

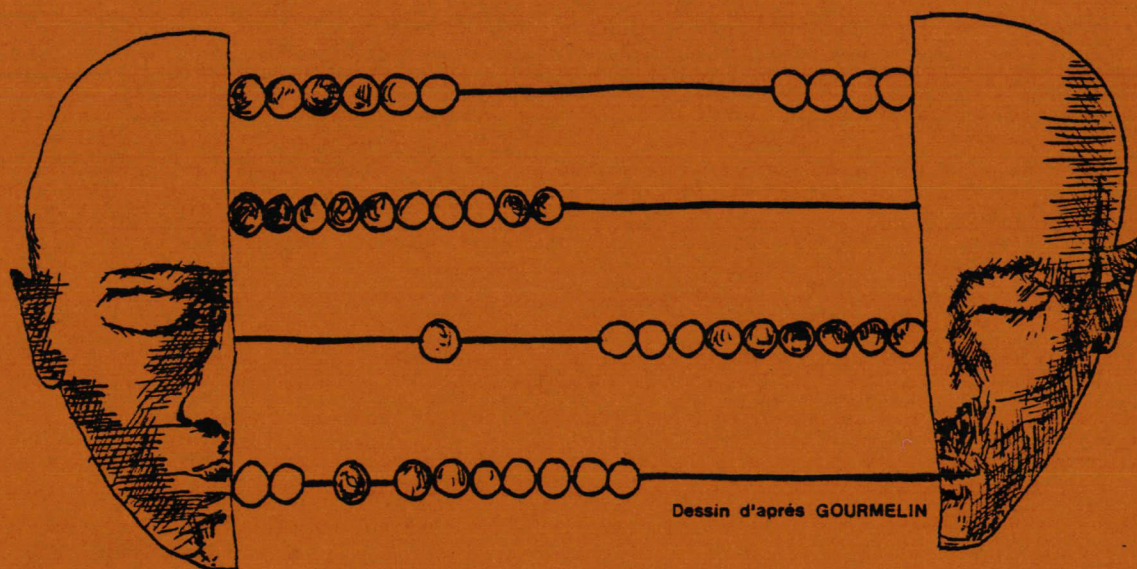
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII

10

Mars 1980

CALCUL



MENTAL

par André DELEDICQ

NIVEAU	6 ^{ème} à 3 ^{ème}
PUBLIC	Professeurs
SUJET	Algorithmes de calcul
OBJECTIF	Décortiquer ; intérioriser

S O M M A I R E

page 2	Multiplication et calcul mental
page 2	T1- Propriétés particulières d'un facteur
page 9	T2- Technique du "Raccrochage"
page 12	T3- Double décomposition - Technique "polynomiale"
page 15	T4- Facteurs à chiffres égaux.
page 17	T5- Technique du "rectangle"
page 23	T6- Technique de la "moyenne"
page 24	Exemple récapitulatif
page 27	Les carrés des nombres
page 34	Extraction de racines et calcul mental
page 35	Le chiffre des unités
page 37	Le chiffre des dizaines
page 40	Racines cubiques
page 44	Le jour de la semaine
page 46	"Le compte est bon"

Les textes sur la technique du rectangle et les extractions de racines ont été mis au point avec la collaboration d'ANDRE MYX.

Le calcul mental attire comme une science magique. Il est un arc à plusieurs cordes sensibles :

- côté pratique, ses avantages sont évidents dans la vie de tous les jours
- côté spectacle, qui n'a pas rêvé de jouer un jour au calculateur prodige devant une assistance admirative ?
- côté gymnastique de l'esprit, il développe à la fois la mémoire et les qualités d'organisation : on y prend l'habitude d'enchaîner logiquement la succession et l'imbrication des problèmes.
- côté didactique, il permet à la fois une illustration et une motivation de l'étude des propriétés des nombres et de leurs opérations élémentaires : autant on trouve artificiel et bête d'énoncer par écrit l'associativité de l'addition, autant on est heureux de constater que la succession d'opérations, mentalement bien différentes, $76 + (24 + 17)$ et $(76 + 24) + 17$ donnent le même résultat.

Ce document développe les principes élémentaires permettant de faire vibrer les quatre cordes précédentes. Il doit énormément au livre de Marius Portal : "Le calcul Mental" qui fut pour moi, le catalyseur qui manquait aux éléments de réflexion que j'avais pu, jusqu'alors, réunir.

Citons-le ici :

Il est indiscutable que le maniement des chiffres, qui peut s'effectuer avec le minimum d'accessoires et en tous lieux, jusques et y compris au lit, conserve à l'esprit, malgré l'âge, toutes ses qualités de logique, d'attention, de précision et de clarté, et à la mémoire son état de fraîcheur.

L'auteur voudrait communiquer sa foi à beaucoup de gens car, après plus de trois quarts de siècle, dont les deux tiers au moins ont été consacrés au maniement des chiffres, il croit pouvoir attester que cette gymnastique est salutaire pour le corps et l'esprit, qu'elle conserve la santé, et dans son cas la rétablit, fait oublier les misères quotidiennes, conditionne la bonne humeur, et même le sommeil.

MULTIPLICATION
ET
CALCUL MENTAL

Nous avons sélectionné six techniques de base :

- T1 : Technique liée aux propriétés particulières d'un des facteurs du produit
- T2 : Technique du "raccrochage"
- T3 : Technique de la "double décomposition en somme"
- T4 : Techniques liées à des relations entre les chiffres des deux facteurs
- T5 : Technique du "rectangle"
- T6 : Technique de "la moyenne"

Pour un produit donné, plusieurs de ces techniques peuvent être utilisées ; c'est au calculateur de choisir celle qui lui paraît le mieux adapté à la fois aux facteurs de ce produit et à ces propres habitudes de calcul.

Nous avons limité l'exposé aux facteurs comportant 2 chiffres ; le lecteur généralisera facilement les diverses méthodes à des facteurs plus importants.

Nous avons essayé de décortiquer au maximum les opérations mentales auxquelles devrait s'astreindre le calculateur moyen et débutant. Souvent, la difficulté est, en effet, de ne pas oublier un résultat intermédiaire en cours de calcul ; nous pensons avoir un peu aplani cette difficulté en suggérant quelques principes simples d'organisation "in testa".

(T1) - PROPRIETES PARTICULIERES D'UN FACTEUR

- [5] - Pour multiplier, de tête, un nombre par 5, on préfère, le multiplier par 10 et diviser le résultat par 2. Ou bien, on divise le nombre par 2 puis on multiplie le résultat par 10 :

$$\begin{array}{lcl} \text{ex :} & 48 \times 5 & \boxed{=} 240 \\ & 57 \times 5 & \boxed{=} 285 \end{array}$$

Procédé : $\boxed{a} \xrightarrow{:\ 2} \boxed{a/2} \xrightarrow{\times 10} \boxed{5a}$

Justification $5 = \frac{1}{2} \times 10$

$$a \cdot 5 = (a \times \frac{1}{2}) \times 10$$

(associativité de la multiplication)

"Tout est affaire de décor" : tous les nombres sont particuliers. Cependant quelques uns le sont plus que d'autres ! Nous avons sélectionné ceux qui nous ont paru tels entre 0 et 100 et nous avons alors indiqué, après un exemple de produit "mental", le procédé utilisé et sa justification.

2,3,4,5,6,7,8,9

La connaissance de la table de multiplication jusqu'à 9 permet d'effectuer mentalement tout produit par un nombre de un chiffre.

Il faut simplement avoir un peu de mémoire immédiate et être conscient d'une petite particularité :

Contrairement à la technique "écrite" de multiplication, le produit s'effectue mentalement de gauche à droite, et les "retenues" sont ajoutées après les produits partiels.

Ceci étant dit, nous donnons quelques exemples en essayant de décrire le film des opérations mentales avec le plus de détails possibles. Souvent, en effet, nous avons remarqué que la difficulté était surtout due à un grand désordre de l'esprit.

Nos descriptions s'appuient sur la constatation qu'il existe trois "lieux" d'activité mentale. (pour des opérations simples, tout au moins) :

- . Une "mémoire" des données, contenant d'abord les facteurs de l'opération puis certains d'entre eux seulement.
- . Un "lieu" de calcul, où nous réalisons les opérations élémentaires du type "7 fois 8, 56"
- . Une "mémoire d'accumulation" des résultats, contenant, au plus, deux nombres "destinés" à être additionner.

Voici le "film" de la multiplication (de tête) de 7 par 84 :

- 4 -

mémoire des données	lieu de calcul	mémoire des résultats
7 8 4		
	7 fois 8 : 56	
	560 →	560
7 4		
	7 fois 4 : 28 →	560 28
	560 et 28 : 588	
		588

On effectue une première opération,

On "positionne" le résultat,

On se rappelle les données non utilisées

On effectue une deuxième opération

On additionne les deux résultats,

et c'est fini

Voici le film abrégé de "4 fois 632" :

4 6 3 2	4 fois 600	→	2400
4 3 2	4 fois 30	→	120 2400
	2400 et 120	→	2520
4 2	4 fois 2	→	8 2520
			2528

Remarque : L'esprit habitué joue rapidement avec le décalage des unités, dizaines, centaines...

Ainsi, on ne pense pas "4 fois 30, 120"
mais plutôt "4 fois 3,12, 120"

De même, lorsqu'on a trouvé "4 fois 2, 8 on ne met pas le 8 en mémoire en vue de l'additionner à 2520, mais on pense tout de suite "deux mille cinq cent vingt - huit" (le tiret "-" exprime l'instant d'une légère réflexion).

Dans chaque exemple de ce chapitre nous donnerons le film abrégé de l'activité mentale.

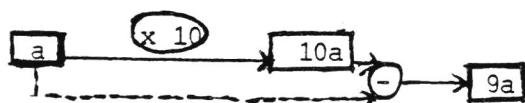
Et maintenant continuons.

9 Le produit par 9 utilise une astuce particulière :

ex : 9×57

	570	$\longrightarrow$	570
57	570 moins 57	$\longrightarrow$	513

procédé



Justification $9 = 10 - 1$ $9 \times a = (10 \times a) - a$
(distributivité de la multiplication sur la soustraction)

- 10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90.

justification : $40 = 4 \times 10 \Rightarrow 40 \times a = (4 \times a) \times 10$
(commutativité et associativité de la multiplication)

50

justification : $50 = 100/2 = \frac{1}{2} \times 100 \Rightarrow 50 \times a = (a \times \frac{1}{2}) \times 100$

11

justification : $11 = 10 + 1 \Rightarrow 11 \times a = 10a + a$
(distributivité de la multiplication sur l'addition)

18

justification : $18 = 2 \times 9 \Rightarrow 18 \times a = (2 \times 9) \times a = 2 \times (9 \times a) = 2 \times (10a - a)$
(Associativité de la multiplication)

Il y a ici succession de 2 procédés (x9) et (x2)

22

ex : 22×63

2 | 11 | 63
63

630	$\longrightarrow$	630
630 et 63	$\longrightarrow$	693

2

2 fois 693

2 | 693

Ici "l'esprit" se "remet à zéro" et envisage une autre opération

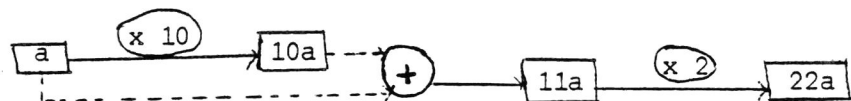
$2 \mid 700 - 7$	2 fois 700	$\rightarrow$	1400	
$2 \mid 7(-)$	2 fois 7	$\rightarrow$	14 ⁽⁻⁾	Au "7" est attachée l'idée de soustraction future
	1400 moins 14	$\rightarrow$	1386	

Ici viennent d'apparaître deux intéressants phénomènes :

- La "remise à zéro" des mémoires en ne conservant qu'une opération restant à effectuer comme s'il s'agissait d'une donnée initiale.
- La mémorisation "dynamique" d'un nombre : en fait, il semblerait bien que chaque nombre soit pensé avec un signe opératoire. Ce signe indique le type d'opération qu'il y aura lieu d'effectuer sur lui avec le nombre situé dans la mémoire résultat.

Revenons à nos 22 moutons :

procédé :



justification : $22 = 2 \times 11 = 2 (10 + 1) \Rightarrow 22a = (10a + a) \times 2$
 (distributivité de la multiplication sur l'addition
 puis commutativité de la multiplication)

A partir de maintenant, nous noterons :

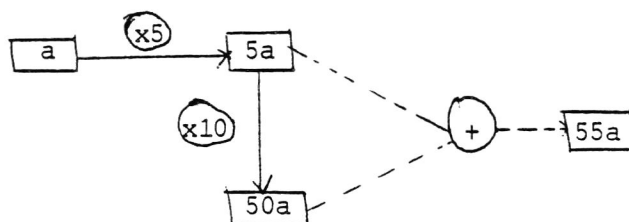
- (α) : l'associativité de la multiplication
- (γ) : la commutativité de la multiplication
- (δ^+) : la distributivité de la multiplication sur l'addition
- (δ^-) : la distributivité de la multiplication sur la soustraction

33

justification : $33 = (100 - 1) / 3 \Rightarrow 33 \times a = (100a - a) / 3$
 ($\gamma \delta^-$)

55

procédé :



- 7 -

ex : 55×47

$$5 \mid 47^{(d+)}$$

(d+) mémorise l'opération
"addition avec décalage"

47 divisé par 2

$$23,5 \longrightarrow 235$$

$$(d+) \quad 2350$$

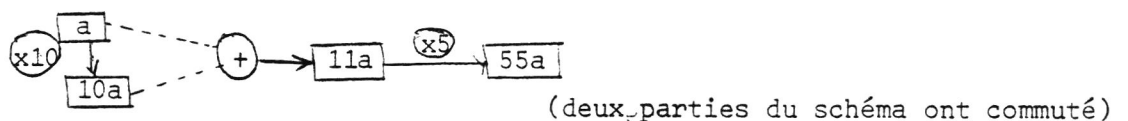
$$2350 \text{ et } 235 \longrightarrow 2585$$

justification $55 = 50 + 5 \xRightarrow{(\delta^*)} 55a = 50a + 5a$

Ici le procédé est une imbrication de procédés :

Une décomposition en somme est effectuée parce que les produits restant alors à faire permettent d'utiliser un procédé déjà connu (la multiplication par 5)

Remarque : On aurait pu aussi penser à " $55 = 5 \times 11$ ", le procédé se décrivant alors ainsi :



66

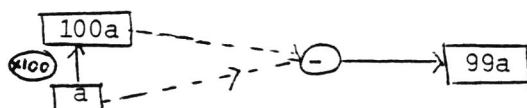
Il y a encore imbrication de procédés :

procédé



Le procédé de multiplication par 99 étant alors le suivant :

99



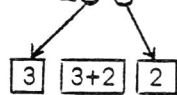
11 x n

Les multiplications par 22, 33, ..., 99 peuvent aussi se décomposer
 $a \times (11n) = (a \times 11) \times n$.

Surtout si on utilise une technique de multiplication par 11 dérivée
 de la technique écrite :

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 \times 11 \\
 \hline
 32 \\
 32 \\
 \hline
 352
 \end{array}$$

Les trois chiffres de $[32 \times 11]$ sont :



(il peut y avoir une retenue sur le deuxième chiffre!)

75

$$75 \times 48$$

48 fois 100 $\longrightarrow$ 4800
 (remise à zéro) $3/4$ de 4800 4800 divisé par 4 $\longrightarrow$ 1200
 $3 \mid$ 3 fois 1200 $\longrightarrow$ 3600

justification : $75 = (3/4) \times 100 \xRightarrow{(y,a)} 75a = (100a / 4) \times 3$

15,35,45,65,85

justification : $35 = 70 / 2 \xRightarrow{(y,a)} 35a = (7a \times 10) / 2$

95

justification : $95 = 100 - 5$

21,31,41,51,61,71,81,91 et

19,29, 39, 49, 59, 69, 79, 89

La distributivité de la multiplication permet de se ramener simplement à la dizaine la plus proche : il faut ensuite ajouter ou enlever le deuxième facteur du produit.

ex : 41×27

$4 \mid 1 \mid 27$	1 fois 27	$\longrightarrow$	27
4×27			
$4 \mid 25 \mid 2$	4 fois 25	$\longrightarrow$	100
	4 fois 2	$\longrightarrow$	8
	100 et 8	$\longrightarrow$	108
			1080
	1080 et 27	$\longrightarrow$	1107

En fait la seule particularité de ces nombres est d'être proche d'un nombre "encore plus particulier" qu'eux. On pénètre alors dans le champ d'une autre technique...

T2 - TECHNIQUE DU "RACCROCHAGE"

. Il s'agit de "raccrocher" l'un des facteurs à un nombre proche pour lequel on dispose déjà d'un procédé simple de multiplication

(c'est ce qui est réalisé plus haut pour 41×27 et pour d'autres facteurs comme **95** $95 = 100 - 5, \dots$)

Cette technique est donc applicable lorsque l'un des facteurs se termine par 1 ou par 9, mais peut être aussi pour 24, 26, (cf 25), 32, 34, (cf 33), 74, 76 (cf 75)...

]. Cependant, lors d'un calcul mental, l'inbrication des procédés ne peut pas être trop poussée.

Ainsi il serait sûrement maladroit de multiplier par 67 en pensant "~~66~~ + 1". En effet, la multiplication par 66 dérive elle-même de la multiplication par 100 ~~-1~~...

Il paraît donc raisonnable de ne pas imbriquer plus de 2 procédés successifs. Cependant, chacun est libre de ses mouvements mentaux...

. Le "raccrochage" peut s'effectuer lorsque la "proximité" est supérieure à 1 si le gain technique est suffisant.

Ainsi on pensera certainement :

$$\boxed{98} = 100 - 2$$

$$\boxed{97} = 100 - 3$$

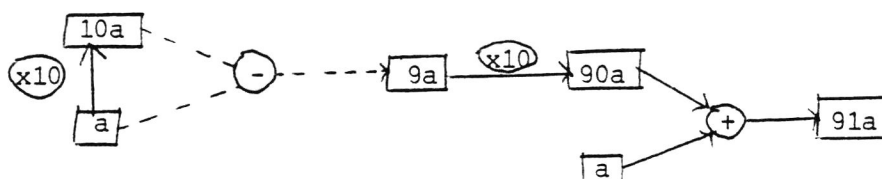
$$\boxed{96} = 100 - 4$$

$$\boxed{95} = 100 - 5$$

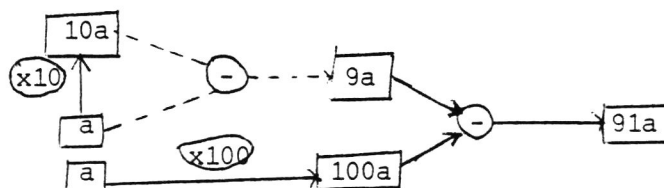
Pour $\boxed{94}$, on peut hésiter devant la multiplication par 6.

Pour $\boxed{93}$, $\boxed{92}$, $\boxed{91}$, on peut préférer le raccrochage à 90.

Remarque : Le raccrochage de 91 à 90 demande une certaine virtuosité :



on peut préférer :



- 10 -

Et cette dernière méthode peut se développer encore plus :

$$a \times 91 = (a \times 100) - (a \times 10) + a$$

ce qui "se pense" mieux :

91 x 57		
100/10 ~ 1/x 57	100 fois 57	5700
	10 fois 57 (-)	570 (-)
	5700 - 570	5130
1 x 57	5130 et 57	<u>5187</u>

On voit que la meilleure technique est une notion aussi fuyante qu'importante

De même : 46, 47, 48, 49, 52, 53, 54 se raccrochent à 50

23, 27, 73, 77 se raccrochent à 25 ou 75

• Le raccrochage peut aussi se faire à une dizaine près

Ainsi pour : 43 raccroché à 33

ex :

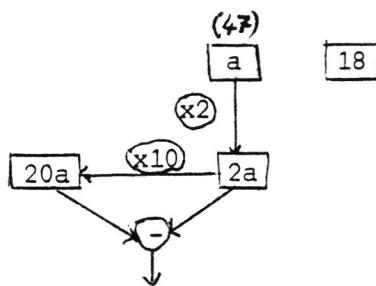
43 x 58		
33 10 58	10 fois 58	→ 580
33 58	100 fois 58	→ 5800
	5800 moins 58	→ 5742
33	5742 divisé par 3	→ 1914
	1914 et 580	→ 2494

(la division s'effectue "bien" de gauche à droite)

De même 35 ou même 15 peuvent être accrochés à 25, mais cela est, bien sûr, discutable.

Remarque: La multiplication de "raceroche" peut être la même que la multiplication "de base"

procédé :



justification : $a(10u - u) \int_8 = 10(au) - (au)$

(T2') - DECOMPOSITION DE L'UN DES FACTEURS EN SOMME (OU EN DIFFERENCE)

$$ab = a(B + B') = aB + aB'$$

(8)

ou

$$ab = a(C - C') = aC - aC'$$

(S-)

- Dans le "raccrochage" .. la multiplication par B est facile grâce aux propriétés particulières de B
.. B' est assez "petit" de sorte que aB' est, elle aussi, facile à effectuer.
- Dans la "décomposition", plus générale : les deux multiplications $a \times B$ et $a \times B'$ peuvent être "faciles" pour des raisons diverses. Par exemple :

$$58a = 25a + 33a$$

$$39a = 50a - 11a$$

Mais il faut reconnaître que la recherche des B et B' satisfaisants nécessite une grande habitude.

- On pourrait croire qu'il serait avantageux de prendre pour B la dizaine la plus proche :

$$43a = 40a + 3a$$

$$\text{ou } 67a = 60a + 7a$$

$$\text{ou } 67a = 70a - 3a$$

L'expérience montre que, appliquée à un facteur b quelconque, cette décomposition n'est pas très avantageuse.

De telle sorte que, lorsqu'aucun des 2 facteurs n'est particulier et qu'aucun des deux ne permet un raccrochage simple, il est préférable de pratiquer la technique de "double décomposition" des facteurs.

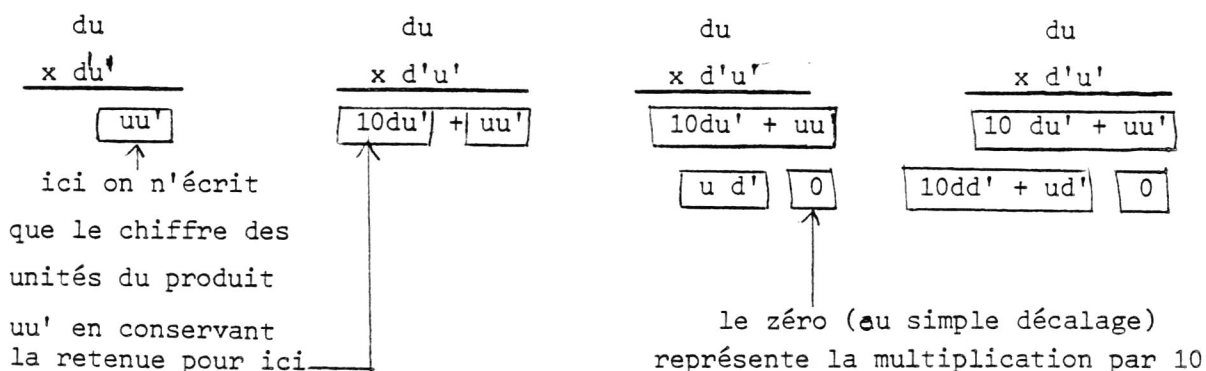
T3 - DOUBLE DECOMPOSITION

Principe : décomposer chaque facteur en dizaines et unités :

$$(10d + u) \times (10d' + u') = 100dd' + 10ud' + 10du' + uu'$$

Dans la multiplication écrite, les quatre produits partiels sont calculés dans l'ordre : uu' , du' , ud' , dd' .

En effet on écrit successivement :



- 13 -

et on finit par
l'addition chiffre
à chiffre

$$\begin{array}{r} \text{du} \\ \times \text{d'u'} \\ \hline 10 \text{ du'} + \text{uu'} \\ 10 \text{ dd'} + \text{d'u} + 0 \\ \hline \end{array}$$

ex : 47
 x 23

1	2	1
0	8	4

1 0 8 1

Mentalement on effectuera :

ex : $\text{du} \times \text{d'u'}$
 47 x 23

d'abord 100 dd' _____
puis uu' _____

800

21

821

et ensuite, chaque "produit
en croix" représentant des
dizaines

du' _____

4 x 3 , 12 → 120

et ud' _____

7 x 2 , 14 → 140

Au total 821 + 260 = 1081

260

47
23
800
21
120
140
1081

Le dessin suivant visualise bien les multiplications à effectuer :

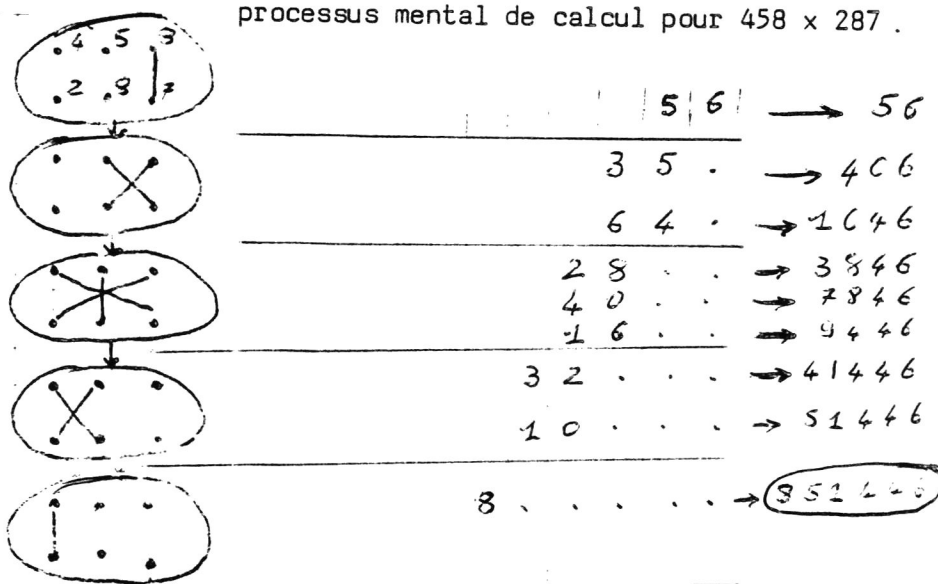
centaines $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ unités dizaines	<u>Film mental :</u> <table> <tr><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> </table> 4 fois 2, 8 → 800 3 fois 7, 21 → 21 800 et 21 → 821 4 fois 3, 12 → 120 120 et 821 → 941 7 fois 2, 14 → 140 941 et 140 → 1081	4	7	2	3
4	7				
2	3				

(les additions sont évidemment faites au fur et à mesure).



Ce procédé se généralise aux nombres de plus de chiffres.

Bien que cela devienne plus compliqué, on peut s'arranger pour n'avoir à retenir qu'une somme partielle à chaque instant.


$$\left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

ouf !

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ x(b_0 + b_1x + b_2x^2)$$
$$(a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0) \times (b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10^1 + b_0)$$

le terme en x^n est obtenu en multipliant

a_0	par	b_n
a_1	par	b_{n-1}
.....		
.....		
a_n	par	b_0

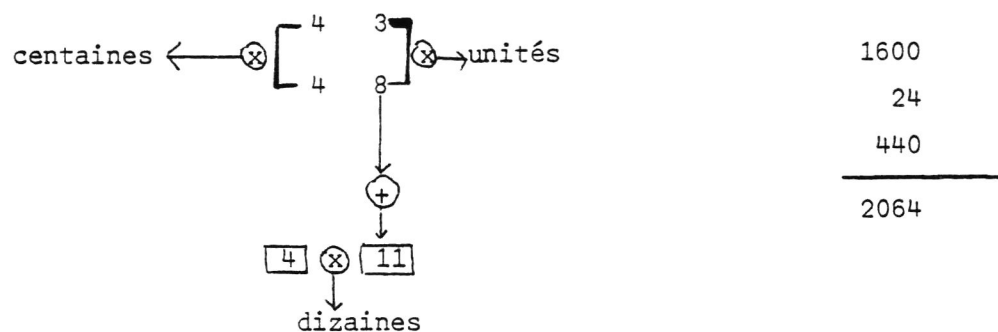
Lorsque les dizaines ou les unités des deux facteurs du produit sont égales, la technique de double décomposition se simplifie légèrement :

T4 d - dizaines égales

ex : $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

En effet "4 fois 8 et 4 fois 3" valent "4 fois 11" ($11 = 8 + 3$)

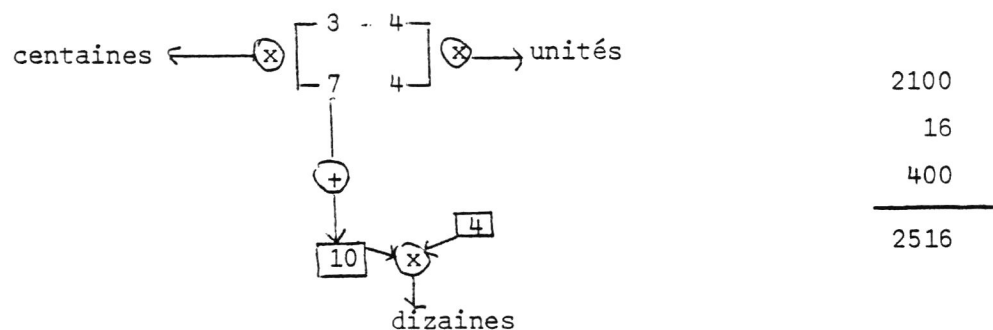
D'où le procédé :



justification : $(10d + u)(10d + u') = 100 d^2 + u'^2 + 10.d.(u + u')$

T4 u - unités égales

Le procédé est "analogue"



justification : $(10d + u)(10d' + u) = 100 dd' + u^2 + 10u(d + d')$

Lorsque les chiffres non égaux sont complémentaires à 10, on utilise des procédés tout à fait fantastiques :

T4 d - dizaines égales, unités complémentaires

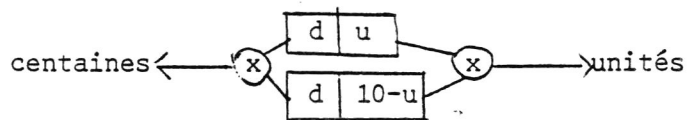
exemple : 62×68 — entre 60 et 70 — $6 \text{ fois } 7, 42 \rightarrow 4200$

$2 \mid 8$ — $2 \text{ fois } 8, 16 \rightarrow 16$

4216

(eh oui !) il y a ici une simple "concatenation"

procédé :



justification : $P = (10d + u)(10d + u') = 100 dd + 10du + 10du' + uu'$
(δ^+)

Mais $u' = 10 - u$

$P = 100dd + 10du + 100d - 10du + uu'$
(δ^+)

$P = 100 dd + 100 d + uu'$

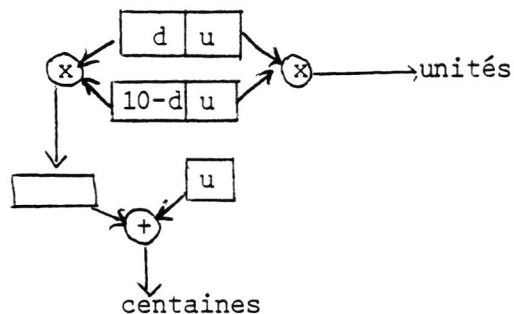
$P = 100 d (d + 1) + uu'$
(δ^+)

T4 u - dizaines complémentaires, unités égales

exemple

<u>26</u> x <u>86</u>	2 fois 8	→	16
	16 et <u>6</u> , 22	→	2200
	6 fois 6, 36	→	36
			<u>2236</u>

procédé



justification : $P = (10d + u)(10d' + u) = 100 dd' + 10ud' + 10 du + u^2$
(δ^+)

$P = 100 dd' + 10u (d' + d) + u^2$
(δ^+)

Mais $d' + d = 10$

$P = 100 dd' + 100 u + u^2$
(δ^+)

$P = 100 (dd' + u) + u^2$
(δ^+)

T5 - LA TECHNIQUE DU RECTANGLE

Les premières techniques que nous avons données sont assez élémentaires : leur découverte était à la portée de n'importe qui ! Le mérite des procédés correspondants se situe au niveau de l'organisation mentale des opérations (ce qui n'est d'ailleurs pas négligeable).

Les deux dernières techniques sont déjà moins évidentes. Ainsi, le caractère "magique" es manifeste dans T4 d.

La "technique du rectangle" (particulièrement utilisée par Marius Portal) se cachait très platement dans les multiples "réalisations" de la formule :

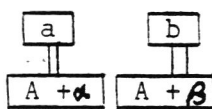
$$(a + b) (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

On verra qu'elle est pourtant d'une remarquable efficacité. Observons-la en action sur un exemple :

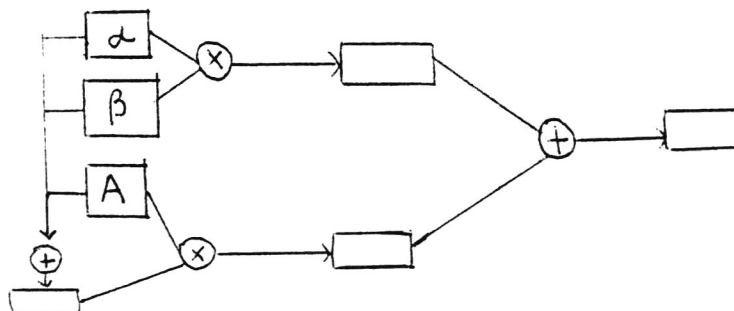
T5_c 52 x 59
 Choisissons 50 comme "pivot"
 Alors 52 = 50 + 2 et 59 = 50 + 9
 Ajoutons 2 à 59 ou 9 à 52, cela fait toujours 61
 Effectuons 61 x 50 = 3050
 et 2 x 9 = 18
 Le résultat est 3050 + 18 = 3068

Le procédé est donc le suivant :

① choix d'un pivot A



② calculs



justification (élémentaire)

$$P = (A + \alpha) (A + \beta) = \underset{(\delta^*)}{AA} + \alpha A + A\beta + \alpha\beta = \underset{(\delta)}{AA} + A\alpha + A\beta + \alpha\beta$$

$$P = \underset{(\delta^*)}{A(A + \alpha + \beta)} + \alpha\beta$$

- (T5) La même technique est utilisable en choisissant un pivot supérieur aux deux facteurs :

$$\begin{array}{rcl}
 52 \times 59 & \text{pivot } 60 & \\
 59 = 60 \text{ moins } 1 & & \\
 52 \text{ moins } 1, 51 \longrightarrow & 51 & \\
 51 \text{ fois } 60 \longrightarrow & 3060 & \\
 52 = 60 \text{ moins } 8 & & \\
 8 \text{ fois } 1 \longrightarrow & 8 & \\
 & \underline{3068} &
 \end{array}$$

justification : $P = (A - \alpha) (A - \beta) = A (A - \alpha - \beta) + \alpha\beta$
 $(\delta \gamma)$

- (T5-) La technique se modifie légèrement si on choisit un pivot compris entre les deux facteurs :

$$\begin{array}{rcl}
 47 \times 52 & \text{pivot } 50 & \longrightarrow 50 \\
 52 = 50 \text{ plus } 2 & & \\
 47 \text{ plus } 2, 49 \longrightarrow & 49 & \\
 49 \text{ fois } 50 \longrightarrow & 2450 & \\
 47 = 50 \text{ moins } 3 & & \\
 3 \text{ fois } 2, 6 \longrightarrow & 6^{(-)} & \\
 & \underline{2444} &
 \end{array}$$

Le produit des "unités" est alors soustrait.

justification : $P = (A - \alpha) (A + \beta) = A (A - \alpha + \beta) - \alpha\beta$

remarques : . $A - \alpha + \beta$ peut être vu
 soit comme $(A - \alpha) + \beta$
 soit comme $(A + \beta) - \alpha$

. L'addition ou la soustraction de $(\alpha\beta)$ revient à appliquer la "règle des signes" au produit $(\alpha) \times (\beta)$
 α et β étant pris avec leurs signes dans la formule unique :

$$(A + \alpha) (A + \beta) = \underline{A} (\underline{A + \alpha} + \underline{\beta}) + \underline{\alpha\beta}$$

UNE AUTRE "IMAGE MENTALE" POUR LA METHODE DITE DU RECTANGLE

Pour calculer $\boxed{A \times B}$, on peut déterminer deux naturels X et Y tels que $A + B = X + Y$

alors : $A \times B = XY + (A-X)(B-X)$

ou $XY + (A-Y)(B-Y)$

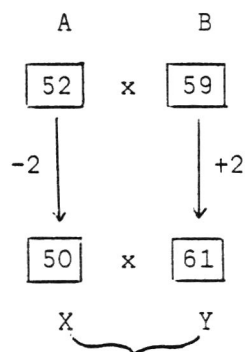
Vérification : $* XY + (A-X)(B-X) = XY + AB - X(A+B) + X^2$
 $= AB + XY - X(X+Y) + X^2$

* de même :

$$XY + (A-Y)(B-Y) = XY + AB - Y(A+B) + Y^2 = \dots = AB$$

Analyse de quelques exemples

Exemple 1 :



La présence de ces deux opérateurs "opposés" assurent la propriété

$$X + Y = A + B$$

$$\begin{array}{rcl}
 (50 \times 61) & + & (52-50)(59-50) \\
 3050 & + & (2 \times 9) \\
 3050 & + & 18 \\
 3068 & &
 \end{array}$$

Ici le pivot $\boxed{50}$ est inférieur aux deux naturels dont nous voulons calculer le produit.

Exemple 2 :

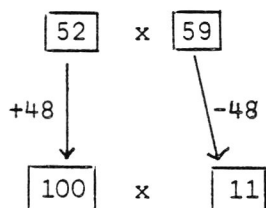
$\boxed{47}$		$\boxed{52}$
+3 ↓		-3 ↓
$\boxed{50}$	x	$\boxed{49}$
(50x49)	+	(47-50)(52-50)
2450	-	6
2444		

Ici le pivot $\boxed{50}$ est entre les deux naturels 47 et 52.

Il faut donc "retrancher"

(50-47)(52-50) au produit 50 x 49.

Exemple 3 : Reprenons 52×59 et choisissons $\boxed{100}$ pour pivot en pensant que la multiplication par une puissance de dix est chose simple...



$$\begin{aligned}
 52 \times 59 &= 1100 + (52-11)(59-11) \\
 &\quad + \boxed{41} \times \boxed{48}
 \end{aligned}$$

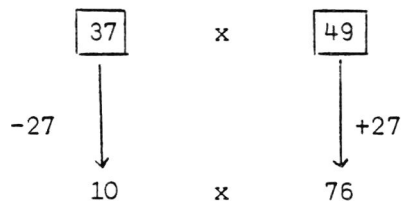
mais il faudrait recommencer.....

Si nous choisissons $X = 10$ pour pivot et si nous réitérons le procédé, dans chaque produit successif le chiffre des dizaines diminue de 1. Examinons un exemple :



Appelons S la somme $47 + 59 = 106$
et P le produit 47×59

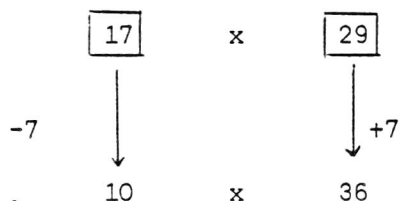
$$P = \underbrace{10 \times 96}_{10(S-10)} + 37 \times \cancel{49}$$



$$P = \underbrace{960}_{10(S-10)} + \underbrace{10 \times 76}_{10(S-30)} + 27 \times 39$$



$$P = \underbrace{960}_{10(S-10)} + \underbrace{760}_{10(S-30)} + \underbrace{10 \times 56}_{10(S-50)} + 17 \times 29$$



$$P = \underbrace{960}_{10(S-10)} + \underbrace{760}_{10(S-30)} + \underbrace{560}_{10(S-50)} + \underbrace{360}_{10(S-70)} + \boxed{7 \times 19}$$

Si nous désignons par n le chiffre des dizaines du plus petit des naturels A ou B ,

nous avons :

$$A \times B = \underbrace{10(S-10) + 10(S-30) + \dots}_{n \text{ termes}} + \underbrace{(A-10n)}_a \underbrace{(B-10n)}_b$$

$$= 10 nS - N \times 100 + (A-10n) (B-10n)$$

soit $\boxed{A \times B = (S-10n) \times 10n + ab} \quad (I)$

Nous n'avons rien trouvé !.....

En effet, l'écriture (I) n'est autre que la traduction de la méthode du pivot où on aurait choisi $10 n$ pour pivot et pour laquelle le premier produit est exprimé à l'aide de S .

Examinons un exemple où S est simple en présentant les calculs différemment pour faire apparaître (au lecteur) une autre "image mentale" de ce procédé :

1)

43	x	77
↓ -3		↓ +3
40	x	80

$P = (40 \times 80) + (3 \times 37)$

2)

3	← -40	43		S		120	→ -40	80
37	← -40	77		+		120	→ -40	80
↓		↓				↓		↓
		3 x 37						40 x 80

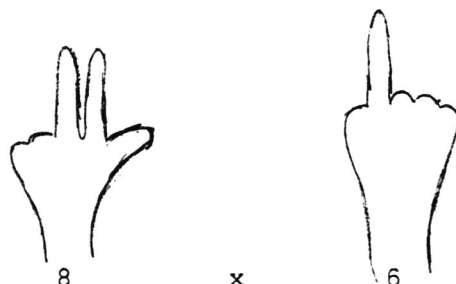
$P = (3 \times 37) + (40 \times 80)$

Si nous avons des naturels plus élevés et si S est simple :

1013	← -40	1053		S		1100	→ -40	1060
7	← -40	47		+		1100	→ -40	1060
↓		↓				↓		↓
		1013 x 7						1060 x 40
		7091						42400

COMPLEMENTS SUR LA TECHNIQUE DU RECTANGLE

- 1 . Cette technique est finalement identique à la multiplication "manuelle" des nombres entre 5 et 10

Pivot 10 $(10 - 2)$ $(10 - 4)$ $10 - 2 - 4$

est le nombre de doigts levés : 4

(ce sera le nombre de dizaines)

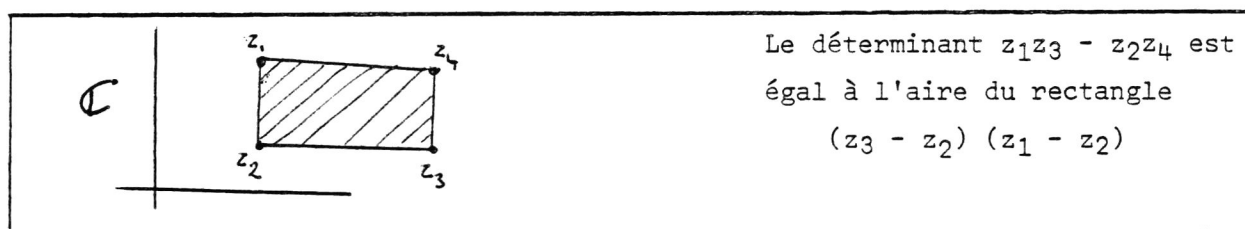
 2×4

est le produit des doigts baissés dans chaque main

(ce sera le nombre des unités)

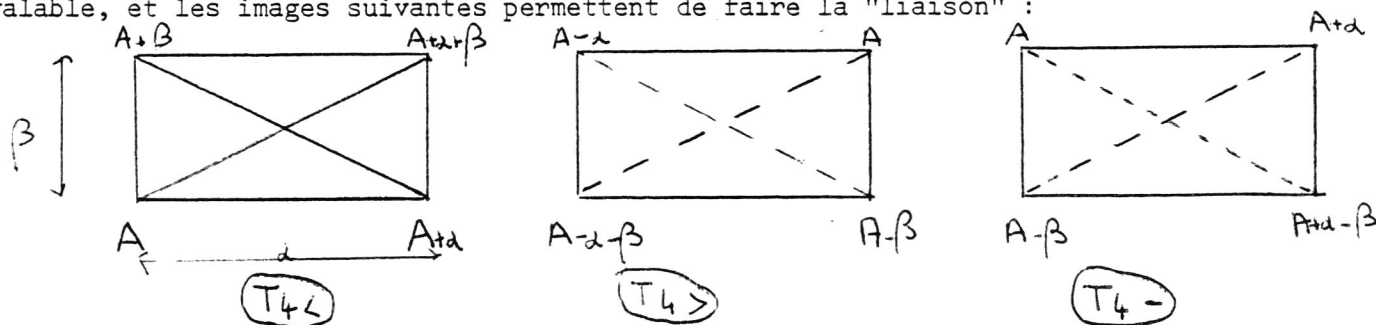
- 2 . J'ai attribué la qualification de "rectangle" à cette technique car on peut en donner une remarquable interprétation géométrique.

Considérons, en effet, quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 , dont les images sont situées aux sommets d'un rectangle à côtés parallèles aux axes



Démonstration : $(z_3 - z_2)(z_1 - z_2) = z_3z_1 - z_2[z_1 + z_3 - z_2]$
 $= z_3z_1 - z_2[z_1 + z_4 - z_1]$
 $= z_3z_1 - z_2z_4$

Lorsque les nombres complexes sont, en particulier, réels, la formule reste évidemment valable, et les images suivantes permettent de faire la "liaison" :



T6 - TECHNIQUE DE LA MOYENNE

Lorsque la moyenne arithmétique entre les 2 facteurs est simple, on décompose chacun d'eux "autour" de cette moyenne.

Ex : 44 x 56

Moyenne 50

$$56 = 50 + 6$$

$$44 = 50 - 6$$

$$\text{carré de } 50 \longrightarrow 2500$$

$$\text{carré de } 6 \longrightarrow 36$$

$$2500 \text{ moins } 36 \longrightarrow 2464$$

justification : $a \times b$

La moyenne entre a et b est notée m (m vaut $\frac{a+b}{2}$, mais ce n'est pas important)

si b est plus
petit que a $\begin{cases} a = m+x \\ b = m-x \end{cases}$ (x vaut $\frac{a-b}{2}$, mais ce n'est pas important)

$$a \times b = (m+x)(m-x) = m^2 + xm - mx - x^2$$

(8*)

$$= m^2 - x^2$$

Le procédé est donc bien adapté aux nombres "symétriques" par rapport à une dizaine :
67 x 73, 35 x 45, ... 112 x 88... ou lorsque le carré de la moyenne est facile à calculer : 27 x 23 = $25^2 - 2^2$...

Il est donc parfois intéressant de connaître ou de savoir calculer vite les carrés des nombres (au moins de 2 chiffres). C'est l'objet du chapitre suivant.

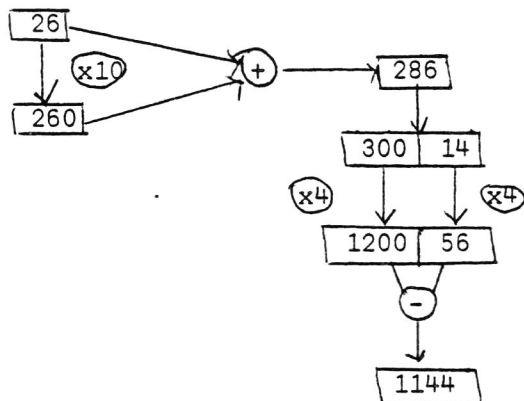
EXEMPLE RECAPITULATIF :

44 x 26

Afin de montrer une dernière fois le mécanisme des diverses techniques du calcul mental, nous effectuerons ce produits de (très) différentes façons :

T1 - Propriété de 44 = 4 x 11

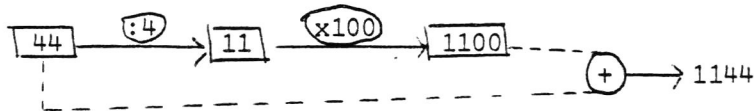
procédé



Film mental

44 | 26
 4 | 11 | 26 2 fois 10 → 260
 260 et 26 → 286
 4 | 286 286 = 300 moins 14 → 300 | 14^e
 300 fois 4 → 1200
 4 | 14⁽⁻⁾ 4 fois 4⁽⁻⁾ → 56⁽⁻⁾
 1200 moins 56 → 1144

T2 - Raccrochage à 25 [26 = 25 + 1]



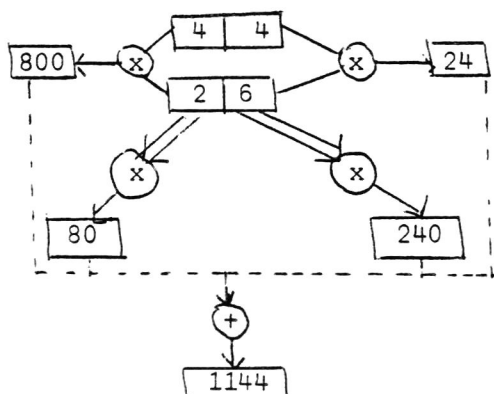
Film:

ou encore: 11 x 26

 2 8 6

44 | 26
 44 | 25 | 1 44 fois 1 → 44
 44 | 25
 44 | 100 | 4(:) 44 fois 100 → 4400
 4400 divisé par 4 → 1100
 1100 et 44, → 1144

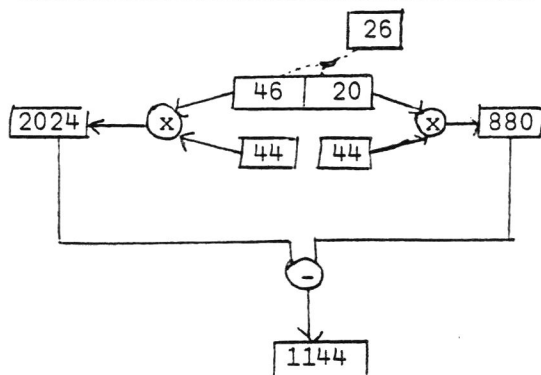
T3 - Double décomposition



44 / 26 4 fois 2,8 → 800
 4 fois 6, 24 → 24
 800 et 24 → 824
 4 fois 6,24 → 240
 824 et 240 → 1064
 4 fois 2,8 → 80
 1064 et 80 → 1144

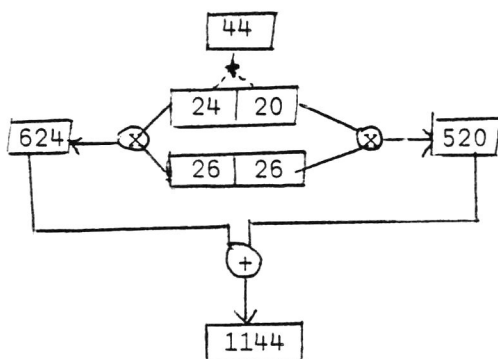
T4 - Les chiffres des unités sont complémentaires !

T2 - Raccrochons à 46 = 26 + 20



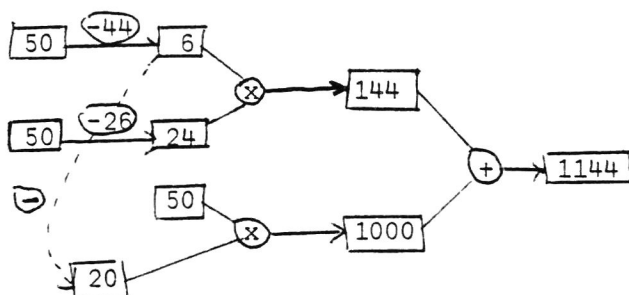
$26 \mid 44$
 $46 \mid 44 \mid 20^{(-)}$ 20 fois 44 $\rightarrow$ 880⁽⁻⁾
 $46 \mid 44$ 4 fois 5 $\rightarrow$ 20
 4 fois 6 $\rightarrow$ 24
2024
 2024 moins 880 $\rightarrow$ 1144

T2 Raccrochons à 24 = 44 - 20



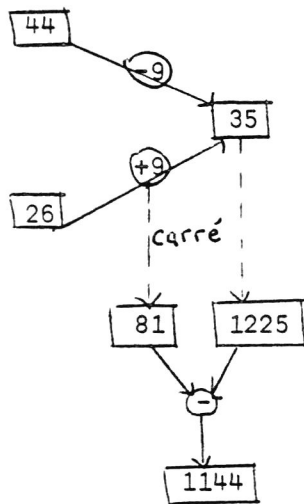
$26 \mid 44$
 $26 \mid 24 \mid 20^{(+)}$ 2 fois 26 $\rightarrow$ 520⁽⁺⁾
 $26 \mid 24$ 2 fois 3 $\rightarrow$ 6
 6 fois 4 $\rightarrow$ 24
6 24
 624 et 520 $\rightarrow$ 1144

T5 - Rectangle de pivot 50



44 x 26 pivot 50
 44 = 50 moins 6
 26 moins 6 $\rightarrow$ 20
 20 fois 50 $\rightarrow$ 1000
26 = 50 moins 24
 24 fois 6 $\rightarrow$ 144
 1000 et 144 $\rightarrow$ 1144

T6 - Moyenne : $35 = 44 - 9 = 26 + 9$



44 | 26

44 moins 9, 35

26 plus 9, 35 $\Rightarrow$ 35

35 au carré

entre 30 et 40

3 fois 4, 12 $\rightarrow$ 1200

5 fois 5, 25 $\rightarrow$ 25

1200 et 25 $\rightarrow$ 1225

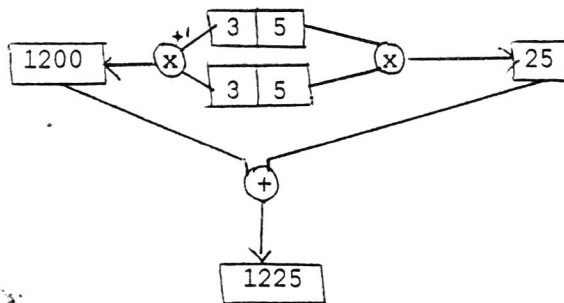
9 au carré 81

1225 moins 81

1225 moins 80 $\rightarrow$ 1145

moins 1 $\rightarrow$ 1144

Le carré de 35 est calculé par la technique (T4 d)



x 6

Avez-vous remarqué que la table de multiplication par 6 est facile : les 2 chiffres du résultat s'obtiennent ainsi :

$$6 \times 4 = 24$$

: 2

Lorsque le multiplicateur est impair, cela marche aussi :

$$6 \times 5 = 30$$

: 2

La "justification" est évidente : $6 \times n = 5n + n = 10 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$

LES CARRES
DES NOMBRES

- On peut avoir à calculer le carré d'un nombre pour des raisons suffisamment diverses pour ne pas avoir à les énumérer.

Nous avons vu, en particulier, comment ils pouvaient servir à effectuer des multiplications grâce à la technique "de la moyenne". Mais aussi, depuis bien avant J.C. les carrés des nombres permettaient de calculer les produits par décomposition.

Comme ceci :

$$\begin{aligned}
 44 \times 26 &= (26 + 18) 26 = 26^2 + 18 (18 + 8) \\
 &= 26^2 + 18^2 + (10 + 8) 8 \\
 &= 26^2 + 18^2 + 8^2 + (8 + 2) 8 \\
 &= 26^2 + 18^2 + 8^2 + 8^2 + 2(2 + 6) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

- La quantité des applications fait que tous les calculateurs "prodiges" connaissent la table des carrés des nombres de 0 à 100. Cela n'est pas si difficile qu'il y paraît : En effet quelques propriétés permettent de suppléer rapidement à une mémoire défaillante.

Voici les plus élémentaires :

P1 - APPLICATION DES TECHNIQUES DE MULTIPLICATION

- Les carrés de 10,20,...,10,90, sont trop faciles
- Les carrés de 15,25,35,...,85,95 s'énoncent, sans calculs, grâce à la technique T4 d :

$$\begin{aligned}
 85^2 &= \overbrace{72,25} \\
 &\quad \begin{array}{l} | \\ 5 \text{ fois } 5 \\ 8 \text{ fois } 9 \end{array} \\
 &\quad (85 \text{ est compris entre } \underline{80} \text{ et } \underline{90})
 \end{aligned}$$

- Les carrés des nombres proches de 100 se calculent facilement par la méthode du rectangle, avec 100 comme pivot.

$$\begin{array}{rcl}
 88^2 & & \text{pivot } 100 \\
 100 = 88 + 12 & & \\
 88 \text{ moins } 12 & \longrightarrow & 76 \\
 76 \text{ fois } 100 & \longrightarrow & 7600 \\
 12 \text{ fois } 12 & \longrightarrow & 144 \\
 7600 \text{ et } 144 & \longrightarrow & 7744
 \end{array}$$

. On peut aussi appliquer la technique du rectangle près de 50,

P2 - FORMULE DU "BINOME"

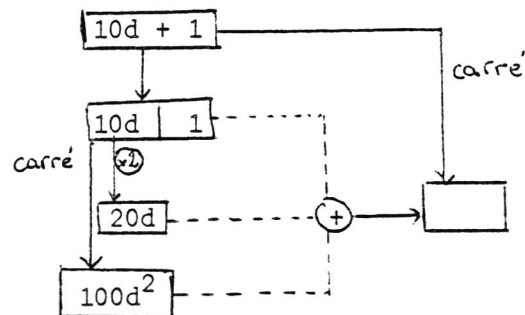
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ces formules sont évidemment très intéressantes lorsque a est un multiple de 5 et b égal à 1.

Exemple : $21^2 = 20^2 + 2 \times 1 \times 20 + 1 = 400 + 40 + 1$

procédé



En bref, le nombre de centaines est d^2

" dizaines est $2d$

" unités est 1

Ex : 19^2

20 moins 1

20 fois 20 $\longrightarrow$ 400

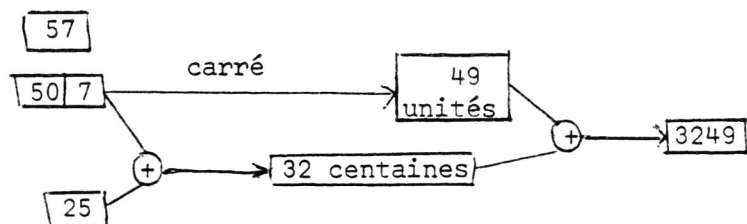
2 fois 20 $\longrightarrow$ 40

400 moins 40 $\longrightarrow$ 360

et 1 $\longrightarrow$ 361

P3 - Entre 50 et 60

procédé



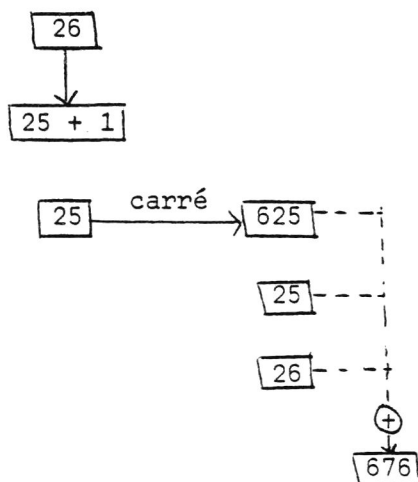
- 29 -

En bref, le nombre des centaines est $25 + \text{chiffre des unités}$
 le nombre des unités est le carré du chiffre des unités

justification: $(50 + u)^2 = 2500 + 100u + u^2$
 $(50 + u)^2 = (25 + u) 100 + u^2$

P4 - CARRES DE 2 NOMBRES CONSECUTIFS

procédé :



justification : Le carré de $(n+1)$ est égal au carré de n augmenté de $\underline{n}$ et de $\underline{n+1}$
 $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + \underline{n} + \underline{n+1}$

Carrés des nombres de 0 à 100

Faisons maintenant le point.

Les propriétés P1 à P4 suppléent à la mémoire, mais, en fait, il vaut mieux connaître les carrés des nombres de 1 à 25

(Ce n'est pas très dur).

Pour les nombres de 75 à 100, on utilise la méthode du rectangle avec 100 pour pivot ; cela donne :

pour $n = 100 - q$

dans n^2 il y a $(n - q)$ centaines
 et q^2 unités

Pour les nombres de 25 à 75

La formule suivante est assez inattendue mais efficace :

$$a^2 = (a - 25)100 + (50 - a)^2$$

$$\text{en effet } (a - 25)100 + (50 - a)^2 = 100a - 2500 + (2500 - 100a + a^2) = a^2$$

Donc :

dans a^2 , il y a : $(a - 25)$ centaines
 $(50 - a)^2$ unités

Ex : 38^2

$$38 - 25 = 13 \text{ centaines}$$

$$50 - 38 = 12, \quad 12^2 = 144 \text{ unités}$$

$$1300 \text{ et } 144, \quad 1444$$

On remarque que les carrés des nombres de 0 à 25, ont une ressemblance avec ceux de 25 à 50, ceux de 50 à 75 et ceux de 75 à 100. La clef de l'énigme nous est donnée par la formule :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

comme cela est montré dans le paragraphe suivant.

Différence de 2 carrés

Observons l'égalité :

$$a^2 = b^2 + (a - b)(a + b)$$

Elle permet de calculer a^2 lorsque l'on connaît le carré de b , si $(a - b)$ ou $(a + b)$ sont simples.

1ère remarque : On ramène ainsi le calcul du carré d'un nombre quelconque à celui d'un nombre inférieur à 100, en choisissant pour $(a - b)$ le nombre de centaines de différence.

$$\text{ex : } (328)^2 = 28^2 + (3 \times 100) \times 356 \quad (a = 328, \quad b = 28)$$

2ème remarque : De la même façon on pourrait ramener le calcul de 47^2 à celui de 7^2 :

$$47^2 = 7^2 + (40 \times 54)$$

$$47^2 = 49 + 2160$$

$$47^2 = 2209$$

Mais la conséquence la plus étonnante de cette formule est ailleurs :

Le carré des nombres x , $50 - x$, $50 + x$ et $100 - x$ se terminent par les deux mêmes chiffres.

En effet, :

$$(50-x)^2 = 100 (25-x) + x^2$$

$$(50+x)^2 = 100 (25+x) + x^2$$

$$(100-x)^2 = 100 (100-2x) + x^2$$

↓
Les 3 carrés ne diffèrent
donc que d'un nombre entier
de centaines

↓
les deux derniers
chiffres sont les
mêmes

Ex : 12,38,62, et 88 ont leur carré se terminant par 44
3,47,53 et 97 ont leur carré se terminant par 09

Il suffit donc de connaître les derniers chiffres des carrés des nombres de 0 à 25 pour connaître ceux des carrés des nombres de 0 à 100. Alors, on remarque que :

- . 0, 10 et 20 ont un carré se terminant par 00
- . 5,15 et 25 ont un carré se terminant par 25
- . Les vingt autres nombres de 0 à 25 ont un carré se terminant par deux chiffres différents les uns des autres, ce qui permet de les caractériser.

Une nouvelle technique de multiplication mentale :

(T7) - LA DECOMPOSITION EN CARRES

Comme nous l'indiquions au début du chapitre II, cette technique était connue des babyloniens.

Décrivons le film mental de 44×26 :

$44 \mid 26$	$44 = 26 \text{ plus } 18$
$18 \mid 26$	26 au carré
	$25 \text{ au carré} \longrightarrow 625$
	$625 \text{ et } 25 \longrightarrow 650$

A partir d'ici, la décomposition en carré n'est plus intéressante la multiplication restante étant simple.

- un résultat partiel (somme de carrés déjà calculés)
- les deux facteurs d'un produit restant à effectuer.

Diagram illustrating the iterative step in the Euclidean algorithm for GCD(26, 44):

- Initial values:** 26 and 44.
- 1ère étape:** 26 is squared (26² = 676) and added to 44, resulting in 720.
- 2ème étape:** 18 is squared (18² = 324) and added to 720, resulting in 1044.
- 3ème étape:** 8 is squared (8² = 64) and added to 1044, resulting in 1108.
- dernière étape:** The final result is 2.

Nombres	Carrés	Différence	Nombres	Carrés
1	1	2400	49	2401
2	4	2300	48	2304
3	9	2200	47	2209
4	16	2100	46	2116
5	25	2000	45	2025
6	36	1900	44	1936
7	49	1800	43	1849
8	64	1700	42	1764
9	81	1600	41	1681
10	100	1500	40	1600
11	121	1400	39	1521
12	144	1300	38	1444
13	169	1200	37	1369
14	196	1100	36	1296
15	225	1000	35	1225
16	256	900	34	1156
17	289	800	33	1089
18	324	700	32	1024
19	361	600	31	961
20	400	500	30	900
21	441	400	29	841
22	484	300	28	784
23	529	200	27	729
24	576	100	26	676
25	625	0	25	625

TABLE DE CARRES

On remarque que dans la partie gauche du tableau, dont les nombres complémentaires 2 et 48, 3 et 47, etc. font un total de 50, la différence des carrés se traduit par un nombre de centaines égal à la 1/2 différence des nombres :

Carré de 2 = 4. Carré de 48 = 2304.

Différence : 2300, soit $\frac{48c - 2c}{2}$.

Pour les nombres complémentaires dont le total fait 100 : 4 et 96, 3 et 97, la différence des carrés se traduit par un nombre de centaines égal à la différence des deux nombres :

Carré de 3 = 9. Carré de 97 = 9409.

Différence : 94 c ou 97 — 3.

Nombres	Carrés	Différence	Nombres	Carrés
51	2601	7200	99	9801
52	2704	6900	98	9604
53	2809	6600	97	9409
54	2916	6300	96	9216
55	3025	6000	95	9025
56	3136	5700	94	8836
57	3249	5400	93	8649
58	3364	5100	92	8464
59	3481	4800	91	8281
60	3600	4500	90	8100
61	3721	4200	89	7921
62	3844	3900	88	7744
63	3969	3600	87	7569
64	4096	3300	86	7396
65	4225	3000	85	7225
66	4356	2700	84	7056
67	4489	2400	83	6889
68	4624	2100	82	6724
69	4761	1800	81	6561
70	4900	1500	80	6400
71	5041	1200	79	6241
72	5184	900	78	6084
73	5329	600	77	5929
74	5476	300	76	5776
75	5625	0	75	5625

Pour les nombres complémentaires dont le total fait 150 : 59 et 91, 83 et 67, par exemple, la différence des carrés se traduit par un nombre de centaines égal à 1 fois 1/2 la différence des deux nombres

Carré de 59 = 3481. Carré de 91 = 8281.

Différence : 82 c — 34 c = 48 c.

$\frac{91c - 59c}{2} \times 1\frac{1}{2} = 48c$.

Carré de 83 = 6889. Carré de 67 = 4489.

Différence : 68 c — 44 c = 24 c,

soit 83 c — 67 c ou 16 c $\times$ par 1 1/2 ou 3/2.

EXTRACTION DE RACINES
ET CALCUL MENTAL

PRINCIPE DU SPECTACLE

L'extraction instantanée des racines est toujours spectaculaire.

Par exemple, si quelqu'un (après avoir calculé la puissance 5^è du nombre qu'il a choisis) vous dit :

Quelle est la racine 5^{ème} de 1 934 917 632 ?
vous annoncez sans hésiter : 72. !

Comme vous allez le voir, ce genre d'exercice est un jeu d'enfants.

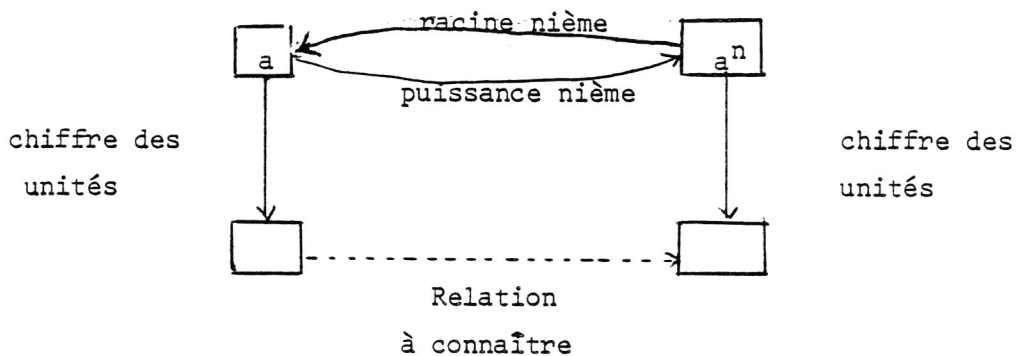
Limitons-nous, encore une fois, aux racines comprises entre 0 et 100 :

Il y a donc simplement deux chiffres à découvrir :

- le chiffre des unités
- le chiffre des dizaines.

La technique de découverte de chacun de ces chiffres est différente.

Pour le chiffre des unités, il suffit de connaître la relation entre le chiffre des unités du nombre a à découvrir et celui du nombre a^n dont on vous donne à extraire la racine nième :



Pour le chiffre des dizaines, il suffit de connaître l'ordre de grandeur des puissances nième de chacune des dizaines exactes et donc, comme nous le verrons, l'ordre de grandeur des puissances nième des neuf premiers nombres.

(Il vaut donc mieux se spécialiser dans l'extraction d'une racine particulière et réviser la liste des puissances avant votre "représentation").

LE CHIFFRE DES UNITES

La multiplication étant compatible avec la relation de congruence modulo 10, le chiffre des unités d'un produit est le produit des chiffres des unités de chaque facteur. Donc :

Si a se termine par le chiffre c ,

le chiffre des unités de a^n est le même que celui de c^n .

Il est donc facile de construire les "chaînes" suivantes, dans lequel les multiplications sont faites modulo 10 (c'est-à-dire 7 fois 7, 49, ce qui donne 9) :

chiffre des unités de a		chiffre des unités de a^2		chiffre des unités de a^3		chiffre des unités de a^4		chiffre des unités de a^5
1	$\times 1 \rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1
2	$\times 2 \rightarrow$	4	$\rightarrow$	8	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	2
3	$\times 3 \rightarrow$	9	$\rightarrow$	7	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	3
4	$\times 4 \rightarrow$	6	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	4
5	$\times 5 \rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5
6	$\times 6 \rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6
7	$\times 7 \rightarrow$	9	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	7
8	$\times 8 \rightarrow$	4	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	8
9	$\times 9 \rightarrow$	1	$\rightarrow$	9	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	9

Premier "miracle" :

Le chiffre des unités de a^5 est le même que celui de a

Et donc :

$a, a^5, a^9, a^{13}, a^{17}, \dots$	ont même chiffre des unités
$a^2, a^6, a^{10}, a^{14}, a^{18}, \dots$	ont même chiffre des unités
$a^3, a^7, a^{11}, a^{15}, a^{19}, \dots$	ont même chiffre des unités
$a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}, \dots$	ont même chiffre des unités

(en effet le passage d'une colonne du tableau à une autre ne dépend pas de la position de cette colonne).

Deuxième "miracle"

Si le chiffre des unités de a est 1, 5 ou 6, c'est aussi le chiffre des unités de n'importe quelle puissance de a

Remarquons aussi que le chiffre des unités de a^6 ne renseigne pas beaucoup sur le chiffre des unités de racine sixième a .

Il y a donc intérêt à se spécialiser dans l'extraction des racines 5ème, 3ème, 7ème et 2ème (au delà il faut plaindre vos spectateurs qui doivent élever le nombre qu'ils ont choisi à la puissance 8ème, par exemple, avant de vous demander d'extraire la racine 8ème de leur résultat).

Racine cinquième : $\text{ch.u}(a^n) = \text{ch.u}(a)$

"ch.u (a)" désigne le chiffre des unités de a .

C'est vraiment très très simple.

Racines cubique et septième

Si $\text{ch.u}(a^n)$ vaut 1, 4, 5, 6, ou 9,

$\text{ch.u}(a)$ vaut la même chose.

Sinon, $\text{ch.u}(a^n)$ et $\text{ch.u}(a)$ sont complémentaires.

Racine carrée

La suite 6, 9, 4, 1 donne le chiffre des unités de $\text{ch.u}(a^n)$ de façon symétrique par rapport au chiffre des unités 5 de $\text{ch.u}(a)$.

LE CHIFFRE DES DIZAINES

Remarque fondamentale :

74^n est compris entre 70^n et 80^n .

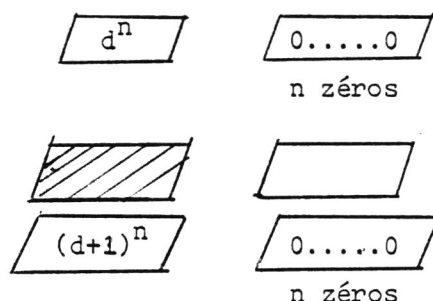
Or : 70^n s'écrit "7ⁿ suivi de n zéros"

et $80^n = 8^n \cdot 10^n$ s'écrit "8ⁿ suivi de n zéros"

D'une façon générale donc :

Si $(\underline{d}0)^n < (\underline{d}u)^n < (\underline{d+1}0)^n$

on a les écritures suivantes :



La partie gauche de $(\underline{d}u)^n$ indique donc la valeur de d.

Conclusion :

Si a^n est la puissance nième d'un nombre a de deux chiffres,
on partage le nombre a^n en (deux) tranches de n chiffres à partir de la droite : la tranche de gauche permet de trouver le chiffre des dizaines par encadrement

Exemple pour la racine carré :

. Quelle est la racine carrée de 2209 ?

On partage en tranches de 2 chiffres : 22, 09

22 est compris entre 4^2 (16) et 5^2 (25).

Donc le chiffre des dizaines est 4.

Le chiffre des unités peut être 7 ou 3 (voir paragraphe précédent). La racine vaut donc 47 ou 43

Or, on sait annoncer sans calcul 45^2 , qui vaut 20, 25 (4 fois 5, 20)

2209 étant plus grand que 2025, la racine est 47.

PROCEDE POUR L'EXTRACTION D'UNE RACINE CARREE (d'un nombre de 4 chiffres au plus)

- . Partager en tranches de 2 chiffres à partir de la droite.
- . Observer la tranche de gauche t

si $d^2 < t < (d+1)^2$, le chiffre des dizaines de la racine est d.

- . La tranche de droite permet de trouver le chiffre des unités ; s'il y a deux chiffres des unités possibles on lève l'ambiguïté en comparant le nombre donné à $d5^2$, qui se calcule immédiatement : $d \bullet (d+1) \underline{25}$

PROCEDE POUR L'EXTRACTION D'UNE RACINE TROISIEME, CINQUIEME OU SEPTIEME

- . Le dernier chiffre du nombre indique le chiffre des unités (paragraphe précédent).
- . Partager en tranches de 3 (5 ou 7) chiffres à partir de la droite.
- . Comparer la tranche de gauche avec les puissances 3ème, (5ème ou 7ème) des neuf premiers nombres : et on a le chiffre des dizaines.

Il faut donc connaître les puissances 3ème, 5ème et 7ème des neuf premiers nombres. En fait, il suffit de connaître leur ordre de grandeur. Ce sont donc les colonnes encadrées du tableau suivant qu'il faut apprendre :

C	C^3	ordre de grandeur de C^3	C^5	ordre de grandeur de C^5	C^7	ordre de grandeur de C^7
1	1	1	1	1	1	1
2	8	10	32	30	128	100
3	27	30	243	250	2187	2000
4	64	60	1024	1000	16384	16000
5	125	120	3125	3000	78125	80000
6	216	200	7776	8000	279936	300000
7	343	350	16807	17000	823543	800000
8	512	500	32768	32000	2097152	2000000
9	729	700	59049	60000	4782969	5000000

Exemples :

. Racine cubique de 32768 ?

chiffre des unités 8 $\longrightarrow$ la racine cubique a 2 pour chiffre des unités.

partage en tranches de 3 chiffres 32 768

32 est de l'ordre de 30, le chiffre des dizaines est 3.

32

. Racine cinquième de 282 475 24 ~ ?

chiffre des unités 9 $\longrightarrow$ la racine cinquième a 9 pour chiffre des unités.

Partage en tranches de 5 chiffres 282⁴75249

2824 est près de 3000, le chiffre des dizaines est "presque" 5, donc 4 (puisque le chiffre des unités est 9).

49

. Racine septième de 10 030 613 004 288 ?

Chiffre des unités 8 $\longrightarrow$ la racine septième a 2 pour chiffre des unités

Partage en tranches de 7 chiffres : 1003061, 3004288,

1003061 est entre 800000 et 2000000, le chiffre des dizaines est donc 7.

72

Mais nous allons voir maintenant beaucoup plus fort :

Comment extraire instantanément la racine cubique d'un nombre de 9 chiffres et même la racine 7ième d'un nombre de 21 chiffres !!!

Certains calculateurs prodiges ou tout simplement certaines personnes rompues en calcul mental et rapide savent aisément "extraire", la racine cubique (exacte) de tout naturel n'excédant pas neuf chiffres.

Tout d'abord, voici quelques remarques préliminaires :

$$\begin{array}{ll} 1^3 = 1 & 9^3 = 729 \\ 10^3 = 1000 & 99^3 = 970299 \\ 100^3 = 1000000 & 999^3 = 997002999 \end{array}$$

Nous en déduisons la règle :

(R 1) - A étant le cube du naturel $\boxed{a}$:

Si A a au plus trois chiffres, $\boxed{a}$ a au plus 1 chiffre

Si A a au plus six chiffres, $\boxed{a}$ a au plus 2 chiffres

Si A a au plus neuf chiffres, $\boxed{a}$ a au plus 3 chiffres

Le chiffre des unités de A nous donne immédiatement le chiffre des unités de a. Examinons le tableau :

(T)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>27</u>	<u>64</u>	<u>125</u>	<u>216</u>	<u>343</u>	<u>512</u>	<u>729</u>

Il nous montre que :

R 2

Si A se termine par

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Alors $\sqrt[3]{A}$ se termine par

0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Expliquons maintenant sur deux exemples courant on peut trouver mentalement (ou presque) la racine cubique exacte d'un naturel n'excédant pas 9 chiffres.

RACINE CUBIQUE DE 300763

3	0	0	7	6	3
---	---	---	---	---	---

A ayant 6 chiffres ; $\sqrt[3]{A}$ a donc deux chiffres.

A se termine par un (3), donc $\sqrt[3]{A}$ se termine par un (7) $\sqrt[3]{A}$ est donc de la forme $\overline{d7}$.

C'est la tranche de trois chiffres de gauche, ici $\boxed{300}$ qui nous renseigne donc sur le chiffre des dizaines de $\sqrt[3]{A}$.

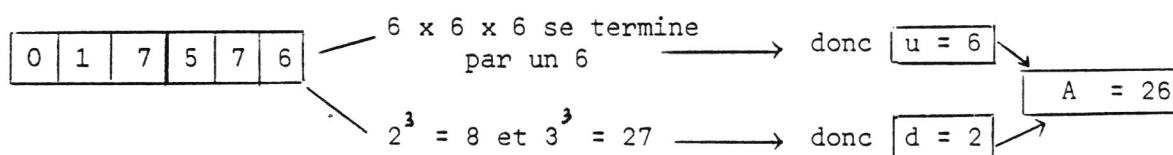
$$216 < 300 < 343 \quad \text{donc} \quad d = 6$$

Il s'ensuit que $\sqrt[3]{A} = 67$.

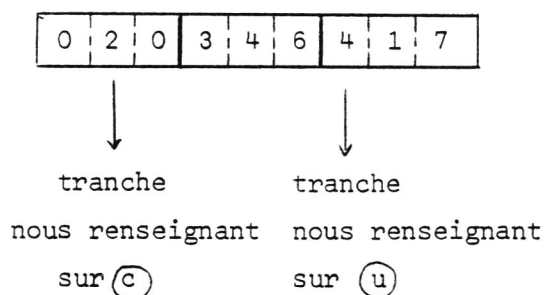
Pour réaliser mentalement ce calcul, il suffit de mémoriser le tableau (T)

- * en ce qui concerne les chiffres des unités ;
- * en ce qui concerne le nombre de dizaines des cubes successifs (du moins un ordre de grandeur).

Prenons un autre exemple : $A = 17\,576$. Voici l'organigramme des "calculs" à réaliser rapidement de tête :



RACINE CUBIQUE DE 20346417



A a huit chiffres donc $\sqrt[3]{A}$ un naturel de trois chiffres ; appelons-le $\overline{cdu}$.

1) La dernière tranche $\boxed{4\,1\,7}$ nous livre le chiffre (u) des unités :
 $u = 3$ (mentalement, on pense à $3^3 = 27$)

2) La première tranche $\boxed{0\,2\,0}$ nous livre, à son tour, le chiffre (C) des centaines de $\sqrt[3]{A}$:

$$\underline{C = 2} \quad \text{car} \quad 8 < 20 < 27$$

Malheureusement, ce n'est pas la tranche médiane de 3 chiffres qui nous donne le chiffre des dizaines de $\sqrt[3]{A}$!!

Pour cela, il suffit de faire encore appel aux congruences!

3) Pensons d'abord aux congruences modulo 9

Si $x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 \pmod{9}$
 alors $x^3 = 0 ; 1 ; 8 ; 0 ; 1 ; 8 ; 0 ; 1 ; 8 \pmod{9}$

Dans notre cas $A = 0 \pmod{9}$ donc $\sqrt[3]{A} = 0 ; 3 \text{ ou } 6 \pmod{9}$

$$a \quad \sqrt[3]{A} = 2 + d + 3 \pmod{9}$$

Il s'ensuit que $2 + d + 3 = 0 ; 3 ; \text{ ou } 6 \pmod{9}$

$$\text{donc } \underline{d = 4 \text{ ou } d = 7 \text{ ou } d = 1}$$

Il y a donc indétermination.

Il nous faut trouver un "module" tel qu'il y ait une bijection entre les restes respectifs de x et x^3 .

C'est le cas de congruences modulo 11

Si $x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\pmod{11}$
alors $x^3 =$	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10	$\pmod{11}$

Reprenons notre exemple

$$A = \underbrace{(7 + 4 + 4 + 0)}_{\text{chiffres de rang impair}} - \underbrace{(1 + 6 + 3 + 2)}_{\text{chiffres de rang pair}} \pmod{11}$$

chiffres de rang impair chiffres de rang pair

$A = 3 \pmod{11}$ donc $\sqrt[3]{A} = 9 \pmod{11}$. Bien entendu, il faut connaître par cœur la correspondance des restes du tableau précédent....

$$\text{Or } \sqrt[3]{A} = (3+2) - d \pmod{11}$$

$$\text{soit } 5 - d = 9 \pmod{11}$$

d est donc égal à 7

En résumé :

Il y a 3 bons outils d'extraction (de racines).

premier outil : la contemplation raisonnée du chiffre des unités.

deuxième outil : la prise en considération de l'ordre de grandeur.

troisième outil : l'emploi d'une congruence d'un adéquat modulo.

A chaque outil, son chiffre !

LE JOUR DE LA SEMAINE

I- Le truc

Quel jour de la semaine était le 13 mai 1958 ?

Pour répondre mentalement à cette question, il vous suffit d'additionner 4 nombres et de faire une division par 7 ; et aussi de connaître une liste de 12 chiffres associés au 12 mois de l'année.

Voici cette liste :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Voici maintenant ce que vous avez à faire :

- Additionner successivement les 4 nombres suivants :

. Le numéro du jour :	13
. Le nombre associé au mois :	1
(Ici : 1)	
. Le nombre d'années (après 1900) :	58
. Le nombre d'années bissextiles passées depuis 1900 : c'est-à-dire le quotient (entier) du nombre d'années par 4.	
(Ici : $4 \times 14 = 56$)	14
	86

- Chercher le reste de la division par 7 de 86 :

$$86 - 70 = 16$$

$$16 - 14 = \underline{2}$$

- Si le résultat est 1, c'est un lundi

2	mardi		
3	mercredi		
4	jeudi	6	samedi
5	vendredi	0	dimanche

- 45 -

II- L'explication

Le calcul précédent équivaut en fait au calcul du nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier 1900. Il se trouve que ce jour était un lundi.

Combien de jours sont passés depuis, et cela à un multiple de 7 près puisqu'on ne s'intéresse qu'au jour de la semaine ?

. 1 an normal équivaut à 1 jour :

en effet $365 = 7 \times 52 + \underline{1}$

C'est pourquoi l'un des quatre nombres à ajouter est le nombre d'années passées depuis 1900 (au 1er janvier de l'année considérée : le 1er janvier 1901, un an est passé....).

. 1 jour bissextile équivaut à 1 jour de plus.

C'est pourquoi il faut ajouter le nombre d'années bissextiles passées depuis 1900 (1900 ne l'était pas et ensuite tous les multiples de 4 le sont)

Ici il faut apporter un correctif :

A Si on est dans une année bissextile avant le 1er mars, il ne faut pas compter le jour bissextile qui n'est pas encore passé !

ex : le 18 février 1932 . 18

. 3

. 32

. 7 et non pas 8 ($8 \times 4 = 32$)

50 = $49 + \underline{1}$ Lundi

. On ajoute aussi le nombre de jours passés depuis le premier janvier :

En janvier, c'est simplement le numéro du jour.

En février, c'est le numéro du jour + 31

c'est-à-dire 3

(car $31 = 4 \times 7 + 3$)

En mars, // + 28

// $3 + 0 = \underline{3}$

En avril, // + 31

// $3 + 3 = \underline{6}$

En mai, // + 30

$6 + 2 = 8$

c'est-à-dire 1

..... ainsi de suite, les nombres associés au mois correspondent donc aux nombres de jours écoulés entre le 1er janvier et le 1er du mois, nombre que l'on rajoute donc au nombre de jours écoulés depuis le 1er du mois (numéro du jour).

Et voilà !

LE COMPTE EST BON

La règle

Ce jeu télévisé bien connu consiste à tirer au hasard 6 "plaques" sur chacune desquelles est inscrite un nombre. La distribution des plaques est la suivante :

2 plaques de chacun des nombres de 1 à 10

1 plaque de chacun des nombres : 25, 50, 75, 100.

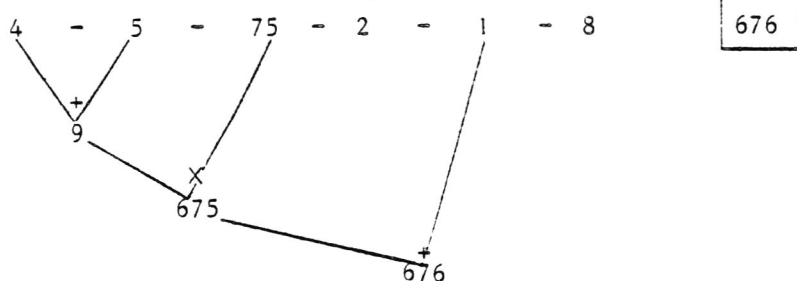
Un nombre "résultat" de 100 à 999 est alors tiré au hasard.

Il s'agit d'obtenir ce résultat ou, au moins, de s'en rapprocher le plus possible, à partir des 6 nombres-plaques en les multipliant, divisant, soustrayant ou additionnant.

L'écriture du résultat.

Une fois le résultat trouvé, il est manifeste que la meilleure manière de le communiquer est de dessiner un "arbre" représentant l'organisation des opérations.

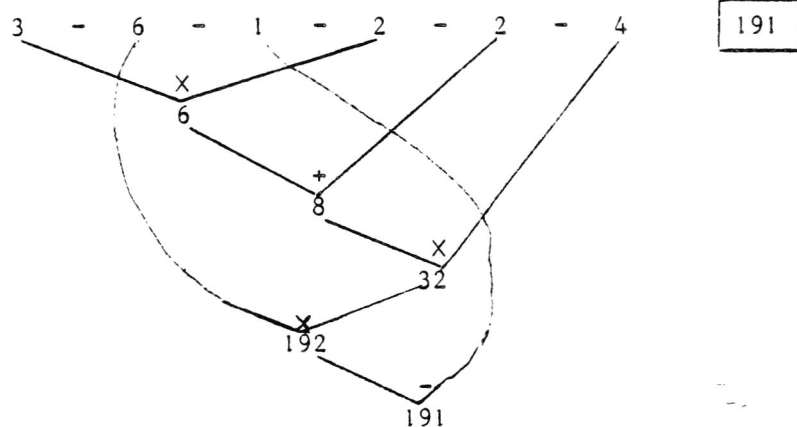
Comme ceci :



Cet arbre est un bon prélude à l'écriture parenthétique :

$$(4 + 5) \times 75 + 1 = 676$$

Remarque : Si l'ordre des nombres n'est pas "bon", quelques branches de l'arbre se coupent :



- 47 -

$$\boxed{\boxed{3 \times 2} + 2} \times 4 \times 6 - 1 = 191$$

Les stratégies d'atteinte de l'objectif.

Avec quelques enfants d'un petit club de maths, nous avons cherché à caractériser quelques stratégies. Chacun peut avoir ses préférences. Voici celles que nous avons dégagées :

- d'abord, nous avons précisé notre vocabulaire :

100, 75, 50 sont de très grands nombres

50, 25, 10 sont de grands nombres

9, 8, 7, ..., 1 sont de petits nombres

- Stratégies :

M Essayer d'approcher le résultat en multipliant par le plus grand nombre.

- 100 - 9 - 6 - 8 - 5 - 2 944
 Le plus grand nombre est 100, on essaie d'atteindre 900.....
 $[(100 + 9) + (8 \times 5)] + (6 - 2)$ M +

- 9 - 3 - 10 - 6 - 2 - 1 568
 Le plus grand nombre est 10, on essaie d'atteindre 560 ou 570.....
 $10 \times [(6 \times 9) + 3] - 2$ M -

MP S'il y a un deuxième grand nombre, on essaie de s'approcher plus près du résultat en le multipliant.

- 1 - 100 - 3 - 6 - 2 - 25 447
 On peut utiliser
 $100 \times (6 - 1) - [(2 \times 25) + 3]$ M -
 Mais on s'approche plus facilement avec $18 \times 25 = 450$
 $25 \times [3 \times 6] - 2 - 1$ MP -

AM Si la technique M amène trop loin du résultat on ajoute ou on soustrait un nombre avant de faire la multiplication.

- 100 - 9 - 6 - 8 - 5 - 2 944
 Avec 9×100 il manque 44 ; vu le multiplicateur 9, il serait

- 48 -

bon d'ajouter 5 à 100 ; reste à fabriquer 1 :

$$9 \times [100 + 5] + (8 - 6)/2 \quad \text{AM -}$$

$$- \quad 25 - 7 - 100 - 9 - 75 - 5 \quad \boxed{569}$$

La technique M et MP avec 100 tombe mal.

Par contre $75 \times 5 = 525$, manquent 44, facile à faire avec 5, 7 et 9 :

$$5 \times [75 + 7] + 9 \quad \text{AMP +}$$

MG	S'il n'y a pas de très grands nombres on peut s'en fabriquer à partir de 10 ou 25.
----	--

$$- \quad 10 - 3 - 25 - 6 - 7 - 5 \quad \boxed{809}$$

750 n'est pas loin ; on utilise aussi A pour arriver au-delà de 800 :

$$10 \times [(25 \times 3) + 7] - (6 + 5) \quad \text{AMG -}$$

D	Si tous les nombres tirés sont inférieurs à 10, on divise le résultat par le plus grand nombre, ou par un plus petit (DP) ; si ça tombe juste on continue. Sinon, on essaie d'ajouter ou de soustraire ce qu'il faut au résultat pour que ça tombe juste (DR).
---	--

$$- \quad 3 - 6 - 1 - 2 - 2 - 4 \quad \boxed{191}$$

191 n'est pas divisible par 6 mais 192 oui :

$$6 \times [4 \times [(2 \times 3) + 2]] - 1 \quad \text{DR}$$

Pour trouver 32 comme résultat intermédiaire, la technique (D) est encore utilisée.

Il arrive en effet souvent que les techniques s'emboîtent l'une dans l'autre pour rechercher un résultat intermédiaire. Par exemple :

$$- \quad 2 - 4 - 9 - 8 - 6 - 10 \quad \boxed{569}$$

$$10 \times \boxed{56} + 9 \quad \text{M +}$$

Reste le problème

$$2 - 4 - 8 - 6 \quad \boxed{56}$$

$$56 = 8 \times [(6 : 2) + 4] \quad \text{D}$$

$$\text{ou bien } 56 = 4 \times (8 + 6) \quad \text{DP}$$

R	Si le chiffre des unités du résultat paraît difficile à obtenir, on cherche une petite multiplication pour le faire apparaître.
---	---

$$- \quad 4 - 5 - 100 - 50 - 9 - 75 \quad \boxed{631}$$

- 49 -

$9 \times (4 + 5) = 81$, les unités sont obtenues mais tous les petits nombres sont utilisés. Il faut "anticiper" :

$$9 \times [(4 + 5) + 50] + 100$$

(AM + R)

$$- \quad 2 - 10 - 100 - 3 - 2 - 7$$

431

$$(2 \times 2 \times 100) + 10 + [3 \times 7]$$

(MR)

EN RESUME :

Il y a deux grandes classes de stratégies.....

- M : multiplier les grands nombres pour s'approcher au plus près.
(il faut avoir dans la tête la table des 75)

- D : repérer une division intéressante aboutissant à un quotient intermédiaire plus simple.

(il faut avoir dans la tête les multiples de 7 et 8)

.....sur lesquelles se greffent quelques tactiques particulières :

- G : se fabriquer des grands nombres à partir des plus petits.

- P : ne pas utiliser le nombre le plus grand mais un plus petit plus pratique.

- R : modifier légèrement le résultat par une opération avec des petits termes.

- A : anticiper en modifiant un facteur avant multiplication

Si les nombres sont très petits et le résultat très grand, la question qui se pose est la suivante :

Quel est le résultat maximum atteignable avec les 6 nombres ?

$$1 - 2 - 1 - 4 - 5 - 2$$

934

dans $\mathbb{N}$:

$a + b$ est inférieur ou égal à $a \times b$ dès que a ou b est plus grand que 1. Il y a donc intérêt à ne faire que des multiplications après avoir ajouté les 1 aux plus petits nombres :

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times 4 \times 5 = 180$$

Dans un cas plus général, il est en général très difficile de démontrer l'impossibilité d'atteindre un résultat qui résiste à nos efforts.

- 50 -

A vous de jouer :

$$A- \quad 25 - 8 - 10 - 3 - 1 - 7 \quad \boxed{762}$$

$$B- \quad 6 - 6 - 5 - 9 - 50 - 2 \quad \boxed{310}$$

$$C- \quad 7 - 8 - 1 - 100 - 1 - 4 \quad \boxed{925}$$

$$D- \quad 2 - 9 - 6 - 5 - 3 - 50 \quad \boxed{707}$$

$$E- \quad 9 - 25 - 75 - 5 - 4 - 100 \quad \boxed{684}$$

$$F- \quad 4 - 10 - 7 - 7 - 5 - 3 \quad \boxed{177}$$

Réponses :

$$A- \textcircled{\text{DAR}} \quad 3 \times [(10 \times 25) - 1] + 8 + 7$$

$$B- \textcircled{\text{M}} \quad (6 \times 50) + (2 \times 5)$$

$$C- \textcircled{\text{DR}} \quad 7 \times [100 + (8 \times 4)] + 1$$

$$D- \textcircled{\text{M+}} \quad 50 \times (9 + 5) + 6 + 3 - 2$$

$$E- \textcircled{\text{D}} \quad 9 \times \left[75 + \frac{4 \times 25}{100} \right]$$

$$\textcircled{\text{MPR}} \quad 25 \times (100 - 75) + 50 + 9$$

$$F- \textcircled{\text{M+}} \quad 10 \times [(3 \times 7) - 4] + 7$$

