

L'angle β a pour mesure 32° . On calcule alors $P' = 112$ g, alors que dans notre expérience l'équilibre est obtenu pour $P' = 110$ g.

CONCLUSION

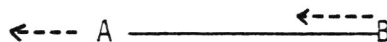
Avant de terminer et pour éviter peut-être certains malentendus nous aimerions faire rapidement le point de ce que nous avons tenté de faire

Tout d'abord, lorsque nous avons choisi le point de vue statique c'est parce qu'il correspondait à l'enseignement qui était donné à l'époque où nous avons envisagé ce travail et que nous voulions nous poser des problèmes réels que l'on rencontre dans des classes réelles. On pourrait faire une étude tout à fait analogue en partant du point de vue dynamique. Il faudrait à notre avis le résoudre dans le même esprit, c'est-à-dire essayer de construire à partir de l'expérience un modèle qui permette d'interpréter le réel et d'agir sur lui.

Nous tenons aussi à souligner que dans l'élaboration d'un modèle, il est pratiquement impossible de rendre compte d'emblée de la totalité de la situation. Il y a obligatoirement des présupposés plus ou moins explicites qui sont laissés tels quels au départ et qu'une amélioration et un approfondissement de la théorie permettront ultérieurement d'intégrer dans un modèle plus large.

Parmi ceux-ci il y en a deux qui sautent aux yeux dans les expériences que l'on a faites : l'utilisation des fils et l'approximation que constitue le point matériel.

On a admis en effet que les fils transmettaient les forces ; ce qui signifie que si on a un fil tendu entre deux points A et B et une force s'exerçant en A et dirigée de B vers A, à cette force correspond une force de même sens et de même intensité s'appliquant au point B et dirigée dans le même sens.



Ceci devra évidemment être intégré ultérieurement dans une mécanique des fils.

De même lors des expériences avec le chariot, nous avons admis qu'on pouvait le traiter comme si c'était un point. Malgré cette approximation abusive, nous avons obtenu des conclusions que l'expérience a semblé confirmer.

La mécanique des solides fournira un modèle plus poussé, qui fera comprendre pourquoi notre modèle élémentaire donnait des résultats satisfaisants. On pourra aussi, avec l'introduction d'une réaction qui ne sera plus nécessairement perpendiculaire avec le rail, expliquer pourquoi, toujours dans le cas du chariot, on obtient un équilibre, non pour une valeur unique de P' , mais pour des valeurs formant un intervalle de l'ordre de 10 g, alors que nos mesures sont au g près.

D'une façon générale on démarrera sans faire de véritables démonstrations et on essayera en compliquant de plus en plus la théorie de rendre compte d'un nombre croissant de phénomènes.

Il arrive un moment où cette théorie étant assez complète , on éprouve le besoin de vérifier sa cohérence, c'est-à-dire d'explicitier un certain nombre de propositions particulières qu'on appellera suivant la terminologie que l'on veut utiliser des hypothèses ou des principes ou des axiomes, à partir desquels on déduira les autres propositions que l'expérience a déjà permis de vérifier ou d'autres propositions que l'expérience, en l'espèce, confirmera.

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. DE
PARIS VII

- 1 - BIBLIOGRAPHIE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
- 2 - MATHEMATIQUES ET AUTONOMIE/GESTION
- 3 - NOMBRES A L'ECOLE ELEMENTAIRE
- 4 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES N°1
- 5 - QUELQUES REFLEXIONS SUR LA DEMONSTRATION
- 6 - MOIRES
- 7 - PAVAGES ET COLORIAGES
- 8 - AUTOUR DU CUBE
- 9 - DES CHIFFRES ET DES NOTES
- 10 - CALCUL MENTAL
- 11 - CALCUL 1
- 12 - CALCUL 2
- 13 - LE CUBE HONGROIS
- 14 - DE LA TEMPERATURE RESULTANTE SECHE
A L'ANGLE SOLIDE
- 15 - GROUPE FRANCAIS/MATHEMATIQUES N°2
- 16 - LES JEUX DU CLUB DES CORDELIERES
- 17 - COLORIAGES GEOMETRIQUES
- 18 - Q.C.M. (CNTE)
- 19 - COCOTTES, DRAPEAUX ET GEOMETRIE
- 20 - QUI COURT ?
- 21 - ALMANACH / FRISES
- 22 -
- 23 - RECURRENCE
- 24 - CLIMATISONS LES MATHEMATIQUES
- 25 - NOMBRE D'OR

Reproduction de textes anciens

- I- DISME (1585)
- II- GEOMETRIE ELEMENTAIRE - F. Klein - (1896)

Editeur : I.R.E.M.

Directeur/Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage 100 exemplaires

- Dépôt légal : 4/81

I.R.E.M. PARIS VII - Tour 55/56, 3ème étage
2, PLACE JUSSIEU ----- 75005 PARIS