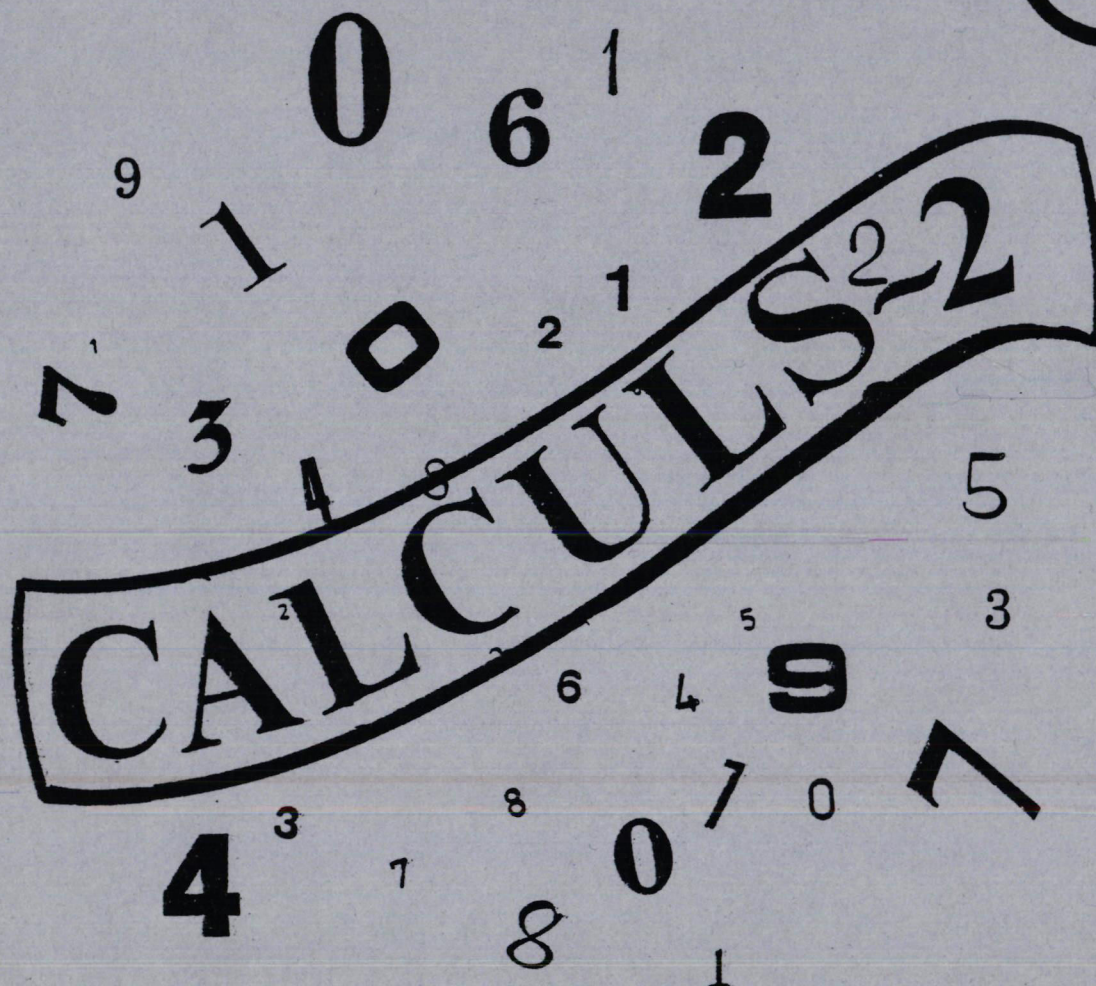


IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITE PARIS VII

12



par A. DELEDICQ et A. MYX

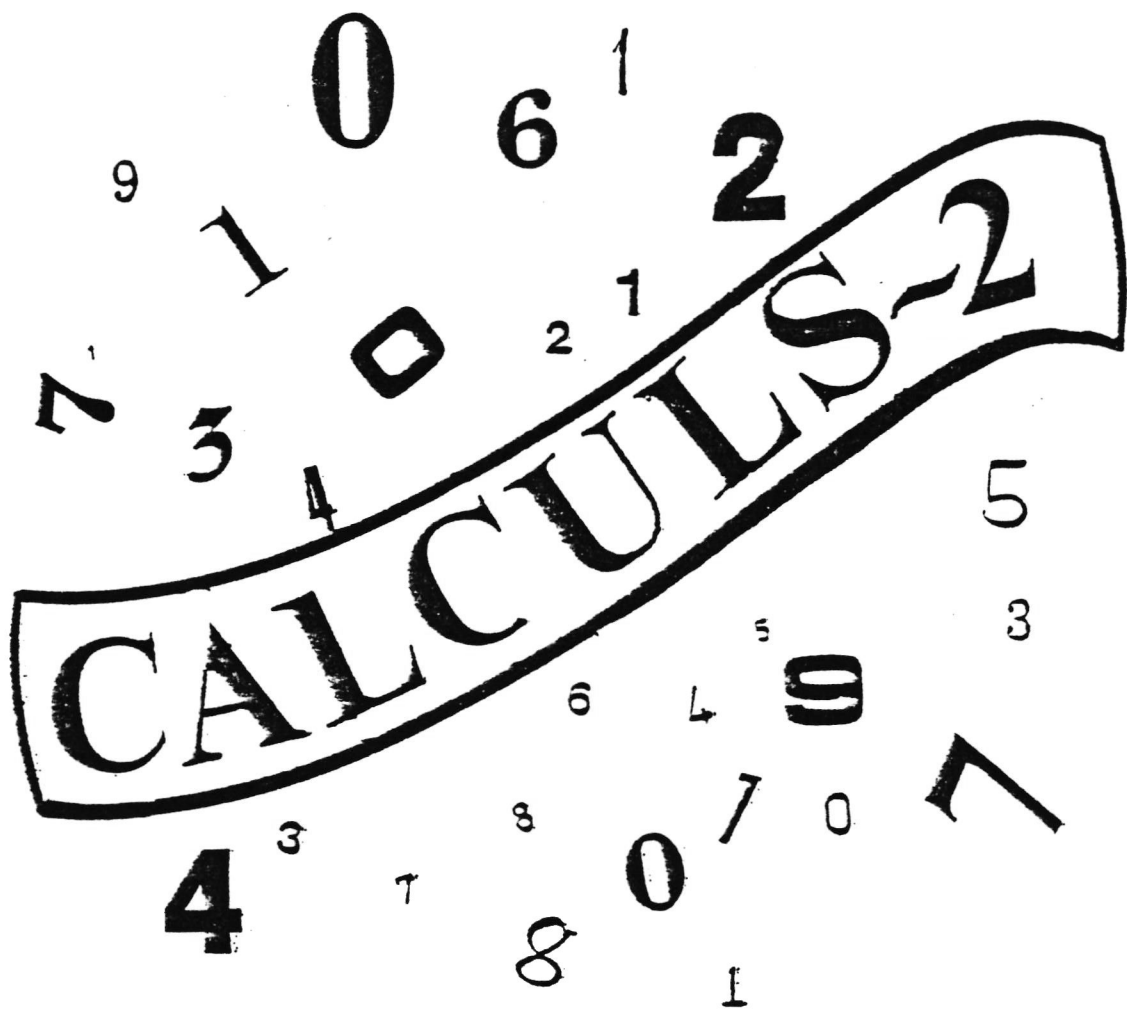
J. SAUVAGEOT G. MOUNIER.

NIVEAU

PUBLIC

SUJET

OBJECTIF



par A. DELEDICQ et A. MYX

J. SAUVAGEOT G. MOUNIER.

CETTE BROCHURE PRÉSENTE QUELQUES ACTIVITÉS NUMÉRIQUES DU NIVEAU " DEUXIÈME CYCLE DU SECONDAIRE ".

CES ACTIVITÉS SONT GROUPEES EN SIX FICHES :

- LES FICHES 1 ET 2 FONT APPEL À DES CALCULS DE CONGRUENCES.
- LES FICHES 3 ET 4 MONTRENT QUELQUES CALCULS ITÉRATIFS ABOUTISSANT À LA RESOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS.
- LES FICHES 5 ET 6 DONNENT QUELQUES INFORMATIONS SUR DES APPROXIMATIONS CLASSIQUES.

ON TROUVERA ENSUITE DE LA PAGE 41 À 74, L'APPROFONDISSEMENT DE LA NOTION DE FRACTION CONTINUE.

NOUS AVONS REUNI DANS CE DOCUMENT A LA FOIS DES EXEMPLES PRATIQUES, UN EXPOSE THEORIQUE ELEMENTAIRE ASSEZ COMPLET ET DES APPLICATIONS PARMI LES PLUS IMPORTANTES.

S O M M A I R E

FICHE 1 -	ALGORITHMES DE DIVISIBILITE	Page 5
	LES CARACTERES DE DIVISIBILITE	Page 11
FICHE 2 -	PRISE DE RACINES (méthode mentale et rapide)	Page 15
FICHE 3 -	ITERATIONS	Page 23
	LA DUPLICATION DU CUBE	Page 30
FICHE "OUVERTE"	4- EQUATIONS DU SECOND DEGRE	Page 33
FICHE "INFORMATION"	5- $(1 + h)^n$ et $(1 + nh)$	Page 35
FICHE "INFORMATION"	6- DERIVABILITE ET LINEARITE DES PETITS AGGROISSEMENTS	Page 37
FRACTIONS CONTINUES		Page 41
	LES FICHES 1-2-3 SONT DE A. DELEDICQ ET A. MYX.	
	LES FICHES 4-5-6 SONT DE A. DELEDICQ	
	L'EXPOSE SUR LES FRACTIONS CONTINUES EST COMPOSE D'ARTICLES DE J. SAUVAGEOT, G. MOUNIER ET A. MYX.	

CALCUL NUMERIQUE / FICHE N° 1

ALGORITHMES DE DIVISIBILITE

Voici schématisés quelques algorithmes pour décider si un nombre est multiple de 3, 7, 11, 13, 17 ou 19.
Faire des essais et démontrer les validations indiquées en marge.

(A1) Divisibilité par 3

$$\begin{array}{r} 4275 \\ + \quad 5 \swarrow \\ \hline 432 \\ + \quad 2 \swarrow \\ \hline 45 \\ + \quad 5 \swarrow \\ \hline 9 \end{array}$$

9 est un multiple de 3, donc 4275 est divisible par 3.

$$\begin{array}{r} 6214 \\ + \quad 4 \swarrow \\ \hline 625 \\ + \quad 5 \swarrow \\ \hline 67 \\ + \quad 7 \swarrow \\ \hline 13 \\ + \quad 3 \swarrow \\ \hline 4 \end{array}$$

4 n'est pas un multiple de 3, donc 6214 n'est pas divisible par 3.

Cette méthode donne-t-elle le reste de la division par 3 d'un naturel ?

(A2) Divisibilité par 7

$$\begin{array}{r} 1976 \quad (x2) \\ - \quad 12 \swarrow \\ \hline 185 \\ - \quad 10 \swarrow \quad (x2) \\ \hline 8 \end{array}$$

8 n'est pas divisible par 7 ; 1976 non plus.

$$\begin{array}{r} 3192 \quad (x2) \\ - \quad 4 \swarrow \\ \hline 315 \quad (x2) \\ - \quad 10 \swarrow \\ \hline 21 \quad (x2) \\ - \quad 2 \swarrow \\ \hline 0 \end{array}$$

0 est multiple de 7, 3192 aussi

. Tout naturel A peut s'écrire sous la forme

$$A = 10D + u$$

← nombre des dizaines
← chiffre des unités

. Recommencer avec 5934 et 29701

Validation :

$$10D + u = \text{mult}3 \Leftrightarrow D + u = \text{mult}3$$

. Recommencez avec 4123 et 1807

Validation

$$10D + u = \text{mult}7 \Leftrightarrow D - 2u = \text{mult}7$$

(A3)

Divisibilité par 11

$$\begin{array}{r}
 563924 \\
 - \quad 4 \quad \swarrow \\
 \hline
 56388 \\
 - \quad 8 \quad \swarrow \\
 \hline
 5630 \\
 - \quad 0 \quad \swarrow \\
 \hline
 563 \\
 - \quad 3 \quad \swarrow \\
 \hline
 53 \\
 - \quad 3 \quad \swarrow \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

56324 n'est pas divisible par 11
 Quel est le reste de 563924 dans sa division
 par 11 ?

(A5) Divisibilité par 19

$$\begin{array}{r}
 327454 \\
 + \quad 8 \quad \swarrow \quad (x2) \\
 \hline
 32753 \\
 + \quad 6 \quad \swarrow \quad (x2) \\
 \hline
 3281 \\
 + \quad 2 \quad \swarrow \quad (x2) \\
 \hline
 330 \\
 + \quad 0 \quad \swarrow \quad (x2) \\
 \hline
 33 \\
 + \quad 6 \quad \swarrow \quad (x2) \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

9 n'est pas un multiple de 19 ;
 327454 n'est donc pas un multiple de
 19

(A4)

Divisibilité par 13

$$\begin{array}{r}
 1313 \\
 - \quad 27 \quad \swarrow \quad (x9) \\
 \hline
 104 \\
 - \quad 36 \quad \swarrow \quad (x9) \\
 \hline
 26 \\
 - \quad 54 \quad \swarrow \quad (x9) \\
 \hline
 52 \\
 - \quad 18 \quad \swarrow \quad (x9) \\
 \hline
 13
 \end{array}$$

1313 est un multiple de 13.....

(A6) Divisibilité par 1728951 ?

$$\begin{array}{r}
 2895 \times 3 + 1 \times 2 = 8687 \\
 868 \times 3 + 7 \times 2 = 2618 \\
 261 \times 3 + 8 \times 2 = 799 \\
 79 \times 3 + 9 \times 2 = 255 \\
 25 \times 3 + 5 \times 2 = 85 \\
 8 \times 3 + 5 \times 2 = 34 \\
 3 \times 3 + 4 \times 2 = 17
 \end{array}$$

28951 est divisible par 17 ...

64438, 502678 et 236370 sont-ils divisi-
 bles par 11 ?

. Validation

$$10D + u = \text{mult}11 \Leftrightarrow (D-u) = \text{mult}11$$

1314, 17628 et 7401 sont-ils multiples
 de 13 ?

. Validation

$$10D + u = \text{mult}13 \Leftrightarrow D-9u = \text{mult}13$$

. 8664 et 5931 sont-ils des multiples
 de 19 ,

. 7752 et 4388 sont-ils des multiples de
 17 ?

Validation de ces deux algorithmes ?

Notions mathématiques

* Divisibilité

* Si $x+y$ est multiple de n : x multiple de $n \Leftrightarrow y$ multiple de n * Si a divise bc et a premier avec b
alors a divise c .A 1 Divisibilité par 3

$\begin{array}{r} 5934 \\ \underline{4} \\ 597 \\ \underline{7} \\ 66 \\ \underline{6} \\ 12 \\ \underline{2} \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 29701 \\ \underline{1} \\ 2971 \\ \underline{1} \\ 298 \\ \underline{8} \\ 37 \\ \underline{7} \\ 10 \\ \underline{0} \\ 1 \end{array}$
---	---

. 5934 est divisible par 3

29701 n'est pas divisible par 3 (l'algorithme donne ici un renseignement supplémentaire : le reste de la division euclidienne de 29701 par 3 est 1)

. Validation du critère :

Elle repose sur l'équivalence

$10D + u = \text{mult } 9 \Leftrightarrow D + u = \text{mult } 9$

(démonstration évidente : $10D = 9D + D$)

. D'autre part :

 $10D + u \equiv D + u \pmod{3}$ - L'algorithme fournit donc également le reste de la division du naturel par 3.
A 2 Divisibilité par 7

$\begin{array}{r} 4123 \\ - 6 \\ \hline 406 \\ - 12 \\ \hline 28 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1807 \\ - 14 \\ \hline 166 \\ - 12 \\ \hline 4 \end{array}$
---	---

. 4123 est divisible par 7 puisque 28 l'est.

1807 n'est pas divisible par 7 puisque 4 ne l'est pas (mais le reste de 1807 par 7 est 1 et non 4).

. Validation : elle repose sur

$10D + u = \text{mult } 7 \Leftrightarrow D - 2u = \text{mult } 7$

 La démonstration de cette équivalence est facilitée si l'on observe que $2(10D+u) + (D-2u) = (3D) \times 7$

(A 1)

A3 Divisibilité par 11

502678	236370
- 8	- 7
50259	2356
- 9	- 6
5016	229
- 6	- 9
495	13
- 5	
44	
- 4	
0	

- 502678 est un multiple de 11;
- 236370 ne l'est pas puisque 13 ne l'est pas

. Validation : elle repose sur

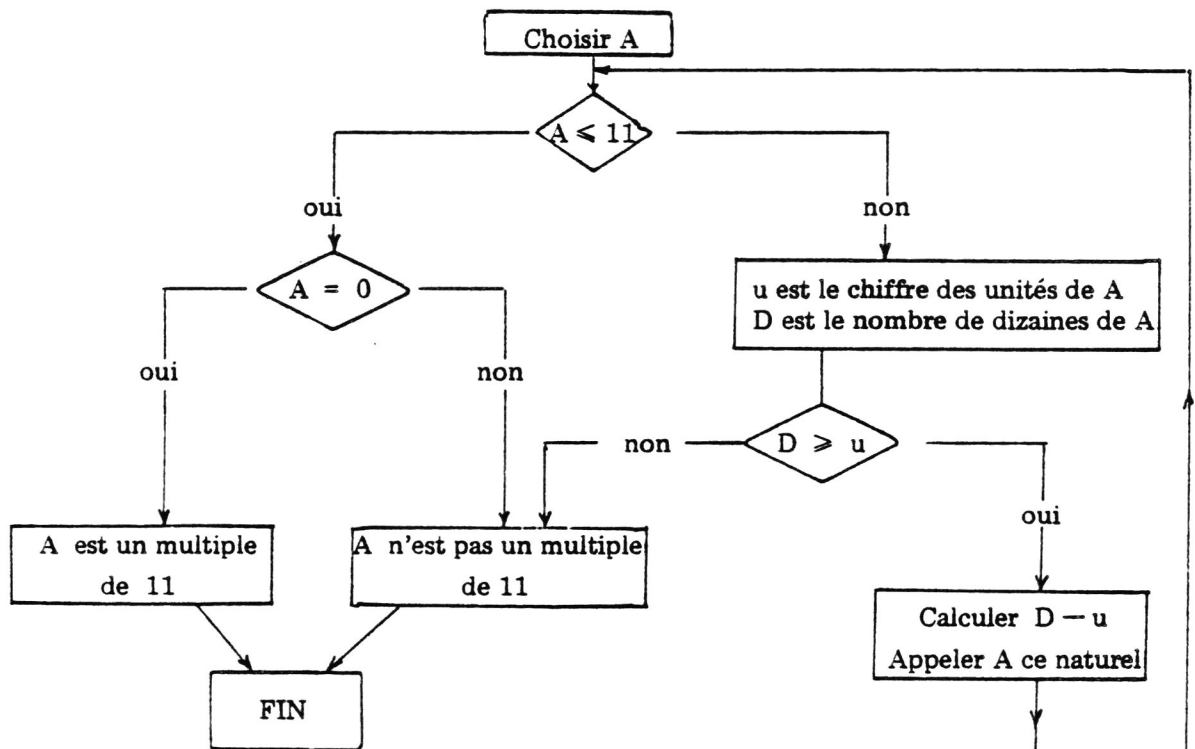
$$10D + u = \text{mult } 11 \iff D - u = \text{mult } 11$$

Pour cela remarquons que

$$10D + u + (D - u) = 11D$$

- Le procédé ne donne pas le reste de la division par 11 ... mais presque si l'on remarque que $10D + u \equiv -(D - u) \pmod{11}$

. Les algorithmes présentés dans ces documents peuvent donc être exposés sous la forme d'organigrammes. Voici un organigramme possible pour le cas de la divisibilité par 11.



A 4 Divisibilité par 13

$$\begin{array}{r}
 1762\cancel{8} \\
 - \quad 72 \\
 \hline
 169\cancel{0} \\
 - \quad 0 \\
 \hline
 16\cancel{0} \\
 - \quad 54 \\
 \hline
 26
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 740\cancel{1} \\
 - \quad 9 \\
 \hline
 73\cancel{1} \\
 - \quad 9 \\
 \hline
 6\cancel{4} \\
 - \quad 36 \\
 \hline
 3\cancel{0} \\
 - \quad 0 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

. 17628 est un multiple de 13 tout comme 26.
 7401 n'est pas un multiple de 13 tout comme 3.

. L'algorithme repose sur l'équivalence :

$$10D + u = \text{mult } 13 \iff (D - 9u) = \text{mult } 13$$

elle même démontrée aisément si on observe que

$$9(10D + u) + (D - 9u) = (7D) \times 13$$

A 5 Divisibilité par 17 et 19

Sur ces deux exemples, montrons que la démonstration du critère peut exiger ou non l'emploi du théorème de Gauss :

Si a divise (bc)

et a premier avec b , alors a divise c .

Divisibilité par 19:

8664 est un multiple de 19 ($8664 = 19 \times 456$)

5931 n'est pas un multiple de 19.

Validation du critère :

$$(10D + u) = \text{mult } 19 \iff D + 2u = \text{mult } 19$$

$$\bullet \quad 10D + u = k19 \implies 20D + 2u = (2k)19 \implies D + 2u = (2k - D)19$$

et

$$\bullet \quad D + 2u = h19 \implies 10D + 20u = (10h)19 \implies 10D + u = (10h - u)19$$

Nous n'avons pas eu besoin du théorème de Gauss.

Divisibilité par 17 :

7752 = 17×456 est un multiple de 17

4388 n'est pas un multiple de 17.

Validation du critère :

$$(10D + u) = \text{mult } 17 \iff 3D + 2u = \text{mult } 17$$

Sa démonstration peut reposer sur l'égalité :

$$2 (10D + u) - (3D + 2u) = 17D$$

. Si $10D + u$ est un multiple de 17; il en est de même donc pour $(3D + 2u)$

. Si $3D + 2u$ est un multiple de 17, on a

$$2 (10D + u) = 17k + 17D$$

$$2 (10D + u) = 17 (k + D)$$

17 divise $2 (10D + u)$ et 17 et 2 sont premiers entre eux, donc 17 divise $10D + u$.

ANNEXE : Réalisation d'autres algorithmes

Il est intéressant de voir comment on peut déterminer d'autres critères de divisibilité.

Pour cela, il faut chercher (ou se donner ...) quatre entiers m, n, p, q tels que :

$$\forall D \quad \forall u \quad m(10D + u) + n(pD + qu) \equiv 0 \quad (\text{modulo } \delta)$$

δ étant un naturel donné.

Voici deux exemples :

$$\bullet \quad 3(10D + u) + (D - 3u) \equiv 0 \quad (\text{modulo } 31)$$

$$\bullet \quad 3(10D + u) - (D + 3u) \equiv 0 \quad (\text{modulo } 29)$$

que le lecteur pourra exploiter

A lui d'en trouver d'autres !

LES CARACTERES DE DIVISIBILITE

1 . La division n'est pas une opération tout à fait comme les autres, on pourrait dire qu'elle a 2 résultats : le quotient et le reste.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 5 \\ \underline{2} \quad | \quad 3 \\ \text{reste} \quad \text{quotient} \end{array} \quad 17 = 5 \times 3 + 2$$

Lorsque nous ne faisons ainsi intervenir que des entiers naturels, nous parlons de la division entière d'un naturel par un autre (ou "division euclidienne").

Intéressons nous, pour une fois, non pas au quotient de la division entière, mais plutôt au reste. Nous schématiserons ainsi notre opération et son résultat : 17 $\xrightarrow{\text{reste de la division par 5}}$ 2

en abrégé :

$$17 \xrightarrow{r_5} 2$$

Complète les schémas :

$$\begin{array}{l} 1000 \xrightarrow{r_9} \\ 100 \xrightarrow{r_9} \\ 10 \xrightarrow{r_9} \\ 1 \xrightarrow{r_9} \\ 17 \xrightarrow{r_{12}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 327 \xrightarrow{r_{100}} \\ 89 \xrightarrow{r_{10}} \\ 327 \xrightarrow{r_{10}} \\ 365 \xrightarrow{r_7} \\ 365 \xrightarrow{r_{52}} \end{array}$$

2 . Le reste de la division entière a une propriété assez extraordinaire. Regarde :

$$\begin{array}{r} 174 \xrightarrow{r_5} 4 \\ + \quad 1243 \xrightarrow{r_5} 3 \\ \hline 1417 \xrightarrow{r_5} ? \end{array}$$

Il revient au même :

- . d'additionner 2 nombres et de calculer ensuite le reste de la division entière de la somme 5
- . ou de calculer d'abord les restes de leurs division entière par 5 et de faire leur somme.

Invente des vérifications analogues à celle que nous avons faite (tu peux changer les nombres que tu additionnes, ou alors tu peux changer le diviseur ; ou encore tu peux essayer avec des soustractions). Bref : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$
 $25(x+y) = 25(x)+25$

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \times 39 \\
 \hline
 216 \\
 72 \\
 \hline
 936
 \end{array}$$

$24 \xrightarrow{r_7} 3$
 $39 \xrightarrow{r_7} 4$
 $936 \xrightarrow{r_7} 5$

The remainders are 3, 4, and 5. The remainder for the product is 12.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}: \quad r_2(xy) = r_2[r_2(x) \times r_2(y)]$$

Diagram illustrating the reduction of a 3x3 matrix to upper triangular form using row operations:

$$\begin{bmatrix} 365 & 78 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Row operations shown:

- $r_1 \rightarrow r_2$
- $r_1 \rightarrow r_3$
- $r_2 \rightarrow r_3$

The resulting matrix is:

$$\begin{bmatrix} 365 & 78 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et de la division entière par 2 ?

- 5 . Nous allons appliquer ces connaissances pour chercher les cas où la division "tombe juste".

Rappelle toi, d'abord, qu'un nombre se décompose en unités, dizaines, centaines.

Exemple : $1789 = 1000 \cdot 1 + 100 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 9$

Et donc, pour connaître le reste de la division entière de 1789 par 9, il suffit de connaître les restes de 1000, 1, ¹⁰⁰7, 10, 8 et 9 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1000 \cdot 1 & + & 100 \cdot 7 & + & 10 \cdot 8 & + & 9 \\
 \downarrow r_9 & & \downarrow r_9 & & \downarrow r_9 & & \downarrow r_9 \\
 1 \cdot 1 & + & 1 \cdot 7 & + & 1 \cdot 8 & + & 9 = 25 \\
 & & & & & & \downarrow r_9 \\
 & & & & & & 7
 \end{array}$$

Tu as vérifié ^{déjà} que 10, 100, 1000, 10000, ... avaient tous : 1 pour reste de division entière par 9. Donc :

Le reste de la division entière par 9 d'un nombre est égal au reste de la somme de ces chiffres.

Si ce reste est nul, le nombre est donc divisible par 9.

Nous venons d'inventer un "caractère de divisibilité par 9"

Le "caractère de divisibilité par 3" est identique car :

$$\begin{array}{ccc}
 10 & \xrightarrow{r_3} & 1 \\
 100 & \xrightarrow{r_3} & 1 \\
 1000 & \xrightarrow{r_3} & 1
 \end{array}$$

Le caractère de divisibilité par 7 est plus rigolo.

Comprends d'abord ces schémas :

$$\begin{array}{l}
 10 \xrightarrow{r_7} 3 \\
 100 = 10 \times 10 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 3 \times 3 = 9 \longrightarrow \boxed{2} \\
 1000 = 100 \times 10 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \boxed{2} \times 3 = 6 \longrightarrow \boxed{6} \\
 10000 = 1000 \times 10 \\
 \downarrow \\
 \boxed{6} \times 3 = 18 \longrightarrow \boxed{4} \\
 100000 = 10000 \times 10 \\
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \boxed{4} \times 3 = 12 \longrightarrow \boxed{5}
 \end{array}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\diamond 5$ $\times 3 = 15 \longrightarrow 1$ et ça recommence

par 7 : multiplie le chiffre des unités par 1

" " cent milliers par 5

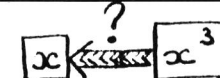
La somme de ces produits doit être divisible par 7

par 12: le nombre doit être divisible par 4 et par 3

par 2,5,10, 4,8,11, justifie les caractères de divisibilité marqués d'une *

8 . Remplis le tableau suivant en mettant 1 ou 0 selon qu'il y a divisibilité ou pas

[illegible]



(R1) Un premier cas tout simple : x^3 a 6 chiffres au plus

Faire une table des applications suivantes, pour $0 \leq a \leq 9$

$a \rightarrow a^3 \rightarrow$ ordre de grandeur de a	chiffre des unités de $a \rightarrow$ chiffre des unités de a^3
$2 \rightarrow 8 \rightarrow 10$	$3 \rightarrow 7$
$6 \rightarrow 216 \rightarrow 200$	

- Trouvez mentalement les racines cubiques des naturels suivants : 753571 ; 79507 ; 3375 ; 46656 ; 658503 ; 681452 ; 328509
- Pour chaque "racine" ainsi trouvée, en calculer le cube et découvrir un piège caché dans la question précédente. Conclure !

(R2) Un cas plus délicat : x^3 a 7, 8 ou 9 chiffres

Pour trouver les chiffres des dizaines de x , cherchons les restes de la division par 9 de x et de x^3 . Ils sont rapides à obtenir :

Si $x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
alors $x^3 \equiv$				0					

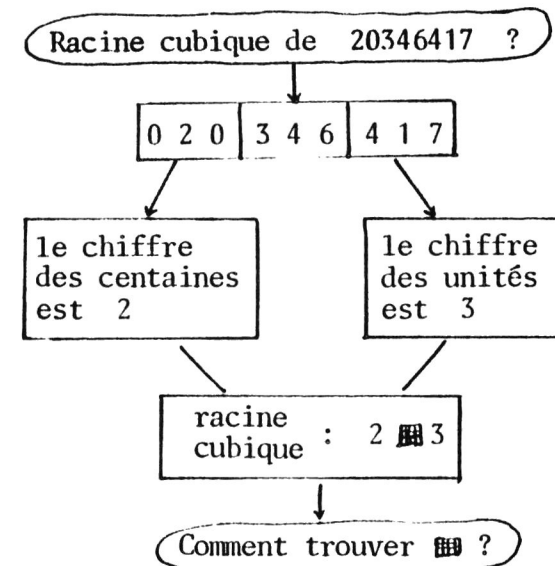
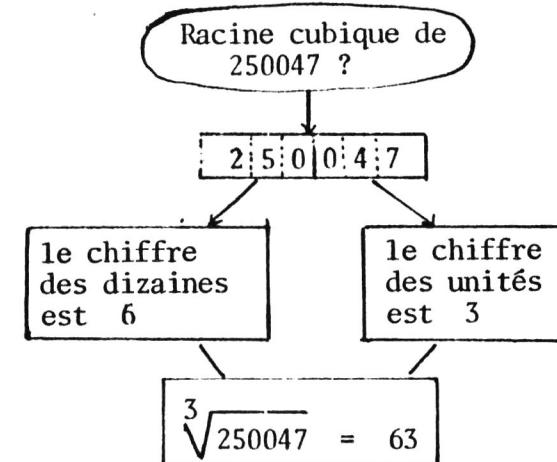
} modulo 9

Peut-on en déduire le chiffre $\blacksquare$?

Chercher, de même, les restes des divisions par 11.

Peut-on en déduire le chiffre $\blacksquare$?

- Appliquer cette méthode pour trouver mentalement les racines cubiques des naturels suivants : 12812904 ; 17173512 ; 961504803 ; 426957777.



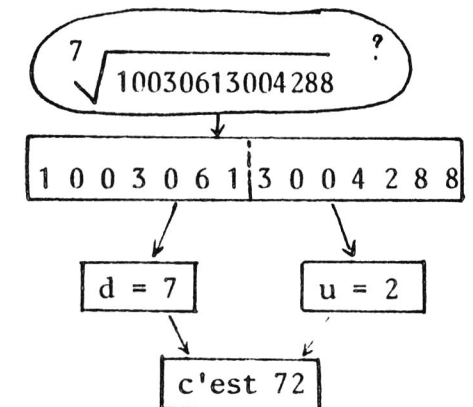
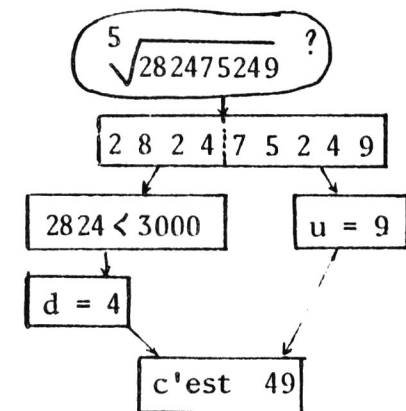
R3) Autres racines n^{ième} ...

Remplir les tableaux; remarquer et utiliser !

Chiffres des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
* de a ³										
de a ⁴										
* de a ⁵										
de a ⁶										
* de a ⁷										

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ordre de grandeur de a ³									
ordre de grandeur de a ⁵				1000	3000	8000			
ordre de grandeur de a ⁷							800000	2000000	

- . Calculer les racines cinquièmes de 6436343 et 550731776.
- . Calculer les racines septièmes de 35831808 et 1801088541.



Notions mathématiques :

- . Applications $x \longrightarrow x^m$ et réciproque.
- . Ordre de grandeur (compatibilité de l'ordre avec la multiplication).
- . Calculs "modulo" 10 (chiffre des unités), 9 ou 11.

Pour plus de détails, voir la brochure I.R.E.M. N° 10 : "Calcul Mental"

. Chiffres

Le cube d'un nombre peut avoir 3 fois plus de chiffres que ce nombre. En effet :

$$0 \leq x < 10 \implies 0 \leq x^3 < 1000$$

$$10 \leq x < 100 \implies 1000 \leq x^3 < 1000000$$

D'où le découpage de x^3 en tranches de 3 chiffres.

Et le découpage de x^n _____ n _____ .

(R1) Racines cubiques d'un naturel de 6 chiffres

L'ordre de grandeur de x^3 permet de trouver le chiffre des dizaines de la racine.
Exemple :

$$40 \leq x < 50 \iff 64000 \leq x^3 < 125000$$

Mentalement, on retient les chiffres "ronds" : 60 et 120. Cela suffit, car, autour de 60, le chiffre des unités, connu par ailleurs, indique si on est encore dans la trentaine (38, 39) ou dans la quarantaine (41, 42) .

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729
ordre de grandeur	1	10	30	60	120	200	350	500	700

. Chiffre des unités

chiffre des unités de $\boxed{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffres des unités de $\boxed{a^3}$	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

. Des exemples :

753 571 79 507 3 375 46 656 658 503
 $\boxed{9 \mid 1}$ $\boxed{4 \mid 3}$ $\boxed{1 \mid 5}$ $\boxed{3 \mid 6}$ $\boxed{8 \mid 7}$

681 452 (En fait $88^3 = 681472$, la technique employée ne repère
 $\boxed{8 \mid 8}$ aucune erreur sur les chiffres intermédiaires !)

328 509
 $\boxed{6 \mid 9}$

(R2) Racines cubiques (exactes) d'un naturel de 9 chiffres

0	2	0	3	4	6	4	1	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---



tranche



tranche

nous renseignant nous renseignant

sur (C)

sur (u)

A a huit chiffres donc $\sqrt[3]{A}$ un
naturel de trois chiffres ; appelons-le
cdu.

1) La dernière tranche $\boxed{4 \mid 1 \mid 7}$ nous livre le chiffre (u) des unités :
u = 3 (mentalement, on pense à $3^3 = 27$)

2) La première tranche $\boxed{0 \mid 2 \mid 0}$ nous livre, à son tour, le chiffre (C) des
centaines de $\sqrt[3]{A}$:

$$\underline{C = 2} \quad \text{car} \quad 8 < 20 < 27$$

Malheureusement, ce n'est pas la tranche médiane de 3 chiffres qui nous donne
le chiffre des dizaines de $\sqrt[3]{A}$!!

Pour cela, il suffit de faire encore appel aux congruences!

(voir annexe)

3) Pensons d'abord aux congruences modulo 9

$$\text{Si } x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 \pmod{9}$$

$$\text{alors } x^3 = 0 ; 1 ; 8 ; 0 ; 1 ; 8 ; 0 ; 1 ; 8 \pmod{9}$$

Dans notre cas $A = 0 \pmod{9}$ donc $\sqrt[3]{A} = 0 ; 3 \text{ ou } 6 \pmod{9}$

$$\text{a } \sqrt[3]{A} = 2 + d + 3 \pmod{9}$$

Il s'ensuit que $2 + d + 3 = 0 ; 3 ; \text{ ou } 6 \pmod{9}$

$$\text{donc } \underline{d = 4 \text{ ou } d = 7 \text{ ou } d = 1}$$

Il y a donc indétermination.

Il nous faut trouver un "module" tel qu'il y ait une bijection entre les restes respectifs de x et x^3 .

C'est le cas de congruences modulo 11

Si $x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(mod 11)
alors $x^3 =$	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10	(mod 11)

Reprenons notre exemple

$$A = \underbrace{(7 + 4 + 4 + 0)}_{\text{chiffres de rang impair}} - \underbrace{(1 + 6 + 3 + 2)}_{\text{chiffres de rang pair}} \pmod{11}$$

$A = 3 \pmod{11}$ donc $\sqrt[3]{A} = 9 \pmod{11}$. Bien entendu, il faut connaître par coeur la correspondance des restes du tableau précédent....

$$\text{Or } \sqrt[3]{A} = (3+2) - d \pmod{11}$$

$$\text{soit } 5 - d = 9 \pmod{11}$$

$$\underline{d \text{ est donc égal à } 7}$$

4) Des résultats :

$$12812904 \longrightarrow \boxed{234}$$

$$17173512 \longrightarrow \boxed{258}$$

$$961504803 \longrightarrow \boxed{987}$$

$$426957777 \longrightarrow \boxed{753}$$

(R3) Et les autres ?

Une technique de calcul mental analogue pourra être appliquée chaque fois qu'il y a bijection entre les chiffres des unités de a et de a^n (*).

chiffre des unités de a		chiffre des unités de a^2		* chiffre des unités de a^3		chiffre des unités de a^4		* chiffre des unités de a^5		chiffre des unités de a^6		* chiffre des unités de a^7
1	$\times 1 \rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	1
2	$\times 2 \rightarrow$	4	$\rightarrow$	8	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	8
3	$\times 3 \rightarrow$	9	$\rightarrow$	7	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	9	$\rightarrow$	7
4	$\times 4 \rightarrow$	6	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	4
5	$\times 5 \rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5	$\rightarrow$	5
6	$\times 6 \rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	6
7	$\times 7 \rightarrow$	9	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	7	$\rightarrow$	9	$\rightarrow$	3
8	$\times 8 \rightarrow$	4	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	8	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	2
9	$\times 9 \rightarrow$	1	$\rightarrow$	9	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	9	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	9

La connaissance de l'ordre de grandeur renseigne sur le chiffre de gauche:

c	c^3	ordre de grandeur de c^3	c^5	ordre de grandeur de c^5	c^7	ordre de grandeur de c^7
1	1	1	1	1	1	1
2	8	10	32	30	128	100
3	27	30	243	250	2187	2000
4	64	60	1024	1000	16384	16000
5	125	120	3125	3000	78125	80000
6	216	200	7776	8000	279936	300000
7	343	350	16807	17000	823543	800000
8	512	500	32768	32000	2097152	2000000
9	729	700	59049	60000	4782969	5000000

Des résultats :

. Racines cinquièmes	64 36343 $\boxed{2,3}$	5507 31776 $\boxed{5,6}$
. Racines septièmes	3 5831808 $\boxed{1,2}$	180 1088541 $\boxed{2,1}$

Pour étendre la technique aux nombres de 3 chiffres, il faut, comme dans le paragraphe 2, trouver de bons modules de congruence.

Annexe

Au siècle dernier, on appelait "congruence modulo n ", une égalité entre classes d'équivalence pour la relation de lien "avoir même reste dans la division par n ".

On écrivait ainsi : $14 \equiv 2 \pmod{6}$

Evidemment cela n'était pas formulé en terme de relation d'équivalence, mais on avait remarqué que les "congruences" pouvaient s'ajouter, se multiplier,... on pouvait "calculer", presque sans précautions, sur les congruences comme sur les égalités.

La compatibilité de l'addition et de la multiplication avec cette relation d'équivalence justifie les "preuves" par 9 ou par 11. Exemples :

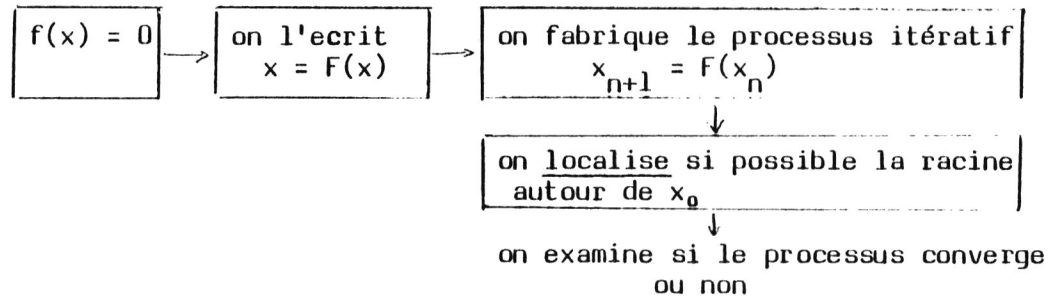
$$\begin{array}{rcl}
 2 \times \overset{\uparrow}{1} & + 9 \times \overset{\uparrow}{1} & + 7 \times \overset{\uparrow}{1} + 3 = 2 + 9 + 7 + 3 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 2973 = 2 \times 1000 & + 9 \times 100 & + 7 + 10 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{reste de la division par 9} \\ \text{reste de la division par 11} \end{array} \right\} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 2 \times \overset{\downarrow}{-1} & + 9 \times \overset{\downarrow}{1} & + 7 + \overset{\downarrow}{-1} + 3 = -2 + 9 - 7 + 3
 \end{array}$$

Munissez-vous de courage ou bien d'une petite machine à calculer comportant les 4 opérations.

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, il existe une méthode algébrique (calcul de Δ), qui ne se généralise pas aux équations de degré supérieur du type $f(x) = 0$

Nous allons expérimenter deux méthodes de résolution numérique simple à justifier.

(I1) Exposé de la méthode

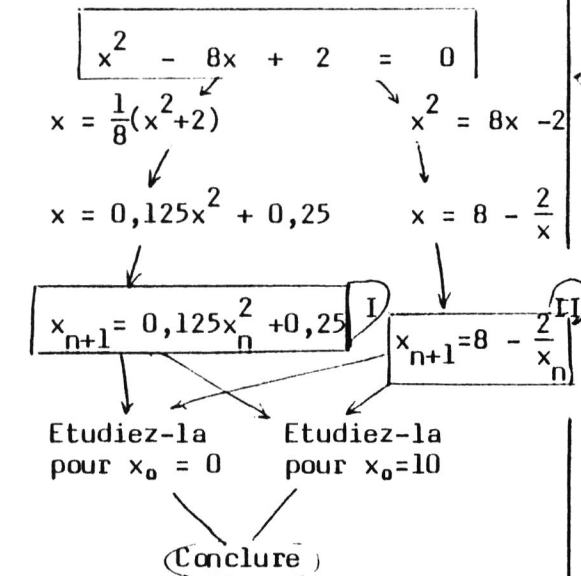


. Chercher ainsi à "coincer" les racines de $x^2 - 8x + 2 = 0$ grâce aux procédés décrits en marge. (I et II)

. Recommencer avec l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

Cette équation a pour racines le nombre d'or et l'opposé de l'inverse de ce nombre !
Trouver un processus convergent (de type II) vers ce nombre d'or.

. Recommencer avec l'équation $57600x^2 - 240480x + 187001 = 0$
Examiner la racine voisine de $x_0 = 3$
Que remarque-t-on ?



(12) Une idée à partir de la racine carrée

. $\sqrt{2}$ est la racine positive de $x^2 - 2 = 0$

Si on arrive à trouver un entier n tel que l'on soit sûr que $n < x < n+1$ alors on peut poser $x = n + \frac{1}{y}$

En recommençant, avec y on obtient une écriture du genre :

$$x = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \quad (\text{Fc})$$

y
z

Les approximations :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

s'appellent réduites d'ordre 1, 2, 3, et 4 de la fraction continue (Fc) donnant $\sqrt{2}$.

Calculer les réduites jusqu'à l'ordre 8.

Donner leurs approximations décimales d'ordre 6 et comparer avec $\sqrt{2}$.

. Cette méthode "un peu lourde" se généralise pour la résolution d'équations numériques à coefficients entiers (Méthode de LAGRANGE).

Appliquer cette méthode à la résolution de $x^2 - x - 1 = 0$,

de $x^2 - 8x + 2 = 0$ (racine voisine de 0,25),

de $x^2 - 5x + 3 = 0$ (racine voisine de 4),

et écrire les développements en fractions continues correspondants.

$$x^2 - 2 = 0$$

$$f(1) = -1 \quad f(2) = -2$$

Il y a une racine entre 1 et 2

$$x = 1 + \frac{1}{y}$$

$$(1 + \frac{1}{y})^2 - 2 = 0$$

$$y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$f'(2) = -1 \quad f'(3) = 2$$

Il y a une racine entre 2 et 3

$$y = 2 + \frac{1}{z}$$

$$(2 + \frac{1}{z})^2 - 2(2 + \frac{1}{z}) - 1 = 0$$

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

Notions mathématiques

- * équations
- * transformation de l'écriture d'une égalité
- * changement de variables
- * fractions
- * approximation

I1) Méthodes itératives

L'équation $x^2 - 8x + 2 = 0$ admet deux racines

$$\alpha = 4 + \sqrt{14} \sim 7,741657387$$

$$\beta = 4 - \sqrt{14} \sim 0,258342613$$

Analysons les deux processus :

$$x_{n+1} = 0,125 x_n^2 + 0,25$$

$$x_{n+1} = 8 - \frac{2}{x_n}$$

$$x = 0$$

$$x = 0,0001$$

$$x_1 = 0,25$$

$$x_1 = -19992$$

$$x_2 = 0,2578 \dots$$

$$x_2 = 8,0001$$

$$x_3 = 0,25831 \dots$$

$$x_3 = 7,750 \dots$$

$$x_4 = 0,258341 \dots$$

$$x_4 = 7,74193 \dots$$

$$\dots$$

$$x_5 = 7,7741666 \dots$$

Convergence vers β

Convergence vers α

$$x = 10$$

$$x = 10$$

$$x_1 = 12,75$$

$$x_1 = 7,8$$

$$x_2 = 20,5503$$

$$x_2 = 7,743589 \dots$$

$$x_3 = 52,7877$$

$$x_3 = 7,741721 \dots$$

Cette suite diverge

Convergence vers α

Prolongements :

- . on pourra tracer les deux courbes $y = 0,125 x^2 + 0,25$ et $y = 8 - \frac{2}{x}$ et mettre en évidence les convergences (ou divergences) sous forme graphique.

. il n'est pas question de valider ces processus itératifs; il ne sera pas nécessaire de parler de la méthode de Newton appliquée à cette équation

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2}{2(x_n - 4)}$$

Equation $x^2 - x - 1 = 0$

Cette équation a deux racines

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033989 \dots \quad \text{NOMBRE D'OR}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq -0,618033989 \dots$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 1$$

$$x = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,5$$

$$x_3 = 1,666 \dots$$

$$x_4 = 1,6$$

$$x_5 = 1,625$$

$$x_6 = 1,615384 \dots$$

$$x_7 = 1,619047 \dots$$

convergence vers le nombre d'or

$$\text{Equation } 57600 x^2 - 240480x + 187001 = 0$$

$$x_{n+1} = \frac{240480}{57600} - \frac{137001}{57600} x \frac{1}{x_n}$$

$$x_{n+1} = 4,175 - \frac{187001}{57600} x \frac{1}{x_n}$$

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = 3,092818$$

$$3,125291$$

$$3,136203$$

$$3,139816$$

$$3,141008$$

$$3,141400$$

$$3,141152$$

$$3,141571$$

$$3,141585$$

$$x_{20} = 3,141\ 592554$$

$$\pi \simeq 3,141\ 592654....$$

Cette équation a pour racine $\frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3}$ qui est considérée comme une bonne approximation du réel π .

I 2) Une méthode itérative pour approcher les fractions continues

A) Réduites de $\sqrt{2}$

$$R_1 = 1 \quad R_2 = \frac{3}{2} = 1,5 \quad R_3 = \frac{7}{5} = 1,4 \quad R_4 = 1,416666666$$

$$R_5 = 1,413793103 \quad R_6 = 1,414285714 \quad R_7 = 1,414201183 \quad R_8 = \underline{1,414215686}$$

$$\sqrt{2} \simeq \underline{1,414213562}$$

L'intérêt des fractions continues obtenues tient au résultat suivant :

"Si une réduite s'écrit $\frac{P}{Q}$, alors cette fraction est celle qui approche le plus le nombre cherché parmi toutes les fractions de dénominateur inférieur ou égal à Q".

A une certaine approximation près, on est donc en possession de la fraction la plus simple possible !

B) Application de la méthode de Lagrange

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$f(1) = -1 \quad f(2) = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{y}\right) - 1 = 0$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033$$

$$\text{donc } x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 1 + 1 = 2$$

$$R_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$R_4 = \frac{5}{3} = 1,666\dots$$

$$R_5 = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$R_6 = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$R_7 = \frac{21}{13} = 1,615384$$

$$R_8 = \frac{34}{21} = 1,619047$$

$$R_9 = \frac{55}{34} = 1,617647$$

$$x^2 - 8x + 2 = 0$$

Voici l'organigramme :

$$x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$f(0) = 2 \quad f(1) = -6$$

$$x = 0 + \frac{1}{y}$$

$$2y^2 - 8y + 1 = 0$$

$$f(3) < 0 \quad f(4) > 0$$

$$y = 3 + \frac{1}{z}$$

$$x = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}}$$

$$5Z^2 - 4Z - 2 = 0$$

$$f(1) < 0 \quad f(2) > 0$$

$$Z = 1 + \frac{1}{t}$$

$$t^2 - 6t - 5 = 0$$

$$f(6) < 0 \quad f(7) > 0$$

$$t = 6 + \frac{1}{4}$$

$$5u^2 - 6u - 1 = 0$$

$$f(1) < 0 \quad f(2) > 0$$

$$u = 1 + \frac{1}{v}$$

$$2v^2 - 4v - 5 = 0$$

$$f(2) < 0 \quad f(3) > 0$$

$$v = 2 + \frac{1}{w}$$

$$5w^2 - 4w - 2 = 0$$

$$R_0 = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{3} = 0,333333\dots$$

$$R_2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$R_3 = \frac{7}{27} = 0,259259\dots$$

$$R_4 = \frac{8}{31} = 0,258064\dots$$

$$R_5 = \frac{27}{89} = 0,258426\dots$$

$$R_6 = \frac{31}{120} = 0,258333\dots$$

$$R_7 = \frac{209}{809} = 0,258343\dots$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$f(4) < 0 \quad f(5) > 0$$

$$x = 4 + \frac{1}{y}$$

$$y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$f(3) < 0 \quad f(4) > 0$$

$$y = 3 + \frac{1}{z}$$

$$z^2 - 3z - 1 = 0$$

$$x = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5} \dots}}$$

$$R_0 = \frac{4}{1} = 4$$

$$R_1 = \frac{13}{3} = 4,333333\dots$$

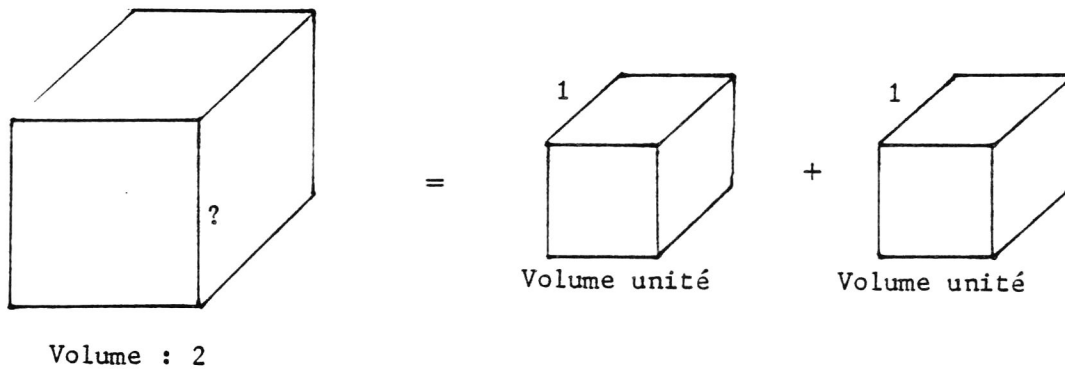
$$R_2 = \frac{43}{10} = 4,3$$

$$R_3 = \frac{142}{33} = 4,303030\dots$$

$$R_4 = \frac{469}{109} = 4,302752\dots$$

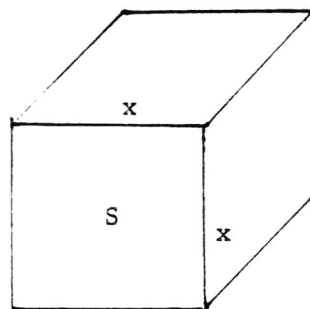
$$R_5 = \frac{1549}{360} = 4,302777\dots$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \simeq 4,302775$$



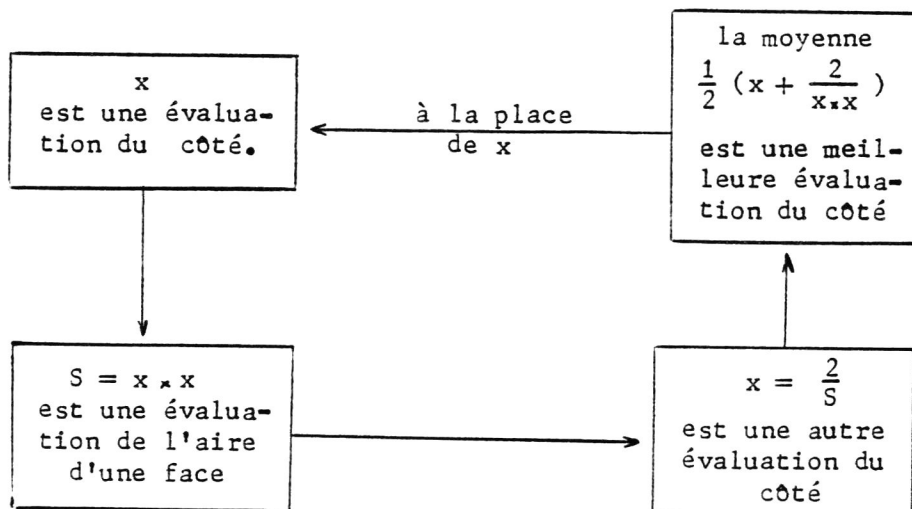
LA DUPLICATION DU CUBE

Pour calculer le côté d'un cube de volume égal à 2, on choisit le procédé de calcul suivant :



$$x \quad x = S$$

$$x \quad S = 2$$



Plus précisément :

1. Un cube a pour volume 2

A partir de la longueur x d'un côté, on peut calculer l'aire d'une face : x^2
 A partir de l'aire d'une face x^2 , on peut calculer la longueur d'un côté : $\frac{2}{x^2}$

Le procédé de calcul suivant "peut" donc converger vers

le côté du cube : $v_n = u_n^2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{v_n}$

c'est-à-dire : $u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2}$

"A la limite", si $u_n \rightarrow x$, on pourra avoir $x = \frac{2}{x^2}$ c'est-à-dire $x^3 = 2$

2. Les diverses relations algébriques vérifiées par un nombre peuvent ainsi donner lieu à des procédés de calcul itératifs.

<u>exemples</u>	$x^2 = A \Rightarrow x = \frac{A}{x}$ $x = x$ $x = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{x} + x \right)$	$x^3 = A \Rightarrow x = \frac{A}{x^2}$ $x = x$ $x = \frac{1}{3} \left(\frac{A}{x^2} + 2x \right)$
-----------------	---	--

Si je calcule le membre de droite (avec un x approché), j'ai une autre valeur approchée de x .

Ces divers procédés convergent (ou non) plus ou moins vite :

	$x = \frac{2}{x^2}$	$x = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x^2} + x \right)$	$x = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x^2} + 2x \right)$
1ère valeur	2	2	2
2ème valeur	0,5	1,25	1,5
-	8	1,265	1,296
-	0,03	1,2574	1,2609
	diverge		

en fait $\sqrt[3]{2} = 1,25992...$

3. On peut généraliser le procédé :

. Au calcul des racines nième

$$x^n = A \Rightarrow x = \frac{A}{x^{n-1}}$$

$$x = x$$

$$x = \frac{1}{n} \left(\frac{A}{x^{n-1}} + (n-1)x \right)$$

Pour ceux qui le savent, la formule revient à résoudre l'équation $x^n - A = 0$ par la méthode de Newton

Mais la formule de Newton n'est pas explicable avant la première, alors que ces méthodes sont très simples :

- dès la sixième pour le calcul de $\sqrt{2}$ par exemple
- dès la troisième pour $X^n = A$ et $X^2 + bX + c = 0$

. Au calcul des racines d'une équation du second degré

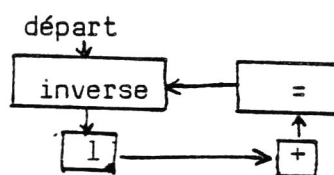
$$X^2 + bX + c = 0 \Rightarrow X^2 = -bX - c$$

$$X = -b - \frac{c}{X}$$

Exemple : $X^2 = X + 1$ peut se calculer par le procédé défini par $X = 1 + \frac{1}{X}$

Sur une calculatrice de poche, le procédé est une espèce de "square - danse"

La racine de $X^2 = X + 1$ est le nombre d'or $(\frac{\sqrt{5} + 1}{2})$



On obtient successivement à partir de 1 :

2 1,5 1,66 1,602 1,624 1,6157

4. De bons problèmes de convergence se posent sur lesquels on peut éviter de faire de la théorie : l'exécution des calculs suffit, dans un premier temps, pour former l'intuition numérique des enfants.

exemple : Pour le cube,

. avec $x = 1 \rightarrow S = 1 \rightarrow x = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow S = 4 \rightarrow x = \frac{2}{4} = 0,5 \dots$

le procédé diverge

Pour $x^5 = 10$, c'est pareil si on prend $x = \frac{10}{4}$

$x = 1 \rightarrow x = 10 \rightarrow x = 0,001 \rightarrow x = \frac{10}{x^{13}}$

Alors on peut essayer $s = \frac{1}{2}(\frac{10}{x^4} + x)$ ou $x = \frac{1}{5}(\frac{10}{x^4} + 4x)$ qui est mieux.

Equations du second degré

Pour résoudre numériquement l'équation $x^2 + px + q = 0$,
on peut proposer au moins trois méthodes itératives fondées sur l'un des
formules :

$$\begin{array}{ccc}
 x = -p - \frac{q}{x} & x = \sqrt{-px - q} & x = -\frac{x^2 + q}{p} \\
 \boxed{x_n = -p - \frac{q}{x_{n-1}}} & \boxed{x_n = \sqrt{-px_{n-1} - q}} & \boxed{x_n = -\frac{x_{n-1}^2 + q}{p}}
 \end{array}$$

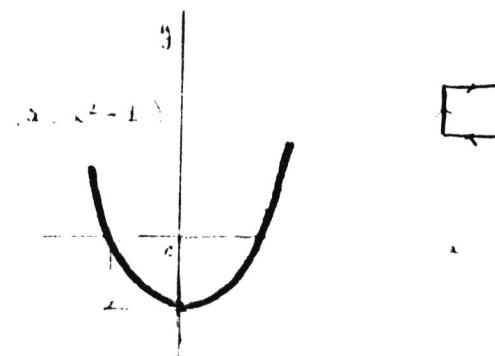
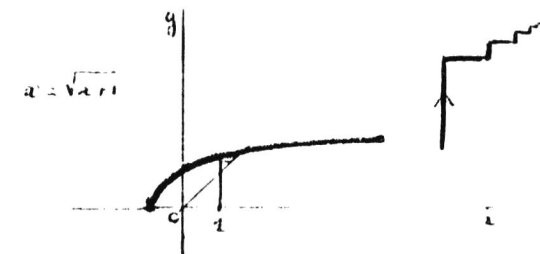
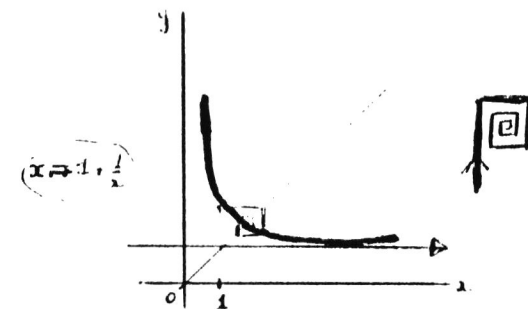
Voici ce que donne chaque méthode pour l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

x_0	1	1	1
x_1	2	1,414 ...	0
x_2	1,5	1,553 ...	-1
x_3	1,666 ...	1,598 ...	0
x_4	1,6002 ...	1,612 ...	-1
	$x_n \rightarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	$x_n \rightarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	$(x_n) \text{ "diverge"}$

(1,618 ...)

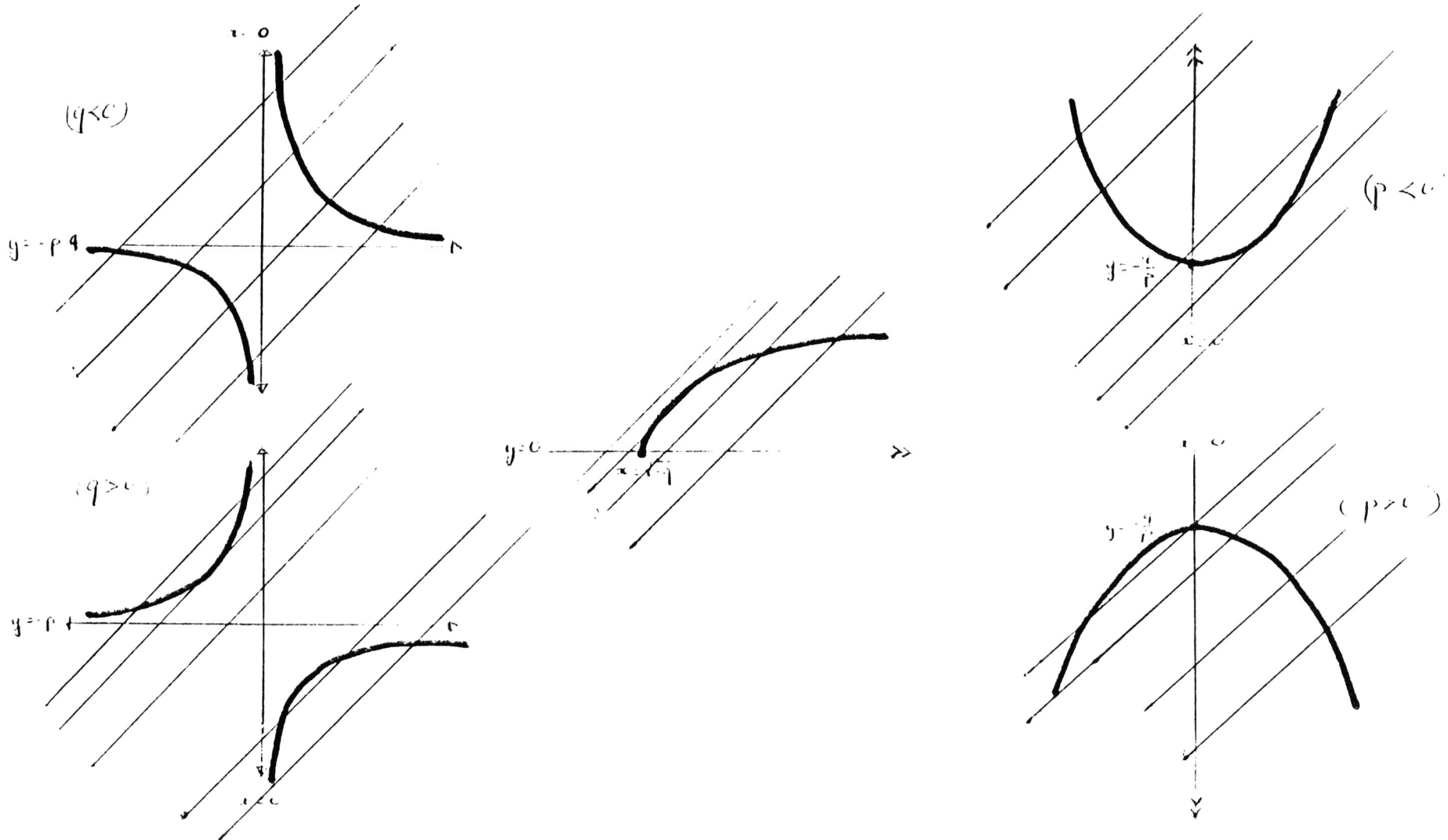
Selon les cas, il y aura divergence ou convergence du processus itératif vers
l'une ou l'autre des racines.

Comme pour chaque processus itératif défini par $x_n = f(x_{n-1})$, la convergence dépend



des positions respectives du graphe de $t \mapsto f(t)$ et de la première bissectrice. Une condition nécessaire de convergence est, en particulier, que la dérivée $f'(x)$ soit inférieure à 1 en valeur absolue au voisinage de la racine vérifiant $x = f(x)$.

Les multiples cas de figures valent la peine d'être étudiés et organisés...



FICHE " INFORMATION " N° 5

$$(1 + h)^n \quad \text{et} \quad 1 + nh$$

Calculs

a. Si la population mondiale augmente de 2% par an, par quel facteur aura-t-elle été multipliée en 50 ans ?

Le calcul est fait en marge.

b. Si les prix augmentent de 10 % par an, par quel facteur auront-ils été multipliés en 10 ans ?

c. Si une plante grandit de 1% par jour, de quel facteur aura-t-elle grandi en 100 jours ?

d. Calculez $(1 + \frac{1}{1000})^{1000}$

e. Chaque billet a une chance sur 100 de gagner un lot à la loterie.

Je prends 100 billets. Quelle probabilité ai-je de gagner au moins un lot ?

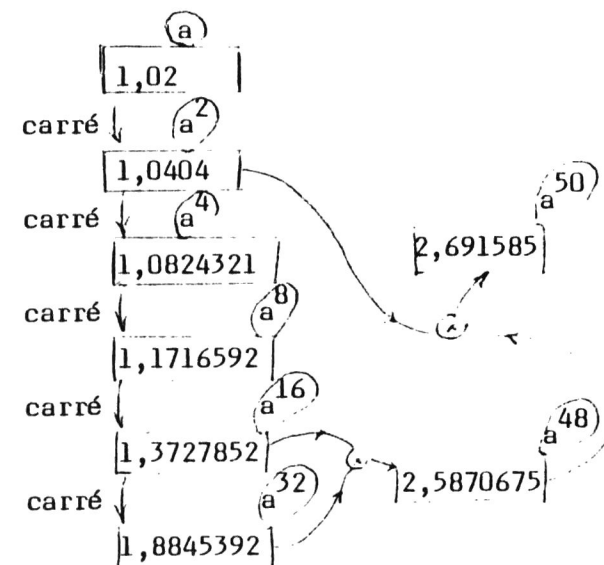
Pour cela, calculer $(0,99)^{100}$

Exploitation

* $(1+h)^n$ est proche de $(1+nh)$ uniquement si nh est petit.

La petitesse de h ne suffit pas ; sur l'exemple en marge, l'erreur relative atteint $\frac{1}{20}$ pour $nh = 0,1$

* Lorsque nh est de l'ordre de 1, alors que n est grand et h petit, on est dans le cas :



$(1 + \frac{1}{n})^n$ qui tend vers $e = 2,71828...$ lorsque n tend vers l'infini.

Ce que les calculs précédents permettent de vérifier.

(et aussi $(1 - \frac{1}{100})^{100} \rightarrow \frac{1}{e}$)

Remarque : Les 4 premières puissances de $(1,01)^n$ montrent les coefficients du binôme. En effet, par exemple :

$$(1 + b)^4 = 1 + C_4^1 b + C_4^2 b^2 + C_4^3 b^3 + C_4^4 b^4$$

Avec $b = 0,01$

$$b^2 = 0,0001$$

$$b^3 = 0,000001$$

$$b^4 = 0,00000001.$$

Dans la pratique :

Lorsque h est petit, mais pas nh , on écrit :

$$\begin{aligned} (1 + h)^n &= e^{n \log(1+h)} = e^{n \left[h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right]} \\ &= e^{nh} \cdot e^{-\frac{nh^2}{2} + o(nh^2)} \\ &= e^{nh} \cdot \left[1 - \frac{nh^2}{2} + o(nh^2) \right] \end{aligned}$$

$$(1 + h)^n \sim e^{nh} \cdot \left[1 - \frac{nh^2}{2} \right] \quad \text{à condition bien sûr que } nh^2 \text{ soit petit.}$$

Si les prix augmentent de 10 % par an, doublent-ils en 7 ans ?

Si les prix augmentent de 7% par an, doublent-ils en 10 ans ?

n	$(1 + 0,01)^n$	$1 + 0,01n$
1	1,01	1,01
2	1,0201	1,02
3	1,030301	1,03
4	1,040604	1,04
5	1,05101	1,05
6	1,0615	1,06
7	1,0721	1,07
8	1,0828	1,08
9	1,0936	1,09
10	1,1046	1,10
20	1,2201	1,20
40	1,488	1,40

$$(1,02)^{50} \sim e^{\left[1 - \frac{50 \cdot 0,0004}{2} \right]}$$

$$e^{\left[1 - 0,01 \right]}$$

$$2,718 - 0,027$$

$$2,691$$

comparer à la vraie valeur !

c'est remarquable !

$$\log 2 \sim 0,7$$



$$e^{0,7} \sim 2$$

doublement $\sim [nh = 7]$

Calculs :

Dans la marge, on a calculé quelques valeurs de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de 2. Les résultats sont remarquables : Lorsque h est divisé par 10 l'accroissement $\frac{1}{x-h} - \frac{1}{x}$ est aussi (à peu près) divisé par 10 ; en effet il y a décalage d'un zéro à droite, les autres chiffres étant (à peu près) les mêmes.

Autrement dit $f(x+h) - f(x)$ est (à peu près) une fonction linéaire de h . (pour h petit). Précisément, vous savez que, si f est dérivable au voisinage de x : $f(x+h) - f(x) \sim hf'(x)$.

Le coefficient de proportionnalité de cette application linéaire est donc la valeur de la dérivée en x : $f'(x)$.

Dans l'exemple donné, le coefficient a bien l'air d'être égal à 0,25 ; au signe près c'est bien la valeur de la dérivée de $\frac{1}{x}$ au point 2 :

$$\left(-\frac{1}{x^2} \mid x = 2 = -\frac{1}{4} \right)$$

x	$\mapsto$	$\frac{1}{x}$
2	$\mapsto$	0,5
1,9	$\mapsto$	0,526315790
1,99	$\mapsto$	0,502512563
1,999	$\mapsto$	0,500250125
1,9999	$\mapsto$	0,500025001

$$x - h \mapsto \frac{1}{x-h}$$

$\frac{1}{x-h} - \frac{1}{x}$ se lit très facilement !

$$f(x+h) - f(x) \sim h f'(x)$$

Calcul des coefficients de Taylor

Le calcul suivant nécessite une machine de poche calculant les logarithmes (néperiens)

Complétez le tableau en bas de page en écrivant les résultats avec 8 ou 10 décimales (si possible) et selon le processus suivant :

- Remplissez la deuxième colonne.
- Évaluez α en constatant que si $h \rightarrow 0$: $\text{Log}(1+h) \sim \alpha h$.
- Remplissez les 3ème et 4ème colonnes. Leur comparaison doit vous permettre d'évaluer β tel que :

$$\text{Log}(1+h) - \alpha h \sim \beta h^2$$
- Remplissez de même les colonnes suivantes et donnez un "développement limité" de $\text{Log}(1+h)$ à l'ordre 4.

Autre exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$

Au voisinage de 4 :

$4 \mapsto 2$
 $4,1 \mapsto 2,024845$
 $4,01 \mapsto 2,002498$
 $4,001 \mapsto 2,000249$
 $4,0001 \mapsto 2,000025$

Au voisinage de 100 :

$100 \mapsto 10$
 $110 \mapsto 10,488088$
 $101 \mapsto 10,049875$
 $101,1 \mapsto 10,004998$
 $101,01 \mapsto 10,000499$
 $101,001 \mapsto 10,000050$

h	Log(1+h)	Log(1+h) - αh	h^2	Log(1+h) - $\alpha h - \beta h^2$	h^3	Log(1+h) - $\alpha h - \beta h^2 - \gamma h^3$
0	0	0	0	0	0	0
0,01						
0,02						
0,03						
0,04						
0,05						

Sinus et cosinus

Pour calculer les fonctions trigonométriques d'un angle, les mathématiciens de toutes les époques ont inventé des trucs plus ou moins astucieux leur permettant d'être sûr de 8, 10 ou 50 décimales des nombres qu'ils cherchaient. L'idée de ces trucs leur était donnée soit par certaines figures géométriques, soit par d'autres résultats numériques ou algébriques qu'ils connaissaient.

Par exemple, aux alentours du XVII^e siècle, on commençait à savoir approcher les fonctions trigonométriques par des fonctions dont le calcul ne réclamait que des additions, des multiplications et des divisions.

Cet exercice te propose de retrouver toi même, une partie de ces fonctions. Pour cela prépare ta calculatrice et un tableau comme celui-ci :

angle x en degré	x en radians	$\sin x$	$x - \sin x$	$1 - \cos x$	x^2	x^3
1°						
2°						
3°						
4°						
5°						

(a) (b) (c)

a) Remplis les deux colonnes marquées a en lisant la table

b) Calcule les nombres des deux colonnes marquées b.

c) Calcule les nombres des deux colonnes marquées c.

d) Compare les nombres des colonnes marquées b et c. Je te dis qu'il y a des colonnes « presque » proportionnelles. Évalue les coefficients de proportionnalité.

e) Dédus de tes calculs que, si x est exprimé en radians, alors :

$\sin x$ est à peu près égal à $x + s \cdot x^3$ (tu as évalué s)

$\cos x$ est à peu près égal à $1 + c \cdot x^2$ (tu as évalué c).

f) Grâce aux formules que tu as trouvées, évalue $\sin 10^\circ$ et $\cos 10^\circ$. Compare tes valeurs approchées aux valeurs « plus » exactes données par une table.

Évalue aussi $\sin 30^\circ$ et $\cos 30^\circ$. Que penses-tu de la validité de tes formules ?

Le sinus affine :

Voici un morceau de table de sinus à 3 décimales :

angle en °	10	11	12	13	14
sinus	0,174	0,191	0,208	0,225	0,242
15	16	17	18	19	20
0,259	0,276	0,292	0,309	0,326	0,342

A | Que peux-tu dire du sinus d'un angle compris entre 10° à 20° lorsque l'angle augmente de 1° ?
La fonction s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par cette table est-elle affine ?

B | Fais une table analogue pour un angle de 50° à 60° . De combien augmente le sinus lorsque l'angle augmente de 1° ?

La fonction s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par cette table est-elle affine ?

C | Une table de sinus définit-elle une fonction affine ?
Vois-tu un rapport entre le phénomène apparu dans cet exercice et la remarque suivante : « en tout point de la terre on a l'impression qu'elle est plate ; et pourtant la terre est ronde » ?

F R A C T I O N S

C O N T I N U E S

Je (André DELEDICQ) me suis permis de réunir ici sur ce sujet, quelques écrits permettant de se faire une idée assez complète et organisée de la question.

Les paragraphes 1 - 3 - 5 et 6 sont de Jacqueline SAUVAGEOT (Université

Les paragraphes 2 - 4 et 7 sont de Gilles MOUNIER et moi-même. ^{Paris VII)}

Le paragraphe 9 est d'André MYX (Professeur d'Ecole Normale à Lyon)

1 - Bonnes approximations de π	page 43
2 - Définitions et calculs	page 45
3 - Calculs élémentaires des P_n et Q_n	page 48
4 - Valeurs des P_n , Q_n , R_n , pour $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, e , π .	page 50
5 - Quelques propriétés des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ telles que $bc - ad = 1$	page 53
6 - Une autre façon de calculer les P_n et Q_n : à tatons !	page 54
7 - Une version matricielle des fractions continues	page 56
8 - Le théorème le plus fin	page 59
9 - Fractions et réduites : applications	page 61
A. Equation du second degré	P. 61
Méthode de Lagrange	P. 63
Une application bissextile	P. 65
Equation diophantienne	P. 68
B. Approche géométrique	P. 70

1- FRACTIONS CONTINUES

Bonnes approximations de π :

On savait depuis longtemps "un peu supérieur à 3" (de partie entière 3) quand Archimède a établi qu'il était inférieur à $22/7$.

Posons $r_0 = 3$ et $r_1 = 22/7$, on a $r_0 < \pi < r_1$

Bien des années plus tard π fut concé entre $333/106$ et $355/113$, que nous noterons r_2 et r_3 ; certains préfèrent $103993/33102$ (r_4).

" Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages "

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

garde des partisans ; en général, une calculatrice de poche donne 6 ou 7 de ces décimales ; un ordinateur (à qui on a dit qu'il s'agissait de la somme d'une série) en crache des paquets ; celles que nous avons rappelées suffisent à établir les inégalités ci-dessous :

$$3 < 333/106 < 103993/33102 < \pi < 355/113 < 22/7$$

$$\underline{3,14150..} \quad \underline{3,1415926530...} \quad \underline{3,1415929..} \quad \underline{3,1428...}$$

Examinons les encadrements successifs obtenus :

$$r_0 = p_0/q_0 = 3 < \pi < 22/7 = p_1/q_1 = r_1 \quad (\text{remarque : } 22-3 \times 7 = 1)$$

$$r_2 = p_2/q_2 = 333/106 < \pi < 22/7 = r_1 \quad (\text{remarque : } 22 \times 106 - 333 \times 7 = 1)$$

$$r_2 = 333/106 < \pi < 355/113 = p_3/q_3 = r_3 \quad (\text{remarque : } 355 \times 106 - 33 \times 113 = 1)$$

$$r_4 = 103993/33102 < \pi < 355/113 = r_3 \quad (\text{et } p_3 \cdot q_4 - p_4 \cdot q_3 = 1)$$

les fines remarques entre parenthèses permettent de mesurer les encadrements :

Si $r_n = p_n/q_n$, $1/q_n q_{n+1} + 1$ est donc un majorant de $|\pi - r_n|$.

Ainsi, on est assuré que $22/7$ approche π avec une erreur inférieure à $1/742$ (en examinant ses décimales on constate même qu'il est "meilleur" que $3,14$). Avec $355/113$ l'erreur est inférieure à $3 \cdot 10^{-7}$.

Imaginons un concours d'horlogerie où le pris serait pour celui qui aurait usiné un engrenage de rapport le plus voisin possible de π : non seulement celui qui aurait opposé 22 dents à 7 l'aurait emporté sur celui qui se serait échiné à en figner 314 et 100, mais que dire de celui qui en aurait opposé 355 à 113 ? Seuls des concurrents ayant utilisé un numérateur au moins égal à 688 et un dénominateur au moins égal à 219 peuvent espérer le surclasser (l'espérer seulement : voyez le malheureux qui s'appuie sur $31416/10000$: erreur supérieure à 7×10^{-6}).

Les fractions évoquées ci-dessus sont les réduites r_n , d'ordre n , du développe-

ment de π en fraction continue, et nous nous proposons de rappeler que leur rapport qualité-prix est hors concours ; plus précisément : si p_n/q_n est la réduite d'ordre n d'un réel A , toute fraction p/q plus proche qu'elle de A a des termes plus grands.

Qu'est-ce que développer un réel A en fraction continue ?

Tout tient dans la notion de partie entière (on appelle "partie entière" d'un réel le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal, c'est une fonction programmée sur les calculateurs usuels), et dans le fait que tout nombre non nul est l'inverse de ... son inverse : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x = \frac{1}{1/x})$

Dans ce qui suit, la lettre a représente un entier naturel et x un réel positif ou nul, inférieur à 1. $a \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$

Si x est nul, on stoppe : on avait affaire à un entier.

¶ Si x n'est pas nul son inverse $1/x$ est supérieur à 1. $1/x$ a donc une partie entière a' non nulle et peut s'écrire à son tour $a' + x'$

Si x' est nul on stoppe : x était donc l'inverse d'un entier et A un rationnel. Sinon, reprendre à ¶ en remplaçant x par x' , a' par a'' , etc...

On obtient donc, en supposant qu'on a rencontré aucun x nul :

$$A = a_0 + x_0 = a_0 + \frac{1}{1/x_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{1/x_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x_2}} \quad \text{etc..}$$

N.B. : tous les a_n sont des entiers positifs, sauf a_0 qui peut être nul.

2- DEFINITIONS ET CALCULS

a) Soit $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ une suite de nombres entiers non nuls

($\forall n, U_n \in \mathbb{N}^*$)

Voici une suite de nombres rationnels qui lui est naturellement associée :

$$U_0 = F_0, \quad U_0 + \frac{1}{U_1} = F_1; \quad U_0 + \frac{1}{U_1 + \frac{1}{U_2}} = F_2; \dots$$

$$U_0 + \frac{1}{U_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{U_n}}} = F_n$$

La suite de fractions continues (F_n) tend vers un réel α (voir démonstration plus loin). La fraction irréductible $F_n = \frac{P_n}{q_n}$ est appelée "Réduite d'ordre n de α "

b) Inversement, étant donné un nombre réel α , on peut lui associer facilement une suite d'entiers telle que la suite de fractions continues correspondante tende vers α :

Soit U_0 la partie entière de α

$$(1) \quad \alpha = \underbrace{U_0}_{\substack{\text{partie} \\ \text{enti\`ere} \\ \text{de } \alpha}} + \underbrace{(\alpha - U_0)}_{\substack{\text{partie} \\ \text{d\'ecimale} \\ \text{de } \alpha}}$$

On a : $0 \leq x - U_0 < 1$

supposons que $x - U_0 \neq 0$

donc $\frac{1}{x - U_0} > 1$

posons $x_1 = \frac{1}{x - U_0}$ c'est-à-dire $x_1 = \frac{1}{x - \text{Int}(x)}$

de même qu'au (1)

$$x_1 = \underbrace{U_1}_{\substack{\text{partie} \\ \text{entière} \\ \text{de } x_1}} + \underbrace{(x_1 - U_1)}_{\substack{\text{partie} \\ \text{décimale} \\ \text{de } x_1}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - \text{Int}(x_1)}$$

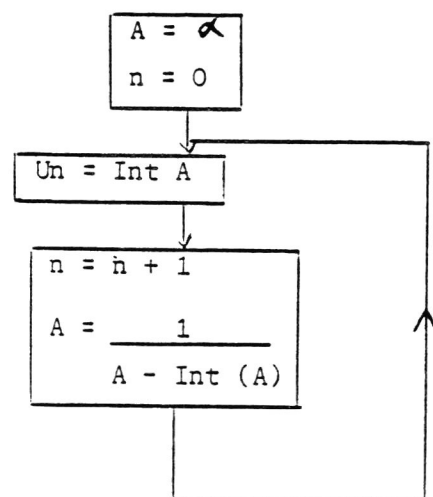
En résumé : x étant un réel :

$$x_1 = \frac{1}{x - \text{Int}(x)} \quad U_0 = \text{Int}(x)$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - \text{Int}(x_1)} \quad U_1 = \text{Int}(x_1)$$

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - \text{Int}(x_{n-1})} \quad U_{n-1} = \text{Int}(x_{n-1})$$

d'où l'algorithme de calcul des U_n :



EXEMPLES DE QUELQUES DEVELOPPEMENTS :

a) $(U_n) = (3 ; 7 ; 15 ; 1 ; \dots)$ pour $A = \pi$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

b) $(U_n) = (1 ; 1 ; 1 ; 1 ; \dots)$ pour $A = \bar{\Phi}$
(nombre d'or)

$$\bar{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

c) $(U_n) = (1 ; \overline{2} ; \overline{2} ; \overline{2} ; \dots)$ * pour $A = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

d) $(U_n) = (1 ; \overline{1 ; 2} ; \overline{1 ; 2} ; \overline{1 ; 2} ; \dots)$ pour $A = \sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

e) $(U_n) = (2 ; \overline{4} ; \overline{4} ; \overline{4} ; \dots)$ * pour $A = \sqrt{5}$

$(U_n) = (2 ; \overline{1 ; 1 ; 1 ; 4} ; \dots)$ pour $A = \sqrt{7}$

$(U_n) = (2 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 4 ; 1 ; 1 ; 6 ; \dots)$ pour $A = e$

3 CALCULS ELEMENTAIRES DES P_n ET Q_n

Quiconque a, une fois, effectué le calcul des premières réduites r_n associées à une suite donnée ^{d'entiers naturels} (a_n) s'en est vite lassé. On obtient:

$$r_0 = a_0 ; \quad r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} ; \quad r_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

$$\text{et enfin: } r_2 = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

Montrons que nous pouvions écrire directement cette dernière forme de r_2 et d'abord que nous avons obtenu r_1 sous forme irréductible. En effet un diviseur commun de a_1 et de $a_1 a_0 + 1$ diviserait 1, on a donc:

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad \text{et} \quad q_1 = a_1 \quad \text{de même} \quad p_0 = a_0 \quad \text{et} \quad q_0 = 1$$

$$\begin{cases} p_1 = a_1 p_0 + 1 \\ q_1 = a_1 q_0 \end{cases}$$

éliminant a_1 entre les deux dernières équations il vient $p_1 q_0 - q_1 p_0 = q_0 = 1$

Ecrire r_1 sous la forme $\frac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0}$ c'est mettre en évidence la contri-

bution de a_1 à sa formation (a_1 n'intervient évidemment pas dans le calcul de p_0 ou q_0) or comment passe-t-on de r_1 à r_2 sinon en remplaçant, là où il intervient, a_1 par $a_1 + \frac{1}{a_2}$? Nous écrivons donc directement:

$$r_1 = \frac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0} \quad \text{donc} \quad r_2 = \frac{(a_1 + 1/a_2) p_0 + 1}{(a_1 + 1/a_2) q_0} = \frac{a_2(a_1 p_0 + 1) + p_0}{a_2(a_1 q_0) + q_0} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}$$

Montrons que la forme obtenue est irréductible c'est à dire qu'il est légitime de poser:

$$\begin{cases} p_2 = a_2 p_1 + p_0 \\ q_2 = a_2 q_1 + q_0 \end{cases}$$

en effet, éliminant a_2 entre ces deux équations il vient:

$$p_2 q_1 - q_2 p_1 = -(p_1 q_0 - q_1 p_0) = -1$$

ce qui suffit à établir que p_2 et q_2 sont premiers entre eux.

La loi de formation apparue ~~ici~~

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

s'établit par récurrence en utilisant la démonstration faite ci-dessus pour passer de r_1 à r_2 , et permet, par élimination de a_{n+1} , d'établir l'importante relation:

$$p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (-1)^n$$

Les a_n sont des entiers positifs non nuls, les q_n une suite croissante d'entiers positifs, deux réduites consécutives sont telles que

$$r_{n+1} - r_n = (-1)^n / q_n q_{n+1}$$

ce qui suffit à établir que (r_n) est une suite alternée convergente

$$r_0 < r_2 < r_4 < \dots < r_{2n} < 0 < r_{2n+1} < \dots < r_5 < r_3 < r_1$$

Remarque: celle qui converge "le moins vite" est celle dont les q_n croissent le "plus lentement", donc celle qui est associée à la suite des plus petits a_n possibles, donc $(\forall n)(a_n=1)$. Sa limite x est telle que $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ d'où $x = 1 + \frac{1}{x}$ (reconnaitre, sous la première barre de fraction, une répétition

du développement de x)

x est donc la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est le nombre d'or $(\sqrt{5} + 1)/2$, dont le développement, infini, est: $\{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ *

* Il y a un théorème de Lagrange, d'énoncé simple: un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain rang caractérise les nombres quadratiques (racine d'équations du second degré à coefficient dans $\mathbb{Q}$) positifs.

La démonstration en est plus longue que difficile, on la trouve dans Valiron (théorie des fonctions).

4-

VALEURS DES P_n, Q_n, R_n , pour $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \frac{\sqrt{5}+1}{2},$
 e, π .

N= 1.414213562 C'EST A DIRE SQR(2)

U(I):

1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
-----	-----	-----	-----
0	1	1	1
1	3	2	1.5
2	7	5	1.4
3	17	12	1.416666667
4	41	29	1.413793103
5	99	70	1.414285714
6	239	169	1.414201183
7	577	408	1.414215686
8	1393	985	1.414213198
9	3363	2378	1.414213625
10	8119	5741	1.414213552
11	19601	13860	1.414213564

N= 1.732050808 C'EST A DIRE SQR(3)

U(I):

1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
2 1 2 1 2 1 2

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
-----	-----	-----	-----
0	1	1	1
1	2	1	2
2	5	3	1.666666667
3	7	4	1.75
4	19	11	1.727272727
5	26	15	1.733333333
6	71	41	1.731707317
7	97	56	1.732142857
8	265	153	1.732026144
9	362	209	1.732057416
10	989	571	1.732049037
11	1351	780	1.732051282
12	3691	2131	1.73205068
13	5042	2911	1.732050842
14	13775	7953	1.732050798
15	18817	10864	1.73205081
16	51409	29681	1.732050807
17	70226	40545	1.732050808
18	191861	110771	1.732050808

U(I):

2	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1
4	1	1	1	4	1	1	1				

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
0	2	1	2
1	3	1	3
2	5	2	2.5
3	8	3	2.666666667
4	37	14	2.642857143
5	45	17	2.647058824
6	82	31	2.64516129
7	127	48	2.645833333
8	590	223	2.64573991
9	717	271	2.645756458
10	1307	494	2.645748988
11	2024	765	2.645751634
12	9403	3554	2.645751266
13	11427	4319	2.645751331
14	20830	7873	2.645751302
15	32257	12192	2.645751312
16	149858	56641	2.64575131
17	182115	68833	2.645751311
18	331973	125474	2.645751311

N= 1.618033989 C'EST A DIRE (1+SQR(5))/2 LE NOMBRE D'OR

U(I):

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
0	1	1	1
1	2	1	2
2	3	2	1.5
3	5	3	1.666666667
4	8	5	1.6
5	13	8	1.625
6	21	13	1.615384615
7	34	21	1.619047619
8	55	34	1.617647059
9	89	55	1.618181818
10	144	89	1.617977528
11	233	144	1.618055556
12	377	233	1.618025751
13	610	377	1.618037135
14	987	610	1.618032787
15	1597	987	1.618034448
16	2584	1597	1.618033813
17	4181	2584	1.618034056
18	6765	4181	1.618033963
19	10946	6765	1.618033999
20	17711	10946	1.618033985

N= 2.718281828 C'EST A DIRE EXP(1)

U(I):

<u>2</u>	1	2	1	1	4	1	1	6	1	1	8
1	1										

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
<u>-</u>	<u>----</u>	<u>----</u>	<u>-----</u>
0	2	1	2
1	3	1	3
2	8	3	2.666666667
3	11	4	2.75
4	19	7	2.714285714
5	87	32	2.71875
6	106	39	2.717948718
7	193	71	2.718309859
8	1264	465	2.718279570
9	1457	536	2.718283582
10	2721	1001	2.718281718
11	23225	8544	2.718281835
12	25946	9545	2.718281823
13	49171	18089	2.718281829

N= 3.141592654 " C'EST A DIRE " PI

U(I):

<u>3</u>	7	15	1	292	1	1	1	4	1	2	14
1	2	2	1	3	1	1	1	4	1	1	3
1	1	1	2	1	5	5	...	ETC	...		

I	P(I)	Q(I)	P(I)/Q(I)
<u>-</u>	<u>----</u>	<u>----</u>	<u>-----</u>
0	3	1	3
1	22	7	3.142857143
2	333	106	3.141509434
3	355	113	3.14159292
4	103993	33102	3.141592653
5	104348	33215	3.141592654
6	208341	66317	3.141592653
7	312689	99532	3.141592654
8	1459097	464445	3.141592654
9	1771786	563977	3.141592654



aux
guillemets.

5- Quelques propriétés des fractions a/b et c/d telles que $bc-ad=1$

a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d non nuls.

Je dirai que deux telles fractions sont liées par la relation (D_1) ainsi nommée en souvenir du déterminant $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$ qui vaut 1.

Théorème : Si deux fractions a/b et c/d sont liées par (D_1) alors toute fraction p/q peut s'écrire $(ma+nb)/(mb+nd)$ avec m et n entiers (de signes quelconques). Si, de plus, p/q appartient à l'intervalle $]a/b, c/d[$ alors m et n sont des entiers positifs, non nuls.

La démonstration est immédiate, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} ma+nc=p \\ mb+nd=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(bc-ad)=qc-pd \\ n(bc-ad)=pb-qa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=qc-pd \\ n=pb-qa \end{cases}$$

dont les solutions, m et n , sont entières parce que $(bc-ad)$ vaut 1

leur signe étant lié à la position de p/q par rapport aux fractions a/b et c/d

Ainsi toute fraction de l'intervalle $]a/b, c/d[$ s'écrivant $\frac{ma+nc}{mb+nd}$,

(avec toutes les variables dans $\mathbb{N}$) a des termes plus grands que les

termes correspondants des fractions "bords" (son numérateur est supérieur et à a et à c etc..) la plus simple de l'intervalle étant $\frac{a+c}{b+d}$, laquelle

est, à son tour liée par (D_1) à chacune des deux fractions bords (a/b et p/q , par exemple, sont liées par (D_1) si $pb-qa$ vaut 1, c'est à dire si n vaut 1.) elle définit donc avec les deux précédentes deux nouveaux intervalles tels que...etc...

Si cette histoire vous amuse..." c'est un vieux procédé artisanal et peu fatigant de classement des fractions :

$0/1$ et $1/1$ sont, par exemple, liées par (D_1) , la plus simple des fractions de leur intervalle est donc $(0+1)/(1+1)$ ou $1/2$, d'où les étapes successives :

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} \quad \frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1} \quad \frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1} \quad \text{etc...}$$

Mais plutôt que de jouer à classer toutes les fractions on peut aussi cher-

cher à coïncider un nombre A dans un de ces intervalles : $\sqrt{2}$ par exemple est entre $1/1$ et $2/1$ qui sont (D_1) , à chaque étape nouvelle on le situe

dans un des nouveaux intervalles obtenus (en comparant les carrés des "bords"

à 2) d'où : $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1} \quad \frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1} \quad \frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Le paragraphe suivant indique une technique de programmation :

6- Une autre façon de calculer les P_n et Q_n : à tatons !

Deux réduites consécutives nous l'avons vu, sont liées par (D_1) et encadrent A , toute fraction de l'intervalle $[r_n, r_{n-1}]$ a des termes supérieurs aux leurs, en particulier son numérateur p est au moins égal à $p_n + p_{n-1}$ et son dénominateur à $q_n + q_{n-1}$, comme nous l'avions annoncé. (en bas de la page 1). La réduite suivante a pour numérateur $a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ et la même combinaison pour les dénominateurs, ici, des deux coefficients m et n de la page précédente l'un vaut a_{n+1} et l'autre 1, ce qui va organiser nos tatonnements: les fractions $(kp_n + p_{n-1}) / (kq_n + q_{n-1})$ sont des fonctions monotones de k et dans tous les cas on cherche pour k le plus grand entier tel que cette fraction reste supérieure (ou inférieure) à A , parce que le coefficient cherché a_{n+1} est une partie entière, mais le mieux est de donner un exemple: Comment trouver r_{n+1} connaissant les deux réduites précédentes (et disposant d'un petit ordinateur: il faut quatre mémoires et les tests "if..then" (fatiguée des indices je raconte comment trouver r_6 connaissant r_5 et r_4) dans les quatre mémoires P, Q, R, S se trouvent p_4, q_4, p_5, q_5 , avec la propriété (D_1) évidemment. Je cherche p_6 , soit $a_6 P + R$ et q_6 , soit $a_6 Q + S$, tels que a_6 soit le plus grand possible (c'est une partie entière), r_6 restant cependant inférieur au nombre A dont on cherche le développement. Je fais essayer pour a_6 les entiers 1, 2, 3, etc.. jusqu'à obtenir une fraction trop grande, il ne me reste plus qu'à reculer d'un cran, a_6 était l'entier précédent. Pour obtenir r_7 il faut, au contraire améliorer l'autre fraction

première étape $P=p_4, Q=q_4, R=p_5, S=q_5$.

Classement des fractions essayées

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{P}{Q} < \frac{P+R}{Q+S} < \frac{P+2R}{Q+2S} < \frac{P+3R}{Q+3S} < \dots A \dots < \frac{R}{S} = \frac{p_5}{q_5}$$

Chaque nouvelle fraction est obtenue par le procédé de la page 5

à partir de la précédente et de R/S . On a $\frac{P+a_6 R}{Q+a_6 S} < A$

mais la suivante est supérieure à A , on recule d'un cran, on affiche a_6

et on met p_6 et q_6 dans P et Q pour aborder la deuxième étape:

$$\frac{p_6}{q_6} = \frac{P}{Q} < A < \frac{P+R}{Q+S} < \frac{2P+R}{2Q+S} < \frac{P+R}{Q+S} < \frac{R}{S} = \frac{p_5}{q_5}$$

où tout se passe de la même manière sauf que le test est "supérieure" à A au lieu de "inférieure".

Il reste à amorcer le processus, c'est à dire à trouver r_0 et r_1
on peut dire qu'elles s'obtiennent comme les autres à partir d'une r_{-1}
et d'une r_{-2} dont les termes vérifieraient $p_0 = a_0 p_{-1} + p_{-2} = a_0$

$$q_0 = a_0 q_{-1} + q_{-2} = 1$$

d'où $p_{-1} = q_{-2} = 1$ et $p_{-2} = q_{-1} = 0$ excellentes valeurs, en ce sens qu'elles
fourniront bien p_1 et q_1 conformes aux valeurs prévues, mais un peu emba-
rassantes parce que si la fraction est $0/1$, la fraction r_{-1} , elle serait: $1/0!$
ce qui revient à dire qu'un nombre A positif est dans $]0, \infty[$ mais pour-
rait choquer un honnête ordinateur, heureusement il ne s'en apercevra pas
n'ayant à aucun moment à manipuler cette abusive fraction, voyons le
sur un exemple: Départ, l'ordinateur connaît π (ou croit le connaître)

Première étape $P=0$ $Q=1$ $R=1$ $S=0$ essaie de $(P+R)/(Q+S)$ etc...

$$\left[\frac{0}{1} < \frac{1}{1} < \frac{2}{1} < \frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1} < \frac{1}{0} \right] \quad 4/1 \text{ est trop grand, on recule, } a_0 = 3$$

Deuxième étape $P=3$ $Q=1$ $R=1$ $S=0$

$$\left[\frac{3}{1} < \frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7} < \frac{19}{6} < \frac{16}{5} < \frac{13}{4} < \frac{10}{3} < \frac{7}{2} < \frac{4}{1} < \frac{1}{0} \right] \quad 25/8 \text{ est trop petit, on recule, } a_1 = 7$$

Troisième étape $P=3$ $Q=1$ $R=22$ $S=7$

$$\left[\frac{3}{1} < \frac{3+22}{1+7} < \frac{5+2 \times 22}{1+2 \times 7} < \dots < \frac{3+15 \times 22}{1+15 \times 7} < \pi < \frac{3+16 \times 22}{1+16 \times 7} < \frac{22}{7} \right]$$

ici $a_2 = 15$ on reconnaît $r_2 = \frac{355}{113}$, on trouve ensuite $a_3 = 1$ et on
obtient $\frac{355}{113}$, connue des chinois vers 430, retrouvée en Allemagne en 1573,
et qui est particulièrement bonne parce que a_4 vaut 292 d'où, pour r_4

$$\frac{333+292 \times 355}{106+292 \times 113} \quad \text{c'est à dire } \frac{103993}{33102} \quad \text{déjà citée.}$$

Programme correspondant: (en Basic)

1 $P=0$; $Q=1$; $R=1$; $S=0$	9 $N=-1$
2 $N=-1$	10 $R=R+P$; $S=S+Q$; $N=N+1$
3 $P=P+R$; $Q=Q+S$; $N=N+1$	11 IF $R/S = \pi$ THEN 16
4 IF $P/Q = \pi$ THEN 16	12 IF $R/S > \pi$ THEN 10
5 IF $P/Q < \pi$ THEN 3	13 $R=R-P$; $S=S-Q$
6 $P=P-R$	14 PRINT N ; R ; S ; R/S
7 $Q=Q-S$	15 GO TO 2
8 PRINT N ; P ; Q ; P/Q	16 END

Les tests peuvent, évidemment, être remplacés par : IF $F(P/Q) = 0$ THEN etc..
à condition que F soit croissante au passage de sa première racine posi-
tive, qu'elle ne s'annule pas deux ou trois fois entre a_0 et a_{0+1}
et autres caprices toujours possibles.

7- UNE VERSION MATRICIELLE DES FRACTIONS CONTINUES

a) Rappels :

A une ~~fon~~ction homographique $f : x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$

On associe la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Réciproquement à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on associe $f : x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$

Si l'on note M_f la matrice associée à f et M_g la matrice associée à g , on vérifie facilement qu'alors $\boxed{M_{g \circ f} = M_g \times M_f}$ (1)

b) Application aux fractions continues

Appelons f_n la fonction homographique de matrice : $\begin{pmatrix} U_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f_n(x) = \frac{U_n \cdot x + 1}{x}$$

$$\boxed{f_n(x) = U_n + \frac{1}{x}}$$

$$(f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)(x) = U_0 + \frac{1}{U_1 + \frac{1}{U_2 + \frac{1}{\ddots + U_n + \frac{1}{x}}}}$$

d'où deux résultats importants :

$$1) \lim_{x \longrightarrow +\infty} (f_0 \circ f_1 \circ f_2 \dots \circ f_n)(x) = F_n$$

(2)

$$2) \lim_{x \longrightarrow 0} (f_0 \circ f_1 \circ f_2 \dots \circ f_n)(x) = F_{n+1}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{U_{n+1} \frac{1}{x}} = 0$$

D'après le résultat (1), il est possible de déterminer la matrice associée à la fonction homographique $f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$.

En effet, posons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice associée à :

$f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$ c'est-à-dire à

$$\prod_{i=1}^n f_i$$

On sait que la matrice associée à f_i est $\begin{pmatrix} U_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{d'où : } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} U_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant :

$$ad - bc = \prod_{i=1}^n (-1)$$

d'où la relation de Bezout :

$$ad - bc = (-1)^{n+1} \quad (3)$$

Ce qui signifie que a et c sont premiers entre eux, ainsi que b et d

Il est également possible de calculer les deux limites (2) en fonction de a ; b ; c ; d en effet :

$$(f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_0 \circ f_1 \circ f_2 \dots \circ f_n)(x) &= \frac{a}{c} \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} (f_0 \circ f_1 \circ f_2 \dots \circ f_n)(x) &= \frac{b}{d} \end{aligned} \quad (4)$$

En comparant (2) ; (3) et (4) on obtient

$$F_n = \frac{a}{c} \quad \text{or } a \text{ et } c \text{ sont premiers entre eux}$$

$$F_{n-1} = \frac{b}{d} \quad \text{or } b \text{ et } d \text{ sont premiers entre eux}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } a &= P_n & b &= P_{n-1} \\ c &= Q_n & d &= Q_{n-1} \end{aligned}$$

et la relation (3) devient : $P_n \cdot Q_{n-1} - P_{n-1} \cdot Q_n = (-1)^{n+1}$

la relation $(f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n) \circ f_{n+1} = f_0 \circ \dots \circ f_{n+1}$

devient :

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{pmatrix}$$

d'où les formules de récurrence

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} \cdot U_n + P_{n-2} \\ Q_n &= Q_{n-1} \cdot U_n + Q_{n-2} \\ \forall n, n &\geq 2 \end{aligned}$$

8-

LE THEOREME LE PLUS FIN

1. $\forall n, U_n \in \mathbb{N}^*$ donc $U_n \geq 1$

2. Montrons par récurrence que

 $\forall n, Q_n \geq n$ en effet

$$Q_0 = 1 \geq 0$$

$$Q_1 = U_1 \geq 1$$

$$Q_2 = Q_1 \cdot U_2 + Q_0 \text{ (formule de récurrence)}$$

$$Q_2 \geq 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

et pour $n \geq 3$:

$$\text{Si } Q_{n-2} \geq n-2 \text{ et } Q_{n-1} \geq n-1$$

$$\text{Alors } Q_n = Q_{n-1} \cdot U_n + Q_{n-2}$$

$$\geq (n-1) \cdot 1 + (n-2)$$

$$\geq n-1 + n-2$$

$$\geq n + (n-3) \geq n$$

$$3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right] = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}$$

Cette dernière série est alternée et $\frac{1}{Q_n \cdot Q_{n-1}}$ tend vers 0 en décroissant :

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

4 -

$$F_n - F_{n-1} = \frac{P_n \cdot Q_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} - \frac{P_{n-1} \cdot Q_n}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n-1}}$$

Conclusion : La suite $F_n = \frac{P_n}{Q_n}$ tend vers un réel α , de façon alternée et l'intervalle d'imprécision est au moins réduit de moitié chaque fois que n augmente de 1.

d) Et voici maintenant le THEOREME !

Si $\frac{P}{Q}$ est une meilleure approximation de α que $\frac{P_n}{Q_n}$ c'est que :

$$P > P_n \quad \text{et} \quad Q > Q_n$$

En français : "L'approximation d'un réel fournie par les réduites est la meilleure possible" !

Montrons d'abord le résultat suivant :

Si $\frac{A}{B} < \frac{X}{Y} < \frac{C}{D}$ et si $|AD - BC| = 1$

Alors on a : $X > \text{Sup } (A, C)$
et $Y > \text{Sup } (B, D)$

(où A, B, C, D, X, Y sont des entiers naturels).

En effet :

$$\left| \frac{X}{Y} - \frac{C}{D} \right| < \left| \frac{A}{B} - \frac{C}{D} \right|$$

$$\left| \frac{XD - CY}{YD} \right| < \left| \frac{AD - BC}{BD} \right| \leq \frac{1}{BD}$$

puisque forcément $|XD - CY| \geq 1$
c'est que $\boxed{Y > B}$

et puisque $\frac{X}{Y} > \frac{A}{B}$ c'est que $\boxed{X > A}$

Le même raisonnement à partir de $\frac{D}{C} < \frac{Y}{X} < \frac{B}{A}$ conduit à :

$$\boxed{X > C \quad \text{et} \quad Y > D}$$

Ce que l'on voulait démontrer.

Conséquence :

Si $\frac{X}{Y}$ est une meilleure approximation de x que $\frac{P_n}{Q_n}$, c'est aussi une meilleure approximation de x que $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, mais $\frac{X}{Y}$ est compris entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et

$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = 1$ donc d'après ce qui précède :

$$\boxed{\begin{array}{l} X > P_n \\ Y > Q_n \end{array}}$$

9-

FRACTIONS ET REDUITES : APPLICATIONS

Fraction continue ... réduites ! Termes qui peuvent effaroucher mais qui cachent surtout des idées d'une grande richesse mathématique et historique. Voici deux approches de ce concept. L'une, algébrique, consiste en un traitement un peu particulier de certaines équations du second degré; l'autre, géométrique, étant une "démonstration" de l'irrationalité du nombre d'or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

A - EQUATION DU SECOND DEGRE

Considérons l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ dont les racines sont (nous le savons):

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or)} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

L'équation s'écrit encore $X^2 = X + 1$ ou $X = 1 + \frac{1}{X}$

L'inconnue X située dans le deuxième membre peut encore être remplacée par $1 + \frac{1}{X}$; ce qui donne

$$X = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{X}}$$

Nous pouvons répéter indéfiniment le procédé et dire que

$$X = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{X}}} \quad \dots \text{ etc...} \quad \text{ou encore} \quad X = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Intéressons-nous aux fractions suivantes:

$$f_0 = 1 \quad ; \quad f_1 = 1 + \frac{1}{1} \quad ; \quad f_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \quad ; \quad \dots \text{ etc.}$$

Nous trouverions

$$f_0 = 1 \quad ; \quad f_1 = 2 \quad ; \quad f_2 = 1,5 \quad ; \quad f_3 = 1,666\dots \quad ;$$

$$f_4 = 1,6 \quad ; \quad f_5 = 1,625 \quad ; \quad f_6 = 1,615\,384\dots \quad ;$$

$$f_7 = 1,619\,042$$

La suite $\{f_n\}$ semble donc converger vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($= 1,618\ 033\dots$)

Nous avons mis la racine positive X_1 (nombre d'OR) sous la forme d'une FRACTION CONTINUE SIMPLE de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Ici, tous les a_i sont égaux à 1 mais nous verrons que cela est un cas bien particulier.

Notation $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

La donnée d'une suite $\{a_n\}$ va nous permettre de définir une fraction continue f .

Les fractions : $f_0 = \frac{a_0}{1}$ (numérateur $p_0 = a_0$; dénominateur $q_0 = 1$)
 $f_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ ($p_1 = a_0 a_1 + 1$; $q_1 = a_1$)
 $\dots\dots$
 $f_n = \frac{p_n}{q_n}$

sont appelées *REDUITES d'ordre 0, 1, ..., n de la fraction continue f*.

$$f_0 = [a_0] ; \quad f_1 = [a_0, a_1] ; \quad \dots ; \quad f_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

Toutes les équations du second degré ne peuvent (hélas!) subir un tel traitement.

Ainsi

$$X^2 - 5X + 3 = 0 \quad \text{s'écrit} \quad X = 3 - \frac{5}{X}$$

qui nous mène à une impasse; alors que,

$$\begin{aligned} X^2 - 2 &= 0 & \text{s'écrit} & \quad X^2 - 1 = 1 \\ & & \text{ou encore} & \quad (X - 1)(X + 1) = 1 \quad \text{soit} \\ & & & \quad X = 1 + \frac{1}{1 + X} \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire $X = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + X}}$... etc soit

le développement $[1, 2, 2, 2, \dots]$ $a_0 = 1$ et $a_i = 2 \ i \geq 1$
pour l'irrationnel $\sqrt{2}$.

Méthode de Lagrange

En 1770, Lagrange utilisa une méthode semblable à ce qui suit pour traiter certaines formes quadratiques.

Lagrange reprend ainsi les études d'Euler et son oeuvre sera complétée par Legendre, puis enfin par Gauss.

L'emploi du calcul matriciel viendra clore ce sujet passionnant* sur la plan algébrique.

Choisissons donc l'équation $X^2 - 5X + 3 = 0$

$$\begin{array}{l}
 \underline{X^2 - 5X + 3 = 0} \\
 \downarrow \\
 f(4) < 0 \text{ et } f(5) > 0 \longrightarrow \text{Posons } X = 4 + \frac{1}{Y} \\
 \downarrow \\
 4 + \frac{1}{Y}^2 - 5 \left(4 + \frac{1}{Y}\right) + 3 = 0 \\
 \downarrow \\
 \underline{Y^2 - 3Y - 1 = 0} \\
 \downarrow \\
 f(3) < 0 \text{ et } f(4) > 0 \longrightarrow \text{Posons } Y = 3 + \frac{1}{Z} \\
 \downarrow \\
 3 + \frac{1}{Z}^2 - 3 \left(3 + \frac{1}{Z}\right) - 1 = 0 \\
 \downarrow \\
 \underline{Z^2 - 3Z - 1 = 0} \\
 \uparrow \\
 \text{donc } X = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots}}} = [4, 3, 3, 3, \dots]
 \end{array}$$

Voici les réduites successives de cette fraction continue:

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$\frac{4}{1}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{43}{10}$	$\frac{142}{33}$	$\frac{469}{109}$	$\frac{1549}{360}$
4	4,333..	4,3	4,303030..	4,302752..	4,302777..

Rappelons que $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4,302\,775 \dots$

* Voir ITARD "Théorie des nombres" page 64.

Le lecteur pourra appliquer cette méthode à l'équation $X^2 - 18 = 0$.

On trouve: $\sqrt{18} = [4, 4, 8, 4, 8, 4, 8, \dots]$

Lagrange a démontré que le développement en fraction continue d'une "forme quadratique irrationnelle" est *périodique* au-delà d'une certaine partie irrégulière.

Autre écriture d'un rationnel

Choisissons par exemple $\frac{22}{7}$ (approximation d'Archimède pour π)

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} \quad \frac{22}{7} \text{ est de la forme } a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Prenons maintenant $\frac{355}{113}$ et $\frac{103\,993}{33\,102}$ (autres approximations de π)

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

$$\frac{355}{113} \text{ est de la forme } a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$\frac{103\,993}{33\,102} = 3 + \frac{4\,687}{33\,102} = 3 + \frac{1}{\frac{33\,102}{4\,687}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{293}{4\,687}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{4\,687}{293}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{292}{293}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$$

$$\frac{103\,993}{33\,102} \text{ est de la forme } a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}$$

Lambert décomposa π en fraction continue et trouva pour ce nombre un grand nombre de réduites:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi = [3; 7; 15; 1; 292; 1; 1; 1; 2; 1; 3; \dots \text{etc} \dots] \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_0 \quad a_1 \quad a_2 \end{array}$$

Rappelons que Lambert démontra en 1770 que π n'était pas un rationnel.

Remarque sur l'algorithme de la recherche de la suite $\{a_i\}$:

Pour $\frac{355}{113}$, on a

$$\begin{array}{ccccccc} 355 & | & 113 & \rightarrow & 113 & | & 16 \\ 16 & | & 3 & & 1 & | & 7 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & a_0 & & a_1 & & a_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{355}{113} = [3 ; 7 ; 16]$$

Pour $\frac{113}{355}$, on a

$$\begin{array}{ccc} 113 & | & 355 \\ 113 & | & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 355 & | & 113 \\ & & 0 \end{array} \quad \dots \quad \text{donc } \frac{113}{355} = [0 ; 3 ; 7 ; 16]$$

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ =a_0 & =a_1 & =a_2 & \end{array}$$

D'une façon générale, ($p > q$) si $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$

alors $\frac{q}{p} = [0, a_0, a_1, \dots, a_n]$

L'algorithme des divisions successives vous montre que la suite $\{a_i\}$ est unique à l'exception près du dernier terme; examinons cela sur un exemple:

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = [3 ; 7 ; 16]$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{array}$$

ou encore

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = [3 ; 7 ; 15 ; 1]$$

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ a_0 & a_1 & a_2^{-1} & a_3=1 \end{array}$$

UNE APPLICATION BISSEXTILE !

L'année civile comporte 365 jours.

En 1900, l'année tropique avait pour valeur

365 jours 5 heures 48 minutes 45,975 secondes

Convertissons cela en unités-jours:

365,242 198 785

Cet excès de 0,242 198 785 est proche de $\frac{1}{4}$, ce qui explique la présence d'une année bissextile tous les quatre ans ...

Toutefois, il serait intéressant de connaître les réduites successives de $\frac{242\ 198\ 785}{1\ 000\ 000\ 000}$ pour donner une meilleur approximation que 1 jour 4 (année julienne).

$$\begin{aligned} 242\ 198\ 785 &= 0 \times 1\ 000\ 000\ 000 + 242\ 198\ 785 \\ 1\ 000\ 000\ 000 &= 4 \times 242\ 198\ 785 + 31\ 204\ 860 \\ 242\ 198\ 785 &= 7 \times 31\ 204\ 860 + 23\ 764\ 765 \\ 31\ 204\ 860 &= 1 \times 23\ 764\ 765 + 7\ 440\ 095 \\ 23\ 764\ 765 &= 3 \times 7\ 440\ 095 + 1\ 444\ 480 \\ 7\ 440\ 095 &= 5 \times 1\ 444\ 480 + 217\ 695 \\ 1\ 444\ 480 &= 6 \times 217\ 695 + 138\ 310 \\ 217\ 695 &= 1 \times 138\ 310 + 79\ 385 \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

Donc $f = \frac{242\ 198\ 785}{1\ 000\ 000\ 000} = [0; 4; 7; 1; 3; 5; 6; 1; \dots]$

Soit donc $f_0 = 0 \qquad f_1 = \frac{1}{4} \qquad f_2 = \frac{7}{29} \qquad \dots \text{etc.}$

Donnons toutes ces réduites dans le tableau suivant:

a_i	$a_0 = 0$	$a_1 = 4$	$a_2 = 7$	$a_3 = 1$	$a_4 = 3$	$a_5 = 5$	$a_6 = 6$	$a_7 = 1$
f	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{31}{128}$	$\frac{163}{673}$	$\frac{1009}{4166}$	$\frac{1172}{4839}$

Les intercalations sont donc celles de
1 jour tous les 4 ans (calendrier julien)
7 jours tous les 29 ans ...etc.

Dans ces réduites, on ne trouve pas l'intercalation de 97 jours tous les 400 ans du calendrier grégorien:

Rangeons $\frac{97}{400}$ parmi ces réduites :

$$f_1 = \underline{0,25}$$

$$f_2 = \underline{0,241} \ 379 \ 310$$

$$f_3 = \underline{0,242} \ 424 \ 242$$

$$f_4 = \underline{0,242} \ 187 \ 500$$

$$f_5 = \underline{0,242} \ 199 \ 109$$

$$f_6 = \underline{0,242} \ 198 \ 752 \quad \text{et}$$

$$f_7 = \underline{0,242} \ 198 \ 801$$

et $\frac{97}{400} = 0,242 \ 5$ donne donc une valeur par excès.

Dans son livre "Théorie des Nombres", Jean Itard* indique que Lagrange employait la valeur 365 jours 5 heures 48 minutes 49 secondes pour l'année tropique. Il lui fallait donc étudier la fraction $\frac{242 \ 233 \ 796}{1 \ 000 \ 000 \ 000}$.

Nous remarquons combien un excès d'environ 3 secondes sur l'évaluation de l'année tropique peut modifier la fraction à étudier, donc la nature des réduites successives.

(Le lecteur pourra montrer qu'elles sont modifiées à partir de f_5).

* Il semble qu'il y ait une erreur de calcul dans le livre de J. Itard:

On donne ainsi les valeurs de $\frac{1 \ 009}{4 \ 156}$ et $\frac{1 \ 172}{4 \ 829}$ pour f_6 et f_7 .

Notons enfin qu'ayant choisi la fraction $\frac{242 \ 198 \ 785}{1 \ 000 \ 000 \ 000}$ et J. Itard

la fraction $\frac{24 \ 219 \ 879}{100 \ 000 \ 000}$; nos calculs divergent à partir de a_3 .

EQUATION DIOPHANTINNE $ax - by = 1$

où a et b sont étrangers.

Preliminaire

Nous avons vu que si le rationnel $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, nous savons que les "réduites successives" valent :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \quad \text{et par récurrence} \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \text{ est}$$

donné par les formules:

$$\boxed{p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

Cherchons à évaluer $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n$:

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1) \times 1 - a_1 a_0 = 1$$

Plus généralement:

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \\ &= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - a_{n+1} p_n q_n - p_n q_{n-1} \\ &= (-1) \times (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n (p_1 q_0 - p_0 q_1)$$

soit finalement

$$\boxed{p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n}$$

Sur un exemple:

Toute équation $ax - by = 1$ peut être réduite en une forme plus simple, si on connaît une solution particulière (x_0, y_0) .

En effet, l'équation devient $a(x - x_0) = b(y - y_0)$ dont la résolution s'achève en utilisant le théorème de Gauss.

Les fractions continues nous donnent une méthode élégante pour DETERMINER une solution particulière.

Considérons les deux équations:

$$(E_1) \quad \underline{355x - 113y = 1} \quad \text{et} \quad (E_2) \quad \underline{355x - 113y = -1}$$

Montrons comment la connaissance des réduites successives de $\frac{355}{113}$ peut nous donner cette solution particulière:

$$\frac{355}{113} = [3; 7; 16]$$

$$\text{donc} \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{355}{113}$$

La propriété démontrée en préliminaire nous assure que

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = (-1)^1$$

soit

$$355 \times \textcircled{7} - 113 \times \textcircled{22} = -1$$

donc $(7; 22)$ est une solution particulière de (E_2) .

Pour résoudre (E_1) , il suffit de modifier le développement de $\frac{355}{113}$ en $[3; 7; 15; 1]$, d'où

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} \quad \text{et} \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} \quad \text{qui}$$

permet d'écrire que $p_3 q_2 - p_2 q_3 = 1$

$$\text{soit} \quad 355 \times \textcircled{106} - 113 \times \textcircled{333} = 1$$

soit que $(106; 333)$ est une solution particulière de (E_1) .

Finalement, pour (E_1) : $355(x - 106) = 113(y - 333)$ donc

$$\begin{cases} x = 106 + k \cdot 113 \\ y = 333 + k \cdot 355 \end{cases}$$

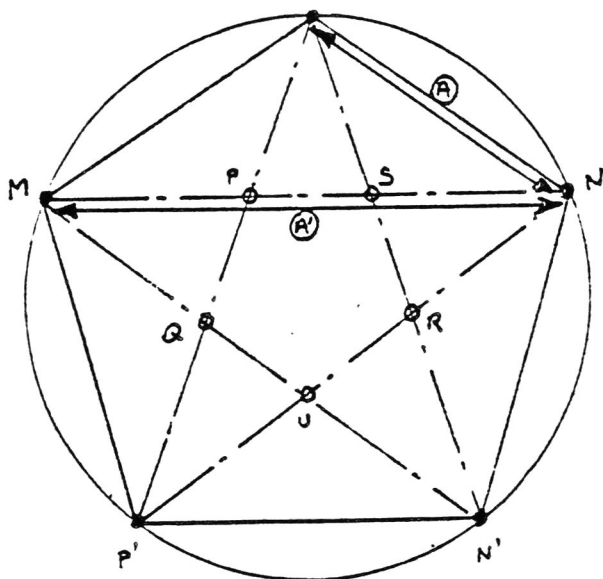
et pour (E_2) : $355(x - 7) = 113(y - 22)$ qui donne

$$\begin{cases} x = 7 + h \cdot 113 \\ y = 22 + h \cdot 355 \end{cases}$$

B - APPROCHE GEOMETRIQUE

■ Vers l'irrationnel

L'analyse géométrique d'un pentagone régulier convexe et du pentagone étoilé nous enseigne que le rapport $\frac{A'}{A}$ des deux côtés est irrationnel et vaut $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



Pour cela, il suffit de montrer que le rapport $\frac{A'}{A}$ peut se mettre sous la forme d'une fraction continue, égale à $[1, 1, 1, \dots]$.

L'algorithme est évident si on observe que le pentagone PSRUQ est également régulier.

Appelons B et B' les côtés des deux pentagones associés à cette seconde "génération".

$$\begin{array}{rcccl} A' & = & A & + & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ MN & & PN = P'N' & & MP = QR \end{array}$$

Comparons alors A et B' :

$$\begin{array}{rcccl} A & = & B' & + & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ MS & & MP = QR & & PS \end{array}$$

Il vient donc $A' = A + B'$ et $A = B' + B$

Soit encore:

$$\frac{A'}{A} = 1 + \frac{1}{\frac{A}{B'}} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B'} = 1 + \frac{1}{\frac{B'}{B}}$$

Regroupons ces deux égalités en une seule.

$$\frac{A'}{A} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{B'}{B}}$$

qui symbolise la récurrence cherchée.

■ Où l'on retrouve d'autres formules déjà vues ...

Suite de Fibonacci

Rappelons ce cantique bien connu de tout ouvrage ... traitant sérieusement de mathématiques contemporaines !

$$\text{Suite } \{x_n\} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \\ x_0 \text{ et } x_1 \text{ donnés.} \end{cases}$$

Cette suite est intéressante notamment par le fait que le rapport

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ tend vers } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; \text{ d'autre part, cette convergence est}$$

"rapide" et se contrôle par un simple calcul ne nécessitant pas l'emploi de calculatrice de poche.

Examinons les réduites successives:

$$f_0 = \frac{x_1}{x_0} \quad f_1 = \frac{x_2}{x_1} \quad f_2 = \frac{x_3}{x_2} \quad f_3 = \frac{x_4}{x_3}$$

$f_4 = \frac{x_5}{x_4}$	$f_5 = \frac{x_6}{x_5}$	...
-------------------------	-------------------------	-----

Cas particulier: $x_0 = 1$; $x_1 = 1$.

$$f_0 = \frac{1}{1} \quad f_1 = \frac{2}{1} \quad f_2 = \frac{3}{2} \quad f_3 = \frac{5}{3}$$

$f_4 = \frac{8}{5}$	$f_5 = \frac{13}{8}$	...
---------------------	----------------------	-----

En examinant f_4 et f_5 , on observe que:

$$\underline{5 \times 13 - 8^2 = 1}$$

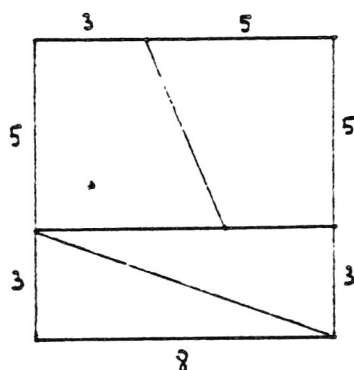
soit encore

$$\underline{x_4 x_6 - x_5^2 = 1}$$

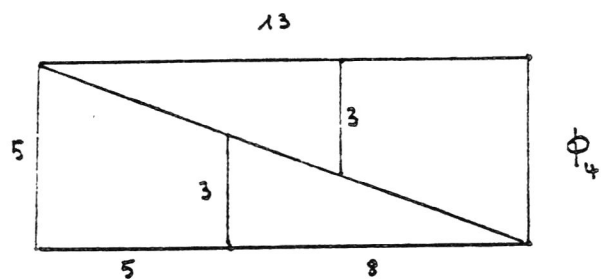
Ce n'est pas accidentel, puisque nous retrouvons la propriété générale

$$q_4 p_5 - q_5 p_4 = (-1)^4 = 1$$

Cette égalité traduit la première étape de la description d'un paradoxe géométrique reposant sur un découpage d'un carré puis de sa reconstitution apparente en un rectangle n'ayant pas la même aire mais regroupant néanmoins toutes les pièces.



Aire : $8^2 = 64$



Aire : $5 \times 13 = 65$

Ces deux figures (ϕ_4) ne sont qu'un cas particulier de la configuration générale (ϕ_{2n}) reposant sur l'égalité

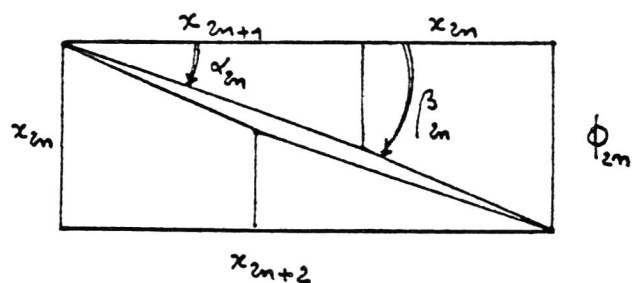
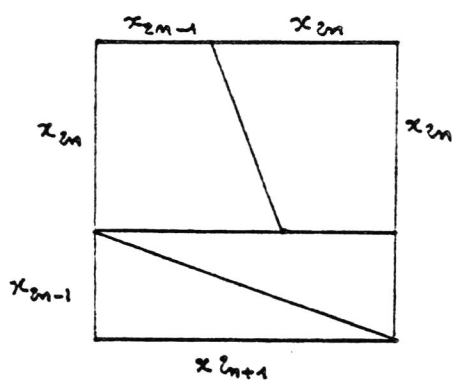
$$q_{2n} p_{2n+1} - q_{2n+1} p_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

qui, traduite en termes de la suite $\{x_n\}$, nous donne:

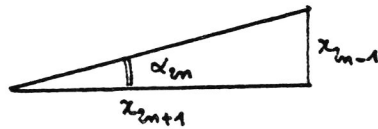
$$x_{2n} x_{2n+2} - x_{2n+1}^2 = 1$$

(ϕ_{2n})

aire du rectangle aire du carré

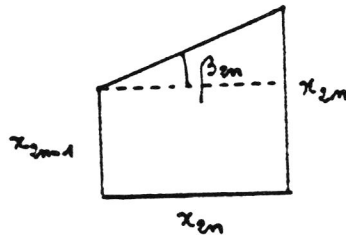


Pour rechercher le bien fondé de ce paradoxe, évaluons les angles α_{2n} et β_{2n} ainsi qu'ils sont définis sur la figure.



$$\operatorname{tg} \alpha_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{x_{2n+1}}$$

$$\text{soit } \alpha_{2n} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x_{2n-1}}{x_{2n+1}}$$



$$\operatorname{tg} \beta_{2n} = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{x_{2n}}$$

$$\text{soit } \beta_{2n} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{x_{2n}}$$

Pour la figure ϕ_4 construite sur $[x_3 = 3 ; \underline{x_4 = 5} ; x_5 = 8]$, nous obtenons

$$\alpha_4 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{3}{8} = \underline{20,55^\circ} \quad (\text{degrés décimalisés})$$

$$\beta_4 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{5-3}{5} = \underline{21,80^\circ}$$

Pour la figure ϕ_6 construite sur $[x_5 = 8 ; \underline{x_6 = 13} ; x_7 = 21]$

$$\alpha_6 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{8}{21} = 20,85^\circ$$

$$\beta_6 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{5}{13} = 21,03^\circ$$

Pour ϕ_8 construite à partir de $[x_7 = 21 ; x_8 = 34 ; x_9 = 55]$

$$\alpha_8 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{21}{55} = 20,89 \quad \text{soit } 20^\circ 51' 24''$$

$$\beta_8 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{13}{34} = 20,92 \quad \text{soit } 20^\circ 55' 12''$$

Les deux suites $\{\alpha_{2n}\}$ et $\{\beta_{2n}\}$ sont adjacentes et il est intéressant de rechercher leurs limites communes

$$\bullet \alpha_{2n} \quad \beta_{2n}$$

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{tg} (\alpha_{2n} - \beta_{2n}) &= \frac{\frac{x_{2n-1}}{x_{2n} + x_{2n-1}} - \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{x_{2n}}}{1 + \frac{x_{2n-1}(x_{2n} - x_{2n-1})}{x_{2n}(x_{2n} - x_{2n-1})}} \\ &= \frac{-x_{2n}^2 + x_{2n}x_{2n-1} + x_{2n-1}^2}{x_{2n}^2 + 2x_{2n}x_{2n-1} + x_{2n-1}^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha_{2n} - \beta_{2n}) = \frac{-f_{2n-1}^2 + f_{2n-1} + 1}{f_{2n-1}^2 + 2f_{2n-1} + 1}$$

L'examen du numérateur montre bien que

$$\lim_{\infty} (\alpha_{2n} - \beta_{2n}) = 0 \quad .$$

• Enfin la limite commune !

$$\operatorname{tg} \alpha_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{x_{2n+1}} = \frac{x_{2n-1}}{x_{2n}} \times \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}$$

$$\text{soit} \quad \operatorname{tg} \alpha_{2n} \longrightarrow \frac{1}{\omega^2} \quad \text{en appelant} \quad \omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad .$$

D'où le résultat :

$$\alpha = \lim_{\infty} \alpha_{2n} = \lim_{\infty} \beta_{2n} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\alpha = 20,905 \ 157^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 20^\circ \ 54' \ 19'' \quad .$$

La constante remarquable n'est pas à retenir par cœur !

Lagrange, Euler, Gauss, ... On pourrait penser que l'intérêt mathématique des fractions continues s'est progressivement éteint à l'aube du vingtième siècle ... Il n'en est rien et l'année 1978 a apporté un démenti à tous ceux des grands universitaires qui ont depuis longtemps balayé de leur cours cette théorie au bénéfice de développements apparemment plus subtils ... En effet, le mathématicien Roger Apéry a démontré que

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \quad \text{est bien irrationnelle}^* \quad .$$

Nous invitons le lecteur à lire l'article de Michel Mendès France dans "LA RECHERCHE" de février 1979. Il y retrace comment la communauté mathématique a accueilli l'annonce de cette découverte !

Avec ironie : une conjecture aussi vieille que cela ne peut pas trouver de solution avec de vieux outils !

Avec bêtise : de grands mathématiciens s'y sont cassés les dents, alors il est bien présomptueux de s'y atteler avec les outils d'Euler !

Vous connaissez la suite

* Fonction dzéta de Riemann

