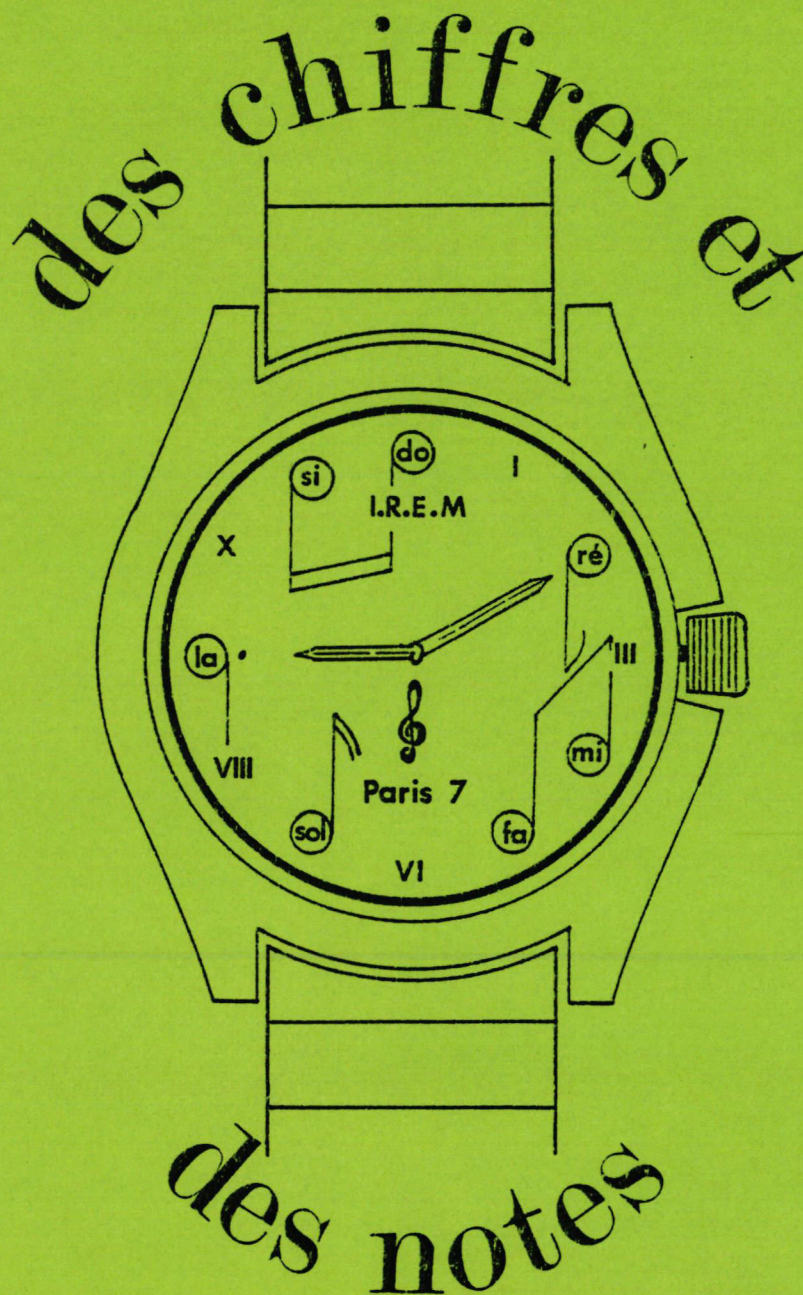




Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII

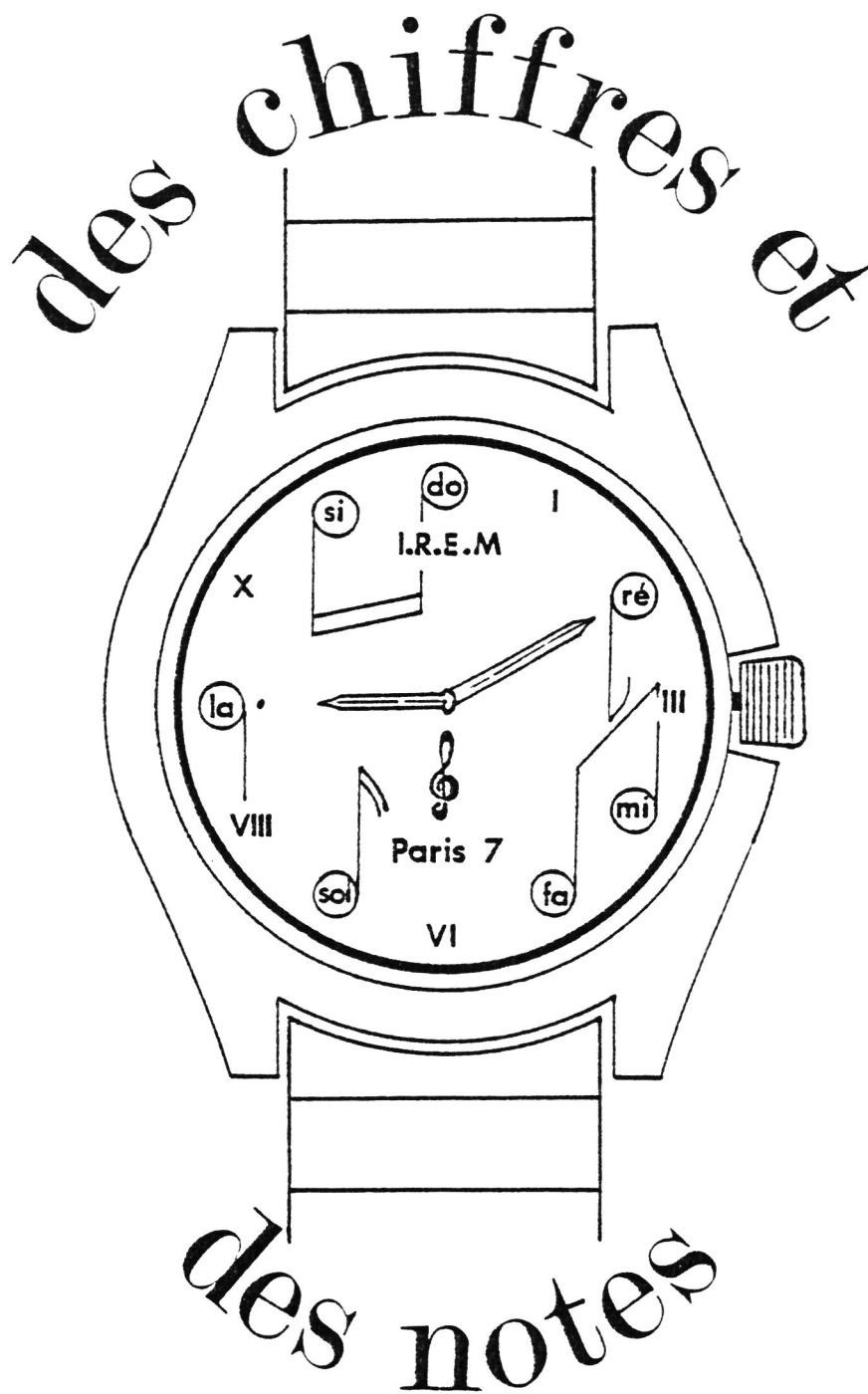


Mars 1980



par Bernard PARZYSZ

NIVEAU	Première / Terminale
PUBLIC	Elèves
SUJET	. Echelles musicales . Puissances ; congruences
OBJECTIF	Informier ; modéliser



par Bernard PARZYSZ

*" Il n'existe point d'amour
et de beauté dignes de ce
nom sans loi et sans ordre "*

Jean-Sébastien BACH.

TABLE DES MATIÈRES

page 5	Le son
page 6	Les intervalles
page 7	Les notes
page 8	Les échelles historiques
page 18	La transposition
page 19	L'accord parfait majeur
page 20	L'échelle de Zarlin
page 22	L'accord parfait mineur
page 23	Le tempérament égal
page 24	"Notre" échelle tempérée
page 34	Le dodécaphonisme
page 37	Rêvons un peu
page 42	Bibliographie

NOTA BENE

Dans le courant du texte sont intercalés des "encadrés" ,destinés à illustrer certains points. Voici leur liste et leur situation dans la brochure.

<u>INTITULÉS</u>	<u>SE TROUVENT ENTRE LES PAGES</u>
. Avec trois trous . Vrai ou faux ? . Pythagore	8 et 9
. Le monocorde . Sur cinq notes . Le nom des notes . La légende des lyus	14 et 15
. Plus grave,plus aigu ?	20 et 21
. 'Are 'Are . La gamme par tons . Une échelle arabe . Les échelles des instruments . Quelques mesures sur la guitare	24 et 25
. Transcription chiffrée d'une oeuvre sérielle . D'autres corps sonores . La Reine des Cloches	34 et 35



"La musique est l'art des sons", dit DANHAUSER, au début de sa "Théorie de la musique".
Mais, d'abord, qu'est-ce qu'un son ?

Ce mot désigne en fait tout mouvement vibratoire de l'air, lorsqu'il est perçu par l'oreille. En tant que phénomène vibratoire, on peut donc appliquer au son le théorème de FOURIER :

Tout mouvement périodique de fréquence f peut être décomposé en la somme de mouvements sinusoïdaux de fréquences $f, 2f, 3f, \text{etc...}$

Or, dans le domaine qui nous occupe ici, un son déterminé par un mouvement sinusoïdal s'appelle un son pur. Le théorème devient alors :

Un son de fréquence f peut être considéré comme résultant de la "superposition" de sons purs de fréquences $f, 2f, 3f, \text{etc...}$

Un son musical est caractérisé par 3 éléments :

1) hauteur : elle est liée à la fréquence. Pour qu'un son soit un "vrai" son (c'est-à-dire audible), il faut que sa fréquence soit comprise en 20 et 20.000 herz environ (1 herz = 1 vibration par seconde); en-dessous, on est dans le domaine des infra-sons et, au-dessus, dans celui des ultra-sons.

2) intensité : elle est liée à l'amplitude maximale du mouvement vibratoire. Le seuil d'audibilité d'un son dépend également de son intensité. Pour qu'un son soit perçu, il faut qu'il exerce sur l'oreille une pression d'au moins 2×10^{-5} Newton/m².

3) timbre : il est lié à la décomposition du son en "série de Fourier" de sons purs. Ces sons purs sont appelés les harmoniques du son considéré (le son de fréquence nf est le n^{e} harmonique; le 1er harmonique s'appelle le fondamental).

Le timbre dépend des numéros et de l'amplitude relative des harmoniques perçus.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux hauteurs des sons; plus précisément, nous identifierons son et fréquence, c'est-à-dire qu'un son sera pour nous un réel strictement positif (Nous ne distinguerons pas non plus, en théorie les sons audibles de ceux qui ne le sont pas).

LES INTERVALLES

L'appréciation des "écarts" entre deux sons est régie par la loi de Weber-Fechner, loi psycho-physiologique qui, appliquée au domaine auditif, dit que l'oreille est sensible, non aux différences, mais aux rapports de fréquences des sons (sensibilité de type "logarithmique"). Ceci nous conduit à poser la relation suivante, dans l'ensemble $(\mathbb{R}^{\neq})^2$ des couples de sons :

$$(f_1, f_2) \mathcal{R} (f_3, f_4) \Leftrightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_4}{f_3}$$

Il est immédiat que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont appelées intervalles.

Considérons l'une de ces classes; pour tout couple (f_1, f_2) de la classe, le rapport $\frac{f_2}{f_1}$ de la fréquence du 2ème son à celle du premier est le même; c'est un réel (strictement positif) k . Il y a évidemment bijection entre l'ensemble des intervalles et $\mathbb{R}^{\neq}$. De plus, tout intervalle admet un représentant (unique) dont le premier élément est 1; ce représentant est $(1, k)$. Nous noterons I_k l'intervalle correspondant, et J l'ensemble des intervalles:

$$J = \{I_k; k \in \mathbb{R}^{\neq}\}$$

$$I_k = \{(f, kf); f \in \mathbb{R}^{\neq}\}$$

Remarques : a) I_1 est l'ensemble des couples (f, f) ; nous appellerons cet intervalle l'unisson, bien que les musiciens traditionnels refusent à l'unisson le statut d'intervalle (comme on a longtemps refusé à zéro le statut de nombre).

b) Si $k > 1$, alors la fréquence du second son de chaque couple est supérieure à celle du premier son. On dit que l'intervalle I_k est ascendant

De même, si $k < 1$, l'intervalle I_k est dit descendant.

c) Nous pouvons de plus définir une addition dans J par :

$$I_k \oplus I_{k'} = I_{kk'}$$

Avec cette définition, nous déterminons un isomorphisme entre $(J, \oplus)$ et $(\mathbb{R}^{\neq}, \times)$; donc $(J, \oplus)$ est un groupe commutatif (groupe additif des intervalles)

d) Nous pouvons également convenir de noter le son $k f$ comme :

$$k f = f \oplus I_k$$

(C'est possible parce que le groupe additif des intervalles opère (transitivement et fidèlement) sur les sons).

e) Représentation linéaire :

Pour pouvoir comparer visuellement les intervalles, nous pouvons représenter, sur la droite réelle, l'égalité précédente par :

$$\begin{array}{c} f \qquad I_k \qquad k f \\ | \qquad \quad | \qquad | \\ \hline \end{array} \rightarrow ,$$

en convenant de représenter I_k par un bipoint dont la mesure algébrique est proportionnelle au logarithme de k (dans une base quelconque) pour que l'on ait :

$$\text{Mes alg } (I_k \oplus I_{k'}) = \text{Mes alg } (I_k) + \text{Mes alg } (I_{k'})$$

LES NOTES

On peut faire chanter en chœur la même mélodie par des hommes, des femmes et des enfants. Bien que toutes les voix ne soient pas à la même hauteur, le résultat ne sera pas choquant; ce fait est dû à ce que certaines voix chantent (comme on dit) "à l'octave" des autres. Cette notion d'octave est commune à tous les systèmes musicaux; c'est l'intervalle qui sépare les deux premiers harmoniques d'un son musical. Puisque nous avons vu plus haut que ces sons avaient pour fréquences f et $2f$, l'octave n'est autre que I_2 (octave supérieure), ou $I_{\frac{1}{2}}$ (octave inférieure). Cette parenté très forte entre sons, que l'on ressent intuitivement, a conduit partout à identifier (de proche en proche) les sons de fréquences f , $2f$, $4f$, $8f$, ..., $2^n f$, ... ($n \in \mathbb{N}$) et aussi, bien sûr, $\frac{f}{2}$, $\frac{f}{4}$, ..., $\frac{f}{2^p}$ ($p \in \mathbb{N}$).

D'où la relation que nous définissons dans $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_1 \ G \ f_2 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} \quad f_2 = 2^n \cdot f_1)$$

On vérifie immédiatement que G est une relation d'équivalence; les classes modulo G seront appelées notes, et "notées", pour $f \in \mathbb{R}^*$: $\bar{f} = \{2^n f ; n \in \mathbb{Z}\}$

Mais un douloureux problème surgit alors : Peut-on faire de la musique avec une infinité de notes? Ceci soulève une foule de difficultés de tous ordres (production du son, notation, etc...). Aussi la solution universellement adoptée a-t-elle consisté à ne prendre qu'un nombre fini de notes, et à constituer une échelle.

Une petite remarque au sujet des notes : Etant donné f ($f \in \mathbb{R}^+$), toute note (dont une des fréquences est f') admet un représentant unique appartenant à l'intervalle $[f; 2f[$. Ceci résulte du fait qu'on peut toujours "coincer" un réel positif donné (ici $= \frac{f'}{f}$) entre deux puissances consécutives de 2; si $2^p \leq \frac{f'}{f} < 2^{p+1}$, alors $2^{-p} f'$ est le représentant cherché.

Construire une échelle se ramènera à déterminer n réels $f_0 (= f)$, f_1 , f_2 , ..., f_n , appartenant à l'intervalle $[f; 2f[$. Nous allons voir ci-

après quelques méthodes utilisées (à différentes époques et dans différentes régions du globe) pour construire des échelles musicales.

LES ECHELLES HISTORIQUES

Grèce et Chine anciennes :

Les Chinois ont fondé leur système musical sur la flûte de bambou; les Grecs ont construit le leur sur la lyre (Voir encadrés correspondants). Ni les uns, ni les autres n'avaient les moyens techniques de s'occuper de la fréquence des sons, phénomène vibratoire. Mais il se trouve que, dans le cas de la corde vibrante (lyre) comme dans celui du tuyau sonore cylindrique dont la longueur est grande devant la section (flûte), la fréquence du son fondamental émis est inversement proportionnelle à la longueur (de la corde ou du tuyau). Ces gens ont donc fait des observations et des mesures sur les consonances entre sons émis, et se sont aperçus que les rapports de longueurs correspondant aux sons consonants étaient des rationnels "simples". En fait, ils ont découvert les premiers termes de la série des harmoniques. Grecs comme Chinois s'en sont tenus aux rapports déterminés par les 4 premiers termes de cette série. Voyons quels sont les intervalles déterminés par ces 4 sons, qui ont (on l'a vu) respectivement pour fréquences f , $2f$, $3f$, $4f$; l'intervalle entre le fondamental et le deuxième

AVEC TROIS TROUS

Le galoubet provençal (joué de la main gauche par le Tambourinaire, en s'accompagnant du tambour) est une flûte à bec très ingénieuse, munie seulement de trois trous pour les doigts. Il y a 4 doigtés de base, obtenus en débouchant successivement les trous de bas en haut. Pour chacun de ces doigtés on obtient,

en soufflant de plus en plus fort, la série des harmoniques jusqu'au n° 4, 5 ou 6.

Voyez ci-contre, ce que l'on obtient avec un galoubet en Do.

L'ensemble des notes obtenues est donc :

Majeur Index

Pouce

● Trou bouché
○ Trou ouvert

The diagram shows a galoubet with three finger holes. Above the instrument, 'Majeur' and 'Index' are labeled with arrows pointing to the first and second holes. Below the instrument, a legend indicates that a solid dot (●) represents a closed hole and an open circle (○) represents an open hole. To the right of the legend, four musical staves show the notes produced by different fingerings. The first staff has the first hole closed (●) and the other two open (○), producing a series of notes. The second staff has the first two holes closed (●●) and the third open (○). The third staff has the first hole closed (●) and the other two open (○). The fourth staff has all three holes open (○○○). The notes are written in treble clef and include accidentals (sharps and flats) to indicate specific pitches.

The musical notation shows a series of notes on a staff, representing the harmonics of a Do Major galoubet. The notes are grouped by a bracket and labeled 'notes usuelles' (usual notes). The notes include various accidentals (sharps and flats) to indicate specific pitches.

Comme on peut le constater, on peut, sur un tel instrument, jouer dans deux tonalités : Do Majeur et Sol Majeur

VRAI ou FAUX ?

"La légende grecque nous rapporte que Pythagore, se promenant un jour en inspectant les étoiles - un Pythagore peut-il en effet se promener autrement qu'en inspectant les étoiles ? - fut frappé de la consonance de marteaux de forgerons qui rendaient la quinte, la quarte et l'octave. Il entra dans la forge, se fit confier les marteaux, les pesa et s'aperçut que les rapports de poids fournissaient les chiffres 1,2,3 et 4."

(Jacques Chailley, "La résonance dans les échelles musicales" - CNRS 1963).

Ce texte appelle deux remarques :

- 1) La légende (comme le souligne plus loin Chailley) est manifestement erronée sur un point (au moins) : des marteaux de masses proportionnelles à 1,2,3,4 ne donneront certainement pas la quarte, la quinte et l'octave (voir sur les corps sonores
- 2) Elle sous-entend que les intervalles de quarte, quinte et octave étaient déjà connus avant les travaux de Pythagore, ce qui, après tout, est normal : les Grecs n'avaient pas attendu Pythagore pour faire de la musique,



PYTHAGORE



Gravure de 1492, extraite de la "Théorica Musicae" de Franchinus Gafurius. Elle représente Pythagore faisant des expériences sur les corps sonores. En fait, Pythagore (572 - 480 av. J.C.) ne nous a laissé aucun écrit. Ce que nous en connaissons est rapporté par des auteurs postérieurs, comme Aristoxène de Tarente (v. 350 av. J.C.). Le "cycle des quintes", dont l'invention est attribuée à Pythagore, est en réalité antérieur à celui-ci; il n'avait fait que le justifier théoriquement, à l'aide du monocorde (voir encadré suivant), et non à l'aide de cloches ou de verres plus ou moins remplis.

Les expériences de Pythagore :

Pythagore avait remarqué qu'en plaçant un chevalet au milieu d'une corde tendue, les deux parties de la corde (chacune de longueur moitié) donnaient, lorsqu'on les pinçait, le même son, "ressemblant à celui que donnait la corde entière (l'octave supérieure).

Si l'on plaçait ce chevalet au tiers à partir d'une des extrémités, la partie la plus longue donnait un nouveau son (quinte supérieure du son initial), l'autre donnant l'octave supérieure (puisque sa longueur était moitié).

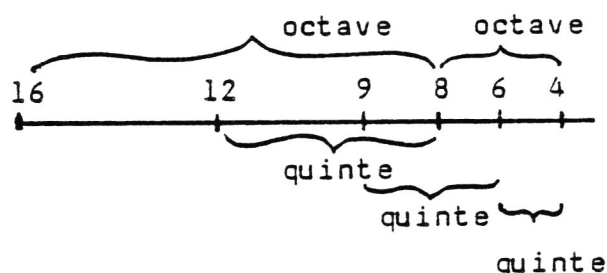
On peut également procéder en augmentant la longueur de corde vibrante, au lieu de la diminuer : Ainsi, partant d'une corde mesurant 4 unités de longueur, des cordes identiques (matériau, section, tension) mais de longueurs 8 et 16 sonneront respectivement une et deux octaves en-dessous de la première.

Une corde de longueur 6 (une fois et demie 4) sonnera à la quinte inférieure de la corde de départ, et une corde de longueur 12 une octave en dessous.

Les disciples de Pythagore (Philolaos, Archytas) poussèrent les choses plus loin, en introduisant la quinte de la quinte (dont la longueur sera donc :

$$4 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 9).$$

La gravure ci-dessus est une illustration (revue et corrigée) de ceci : les nombres placés sur les cloches représentent les longueurs de ces cloches (étant supposé qu'elles sont homothétiques). Dans ce cas, on sait depuis le Moyen-Age que ces longueurs se comportent comme celles des cordes vibrantes (en fait la fréquence du son émis est inversement proportionnelle à la racine cubique de la masse - voir "La Reine des Cloches" - c'est-à-dire, dans le cas présent, à la longueur). Les nombres indiqués représentent donc les intervalles suivants :

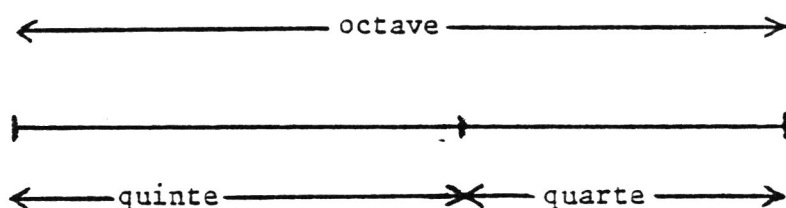


harmonique est l'octave I_2 (rapport de fréquences : $\frac{2f}{f} = 2$); entre le 2ème et le 3ème harmonique nous trouvons $I \ 3/2$, appelé quinte (ascendante); enfin entre le 3ème et le 4ème nous avons $I \ 4/3$, appelé quarte (ascendante).

Ces 4 premiers harmoniques nous fournissent donc :

- . l'octave : ascendante (I_2) ou descendante ($I \ 1/2$)
- . la quinte : ascendante ($I \ 3/2$) ou descendante ($I \ 2/3$)
- . la quarte : ascendante ($I \ 4/3$) ou descendante ($I \ 3/4$)

Ce qui peut être représenté par le schéma suivant :



Remarquons que les 3 intervalles sont fournis par les 2e, 3e, 4e harmoniques; le fondamental n'est, en somme, qu'un "doublet" du 2ème harmonique.

Le procédé utilisé par les Pythagoriciens (et qui nous est connu par les écrits d'Aristoxène de Tarente) se base sur ces 3 harmoniques; il consiste en une succession alternée de quintes montantes et de quartes descendantes.

Plus précisément, on part d'un son $f_0 = f$, puis on prend le son f_1 situé une quinte au-dessus de f ($f_1 = \frac{3}{2} f$), le son f_2 se trouvant une quarte en-dessous de f_1 ($f_2 = \frac{3}{4} \cdot f_1 = \frac{9}{8} f$), le son f_3 placé une quinte au-dessus de f_2 , etc....

On voit immédiatement que l'on aura $f_{2n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n$ et $f_{2n+1} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^n$.

Ouvrons ici une parenthèse :

La méthode des Grecs est, pour les premiers termes de la suite (f_n), équivalente à la suivante, qui consiste en une progression de quintes, ramenées dans l'octave. Précisons :

Partant toujours de $f_0 = f$, on construit la suite (f_n) définie par

$$\begin{aligned} \bullet f_{n+1} &= \frac{3}{2} f_n & \text{si} & \quad \frac{3}{2} f_n < 2f \\ \bullet f_{n+1} &= \frac{3}{2} f_n : 2 & \text{si} & \quad \frac{3}{2} f_n \geq 2f \end{aligned}$$

les termes successifs de cette suite seront donc de la forme

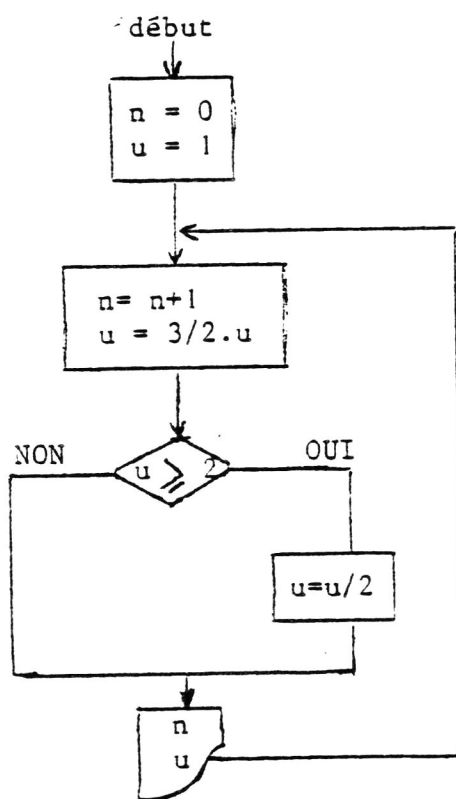
$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} f, \text{ p étant défini comme l'entier (unique) tel que}$$

$$f_n \in [f, 2f[$$

Le calcul montre que cette méthode, appelée "cycle des quintes" est équivalente à celle des Grecs jusqu'à $n = 7$.

Le "cycle des quintes" peut se programmer de la manière suivante

(où $u_n = \frac{f_n}{f}$) :



Ce qui sera intéressant, du point de vue musical, ce sera d'obtenir une échelle de sons finie. Cela se produira si (et seulement si), par chance, la suite des f_n (ou des u_n) est périodique. On pourra alors véritablement parler de cycle des quintes, puisque le procédé permettra de "boucler la boucle". Voyons donc si l'on peut trouver un entier p tel que $u_p = u_0 (= 1)$.

Ceci revient à chercher deux entiers n et p tels que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} = 1$, ou encore $3^n = 2^{n+p}$. Malheureusement, 2^{n+p} est pair, et 3^n est impair. Il faut nous faire une raison, le "cycle" des quintes n'existe pas, du moins en tant que cycle (certains parlent de la "spirale" des quintes).

Mais les musiciens de l'Antiquité ignoraient cela, et c'est pourquoi ils ont trouvé une solution au problème. Solution approchée, certes, imparfaite comme le sont nos sens, mais solution acceptable. En fait, ils ont arrêté leur progression lorsqu'ils sont revenus dans le voisinage du son dont ils étaient partis.

Le problème est donc finalement le suivant : Trouver n et p entiers tels que $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 + \varepsilon$, ou $1 - \varepsilon$ (ε étant un nombre "petit devant 1"). Quelle est la valeur de u_n correspondante ?

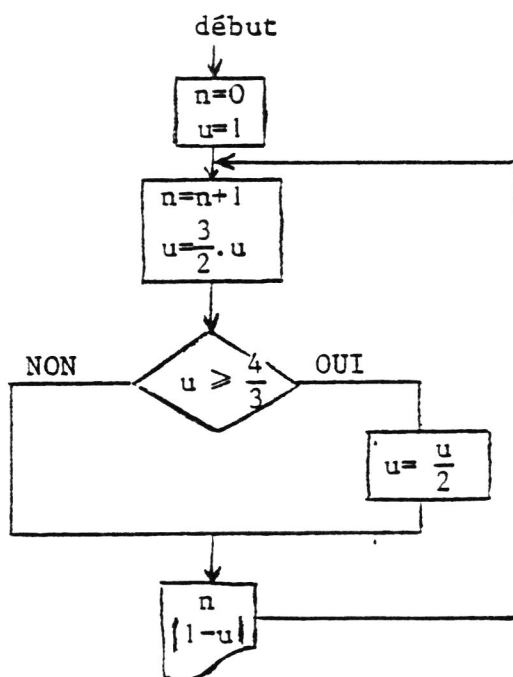
Distinguons les 2 cas :

1er cas $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 + \varepsilon$ Alors nous aurons $u_n = 1 + \varepsilon$ ($1 + \varepsilon \in [1, 2[$)
et par conséquent, $\boxed{\varepsilon = u_n - 1}$

2ème cas $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 - \varepsilon$ Nous aurons, cette fois, $u_n = 2(1 - \varepsilon)$, puisque $(1 - \varepsilon) \in [1, 2[$. D'où $\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{u_n}{2}}$

Donc, dans tous les cas, ε sera le plus petit des deux nombres $u_n - 1$ et $1 - \frac{u_n}{2}$. Lequel est-ce? Un (léger) calcul montre que ce sera $u_n - 1$ (et seulement si) u_n est inférieur à $4/3$.

Nous pouvons donc transformer l'organigramme précédent pour obtenir:



Cet organigramme nous donnera ε , et la valeur de n correspondante.

Remarque : La comparaison de u_n à 2 a été rendue inutile par celle de u_n à $4/3$.

En effet :

. Si $u_n < 4/3$, alors $3/2 \cdot u_n < 2$, donc on n'a pas à diviser u_n

. Si $u_n \geq 4/3$, on a $2/3 \leq \frac{u_n}{2} < 1$ et, puisque $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$, $u_{n+1} \in [1, 2[$.

la calculatrice nous fournira alors les résultats suivants :

n	ϵ
5	0,05078125
7	0,06787109
12	0,01364326
41	0,01139745
53	0,00209031
359	0,00106645
665	0,00004366

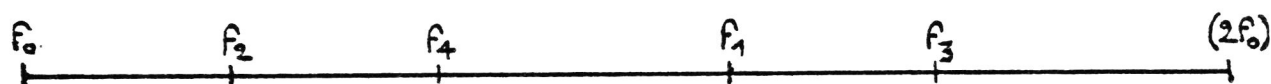
Nous allons envisager successivement les 5 premiers cas.

$n = 5$: Au bout de 5 quintes, nous sommes donc revenu au voisinage de 1; c'est-à-dire que $u_5 \approx 1$, ou encore $\frac{f_5}{f_0} \approx 1$

En identifiant f_5 et f_0 , nous aurons donc réparti 5 sons dans l'octave, qui sont :

n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{3}{2} f$	$\frac{9}{8} f$	$\frac{27}{16} f$	$\frac{81}{64} f$

En représentation linéaire, nous aurons alors :



Si nous calculons les intervalles entre 2 sons consécutifs, nous constatons qu'ils sont de 2 types seulement :

$$\frac{f_2}{f_0} = \frac{f_4}{f_2} = \frac{f_3}{f_1} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3} \quad (A)$$

$$\frac{f_1}{f_4} = \frac{2f_0}{f_3} = \frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3} \quad (B)$$

Cette échelle à 5 notes (pentatonique), est la gamme "chinoise". Elle est et a été très répandue du Pérou à la Chine, en passant par l'Ecosse (voir encadré)

$$n = 7$$

Nous ajoutons, cette fois, deux sons nouveaux à l'échelle "chinoise" :

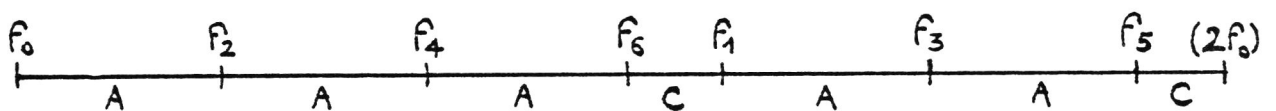
$$f_5 = \frac{243}{128} f, \text{ et } f_6 = \frac{729}{512} f$$

Ces deux sons viennent partager les deux intervalles B en un intervalle A et un nouvel intervalle, plus petit (C). Finalement, les intervalles entre deux sons consécutifs ne sont encore que de 2 types:

$$\frac{f_2}{f_0} = \frac{f_4}{f_2} = \frac{f_6}{f_4} = \frac{f_3}{f_1} = \frac{f_5}{f_3} = \frac{3^2}{2^3} \quad (A)$$

$$\frac{f_1}{f_6} = \frac{2f_0}{f_5} = \frac{2^8}{3^5} \quad (C)$$

La représentation est la suivante :



Cette échelle est connue sous le nom de "gamme de Pythagore"; elle a été employée dans la Grèce antique, mais était également connue de la Chine ancienne, les deux notes supplémentaires ("pien") n'étant toutefois utilisées que comme notes de passage.

l'intervalle A est le ton pythagoricien

l'intervalle B est le limma pythagoricien

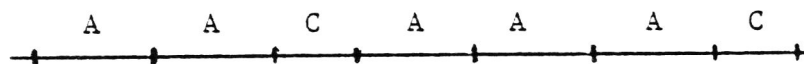
Remarquons que, dans le cycle des quintes, le son de départ, f , ne joue pas de rôle particulier. En effet, au lieu de procéder par quintes ascendantes, nous aurions pu procéder symétriquement (par quintes descendantes), ou même "panacher", en prenant p quintes ascendantes et $6-p$ quintes descendantes (avec $p = 0, 1, 2, \dots, 6$). Ces 7 possibilités se ramènent simplement à un changement du son de départ, et déterminent donc 7 répartitions des intervalles successifs dans l'octave, se déduisant l'une de l'autre par permutation circulaire.

Ce sont ces 7 répartitions qui constituent les 7 "modes grecs" primitifs :

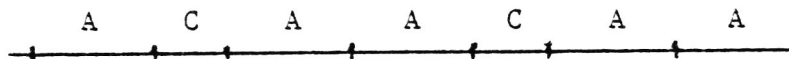
p = 6 quintes montantes : mode hypolydien
 5 " " " lydien
 4 " " " hypophrygien
 3 " " " phrygien
 2 " " " hypodorien
 1 " " " dorien
 0 " " " mixolydien

Au fil des siècles, et à travers de multiples transformations (dont les modes liturgiques du Moyen-Age), ces différents modes ont fini par n'en plus former que deux :

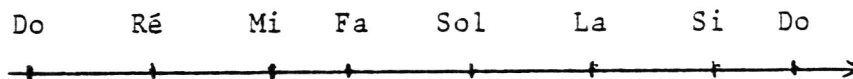
le mode majeur (5 quintes montantes):



le mode mineur (ancien) (2 quintes montantes) :



C'est finalement le mode majeur qui a eu le plus de succès, et qui a servi de référence. Il a alors fallu donner un nom aux 7 notes de l'échelle, (voir encadré), et l'on a abouti à l'échelle suivante :

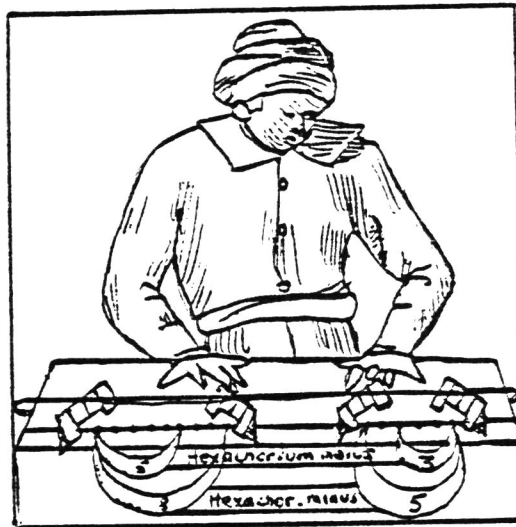


Les rapports des fréquences à Do des différents sons de l'octave sont

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$

C'est à cette succession que l'on a donné le nom de tonalité de Do majeur

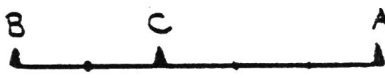
LE MONOCORDE



Cette gravure de 1529 (Ludovico Fogliano : "Musica Theorica") montre un musicien utilisant le monocorde.

Au Moyen-Age, la division du monocorde avait été poussée plus loin que par Pythagore et ses disciples : la gravure ci-dessus fait intervenir le 8^e harmonique, alors que les pythagoriciens n'avaient pas dépassé le 4^e.

Explication :

. Partie droite : 

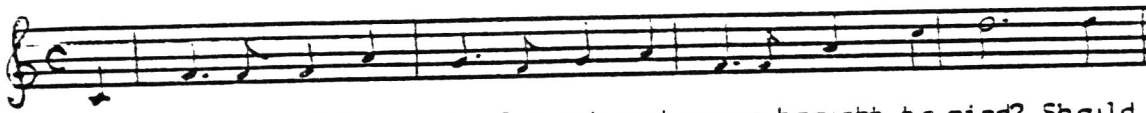
Si on place le chevalet en B, puis en C (l'autre chevalet restant fixe en A), on obtient, la deuxième fois, un son situé à la sixte majeure supérieure du premier (rapport de fréquence : 5/3).

. Partie gauche : 

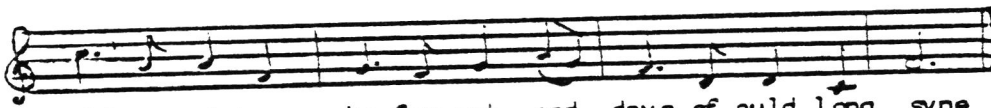
Si on place le chevalet en B', puis en C' (l'autre chevalet restant fixe en A') on obtient, la deuxième fois, un son situé à la sixte mineure supérieure du premier (rapport des fréquences : 8/5).

SUR CINQ NOTES

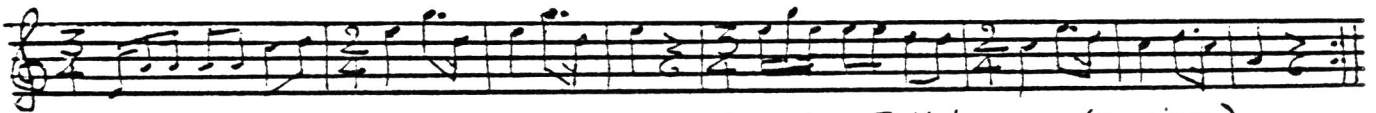
La gamme pentatonique (gamme "chinoise") est, et a été, très répandue dans le monde, du Pérou au Congo, en passant par les pays eskimos et l'Ecosse. Le fameux "Ce n'est qu'un au-revoir", air du folklore écossais, en est un exemple typique :



Should auld acquaintance be for-got and never brought to mind? Should



auld acquaintance be for-got and days of auld long syne

KAYPIPAS

(Air du Folklore péruvien)

T'EOU - YE - HOUANG

(Air instrumental chinois, recueilli au 18è s. par le Père Amiot. In "La Musique chinoise en France au XVIIIè siècle", par Ysia Tchen.

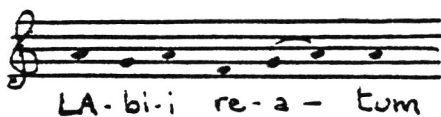
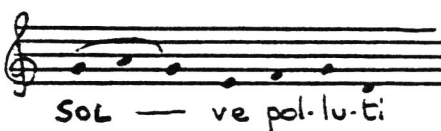
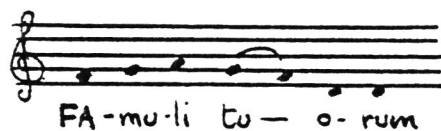
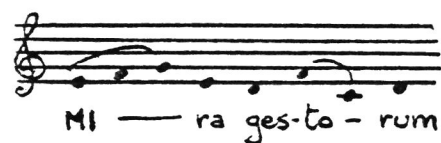
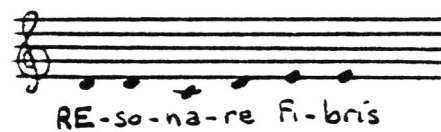
Publications orientalistes de France
1974).



LE NOM DES NOTES

C'est Guy d'Arezzo (v. 1000 - v. 1050) qui est à l'origine du nom que nous donnons aux notes de la gamme.

Ayant remarqué que, dans l'hymne "Ut queant laxis" (dédié à St Jean), les notes initiales de la mélodie de chaque vers (sauf le dernier) étaient dans l'ordre naturel de la gamme, il songea à donner comme nom, à chacune de ces notes, la syllabe sur laquelle elle se chantait. Et, pour la dernière, il forgea le mot formé des initiales des deux mots du dernier vers.



LA LEGENDE DES "LYUS"

Voici une légende chinoise : l'histoire se passe en ... 2697 avant notre ère.

"A cette époque, l'empereur Hoang-Ti venait de se rendre maître de la Chine, après avoir vaincu les armées de son ennemi Tché-yeou. Soucieux du bonheur de son peuple, il promulga de sages lois, et s'efforça de lui procurer tous les plaisirs possibles. En particulier il ordonna à son maître de musique, Ling Luen, de mettre sur pied un système de notes invariables auquel tout le monde, ensuite, pourrait se référer.

Ling-Luen se rendit au pays de Si-Joung, au Nord-Ouest du pays, et là il découvrit, au Nord d'une haute montagne, une magnifique forêt de bambous, dont les tiges, très droites, avaient toutes la même grosseur.

Ayant coupé l'une de ces tiges entre deux noeuds, Ling-Luen y souffla et le son qui sortit du bambou était exactement le même que le gazouillis du ruisseau qui serpentait là, et qui n'était autre que le Fleuve Jaune, près de sa source. Aussi Ling-Luen nomma-t-il ce tuyau "Cloche jaune".

A ce moment un couple de phénix vint se poser dans le voisinage, et se mit à chanter. Le mâle siffla six notes allant du grave à l'aigu, et dont la première - à surprise ! - était justement ^(celle de) la "Cloche Jaune" ; la femelle, elle, siffla six autres notes, qui venaient s'intercaler entre celles de son compagnon. Subjugué par ces sons merveilleux, Ling-Luen écouta de toutes ses oreilles et, quand les oiseaux fabuleux eurent cessé leur chant, s'empressa de couper onze nouvelles tiges de bambou, reproduisant chacune des notes qu'il venait d'entendre.

Il constata que le tuyau qui donnait la note la plus grave chantée par la femelle mesurait les deux-tiers de la longueur de la "Cloche Jaune". Et, comme savait que le nombre deux représente la Terre et le nombre trois le Ciel, cette harmonie le plongea dans le ravissement, ravissement qui s'accrut encore lorsqu'il s'aperçut que ceci se poursuivait jusqu'au bout de la série et que chacune des notes (alternativement mâle ou femelle) correspondait, du grave à l'aigu, à un tuyau dont la longueur était les deux-tiers de celle du précédent, éventuellement doublée (aucun des tuyaux n'était plus long que la "Cloche jaune", ni plus petit que la moitié de celle-ci).

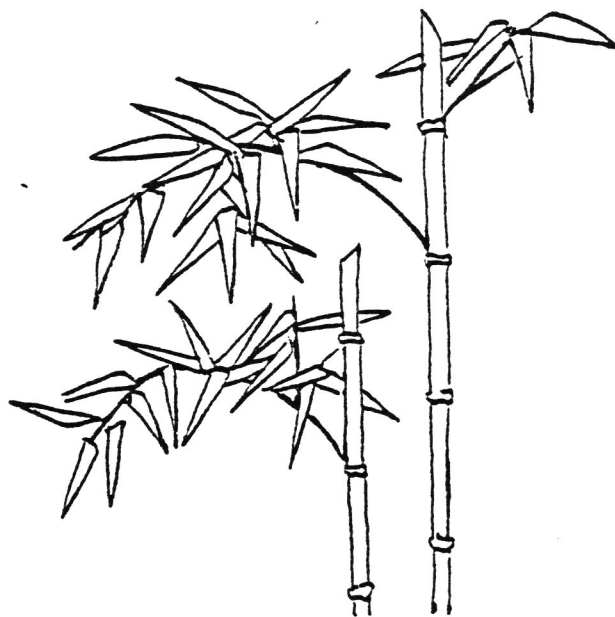
.../...

.../...

("lyus")
 Mais pour que ces tuyaux/puissent servir d'étalons, il fallait les mesurer de façon précise. Pour ce faire, Ling-Luen décida d'utiliser des graines de "chou" (sorte de gros millet). Il s'en fit apporter de toutes les espèces : des gris, des jaunes, des rouges, des noirs... Finalement, il choisit de se servir des noirs, car ils étaient plus durs, plus résistants, et surtout d'une taille plus régulière. Il plaça, contre la "Cloche jaune", des graines alignées suivant leur plus grande dimension ; il lui en fallut 81 pour obtenir la longueur du tuyau. Puis il fit de même avec les autres lyus ..."

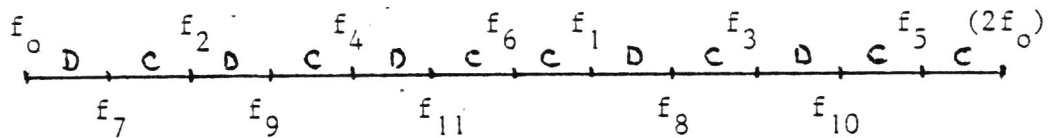
D'après vous, quelles étaient en graines) les longueurs des onze autres lyus ? (vous arrondirez, s'il y a lieu)

Réponse : 54 - 72 - 48 - 64. Puis, il faut arrondir : 43.57.76.51. 67.45.60.



$$n = 12$$

Par rapport à l'échelle de Pythagore initiale, nous obtenons ici 5 nouveaux sons, qui viennent "amputer" chaque intervalle A d'un intervalle C, de la façon suivante (avec $D = A - C$) :

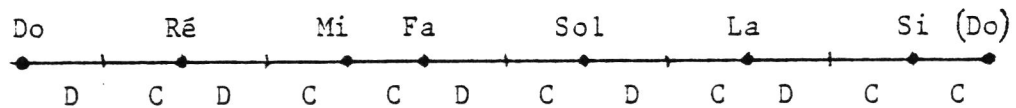


Une fois encore, on ne trouve que deux types d'intervalles successifs:

$$\frac{f_2}{f_7} = \frac{f_4}{f_9} = \frac{f_6}{f_{11}} = \frac{f_1}{f_6} = \frac{f_3}{f_8} = \frac{f_5}{f_{10}} = \frac{2f_0}{f_5} = \frac{2^8}{3^5} \quad (C)$$

$$\frac{f_7}{f_0} = \frac{f_9}{f_2} = \frac{f_{11}}{f_4} = \frac{f_5}{f_1} = \frac{f_{10}}{f_3} = \frac{3^7}{2^{11}} \quad (D)$$

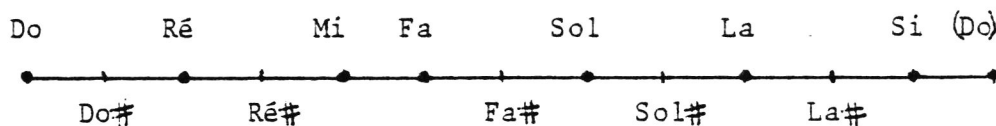
Enfin, lorsqu'on se ramène à la tonalité de Do majeur, ces intervalles se répartissent de la façon suivante :



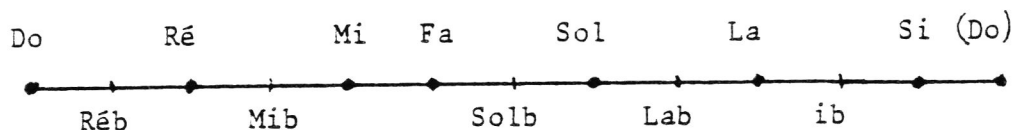
Quelques remarques :

1) Cette échelle n'a jamais été qu'une échelle théorique, mais elle a été découverte aussi bien par les Chinois (voir encadré) que par les pythagoriciens, qui avait appelé "comma" la différence entre 12 quintes et 7 octaves (comma pythagoricien, dont on reparlera sous peu).

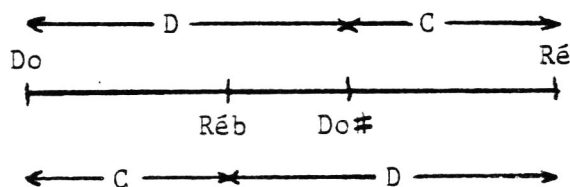
2) Les 5 dernières notes obtenues sont les notes diésées (théoriques):



3) Si, au lieu de procéder par quintes ascendantes, on avait effectué une progression de quintes descendantes on aurait (après s'être ramené à Do Majeur) obtenu 5 notes nouvelles, différentes des notes diésées : les notes bémolisées:



4) Entre deux sons consécutifs, on intercale donc deux sons, l'un diésé, l'autre bémolisé, selon la répartition suivante (nous avons pris Do-Ré comme exemple, mais, dans les quatre autres cas, le résultat est similaire):



L'intervalle D-C entre Réb et Do correspond au rapport de fréquences

$$\frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7$$

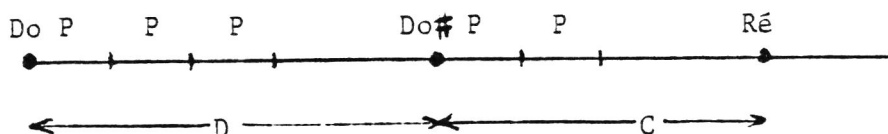
Cet intervalle est donc égal à la différence entre 12 quintes et 7 octaves : c'est le comma pythagoricien précédemment nommé .

5) Les notes diésées ou bémolisées sont appelées notes altérées . Mais, répétons-le, ces notes ne sont pas venues, historiquement, du prolongement du "cycle des quintes". Elles ont leur origine dans un déplacement de degré (= note de la tonalité), sous l'influence de ce que l'on appelle, en musique, "l'attraction" d'un autre degré. Par exemple, Marchetto de Padoue, en 1317, divise le ton pythagoricien en 5 "diésis" et n'attribue à l'intervalle Do-Do# qu'un seul diésis, soit un cinquième de ton. Nous sommes loin du cycle des quintes !.....

$n = 41$

La 12ème quinte, on l'a vu, donne (après réduction à l'octave) un son situé un comma (pythagoricien) au-dessus du son initial. Les 12 quintes suivantes vont donner alors un découpage qui sera translaté du premier d'un comma, et ainsi de suite

Nous obtiendrons finalement entre Do et Ré le partage suivant (en notant P le comma pythagoricien) :



Quels sont les deux intervalles résiduels ?

Nous souvenant (voir plus haut) que $P = D - C$, on a :

a) $D - 3 P = 3 C - 2 D$

b) $C - 2 P = 3 C - 2 D$

Ces deux intervalles sont donc égaux.

Dans cette nouvelle échelle, il n'y a encore une fois que deux types d'intervalles :

- . le comma pythagoricien, (P) (rapport de fréquences : $\frac{3^{12}}{2^{19}}$)
- . un intervalle Q (rapport de fréquences : $\frac{2^{46}}{3^{29}}$).

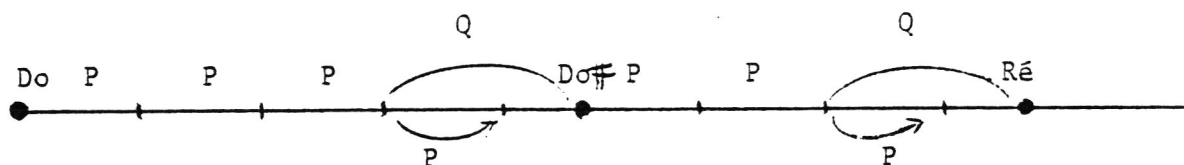
Cet intervalle Q est plus grand que P.

Remarquons que cette échelle ne semble pas avoir eu beaucoup de succès, même théorique (peut-être parce que l'approximation de l'octave n'est guère meilleure que celle que l'on obtient pour $n = 12$? ...).

$n = 53$

On refait une nouvelle série de 12 quintes ascendantes.

Cette fois, chacun des 12 intervalles Q va être amputé d'un intervalle P



Nous n'aurons, cette fois encore, que 2 types d'intervalles successifs:

- le comma pythagoricien P (rapport de fréquences : $\frac{3^{12}}{2^{19}}$)
- un intervalle $R = Q - P$ (rapport de fréquences : $\frac{2^{65}}{3^{41}}$)

Cette échelle, obtenue à partir de 52 quintes, était connue des Chinois dès le 5ème siècle av. J.C. Ils avaient d'ailleurs même poussé leurs investigations plus loin, mais le peu de chiffres significatifs dont ils disposaient leur a fourni, pour les plus grands nombres, des résultats erronés (ex.: 666 au lieu de 665).

La transposition

Un problème s'est posé très tôt aux musiciens, dès qu'il a été question de chanter une mélodie entendue, ou de la (re)jouer sur un instrument : il est souvent nécessaire, alors, d' "adapter" cette mélodie au registre de la voix ou de l'instrument, et de la "déplacer" vers l'aigu ou le grave. Il faut malgré tout ne pas dénaturer la matière musicale, et donc conserver leur valeur aux intervalles successifs (seul le son initial ayant varié). C'est ce que l'on appelle transposer. Donc :

Transposer une mélodie, c'est multiplier toutes les fréquences par un même nombre k ($k \in \mathbb{R}^{\times}$)

Nous appellerons transposition associée à l'intervalle I_k
l'application :

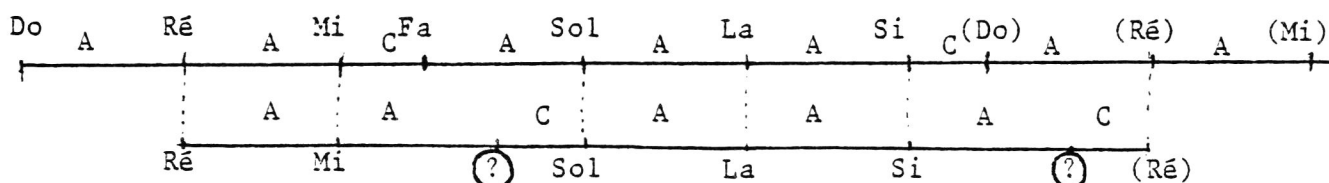
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\times} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\times} \\ f & \longmapsto & kf = f \oplus I_k \end{array}$$

Du point de vue de la transposition, une échelle musicale sera parfaite si l'on peut y transposer toute mélodie en partant d'un son quelconque.

Ceci sera réalisé si (et seulement si) l'échelle $\mathcal{E} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est invariante par toute transposition associée à un intervalle quelconque de l'échelle.

Prenons le cas de l'échelle pythagoricienne à 7 notes, échelle pratiquée par les musiciens occidentaux au Moyen-Age. Comment se comporte-t-elle vis-à-vis de la transposition?

Soit par exemple la transposition faisant passer de Do à Ré (et donc associée à $I_{9/8}$). Visualisons-la, grâce à la représentation linéaire :



Nous voyons qu'il nous faudra changer deux notes de l'échelle, si l'on veut obtenir le même effet musical. Plus précisément, il faudra hausser le Fa et le Do d'un intervalle A - C, soit D (Fa sera donc remplacé par Fa $\sharp$, et Do par Do $\sharp$). L'échelle pythagoricienne à 7 notes n'est donc pas adaptée aux transpositions, puisque celles-ci introduisent de nouvelles notes du cycle des quintes.

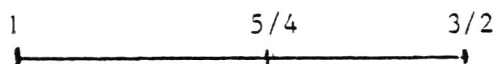
Ce phénomène aura d'ailleurs lieu pour toute échelle basée sur le cycle des quintes .

L'accord parfait majeur

La musique antique était essentiellement monodique; à partir du Moyen-Age, on commence à faire entendre simultanément plusieurs mélodies (cas du contrepoint, par exemple). Outre l'aspect "horizontal" (déroulement des sons dans le temps), l'oreille perçoit de plus en plus un aspect "vertical" (simultanéité des sons). Cette conscience de la verticalité de la musique s'est lentement développée, et a fini par engendrer une branche spéciale de la musique : l'harmonie.

Pour les musiciens, il y a accord dès que 3 sons, au moins, (correspondant à des notes différentes) sont entendus simultanément. Les accords les plus "naturels" font intervenir les premiers harmoniques de la série. Pour obtenir 3 notes différentes, il faut aller jusqu'à l'harmonique 5; ces notes correspondent aux harmoniques 1 (ou 2, ou 4), 3 et 5. Ramenées à l'intervalle $[f, 2f[$, les fréquences sont respectivement f , $\frac{3}{2}f$ et $\frac{5}{4}f$ ou, dans l'ordre croissant : f , $\frac{5}{4}f$, $\frac{3}{2}f$.

C'est l'ensemble $\{f, \frac{5}{4}f, \frac{3}{2}f\}$ que les musiciens ont appelé accord parfait majeur (APM) :



Remarques:

1) on trouve l'APM à l'état "natif" (si l'on peut dire) en considérant les harmoniques 4, 5 et 6.

2) Si f et $\frac{3}{2}f$ font partie de l'échelle pythagoricienne, il n'en est hélas pas de même de $\frac{5}{4}f$. C'est un problème qui a tourmenté les musiciens de la Renaissance, prenant conscience du fait, et souhaitant trouver une échelle qui tînt compte des exigences nouvelles, c'est-à-dire contenant l'APM.

On peut quand même remarquer que cette note intruse est voisine du Mi de Pythagore. En effet, $\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$. L'intervalle $I_{\frac{81}{80}}$ est le comma syntonique

L'échelle de Zarlin

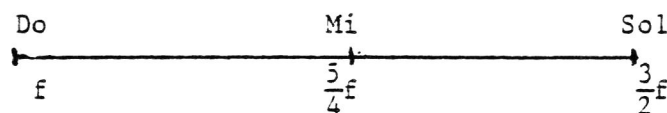
Pour incorporer l'APM à l'échelle musicale, divers musiciens, et en particulier le vénitien Gioseffo Zarlino (1558), imaginèrent de construire une nouvelle échelle, approximation de celle de Pythagore, qui serait basée sur cet accord.

Posons donc à notre tour le problème : est-il possible d'obtenir une approximation de l'échelle pythagoricienne, à partir d'une succession d'accords parfaits majeurs?

Remarquons que, s'il y a une solution, elle comportera au moins trois accords :

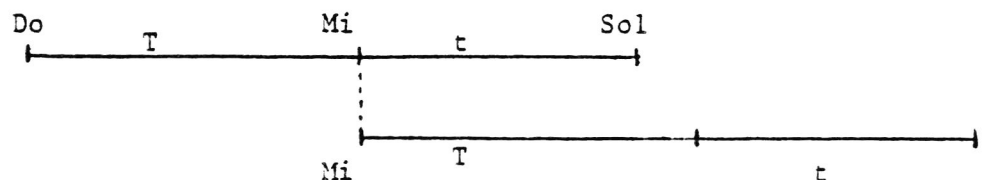
- 1 accord de base (3 notes)
- 1 accord obtenu à partir d'une des 3 notes précédentes (d'où 2 notes nouvelles)
- 1 accord qui fournira, de même, les deux dernières notes.

L'accord de base, rappelons-le, est le suivant



(Remarque : l'intervalle $I_{\frac{5}{4}}$ est la tierce majeure zarlinienne T, et la différence avec la quinte, soit $I_{\frac{6}{5}}$, est la tierce mineure zarlinienne t)

Si nous fondons maintenant un APM sur le Mi précédent, nous obtenons les notes de fréquences $\left(\frac{5}{4}\right)^2 f$ et $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} f$:



PLUS GRAVE ? PLUS AIGU ?

- A) Dans la tonalité pythagoricienne de Do Majeur, les fréquences des sons de $[f, 2f[$ sont:

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si (Do)
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$ (2f)

Dans la tonalité pythagoricienne de Si Majeur, cherchez quelle est la fréquence du son La dièse de l'intervalle $f, 2f$.

Cherchez de même quelle est, dans la tonalité de Fa Majeur, la fréquence du Si bémol de $[f, 2f[$.

Lequel de ces deux sons est le plus aigu? (fréquence la plus élevée)

- B) Dans la tonalité zarlinienne de Do Majeur, les fréquences des sons de $[f, 2f[$ sont:

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si (Do)
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{5}{4}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{5}{3}f$	$\frac{15}{8}f$ (2f)

Mêmes questions que ci-dessus pour le La dièse de Si Majeur et le Si bémol de Fa Majeur qui se trouvent dans $[f, 2f[$.

Lequel de ces deux sons est le plus aigu?

REPONSE:

A) La $\sharp$: $\frac{243}{128}f \cdot \frac{243}{128} \left(\cdot \frac{1}{2} \right) \simeq 1,802$

Si b : $\frac{4}{3}f \cdot \frac{4}{3} \simeq 1,778$

Le La dièse est plus aigu que le Si bémol.

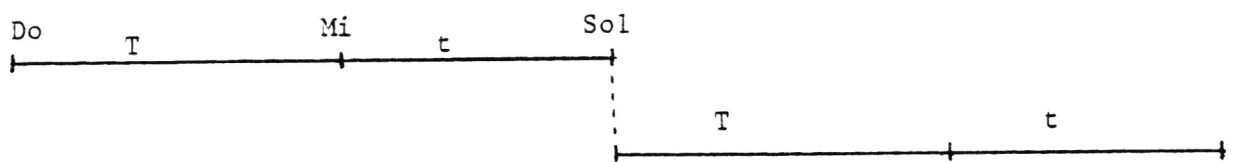
B) La $\sharp$: $\frac{15}{8}f \cdot \frac{15}{8} \left(\cdot \frac{1}{2} \right) \simeq 1,758$

Si b : $\frac{4}{3}f \cdot \frac{4}{3} \simeq 1,778$

Le Si bémol est plus aigu que le La dièse.

La note la plus haute est voisine du Si Pythagoricien ($\frac{243}{128} : \frac{15}{8} = \frac{81}{80}$; elle est donc située un comma syntonique en dessous).

Par contre, la note moyenne est située entre le Sol ($\frac{3}{2} f$) et le La ($\frac{27}{16}$) de l'échelle de Pythagore, et assez loin des deux (en fait, elle est voisine du La b obtenu par le cycle des quintes). L'APM fondé sur Mi est donc à rejeter. Aurons-nous plus de chance avec celui qui est fondé sur Sol? Nous obtiendrons alors les fréquences $(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4})f$ et $(\frac{3}{2})^2 f$ (ou $\frac{9}{8} f$, en se ramenant dans l'octave)

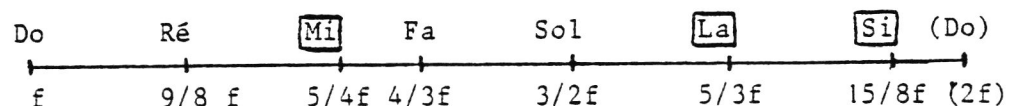


Nous retrouvons le Si (un peu bas) de l'essai précédent, et le Ré de Pythagore.

Voilà déjà 5 notes convenables; il ne nous manque plus qu'un Fa et un La. Or, il suffit de faire les essais pour constater (avec dépit), que partir de Si ou de Ré pour bâtir un APM introduit des notes "parasites" (comme lorsqu'on est parti de Mi). Faut-il donc laisser toute espérance? Que non pas, car les musiciens, décidés à tout pour réussir, ont astucieusement tourné la difficulté en prenant comme dernier APM un accord dont la note la plus haute est une des cinq notes précédentes (en fait, le Do initial, solution unique). On obtient en effet les fréquences $\frac{5}{6}f$ et $\frac{2}{3}f$ ou, en se ramenant dans l'octave:

$\frac{5}{3}f$ et $\frac{4}{3}f$. Cette dernière correspond au Fa de Pythagore; quant à l'autre, elle est située un comma syntonique plus bas que le La de Pythagore; $\frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$).

Le résultat final est donc :

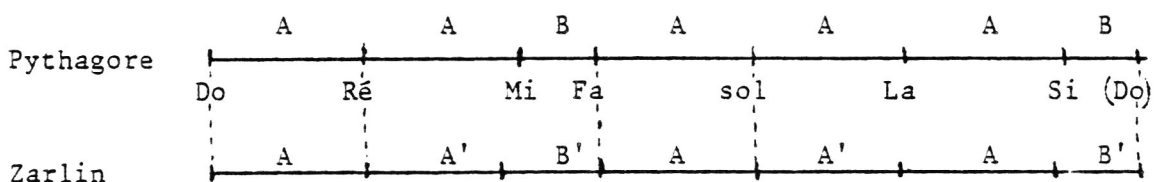


(les notes encadrées sont plus basses d'un comma syntonique que les notes correspondantes de l'échelle de Pythagore).

Les fréquences des différentes notes s'expriment ici par des fractions plus "simples" que dans le cas de Pythagore, mais il y a cette fois trois types d'intervalles successifs :

- a) $I \frac{9}{8}$: c'est le ton pythagoricien A, appelé ici ton majeur zarlinien
- b) $I \frac{10}{9}$: ton mineur zarlinien A'
- c) $I \frac{16}{15}$: demi-ton majeur zarlinien B' ("demi" n'est pas à prendre au sens mathématique!)

Mettons face à face Pythagore et Zarlin :



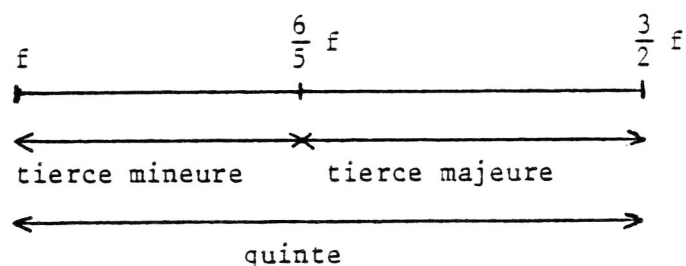
On voit immédiatement que, puisque le ton mineur zarlinien est plus petit que le ton pythagoricien d'un comma syntonique, le demi-ton majeur zarlinien sera plus grand que le limma pythagoricien d'un comma syntonique.

Sans trop entrer dans les détails, il est clair que la présence de ces 3 types d'écarts rendra le problème de la transposition, déjà impossible avec Pythagore, tout aussi insoluble.

L'accord parfait mineur

L'APM résulte, on l'a vu, de la "superposition" d'une tierce majeure et d'une tierce mineure.

Si maintenant on superpose ces deux intervalles dans l'ordre inverse, on obtient l'accord parfait mineur qui, lui, ne se trouve pas dans la série des harmoniques



(Exemple d'accord parfait mineur dans la gamme de Zarlin : Mi-Sol-Si).

Le tempérement égal

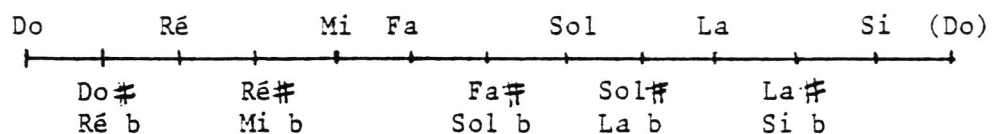
Le problème de la transposition continuait donc à tourmenter (de plus en plus) les musiciens des 16^{ème} et 17^{ème} siècles. Tombés de Charybde en Scylla puisque, ce qu'ils avaient gagné du côté de l'harmonie, ils l'avaient reperdu du côté de la simplicité de l'échelle. C'est alors que l'idée (géniale dans sa simplicité) se fit jour, d'un partage de l'octave en intervalles égaux (tempérament égal).

L'échelle obtenue (pour rester dans la continuité) constitue une approximation de l'échelle (de Pythagore ou de Zarlin).

Par les transpositions, on restera alors à l'intérieur de l'échelle (les intervalles étant égaux). Divers tempéraments égaux ont été imaginés aux 16^{ème} et 17^{ème} siècles, notamment par Guillaume Costeley (division en 19), Christian Huyghens, en 1691 (division en 31), et Andreas Werckmeister, la même année. C'est ce dernier tempérament qui a eu, de loin, le plus de succès. L'idée de base en est la suivante :

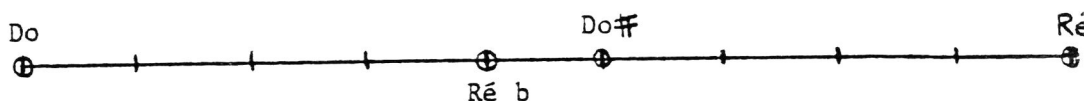
On part de l'échelle pythagoricienne à 12 notes, dans laquelle on a remarqué que les intervalles successifs (C et D) sont à peu près égaux et on décide de les rendre égaux; d'où une division de l'octave en 12 intervalles égaux I_k . On doit avoir $12 I_k = I_2$, d'où $k^{12} = 2$, et $k = 2^{1/12}$. I_k est le demi-ton tempéré, et I_k^2 est le ton tempéré; cette fois, le demi-ton vaut bien la moitié du ton !

D'autre part, cette identification des intervalles C et D conduit à identifier les notes diésées et bémolisées enharmoniques (Do# = Ré b; etc...) Finalement, l'échelle de Weckmeister aura l'allure suivante :



Aucune des notes (autres que Do) ne coïncide avec son homologue de l'échelle de Pythagore ou de celle de Zarlin, (le procédé d'obtention est purement théorique, et non basé sur le phénomène des harmoniques); mais malgré tout, cette échelle fournit une bonne approximation de l'une comme de l'autre.

Nous reviendrons plus loin sur cette échelle de Werckmeister qui est notre échelle actuelle (du moins théorique). Mais, auparavant, il nous faut dire un mot d'un autre tempérament égal, bien plus précis vis-à-vis de Pythagore, et qui, inventé par Mercator en 1675, a été repris par Holder en 1694. Ce tempérament est, lui, basé sur l'échelle pythagoricienne à 53 notes, et consiste à identifier les intervalles P et Q, et donc à partager l'octave en 53 intervalles égaux (degrés-commas). L'intervalle Do-Ré se décompose de la façon suivante :



Le ton pythagoricien correspond donc ici à 9 degrés, et le limma à 4 degrés.

^{est}
Cette échelle, en fait, l' "échelle des solfèges" qui, bien que non utilisée dans la pratique instrumentale, possède l'intérêt théorique d'être une très bonne approximation du cycle des quintes.

Pour terminer ce survol rapide des tempéraments égaux, signalons que l'Occident n'en a pas l'exclusivité, loin de là! En effet, la paternité du tempérament par 12 revient en fait au prince chinois Tchou Tsai You, qui le proposa en 1596 (un siècle avant Werckmeister!).

Le tempérament par 5 se retrouve en Indonésie (c'est le mode Slendro aussi bien qu'en Afrique Occidentale (Hte Volta, Mali)

Le tempérament par 7 est également répandu au Cambodge, en Thaïlande (où il constitue l'échelle officielle) en Afrique Occidentale (Guinée) et aux Iles Salomon (voir encadré).

Enfin, citons en Europe la "gamme par tons" chère à Debussy, obtenue en prenant un degré sur deux de l'échelle de Werckmeister.

(Nous avons également relevé, chez les Arabes, un tempérament "presque" égal: voir encadré).

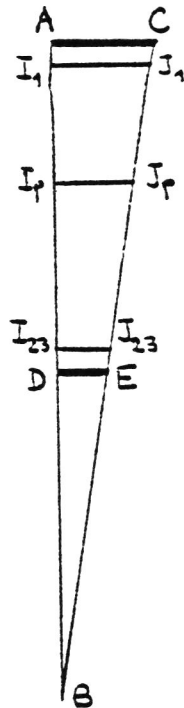
"Notre" échelle tempérée

Elle est, on l'a vu, basée sur un seul intervalle, le demi-ton tempéré (nous le noterons I), et l'octave (que nous noterons Ω) comporte 12 demi-tons :
 $\Omega = 12 \text{ I.}$

UNE ECHELLE ARABE

Le système tonal arabe est lié à la position des frettes sur le manche du "Oud" (luth), et ce depuis le 9^e siècle * . Vers cette époque, le thoricien Al-Farabi (+950) procède à une division théorique de l'octave en 25 intervalles (inégaux), certaines subdivisions s'obtenant à partir des quintes pythagoriciennes, d'autres non ; et, sur cette échelle, il choisit des modes de 7 sons.

Au 19^e siècle, le Libanais Michael Meshaga (1800-1889) fait paraître un traité: "Limmas et commas", dans lequel il préconise la division de l'octave en 24 parties. Pour ce faire, il indique un procédé qui permet de trouver la longueur des cases successives sur le manche du "Oud", et qui est le suivant :



Soit AB la longueur de la corde à vide. On construit le triangle ABC rectangle en A, tel que $AC = \frac{1}{36} AB$.

On place le milieu D de AB, puis on divise AD en 24 parties égales. Par chacun des points de subdivision I_p , on mène la parallèle à AC qui coupe BC en J_p .

Les distances $I_p J_p$ sont les longueurs successives des frettes à reporter sur le manche du "Oud" (en partant du haut). Pour l'octave supérieure, on réitère le procédé à partir de DE (E milieu de BC). Les modes sont alors construits en prenant certains éléments de cette échelle à 24 notes

(* Le "oud" actuel ne comporte plus de frettes (sauf parfois encore en Tunisie))

Cette façon tout empirique de procéder appelle, bien sûr, deux questions :

- 1) Arrive-t-on bien, au bout de 24 frettes, à "boucler" l'octave ?
- 2) les intervalles successifs ainsi déterminés sont-ils égaux ?

.../...

. Réponse à la première question :

La longueur x_p de la p^{e} case du manche est :

$$x_p = I_p J_p = AC \left(1 - \frac{p}{48} \right)$$

La position de la 24^e frette sera donc (partant du haut du manche) :

$$X = \sum_{p=1}^{24} x_p = AC \sum_{p=1}^{24} \left(1 - \frac{p}{48} \right)$$

$$\text{soit } X = AC \left(24 - \frac{1}{48} \sum_{p=1}^{24} p \right) = AC \left(24 - \frac{24 \cdot 25}{2 \cdot 48} \right);$$

$$\text{ou enfin : } X = \frac{71 \cdot AC}{4}$$

$$\text{Puisque } AC = \frac{AB}{36} \text{ on a : } X = \frac{AB}{2} \times \frac{71}{72}$$

Théoriquement, on devrait trouver $X = \frac{AB}{2}$. On n'a donc pas tout à fait bouclé l'octave, mais il s'en faut de peu $\left(\frac{1}{144} \right)$.

Le procédé est donc acceptable à moins de 1% près (Pour une corde à vide de 60 cm, l'écart serait de l'ordre de 4mm).

Réponse à la seconde question :

Il s'agit ici de calculer le rapport entre deux longueurs de corde vibrante consécutives.

$$\text{Position de la } p^{\text{e}} \text{ frette : } x_p = \sum_{n=1}^p x_n = AC \sum_{n=1}^p \left(1 - \frac{n}{48} \right)$$

$$x_p = AC \left(p - \frac{p(p+1)}{2 \cdot 48} \right), \text{ soit } x_p = \frac{AB}{36} \cdot \frac{p(95-p)}{96}$$

La longueur de corde qui vibre est donc :

$$l_p = AB - x_p = \frac{AB}{3456} (p^2 - 95p + 3456)$$

Le rapport cherché est donc :

$$\frac{l_p}{l_{p+1}} = \frac{p^2 - 95p + 3456}{p^2 - 93p + 3362} = 1 + 2 \frac{47-p}{p^2 - 93p + 3362}$$

[Remarque : Ceci ne vaut que pour p au moins égal à 1.

... /..

pour $p = 0$, le rapport sera $\frac{AB}{AB-x_1}$, soit $\frac{3456}{1-95+3456} \simeq 1,02796$]

On peut alors étudier, dans R , les variations de la fonction définie par :

$$y = 1 + 2 \frac{47 - x}{x^2 - 93x + 3362}$$

On s'aperçoit (après calcul) que, dans l'intervalle $[1, 23]$, cette fonction passe par un maximum pour une valeur x_0 comprise entre 13 et 14, qu'elle est croissante sur $[1, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, 23]$. On a, de plus :

$$y(1) \simeq 1,02813$$

$$y(23) \simeq 1,02830$$

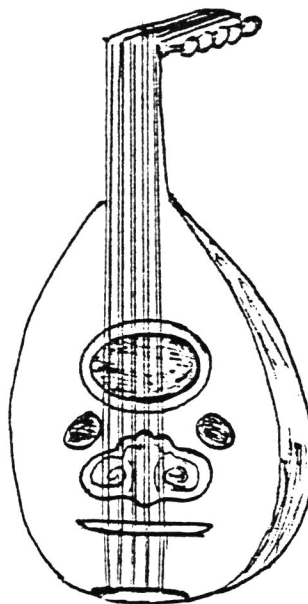
$$y(13) \simeq 1,02928$$

$$y(14) \simeq 1,02925$$

On peut donc ainsi constater que la valeur du rapport n'est pas constante, mais qu'elle varie peu (elle est comprise entre 1,0279 et 1,0293).

Conclusion : la réponse aux deux questions posées est :

NON, MAIS PRESQUE



LES ÉCHELLES DES INSTRUMENTS

* Les instruments à vent sont basés sur la série des harmoniques (voir l'exemple du galcubet).

Le cor peut donner jusqu'au 16^e harmonique (en rectifiant au besoin par le souffle, ceux qui s'écartent trop de l'échelle usuelle). La trompette ne va que jusqu'au 12^e, et le trombone que jusqu'au 8^e (exceptionnellement jusqu'au 10^e). De plus, les instruments ci-dessus ne donnent pas le son fondamental, au contraire de la flûte (harmoniques de 1 à 5).

* Les instruments à cordes de la famille du violon ont 4 cordes, accordées de quinte en quinte.* L'accord est donc celui de l'échelle pythagoricienne. Mais seuls les quatre sons donnés par les cordes à vide sont fixés; les autres sont laissés au choix (ou aux possibilités) de l'exécutant.

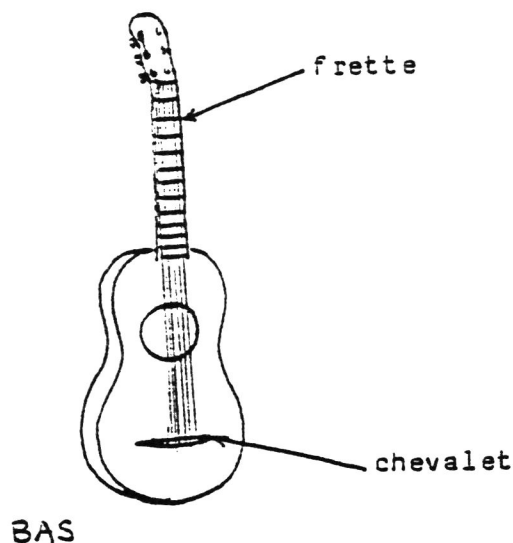
* La guitare, la mandoline sont des instruments à sons fixes (voir encadré sur la guitare). Ils sont basés sur l'échelle tempérée.

* Le piano, la harpe sont (théoriquement) accordés suivant l'échelle tempérée.

(* sauf toutefois la contrebasse, accordée de quarte en quarte).

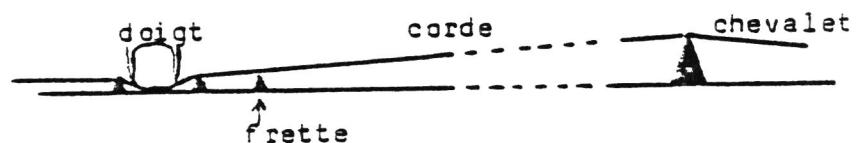
QUELQUES MESURES SUR LA GUITARE

HAUT



BAS

Le manche d'une guitare comporte de petites barres métalliques transversales en saillie (les sillets, ou frettes). Ces frettes sont destinées à modifier, de façon discontinue, la longueur de la corde qui vibre : si l'on pose le doigt sur une corde, dans une des cases délimitées par les frettes, la longueur de la corde qui pourra vibrer sera celle qui sera comprise entre le chevalet et la frette située juste "au-dessous" du doigt :



De haut en bas, appuyer le doigt sur les cases successives monte à chaque fois le son d'un "chouillat".

Sur une guitare, on a mesuré les distances successives d_n entre les frettes et le chevalet. Les résultats (en mm) sont consignés ci-dessous.

660. 623. 588. 555. 524. 495. 467. 441. 416. 393. 371. 350. 330.
311. 293. 277. 262. 247. 233. 220.

(Rappel : la fréquence du son émis par une corde vibrante est inversement proportionnelle à la longueur de cette corde.)

Calculez les valeurs successives de $\frac{d_n}{d_{n+1}}$. On constate que ce

rapport est sensiblement constant (de l'ordre de 1,06). On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que tous les chouillats sont égaux. De plus, on arrive au milieu de la corde au bout de 12 cases. Il y a donc 12 chouillats dans une octave (en fait les musiciens disent plutôt "demi-ton tempéré" que "chouillat").

.../...

.../...

Calculez les longueurs successives x_n des cases délimitées par les frettes. On constate que, au début tout au moins, les x_n décroissent à peu près linéairement. Cela s'explique par le fait que le rapport $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ (constant) est du type $1+\varepsilon$ (avec ε "petit" par rapport à 1).

On a $x_{n-1} = d_{n-1} - d_n$, et $d_n = \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^n}$ ($n=1,2,\dots,19$)

$$\text{D'où } x_{n-1} = \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^{n-1}} - \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{d_0 \varepsilon}{(1+\varepsilon)^n} = d_0 \varepsilon (1+\varepsilon)^{-n}$$

Pour n "pas trop grand", nous aurons donc $x_{n-1} \simeq d_0 \varepsilon (1-n\varepsilon)$.

Tout intervalle de l'échelle sera d'ailleurs de la forme $p.I$ ($p \in \mathbb{Z}$); les musiciens l'appellent "intervalle de p demi-tons" (ascendant si $p > 0$, descendant si $p < 0$).

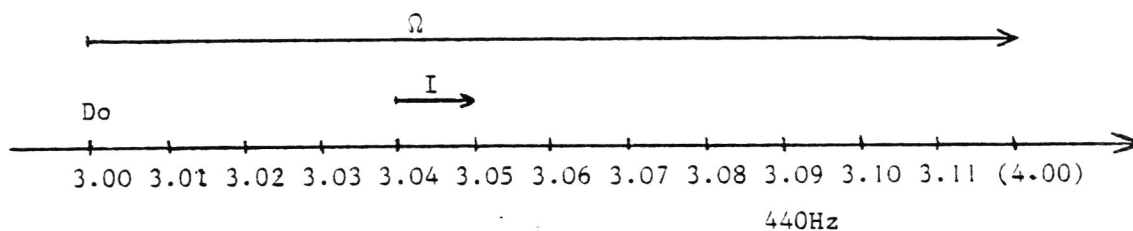
Les sons de l'échelle situés dans l'intervalle $[f, 2f[$ ont pour fréquences $f_n = 2^{\frac{n}{12}} f$, avec $n = \{0, 1, \dots, 11\}$. On peut se contenter de les noter par leur indice (f_n s'écrira n); alors, tout son du système pourra s'écrire $n + p . \Omega$ ($p \in \mathbb{Z}$), ou encore $n + 12 p.I$.

En fait, il s'agit là d'une notation numérique de $\mathbb{Z}$ dans la base 12, où p est le chiffre des douzaines (positif ou négatif), et n celui des unités; c'est de cette notation que se servent les compositeurs actuels qui utilisent l'informatique, en écrivant d'ailleurs les douze chiffres unités :

00, 01, 02, ... , 09, 10, 11

Avec cette écriture en base 12, le chiffre des douzaines sera le numéro d'octave; celui des unités pourra servir à qualifier les notes, puisque tous les sons d'une même note s'écriront avec le même chiffre des unités (Par exemple, Do correspondra à 00). Mais l'échelle n'est encore que relative, puisque les fréquences de tous les sons dépendent de l'une d'elles. Il suffit, pour que toutes les fréquences soient déterminées d'en fixer une. Par une convention de 1939, il a été décrété que la fréquence du son 3.09 serait de 440 herz.

Pour résumer ce qui précède, voyez ci-dessous la représentation d'une partie de l'échelle, la "troisième octave":



On donne également des "noms" aux sons de l'échelle : le nom d'un son sera celui de la note à laquelle il appartient, accompagné du numéro d'octave.

Exemples : 3.09 s'appellera La 3

4.03 s'appellera Mi bémol 4 (ou Ré dièse 4, puisque l'on a identifié les deux notes).

Les tonalités majeures

Comme nous l'avons vu plus haut, la tonalité de Do majeur est (toujours dans la troisième octave) :

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| Do | Ré | Mi | Fa | Sol | La | Si | (Do) |
| 3.00 | 3.02 | 3.04 | 3.05 | 3.07 | 3.09 | 3.11 | (4.00) |

La tonalité de Do majeur est donc constituée des 7 notes :

00, 02, 04, 05, 07, 09, 11

Elle apparaît comme extraite d'une échelle plus vaste, ce qui n'est pas un cas unique (voir encadrés Are Are et Musique chinoise). Une tonalité majeure sera définie, de façon générale, par la succession (ascendante) des intervalles successifs : 2 I, 2 I, I, 2 I, 2 I, 2 I, I

Mais une tonalité n'est pas seulement un ensemble de notes, puisque la construction de Zarlin, comme celle de Pythagore, leur fait jouer des rôles différents. Une tonalité est en fait un septuplet de notes (ce qui justifie le nom de degrés donné à ces notes). Mais, par abus de langage, nous appellerons également "tonalité" l'ensemble des notes.

Les transpositions:

Dans le cas présent, la transposition associée à l'intervalle n.I sera l' "addition" (algébrique) de n demi-tons (nous la noterons T_n).

Comme le système tempéré a été inventé dans ce but, c'est bien la moindre des choses que les transpositions n'en fassent pas sortir... Cependant, comme une tonalité ne comprend que 7 notes sur les 12, il n'est pas sûr que les transpositions la laissent (globalement) invariante. Voyons sur un exemple : la transposition de 4 demi-tons de Do majeur :

| | | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Note de Do majeur | 00 | 02 | 04 | 05 | 07 | 09 | 11 |
| Note transposée | 04 | 06 | 08 | 09 | 11 | 01 | 03 |

4 des notes obtenues n'appartiennent pas à Do majeur :

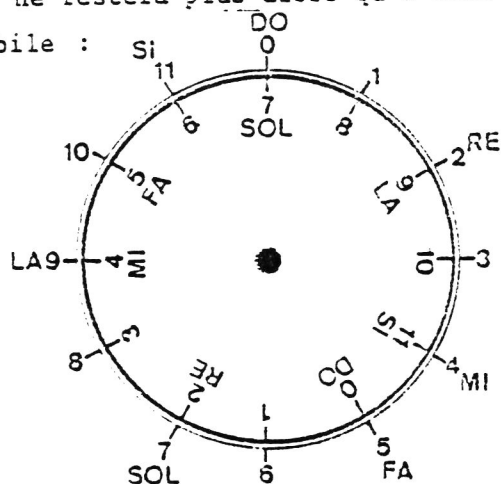
06, 08, 01 et 03

Quelle que soit la transposition envisagée, on obtient d'ailleurs des notes "étrangères". Le tableau ci-dessous rassemble les résultats, suivant le nombre (positif) de demi-tons de la transposition:

| Nombre de demi-tons | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| Nombre de notes nouvelles | 5 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 1 | 4 | 3 | 2 | 5 |

Remarque : La recherche qui conduit à ce tableau peut être facilitée par l'utilisation d'un "disque transpositeur", construit de la façon suivante :

Réalisons un "cadran d'horloge" en carton (cercle partagé en 12 arcs égaux), numéroté de 00 à 11 (le 12 de l'horloge est remplacé par 00). Chaque "chiffre" désigne, bien sûr, une note de l'échelle. Au centre de ce cadran fixons-en un autre, semblable mais de diamètre légèrement inférieur (grâce à une attache parisienne). Transposer de n demi-tons reviendra à faire correspondre au 00 du cadran fixe le n du cadran mobile. Ainsi, pour transposer de 7 demi-tons, nous placerons le 07 du cadran mobile en face du 00 du cadran fixe. Il ne restera plus alors qu'à lire la correspondance cadran fixe $\rightarrow$ cadran mobile :

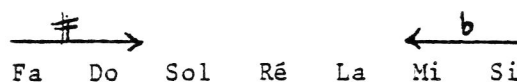


(On peut même, sur chacun des cadrans, signaler les notes de Do majeur, pour faire apparaître plus clairement les notes communes.)

Tonalités majeures voisines: Le tableau précédent fait apparaître deux transposées de Do majeur qui n'en diffèrent que par une seule note; ce sont celles qui ont pour toniques 05 et 07. Ces deux tonalités (Fa majeur et Sol majeur) sont appelées tonalités majeures voisines de Do majeur (Plus généralement, les tonalités voisines d'une tonalité majeure donnée seront ses transposées par T_5 et T_7 , c'est-à-dire une quinte en-dessous ou au-dessus).

Dans Fa majeur (par rapport à Do majeur) le Si a été baissé d'un demi-ton; c'est pourquoi on l'appelle Si b de préférence à La $\sharp$. De même, parmi les deux tonalités majeures de Fa majeur, l'une (qui aura justement pour tonique le Si b précédent) n'en différera que par le Mi plus bas d'un demi-ton, qu'on appellera donc Mi b ... Ainsi, de quinte descendante en quinte descendante, vont "apparaître" successivement les notes bémolisées Si b, Mi b, La b, etc..... : c'est ce que l'on appelle l'ordre des bémols, les tonalités correspondantes étant les "tonalités à bémols". On arrêtera la progression au moment où l'on obtiendrait des notes doublement bémolisées, c'est-à-dire au bout de 7 quintes.

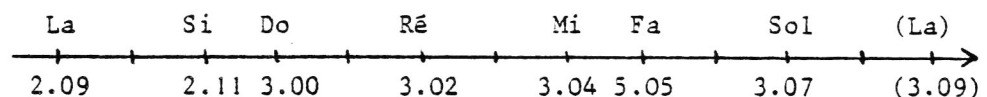
Sol majeur diffère de Do majeur par le Fa, qui est plus haut d'un demi-ton (et donc appelé Fa $\sharp$). De quinte ascendante en quinte ascendante, on obtiendra successivement les notes diésées Fa $\sharp$, Do $\sharp$, Sol $\sharp$, (ordre des dièses), les tonalités correspondantes étant les tonalités à dièses. On arrêtera également la progression au bout de 7 quintes. On peut remarquer que l'ordre d' "apparition" des dièses est inverse de celui des bémols, ce que l'on peut représenter par le schéma suivant :



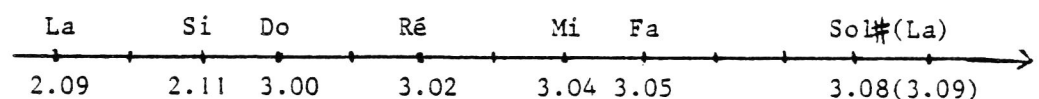
Remarque : Les tonalités à 7 dièses (Do majeur) et à 7 bémols (Do b majeur) n'admettront, bien d'ûr, qu'une seule tonalité majeure voisine.

Les tonalités mineures

Nous avons vu, lors de l'étude du cycle des quintes, qu'il existait un autre mode que le mode majeur, le mode mineur "ancien", qui est obtenu par un simple changement de la note de base du mode majeur (dans le cas de Do majeur, on part de La au lieu de Do). Dans l'échelle tempérée, la tonalité de La mineur ancien est donc le septuplet (09, 11, 00, 02, 04, 05, 07) :



Mais, par suite de l' "attraction de la tonique", le Sol s'est trouvé haussé d'un demi-ton ($\rightarrow$ Sol $\sharp$) :



La tonalité de La mineur est donc finalement constituée du septuplet (09, 11, 00, 02, 04, 05, 08) et, plus généralement, une tonalité mineure est définie par la succession (ascendante) d'intervalles : 2 I, I, 2 I, 2 I, I, 3 I, I. La mineur est appelée tonalité mineure relative de Do majeur (de par son origine), et, plus généralement, toute tonalité majeure a comme tonalité relative mineure celle qui a pour tonique son sixième degré.

Inversement, Do majeur est la tonalité majeure relative de La mineur.

Une tonalité majeure et sa relative mineure ne diffèrent que par une note, comme c'est le cas pour deux tonalités majeures "voisines".

On étend alors la notion de "voisinage" à l'ensemble des tonalités majeures et mineures, en décidant d'appeler tonalités voisines d'une tonalité majeure :

- sa relative mineure
- ses tonalités majeures voisines
- les relatives mineures de celles-ci

De même, on convient d'appeler tonalités voisines d'une tonalité mineure :

- sa relative majeure
- les tonalités majeures voisines de celles-ci
- leurs relatives mineures

(il s'agit bien d'une extension de la notion, puisque certaines des tonalités "voisines" diffèrent de la tonalité de départ de plus d'une note. En fait, si l'on avait conservé les tonalités mineures "anciennes", on n'aurait bien qu'une seule note étrangère dans tous les cas).

A quoi sert donc, en musique, cette notion de "voisinage" ?

Dans la musique "classique", une oeuvre musicale se réfère à une tonalité (majeure ou mineure), c'est-à-dire qu'en principe on n'utilisera, dans le cours de l'oeuvre, que les notes de ladite tonalité. En fait, un des aspects de l'art musical consiste justement à transgresser cette règle, mais de façon subtile : il s'agira de passer d'une tonalité à une autre (c'est ce que l'on appelle moduler), sans choquer l'auditeur. Le moyen d'y parvenir, c'est de n'introduire que le minimum de notes nouvelles, donc de ne moduler que dans une tonalité voisine.

Quelques procédés de contrepoint :

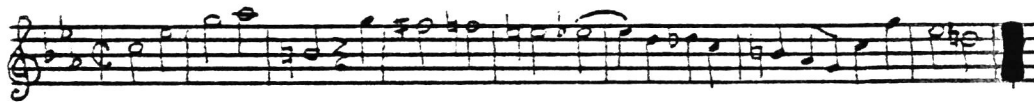
Le contrepoint a pour objet l'étude de la musique dans son aspect "horizontal", c'est-à-dire mélodique. C'est lui qui régit la musique polyphonique, où des lignes mélodiques se superposent (les lois de l'harmonie venant ensuite régenter cette superposition). La forme la plus élaborée de la polyphonie est, sans conteste, la fugue, et nous allons ici en exposer quelques procédés.

Une fugue est bâtie sur un sujet, thème mélodique, c'est-à-dire succession de sons de durées diverses (ces durées resteront en principe invariables sauf dans l'augmentation, où elles seront doublées, et la diminution, où elles seront divisées par deux).

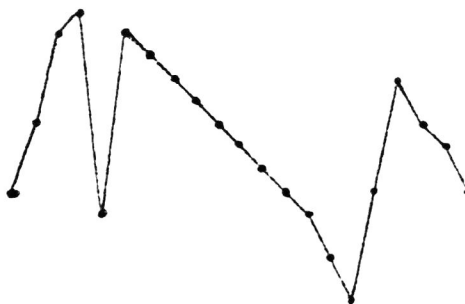
Une mélodie peut être représentée graphiquement par une ligne brisée dans un système d'axes où on porte :

- en abscisses, l'ordre d'apparition des sons
- en ordonnées, les nombres (en base 12) représentant ces sons.

Prenons l'exemple du thème de l'offrande musicale (1747) de J.S. Bach, (dû en fait à Frédéric II de Prusse):



08
07
06
05
04
03
02
01
4.00
11
10
09
08
3.07

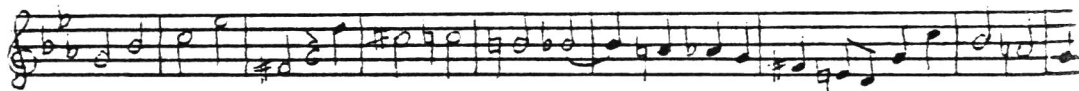


Le sujet d'une oeuvre contrapuntique est exposé plusieurs fois mais, pour éviter la monotonie, le compositeur peut le transformer de plusieurs façons :

La manière la plus simple de transformer un thème musical est, bien sûr, de le transposer (imitation directe). Mais, comme on l'a vu plus haut, la transposition fait moduler, donc introduit des notes étrangères à la tonalité; pour en

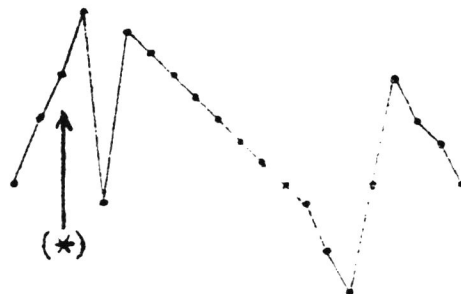
introduire le moins possible, les imitations se font, en général, à la quinte (inférieure ou supérieure): on module ainsi dans une tonalité voisine.

C'est ainsi que nous trouvons, à la mesure 10 de l'Offrande :



dont le diagramme mélodique est :

03
02
04
4.00
11
10
09
08
07
06
05
04
03
3.02



Par rapport au sujet initial, il y a simplement eu translation verticale, à l'exception d'une note [ceci étant dû à des contraintes tonales (mutation

Une deuxième façon d' "imiter" un thème est le renversement. Le renversement est en fait une "symétrie" définie sur l'échelle tempérée par :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & k - n \quad (k : \text{entier relatif donné}) \end{array}$$

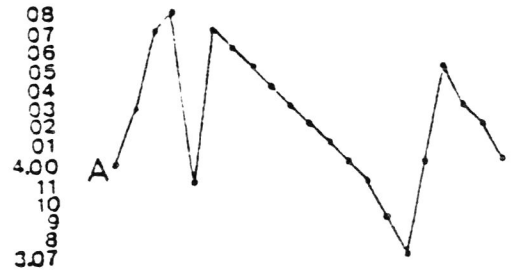
Cette transformation inverse le sens des intervalles successifs du thème, tout en conservant leur "valeur absolue".

Prenons, par exemple, $k = 6.02$ (toujours en notation duodécimale), et transformons le thème de l'Offrande :

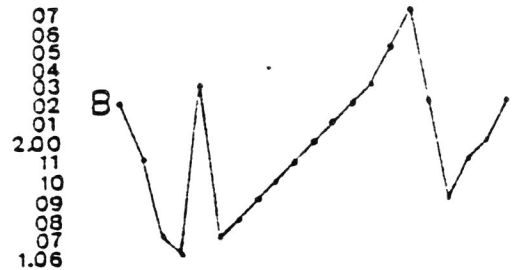
$$\begin{array}{lcl} 4.00 & \longmapsto & 2.02 \\ 4.03 & \longmapsto & 1.11 \\ 4.07 & \longmapsto & 1.07 \\ 4.08 & \longmapsto & 1.06 \\ 3.11 & \longmapsto & 2.03 \end{array}$$

etc.....

D'où le diagramme mélodique :



(A: Thème
B: Renversement)



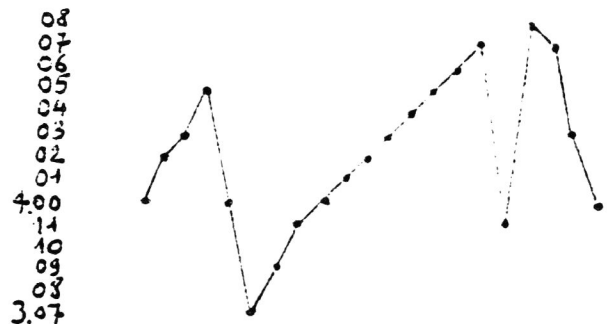
Remarques :

a) le diagramme est symétrique de celui du thème par rapport à une horizontale.

b) Cette forme est utilisée par Bach dans l'Offrande (dans les n° 6 (Canon à 2) et 9 (Canon perpétuel), mais à partir d'une forme du thème légèrement modifiée.

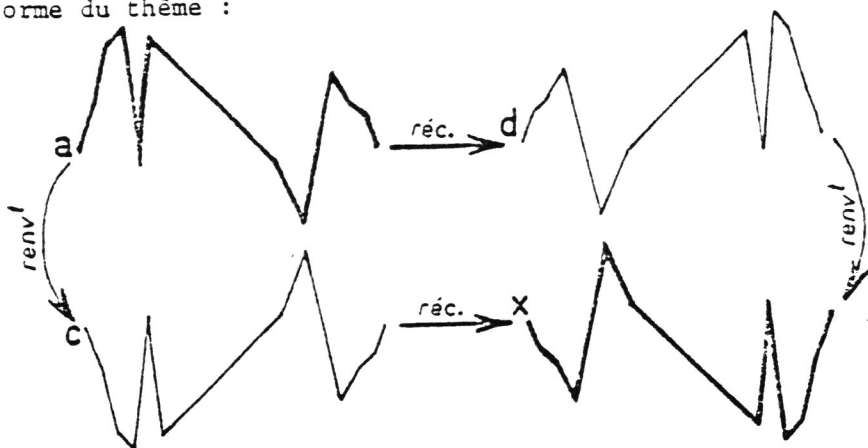
Autre procédé d'imitation : la récurrence. Il s'agit ici, tout simplement, de jouer le thème en commençant par la dernière note, et en remontant. D'où le nom allemand : Krebscanon (canon "à l'écrevisse").

La récurrence du thème de l'Offrande aura pour diagramme :



Le diagramme, bien sûr, est symétrique de celui du thème par rapport à la verticale. Le Krebscanon est utilisé par Bach dans l'Offrande au n° 3a (Canon à 2) à partir d'une légère variante du thème.

On peut également composer un renversement et une récurrence, ce qui donnera une quatrième forme du thème :



Remarques :

- a) l'ordre dans lequel on utilise les deux procédés n'influe pas sur le résultat obtenu.
- b) le diagramme est symétrique de celui du thème par rapport à un point.

Si maintenant nous notons ϵ la transformation identique, A le renversement, B la récurrence et $C = A \circ B = B \circ A$ la composition des deux, nous obtenons, dans l'ensemble $\{\epsilon, A, B, C\}$, le tableau suivant pour la loi de composition :

| $\circ$ | ϵ | A | B | C |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| ϵ | ϵ | A | B | C |
| A | A | ϵ | C | B |
| B | B | C | ϵ | A |
| C | C | B | A | ϵ |

Cette table est celle du groupe de Klein, ce qui n'est guère étonnant étant donné l'isomorphisme que nous avons remarqué avec le groupe des symétries planes par rapport à deux axes orthogonaux et leur intersection.

Parmi les 3 procédés que nous venons de voir pour transformer un thème mélodique, deux sont "modulants" (font changer de tonalité) : la transposition et le renversement. Si l'on s'impose maintenant de rester à l'intérieur d'une même tonalité, on ne pourra plus, ni transposer, ni renverser exactement; il faudra adapter, c'est-à-dire avoir recours à une approximation.

Restant à l'intérieur de la tonalité, on n'aura plus que 7 notes à considérer, et on pourra repérer les sons grâce à une numération en base 7; tout ce qui a été dit précédemment restera alors valable:

La transposition consistera à effectuer une "addition", et le renversement une symétrie.

C'est ce que l'on appelle imitation sans modulation, par opposition à l'imitation stricte que nous avons vue auparavant.

Le dodécaphonisme

jusqu'à la fin du 19ème siècle, la musique occidentale

avait été soumise aux lois de la tonalité. Certains musiciens commencèrent alors à trouver que ce carcan leur pesait, et cherchèrent à constituer un nouveau langage musical, qui s'en affranchirait. Parmi les différents essais qui se firent jour (polytonalité, chromatisme, atonalité, ...) l'un des plus importants, historiquement, est dû à Arnold Schoenberg (1874-1951); il est maintenant connu sous le nom de "dodécaphonisme".

Le système de Schoenberg (et de ses disciples de "l'école de Vienne") est fondé sur la non hiérarchisation des 12 notes de la gamme. Schoenberg, en effet, ne s'intéresse qu'aux notes, et non pas aux sons, et il impose à ces notes des règles d'utilisation draconiennes; en particulier :

- aucune des douze notes ne devra être privilégiée, et donc la fréquence d'apparition sera la même pour toutes.
- une note ne pourra réapparaître avant que les onze autres aient été entendues (règle du total chromatique)

Pour arriver à ceci, Schoenberg base son système de composition sur la série, arrangement des douze notes (Cet arrangement est chronologique). C'est sur la série que se fondera l'unité d'une oeuvre musicale.

L'ensemble des notes de l'échelle tempérée pourra être identifié à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ additif; une transposition de notes sera une translation dans cet ensemble, et un renversement sera une symétrie.

Car Schoenberg ne rejette pas tout ce qui l'a précédé, et en particulier il conserve les règles du contrepoint que nous avons évoquées plus haut.

TRANSCRIPTION CHIFFRÉE D'UNE OEUVRE SÉRIELLE

A titre d'exemple, voici un passage des "Variations pour orchestre" op.31, d'Arnold Schoenberg (1927-28 : le début du Thème (mesures 34 à 38) - Chaque note est représentée par son "numéro" dans $Z/_{12} Z$, et la structure chronologique est respectée (notes simultanées écrites sur une même verticale) :

Molto moderato (♩ = 88)

| | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
|-----|------------|----|---------|---------|----|
| Hb | 2 | | 3 | 5 | |
| CA | 11 | | | 9 | |
| Cl. | 1 | | 4 | 6 | |
| Bs | 0 | | | 10 | |
| Cb | 7 | | 8 | | |
| Vcl | H 10 4 6 3 | 5 | 9 2 1 7 | 8 11 11 | 0 |
| Vla | | 2 | | 3 | 5 |
| Vcl | | 11 | | 8 | 9 |
| Hp | | 7 | | 4 | 6 |
| | | 1 | | 10 | 10 |
| | | 0 | | | |

D'AUTRES CORPS SONORES

Mes enfants ont un petit métallophone, dont les lames sont des morceaux coupés dans une même barre plate, de section constante. Curieux de nature, j'ai mesuré les longueurs des barres, et j'ai obtenu les résultats suivants (du grave à l'aigu)

| Note tempérée | DO | RÉ | MI | FA | SOL | LA | SI | DO | RÉ | MI | FA | SOL | LA | SI | DO |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|
| Longueur en mm | 124 | 117 | 110 | 107 | 101 | 95 | 90 | 88 | 83 | 78 | 76 | 72 | 68 | 64 | 62 |

Est-il possible de tirer de ce tableau une relation liant la fréquence du son émis et la longueur de la barre ?

Réponse : $f = \frac{k}{l^2}$. On s'en aperçoit en comparant les longueurs des deux DO extrêmes. Les autres longueurs permettent de confirmer cette hypothèse.

LA REINE DES CLOCHES

Au Kremlin, à Moscou, se trouve le clocher d'Ivan le Grand (terminé en 1600, sous le règne de Boris Goudounov). Ce clocher contient 31 cloches, ou plutôt 30 seulement, car la plus grosse d'entre elles, la Reine des Cloches (Tsar kolokol) construite en 1733-35, est tombée en 1737, et a, depuis, été installée au pied de la tour, sur un socle de granit. "Elle pèse 12.000 pouds, mesure 6m14 de haut, commente le guide, et 6m60 de diamètre". Un visiteur curieux lui demande alors : "Quel son donnait donc Tsar kolokol ?" Et le guide, pas embarrassé du tout, de répondre : "C'est bien simple : la fréquence de vibration d'une cloche est inversement proportionnelle à la racine cubique de sa masse. D'autre part, le gros bourdon de Notre-Dame, à Paris, qui donne le Ré 2, pèse 16 tonnes. Alors, faites le calcul." Et vous, saurez-vous satisfaire la curiosité du touriste ? (1 poud $\approx$ 16,381 kg).

.../...

Réponse : 12000 pouds = 197 tonnes

D'autre part, On a $f = \frac{k}{\sqrt[3]{M}}$ d'où $f_2 = f_1 \sqrt[3]{\frac{M_1}{M_2}}$

La fréquence de Ré 2 est d'environ 147 Herz, donc celle du son émis par Tsar Kolokol est : $147 \times \sqrt[3]{\frac{16}{197}}$. C'est-à-dire environ 61,4 herz.

Ceci est compris entre la fréquence du Si 0 (61,7 Herz) et celle du Do 1 (65,5 hz) actuels.



La série remplacera, d'une certaine façon, le thème tonal, et Schoenberg lui impose de n'apparaître (à une transposition près) que sous l'un des quatre avatars suivants :

- original
- renversement
- récurrence
- récurrence du renversement

La série pourra donc, dans l'oeuvre musicale, se présenter sous 48 formes différentes (puisque'il y a 12 transpositions).

A titre d'exemple, prenons la série sur laquelle sont basées les "Variations pour orchestre" (op. 31) de Schoenberg; il s'agit là de la première oeuvre sérielle de grandes dimensions du maître viennois, et on a pu l'appeler "la neuvième symphonie de notre temps".

(N.B.: Pour étudier une oeuvre sérielle du point de vue de l'utilisation de la série, on pourra avoir intérêt à "chiffrer" la partition, comme indiqué dans l'encadré).

Voici la série, telle qu'elle est donnée au début du thème (mesures 34-38) par les violoncelles :



Cette série se transcrit : 10.04.06.03.05.09.01.01.07.08.11.00 = S

(N.B.: l'avant dernière note (Si) est répétée; mais, la répétition n'était, aux yeux de S, qu'une façon particulière de jouer la note).

Une chose peut sembler ardue, au premier abord, dans la composition sérielle : la superposition de plusieurs lignes "mélodiques"; en effet, si deux "voix" chantent simultanément deux formes différentes de la série, il y a peu de chances pour que la règle du "total chromatique" soit respectée. Par exemple, prenons la série S, et son transposé au demi-ton supérieur $S + 1$: 11.05.07.04.06.10.02.02.08.09.03.04 = S + 1 etc...; lorsque les 6 premières notes de chaque forme ont été émises, on a déjà entendu deux fois les notes 04.05.06 et 10, alors que 00.01.02 et 08 ne sont pas apparues. Schoenberg a résolu ce problème de façon élégante en n'utilisant presque uniquement, dans ses oeuvres, que des séries possédant la propriété suivante:

Les six premières notes de la série et les six premières de l'un de ses renversements donnent le "total chromatique"

(N.B. : il n'y a guère plus d'une série sur trois qui jouit de cette propriété).

C'est ce qui se passe pour la série des Variations :

Considérons dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, le renversement (= symétrie) défini par

$n \rightarrow 5-n$. Nous aurons alors : $10 \rightarrow 07$
 $04 \rightarrow 01$, etc.....

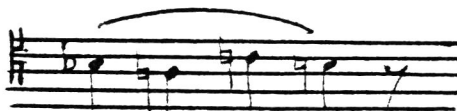
Le renversement correspondant de la série S sera donc :

$\Sigma = 07.01.11.02.00.08.03.04.10.09.06.05$

On constate que les six premières notes de Σ forment, avec les six premières notes de S, le total chromatique. En conséquence, si l'on énonce simultanément les formes S et Σ dans deux voix différentes, par demi-séries de six notes, on obtiendra successivement deux fois le total chromatique.

Nous remarquons que, si S est associé à Σ , à un transposé de S sera associé le transposé correspondant de Σ , à un renversement de S le renversement correspondant à Σ , etc....

Comme on peut en juger par ce qui précède, la musique de Schoenberg est donc aussi fortement structurée (sinon plus) que la musique de l'époque dite "classique", et en particulier que celle de Bach. Schoenberg reconnaissait d'ailleurs volontiers cette filiation, au point que, dans les Variations, apparaît (dans la 2ème variation, et surtout au Finale) le thème suivant :



qui, transcrit dans la notation littérale des musiciens germaniques, donne :
B.A.C.H...

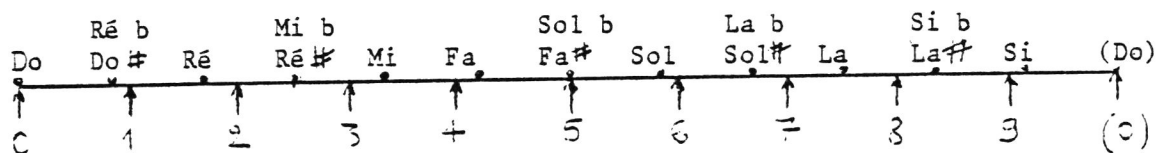
Rêvons un peu

Comme nous venons de le voir, notre échelle tempérée résulte d'une division de l'octave en douze intervalles égaux : les demi-tons. En se fondant sur le même principe, Luc Etienne a récemment imaginé (1972) de diviser l'octave en dix intervalles égaux : les demi-quints, créant ainsi un tempérament décimal.

Dans l'intervalle $[f, 2f[$, les sons de l'échelle seront donc :

$$f_i = 2^{\frac{i}{10}} f \quad (i=0,1,\dots,9).$$

La seule note intermédiaire qui coïncidera avec une note de l'échelle usuelle est f_5 (= Fa dièse, puisque $5/10 = 6/12$). La répartition est la suivante :



Dans l'échelle décimale stéphanienne, les sons pourront être notés grâce à une écriture décimale, le chiffre des dizaines étant le numéro d'octave, et celui des unités représentant la note).

On a vu que les tonalités (majeures et mineures) classiques sont extraites de l'échelle tempérée duodécimale ; pourra-t-on, par analogie, imaginer des tonalités extraites de l'échelle décimale ?

Le problème est donc de chercher un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ (qui sera ensuite ordonné suivant les numéros croissants) ; les tonalités étant définies à une transposition près, nous pouvons supposer que celle que nous cherchons à construire contiendra la note 0 (tonique).

Pour commencer, posons quelques jalons (arbitraires, il est vrai, mais en rapport avec les tonalités habituelles) :

- (1) - Les intervalles entre sons consécutifs ne devront pas excéder 2 demi-quints (1 quint)
- (2) - les intervalles consécutifs ne seront pas tous égaux (il y aura donc des quints et des demi-quints).

Conséquences :

D'après (1), il devra y avoir au moins 5 notes dans la tonalité.

D'après (2) il devra y en avoir au moins 6.

Étudions le cas d'une tonalité à 6 notes :

On peut baser la recherche sur le modèle Pythagoricien (cycle de quintes) ou sur le modèle Zarlinien (accord parfait).

a) Modèle pythagoricien

Un seul ennui, il n'y a pas de quintes dans l'échelle décimale. L'intervalle qui s'en approche le plus (voir schéma précédent) est constitué de 3 quints ($f_6/f_0 = 2^{6/10} \simeq 1,516$). Convenons de l'appeler "quinte stéphanienne", et n'en parlons plus (elle est un peu plus grande que la quinte pythagoricienne, mais guère). Une succession (ascendante) de quintes, à partir de la note 0 nous donnera successivement les notes 6,2,8,4,0... (restes de la division de $6n$ par 10) : on n'obtient finalement que les 5 notes 0,2,4,6,8. C'est la "gamme par quints" qui ne répond pas au critère (2). Cherchons donc autre chose ...

b) Type zarlinien

L'APM ne se retrouve pas non plus dans l'échelle décimale ; mais nous avons déjà la quinte stéphanienne (3 quints) ; il ne reste alors plus qu'à approximer la tierce zarlinienne (Do-Mi) ; la note la plus voisine du Mi zarlinien est f_3 ($f_3/f_0 = 2^{3/12} \simeq 1,231$) ; cet intervalle (d'un quint et demi) est intermédiaire entre la tierce majeure zarlinienne (rapport de fréquences : $5/4 = 1,25$) et la tierce mineure zarlinienne (rapport de fréquence $6/5 = 1,2$), mais plus proche malgré tout de la tierce majeure. Appelons-le tierce stéphanienne (la quinte vaudra alors exactement deux tierces).

Convenons d'appeler APS (accord parfait stéphanien) l'accord constitué à partir de deux tierces stéphanienes successives (Ex. : $\{0,3,6\}$) ; c'est lui constituera la meilleure approximation décimale de l'APM zarlinien.

A l'instar de Zarlin, il nous reste maintenant à engendrer une tonalité à 6 notes à partir de l'APS. L'accord fondé sur 0 nous fournit les notes 3 et 6 ; il nous manque alors 3 notes. Du fait de la condition (1), il faudra en placer une entre 0 et 3, une entre 3 et 6 (et donc une autre entre 6 et 0) ; cette dernière sera forcément la note 8, toujours en vertu de (1). Il ne nous reste donc plus qu'à trouver 2 notes :

- . 1 ou 2 d'une part
- . 4 ou 5 d'autre part.

D'où 4 possibilités de tonalités, formées avec les ensembles suivants : $a = \{0, 1, 3, 4, 6, 8\}$

$$b = \{0, 2, 3, 5, 6, 8\}$$

$$c = \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$d = \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$$

Pour départager les candidats, nous allons devoir recourir à une "question subsidiaire" : Examinons donc leur comportement vis-à-vis de la relativité (des tonalités).

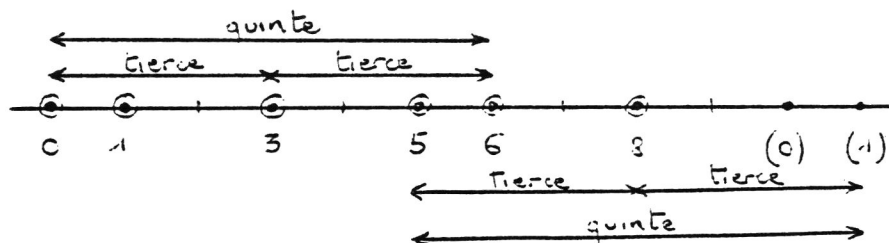
Dans l'échelle classique, nous avons vu que la tonalité relative mineure (ancienne) d'une tonalité majeure donnée n'en différait que par l'ordre des notes.

D'autre part, l'accord servant de base aux tonalités étant, ici - on l'a dit - intermédiaire entre les accords majeur et mineur classiques, on peut envisager d'identifier les deux modes pour n'en plus constituer qu'un seul. Une tonalité relative sera (si elle existe) alors la tonalité (différente !) qui sera constituée des mêmes notes que la tonalité donnée.

Une petite recherche permettrait de constater que seul d coïncide avec l'un de ses transposés : $d + 5$

C'est donc ce type que nous choisirons comme base de la tonalité.

$$T_0 = (0, 1, 3, 5, 6, 8)$$

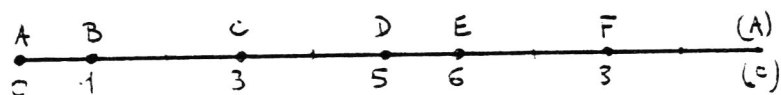


On voit que T_0 est formée à partir de deux APS, décalés d'une demi-octave.

De plus, on a $T_5 = (5, 6, 8, 0, 1, 3)$; cette tonalité est donc formée des mêmes accords que T_0 . On ne pourra décider si une mélodie est écrite en T_0 ou en T_5 , puisque les notes sont les mêmes, ainsi que les fonctions tonales. T_5 n'est en fait qu'un doublet de T_0 .

Le système que nous envisageons nous fournit donc finalement 5 tonalités, à deux toniques (distantes d'une demi-octave). Ce système est simple, puisqu'il ne comporte qu'un seul mode (tenant à la fois du majeur et du mineur) et présente des analogies certaines avec le système tonal classique.

Ne disposant pas d'"Hymne à St Jean", nous nous contenterons de désigner les notes de T_0 par les 6 premières lettres de l'alphabet :



Etudions maintenant le problème du voisinage, dans l'ensemble des 5 tonalités T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 . On constate que, par rapport à T_0 , deux tonalités (T_1 et T_4) n'ont que deux notes communes avec elles, alors que les deux autres (T_2 et T_3) en ont quatre (ce seront les tonalités voisines de T_0). Pour moduler de T_0 en T_2 , il suffira de hausser B et E d'un demi-quint (les "dièser" en somme) ; et, si l'on veut moduler de T_0 en T_3 , on baissera A et D d'un demi-quint (on les "bémolisera").

De même, pour passer de T_2 à T_4 , on dièsera C et F, et pour passer de T_3 à T_1 , on bémolisera C et F. Les dièses (resp. les bémols) n'apparaissent plus ici l'un après l'autre, mais deux par deux ; de plus, on pourra se contenter de deux tonalités "à dièses", et de deux tonalités "à bémols". D'autre part, les modulations, dans ce système, seront plus "sauvages", puisqu'il faudra changer deux notes pour passer dans une tonalité voisine.

Quid du contrepoint ?

Nous avons vu que, dans le contrepoint classique, le renversement d'un thème introduisait des notes étrangères à la tonalité (imitation modulante).

Or, ici, on peut s'apercevoir que T_0 coïncide avec l'un de ses renversements (celui qui fait passer de n à $6-n$) : ce renversement ne sera donc pas modulant, et on n'aura pas à "adapter".

Pour terminer cette petite étude, on pourra vérifier que les accords de 3 sons fondés sur les différentes notes de T_0 (accords obtenus en "sautant" une note de la tonalité sur deux) sont tous des APS, au contraire du système classique, où ils relèvent de plusieurs types.

En conclusion, ce système tonal décimal est comparable au système classique du point de vue de la structure des tonalités : deux types d'intervalles (quint et demi-quint) de même ordre de grandeur que

dans les tonalités usuelles ; existence d'un accord fondamental de 3 sons. Il est par contre plus simple du point de vue : des tonalités relatives (chaque tonalité est sa propre relative), de l'harmonie (un seul type d'accord), de l'écriture contrapuntique (on pourra renverser exactement sans moduler).

... Mais le problème qui reste posé est le suivant :
"Pourrait-on écrire de la (bonne) musique dans ce système ?"
Si le coeur vous en dit...

Il ne s'agissait, somme toute, que d'un jeu, destiné à montrer que notre système musical, qui semble si "naturel", ne l'est peut-être pas tout à fait autant qu'il le paraît, et que l'on pourrait très bien en envisager d'autres. Si notre échelle avait été le mode slendro javanais (tempérament par 5), il aurait suffi qu'un musicien ait l'idée "géniale" de penser à diviser chaque intervalle en deux (comme on a composé de la musique en quarts de ton), et l'on aurait obtenu l'échelle décimale. Et pourquoi, un jour, un 'Are'Are n'aurait-il pas la fantaisie de dédoubler les intervalles de son échelle usuelle ? il inventerait ainsi le tempérament égal par 14.

- CANDÉ (R.de) : Histoire universelle de la musique (Seuil, 1978)
COLLOQUE C.N.R.S. : La résonance dans les échelles musicales (CNRS, 1966)
DIAGRAM GROUP : Instruments de musique du monde entier (Albin Michel, 1978)
HONEGGER (M.) : Dictionnaire de la musique (Bordas, 1979)
LAVIGNAC (A) : La musique et les musiciens (Delagrave, 1896)
LEIBOWITZ (R.) : -Introduction à la musique à douze sons (L'Arche, 1949)
-Schoenberg (Seuil, 1969)
PARZYSZ (B.) : -Musique "classique" et mathématique "moderne"
(APMEP, 1971)
-La musique adoucit les maths
(IREM Paris-Sud, Univ. Paris 7, 1976)
STUCKENSCHMITT (H.H.) : La musique du XX^e siècle (Hachette, 1969)
TOUMA (H.H.) : la musique arabe (Buchet/Chastel, 1977)

- DOURSON (P.) et PARZYSZ(B.) : Musiques, nombres et structures
(L'Education musicale, n°s 232-33-35-39, 1976-77)
- ETIENNE (L.) : Le tempérament décimal
(Bull. du GAM, n°61bis, Univ. Paris 7, 1972)
- PARZYSZ(B.) : L'approximation en musique
(Bull. APMEP n° 296, 1976)

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. - PARIS VII

- 1 - Bibliographie pour l'enseignement des mathématiques (Ed. 78)
- 2 - Mathématiques et autonomie/gestion (7/78)
- 3 - Nombre à l'école élémentaire (6/79)
- 4 - Groupe français-mathématiques (Ed. 79)
- 5 - Quelques réflexions sur la démonstration (11/79)
- 6 - Moirés (12/79)
- 7 - Pavages et coloriage (1/80)
- 8 - Autour du cube (2/80)

Autres publications :

- Bulletin-Afrique n° 21 - Maths et dessin (6/79)
- " " n° 22 - Spécial vectoriel (10/79)
- " " n° 23 - Reasonner (12/79)

- Informatique APMEP n° 3 - Spécial microprocesseurs (11/79)

Directeur-Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage : 500 exemplaires -

IREM-PARIS VII - T 56 - 2 Place Jussieu - PARIS 5ème.
