

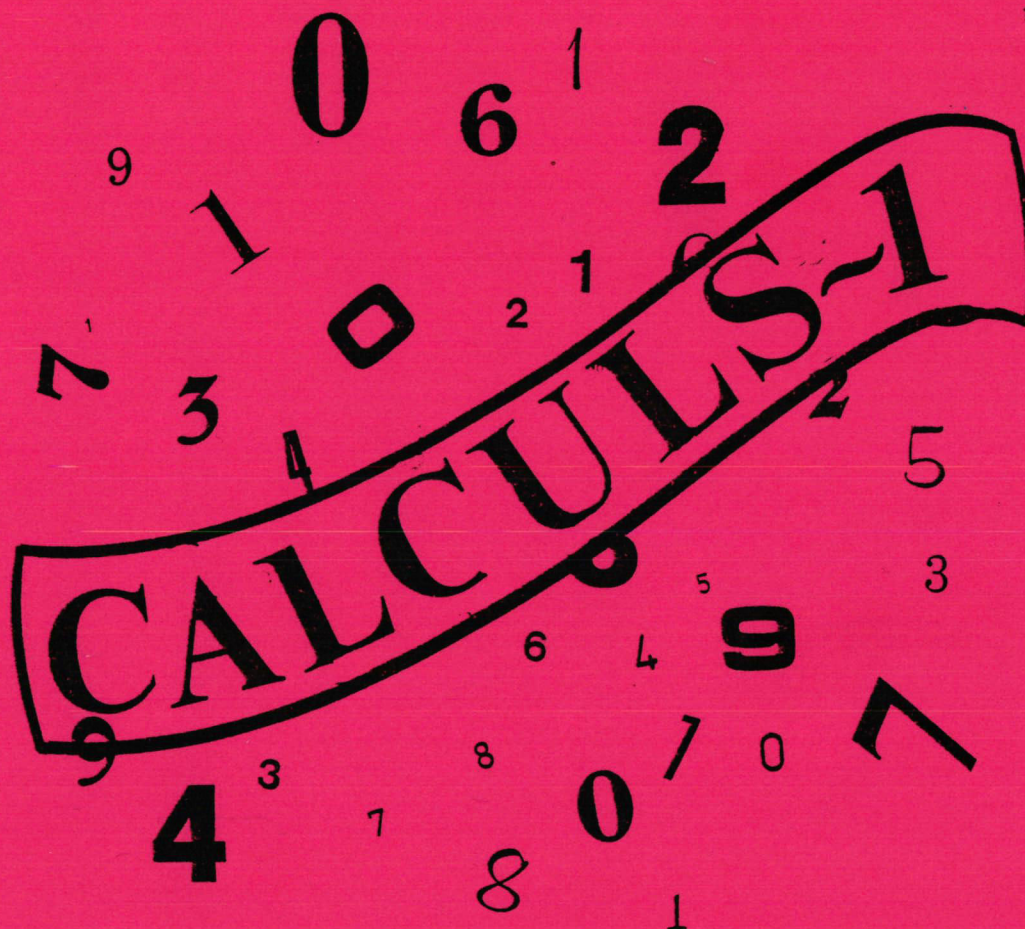
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITE PARIS VII

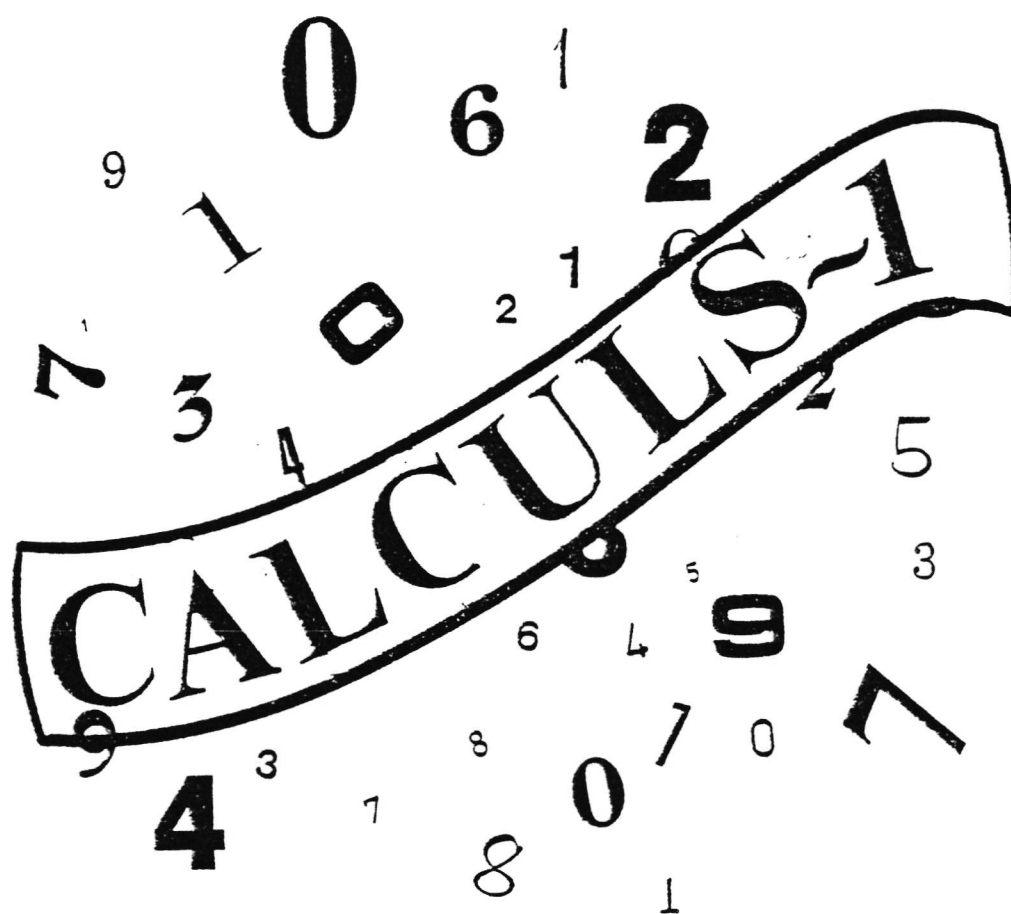


mars 80



par A. DELEDICQ et A. MYX

<u>NIVEAU</u>	6ème/5ème (et 4ème/3ème)
<u>PUBLIC</u>	Elèves
<u>SUJET</u>	Multiplication - Proportionnalité - Nombres
<u>OBJECTIF</u>	Faire des calculs



par A. DELEDICQ et A. MYX

Cette brochure présente quelques activités numériques
du niveau " premier cycle du secondaire "

Ces activités sont groupées en six fiches :

- les fiches 1 à 4 tournent autour de l'idée de proportionnalité
- la fiche 5 ($4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$) s'intéresse aux entiers décimaux illimités. La contemplation réfléchie des tables des pages 34 à 36 n'est pas sans intérêt.
- la fiche 6 réunit quelques curiosités.

On trouvera ensuite, page 43 à 56 un survol historique
des techniques de multiplication. Il y en a de très
curieuses qui valent bien la peine d'être expérimentées...

S O M M A I R E

FICHE 1 : TABLE DE MULTIPLICATION	Page 5
FICHE 2 : PROPORTIONNALITE	Page 11
FICHE 3 : GRANDEURS PROPORTIONNELLES	Page 15
FICHE 4 : PLUS SUR LA PROPORTIONNALITE	Page 21
FICHE 5 : DEVELOPPEMENT DECIMAL ILLIMITE	Page 27
FICHE 6 : NOMBRES DECOUVERTS	Page 37
 <u>TECHNIQUES DE MULTIPLICATION</u>	 Page 43
1 - Décomposer en somme l'un des termes du produit	Page 43
2 - Multiplication dite "égyptienne" ou "éthiopienne	Page 44
Multiplication par paquets	Page 46
3 - Décomposer en carrés Table des carrés des nombres de 1 à 100	Page 49
4 - Autre utilisation des carrés des nombres	Page 50
5 - Utilisation d'une table de multiplication	Page 51
6 - Première technique "décimale" (dite "arabe", "russe", "éthiopienne")	Page 52
7 - La technique actuelle	Page 53
8 - Batons de Neper et table de Genaille	Page 54
9 - Compter avec ses doigts	Page 56

(T1) Que remarque-t-on en observant une table de Pythagore pour la multiplication...?

. Vos remarques vous permettent-elles de compléter le tableau en bas à droite sans effectuer les produits correspondants ?

(T2) Sommes en croix

La somme des nombres formant une croix vaut 5 fois le nombre au centre de la croix.
Est-ce toujours vrai ?

(T3) Produits en diagonale

. 6, 30, 8 et 40 sont aux sommets d'un rectangle :

$$6 \times 40 = 8 \times 30$$

Est-ce toujours ainsi ? Preuve.

. Comment exploiter pédagogiquement cette propriété ?

1) pour préparer le concept de suites proportionnelles ?

2) pour préparer le concept de fraction ? (opérateur fractionnaire).

(T4) Alignements

La table de Pythagore est un quadrillage sur lequel on peut définir des suites en itérant une translation donnée :

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 25 \rightarrow 36 \rightarrow 49 \rightarrow 64 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow 6 \rightarrow 16 \rightarrow 30 \rightarrow 48 \rightarrow \dots$$

Etudier ces suites.

Note : Pour les questions (T3) et (T4) voir les tables figurant au verso

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

X	17	18	19	20
13				
14		252		
15				

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Notions mathématiques :

- * Propriétés de la multiplication
- * Ecritures et notations d'additions successives
Traduction en terme de suites proportionnelles
- * Propriétés des suites proportionnelles
- * "Différences" successives d'une suite.

T1 Premières observations

x	17	18	19	20
13	221	234	247	260
14	238	252	266	280
15	255	270	285	300

	+14		+15	+13
	↑		↑	↑
	+17			

On peut observer quelques faits évidents et importants:

- * Le rôle du zéro et de un :

$$0 \times a = 0 \quad \text{et} \quad a \times 0 = 0$$

$$1 \times a = a \quad \text{et} \quad a \times 1 = a$$

On dit que 0 est absorbant et que 1 est neutre pour la multiplication.

- * La table est symétrique par rapport à la diagonale 0, 1, 4, 9, 16,: cela vient du fait que la multiplication est *commutative*:

$$a \times b = b \times a$$

- * La diagonale contient la suite des carrés:

$$0 = 0 \times 0 ; 1 = 1 \times 1 ; 4 = 2 \times 2$$

$$9 = 3 \times 3 ; 16 = 4 \times 4 ; \dots \text{etc...}$$

- * Chaque rangée (ligne ou colonne) est formée de la suite des multiples d'un même naturel; ainsi la ligne 4 :

④: 0 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40

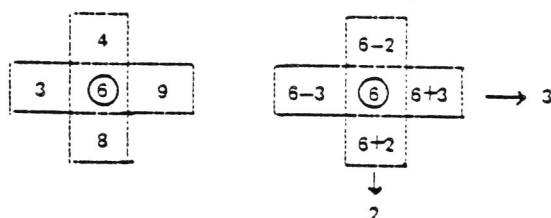
↔ ↔ ↔ ↔

T2 Sommes en croix

	b - 1	colonne (b)	B + 1
a - 1		ab - b	
ligne (a)	ab - a	ab	ab + a
a + 1		ab + b	

Dans la croix centrée en ⑥, la ligne est formée des multiples de 3; la colonne est formée des multiples de 2.

Traduisons cette croix de deux façons:



$$(6 - 3) + (6 + 3) = 2 \times 6$$

$$(6 - 2) + (6 + 2) = 2 \times 6$$

-8-

Nous pouvons choisir une croix aux branches plus grandes :

		32		
		40		
36	42	48	54	60
		56		
		64		

- $40 + 56 = 42 + 54 = 2 \times 48$
- $32 + 64 = 36 + 60 = 2 \times 48$

T3 Produits en diagonale

	colonne		colonne
	(a)		(b)
ligne			
(x)	ax		bx
ligne			
(y)	ay		by

* Cette propriété est générale quel que soit le rectangle (ou carré) choisi dans la table. La preuve de cette propriété est affaire de repérage de cases (géométrie sur quadrillage):

	3		7
4	4×3		4×7
9	9×3		9×7

Premier produit : $4 \times 3 \times 9 \times 7$

Second produit : $9 \times 3 \times 4 \times 7$

* Ce résultat reste vrai pour quatre cases situées côte à côte:

10	12
15	18

3	4
6	8

$$10 \times 18 = 15 \times 12$$

$$3 \times 6 = 6 \times 4$$

. Cette propriété traduit également que les deux suites

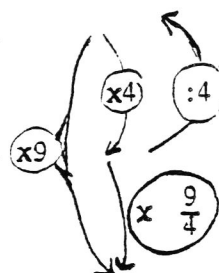
0	4	8	12	16	20	24	28	...
0	9	18	27	36	45	54	63	...

 sont proportionnelles.

L'égalité $12 \times 63 = 27 \times 28$ ou encore $\frac{12}{27} = \frac{28}{63}$ n'est autre que ... la régle de trois..

. Coefficient de proportionnalité :

ligne (1)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
ligne (4)	0	4	8	12	16	20	24	28	...
ligne (9)	0	9	18	27	36	45	54	63	...



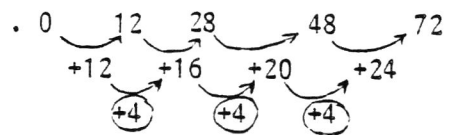
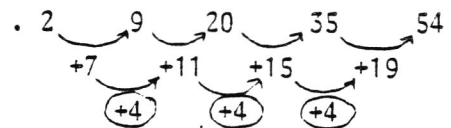
T4 Alignements

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Voici deux alignements de "vecteur directeur":

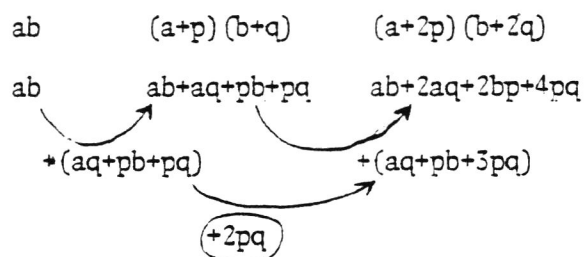


Etudions ces deux suites :



. Généralisations : translation de vecteur (p,q)

	a	a+p	a+2p
b	ab		
b+q		(a+p) x (b+q)	
b+2q			(a+2p) x (b+2q)



qui ne dépend pas de la case de départ (a,b) mais uniquement des composantes de la translation.

Cette propriété traduit le fait que le produit $(a + np)(b + nq)$ est du deuxième degré en n ; la "différence première" est donc du premier degré en n , et la différence seconde est constante.

On peut aussi penser que ce phénomène traduit une double proportionnalité : en ligne et en colonne (voir aussi fiche 4) :

Si la proportionnalité était simple, la première différence serait constante.

Puisqu'elle est "double", il faut effectuer une deuxième différence.

CALCUL NUMERIQUE / FICHE N°2

PROPORTIONNALITE

1. Voici 3 situations. Quelle méthode de calcul vaut-il mieux employer dans chaque cas ?

- a. 4 bouteilles coûtent 12 z, combien coûtent 7 bouteilles ?
- b. 4 fruits coûtent 7 z, combien coûtent 12 fruits ?
- c. 14 boîtes coûtent 8 z, combien coûtent 21 boîtes ?

2. Sans aucune formule, comment débrouiller ces deux situations ?

- a. 8 hommes fauchent 8 parcelles en 8 jours.
Combien fauchent 4 hommes en 4 jours ?
- b. Quelqu'un a acheté 2 kg de farine et 5 kg de riz pour 12 zloties.
Un autre a acheté 3 kg de farine et 2 kg de riz pour 12 zloties.
Quelles informations peut-on en tirer ?

I. PROPORTIONNALITE1. Définition

Une application f de E dans F est une *relation de proportionnalité*

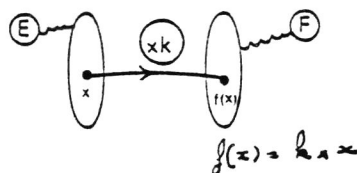
signifie :

Il existe un nombre k , tel que l'image par f de tout élément x de la source est égal à $k \cdot x$

signifie

Il existe un nombre k tel que :

$$f: E \rightarrow F \\ x \mapsto k \cdot x$$



Le nombre k s'appelle le *coefficient de proportionnalité*.

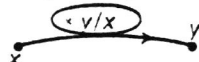
2. Propriétés

(P1)



L'image de l'unité est égale au coefficient de proportionnalité.

(P2)



Si y est l'image de x , alors le coefficient de proportionnalité est égal à y/x .

(P3)

$$k \cdot (a \cdot x) = a \cdot (k \cdot x)$$

Si x est multiplié par a , son image est multipliée par a .

(P4)

$$k \cdot (x + y) = (k \cdot x) + (k \cdot y)$$

L'image d'une somme est égale à la somme des images.

(P5)

x	x_1	x_2
$f(x)$	y_1	y_2

si $x_1 \mapsto y_1$
et $x_2 \mapsto y_2$

les "produits en croix sont égaux" :

$$x_1 y_2 = y_1 x_2$$

$$\text{démonstration : } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

3. Calcul de l'imagea. "Règle de trois" ou "calcul du coefficient" ou "passage par l'unité"

$$\text{ex : } 4 \mapsto 12$$

4 unités coûtent 12

$$\begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \downarrow \end{array}$$

$$1 \mapsto 3$$

"4 fois moins coûtent $12/4 = 3$ " ou "le coefficient $12/4$ est l'image de 1"

$$\begin{array}{l} \textcircled{\times 7} \\ \downarrow \end{array}$$

$$7 \mapsto 21$$

"7 fois plus coûtent 7×3 "

b. Utilisation de la propriété de linéarité (P3) sans passer par l'unité

$$\text{ex : } 4 \mapsto 7$$

$$12 \mapsto ?$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{\times 3} \\ \downarrow \end{array}$$

$12 = 3 \times 4$, l'image de 12 est donc trois fois l'image de 4

Remarque : Dans la première situation on a $\begin{cases} 4 \mapsto 12 \\ 7 \mapsto ? \end{cases}$

Dans la deuxième situation on a $\begin{cases} 4 \mapsto 7 \\ 12 \mapsto ? \end{cases}$

Le résultat est identique car les "produits en croix" sont les mêmes (7×12 et $4 \times ?$)

La méthode de calcul est à choisir en fonction des données.

(Dans a. il aurait été curieux de multiplier 12 par $7/4$)

Dans b. il aurait été curieux de calculer $7/4$ et de le multiplier par 12)

c. Utilisation des propriétés de linéarité (P3) et (P4)

$$\begin{array}{lcl} \text{ex : } 14 & \longrightarrow & 8 \\ \quad \downarrow \text{:2} & & \downarrow \\ \quad 7 & \longrightarrow & 4 \\ 21 & \longrightarrow & 8 + 4 \end{array}$$

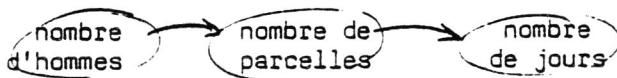
"21" c'est "14 plus la moitié de 14"
C'est "pareil" pour les images

4. Proportionnalité "en série" ou "en parallèle".

L'utilisation des propriétés de linéarité (P3 et P4) permet de manipuler simplement (c'est-à-dire au niveau des enfants) des situations apparemment désagréables.

a.

$8 \longrightarrow 8 \longrightarrow 8$	8 hommes fauchent 8 parcelles en 8 jours
$4 \longrightarrow 4 \quad 8$	4 hommes fauchent 4 parcelles dans le même temps
$4 \quad 2 \longrightarrow 4$	Les mêmes fauchent 2 parcelles en 4 jours



b.

$(2, 5) \longrightarrow 19$	$\times 2$
$(4, 10) \longrightarrow 38$	
$(3, 2) \longrightarrow 12$	$\times 3$
$(9, 6) \longrightarrow 36$	
$(5, 7) \longrightarrow 31$	+
$(9, 17) \longrightarrow 69$	
$(9-9, 17-6) \longrightarrow 33$	
$(0, 11) \longrightarrow 33$	$\div 11$
$(0, 1) \longrightarrow 3$	
$(0, 5) \longrightarrow 15$	$\times 5$
$(2-0, 5-5) \longrightarrow 19-15$	
$(2, 0) \longrightarrow 4$	$\div 2$
$(1, 0) \longrightarrow 2$	

2 kg de farine et 5 kg de riz coûtent 19 z.
4 kg de farine et 10 kg de riz coûtent le double donc 38 z.

En traduisant par des phrases en français cela "passe" mieux

Le riz coûte 3z. le kilo

La farine coûte 2z. le kilo

- (G1) Si la température augmente de UN degré, 1cm^3 d'alcool augmente de $0,001\text{ cm}^3$ et 1cm^3 de mercure augmente de $0,00018\text{ cm}^3$.

Le diamètre intérieur de la tige d'un thermomètre a une section de 1mm^2 . Le volume du liquide est $1,8\text{ cm}^3$.

De quelle hauteur augmente la colonne de liquide quand la température augmente de 15 degrés

- dans le cas d'un thermomètre à alcool ?
- dans le cas d'un thermomètre à mercure ?

Analyser les différents types de grandeurs intervenant dans cet énoncé.

Quand y a-t-il proportionnalité selon un loi physique ?

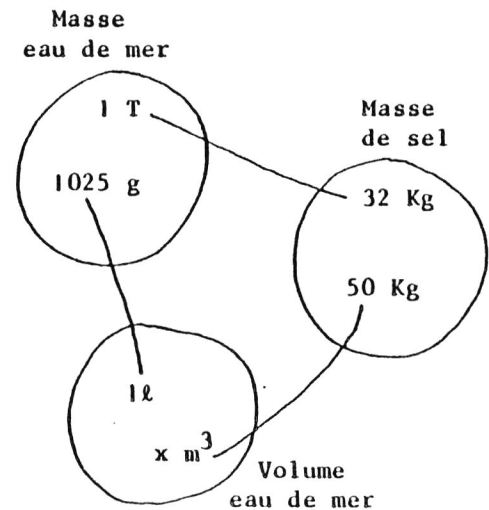
(l'énoncé l'indique-t-il ?)

Quand y a-t-il proportionnalité pour une raison mathématique ?

- (G2) Une tonne d'eau de mer donne 32 Kg de sel.
Combien de m^3 d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir un demi-quintal de sel, sachant que le litre d'eau de mer a pour masse 1025 g ?

Mêmes questions que précédemment.

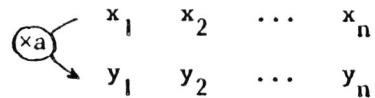
Ranger les différentes données dans un tableau à double entrée mettant ainsi en évidence les grandeurs proportionnelles et une technique de résolution.



- (G3) Combien faut-il d'hectolitres d'olives fraîches pour fabriquer 906 litres d'huile, sachant que l'olive donne 12% de son poids d'huile; qu'un hectolitre d'olives pèse 45,3 Kg et qu'un litre d'huile pèse 912 grammes.

Mêmes questions.

De ces trois problèmes, essayer d'extraire le concept de suites de nombres proportionnelles; faut-il privilégier la définition (D) ou la propriété caractéristique (P) ?



$$f : x \mapsto ax$$



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
linéaire

$$\begin{cases} f(x+x') = f(x) + f(x') \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Comment "corrigeriez-vous" l'exercice suivant proposé à des élèves de sixième:

- (G4) Une plaque de contreplaqué rectangulaire de 40cm par 180cm a pour masse 2,4Kg. Quelle est la masse d'une plaque (d'un même contreplaqué) ayant la forme d'un carré de 0,60cm de côté ?

- (G5) Voici quelques mots ayant quelques rapports (??) avec la notion de proportionnalité. (voir en marge). Essayer de dégager une présentation "moderne" de la notion correspondante.

équations linéaires
rapports
proportions
barème
échelle d'une carte
intérêt
pourcentage
règle de trois
taux
escompte
Actions et obligations
masse volumique
Théorème de Thalès
alliage
titre
débit
vitesse

Notions mathématiques

- * Relation de proportionnalité
- * Loi physique et relation mathématique
- * Tableaux de suites proportionnelles
- * Expression "rectangulaire" du lien de proportionnalité
(produits en croix)
- * Linéarité

①

Thermomètre

	Variation de volume pour 1° (en cm ³)	Variation de volume pour 15° (en cm ³)	Variation de la hauteur de la colonne (en cm) pour 15°
alcool	0,001	0,015	1,5
mercure	0,000 18	0,002 7	0,27

×15

(loi physique sur
la dilatation
des liquides)

:0,01

(formule mathématique donnant
le volume V d'un cylindre de
base B et de hauteur h :
 $V \xrightarrow{\quad} h$
:B)

②

L'eau de mer ...

Voici un tableau à double entrée rendant compte de toutes les données:

<u>eau de mer</u>		<u>sel</u>
Volume (m ³)	Masse (Kg)	Masse (Kg)
	1 000	32
x	y	50
0,001	1,025	z
I	II	III

La proportionnalité entre les suites I et II est due à la notion de masse volumique.

La proportionnalité entre les suites I et III est d'origine "physique" mais le couple (1 l — 1,025 Kg) a sans doute été obtenu par la voie statistique.

Le calcul de x peut se faire "à coup de règles de trois" ou encore en déterminant la "quatrième proportionnelle ...".

Revoir le commentaire de la fiche 0

Dans le cas qui nous préoccupe, il n'y a dans I, II ou III aucun rectangle dont un sommet soit x et les trois autres des données numériques.

Il faut donc:

* soit calculer y dans

1000	32
y	50

puis x dans

x	y
0,001	1,025

$$y = \frac{50 \times 1000}{32}$$

$$x = \frac{50 \times 1000 \times 0,001}{32 \times 1,025}$$

* soit calculer z dans

1000	32
1,025	z

puis x dans

x	50
0,001	z

$$z = \frac{32 \times 1,025}{1000}$$

$$x = \frac{50 \times 0,001 \times 1000}{32 \times 1,025}$$

d'où $x = 1,524 \text{ m}^3$

Le diagramme donné en marge de l'énoncé traduit les proportionnalités que l'on doit mettre en évidence sans tenir compte des conversions (changements d'unités) qui sont d'autres sources de proportionnalité.

③

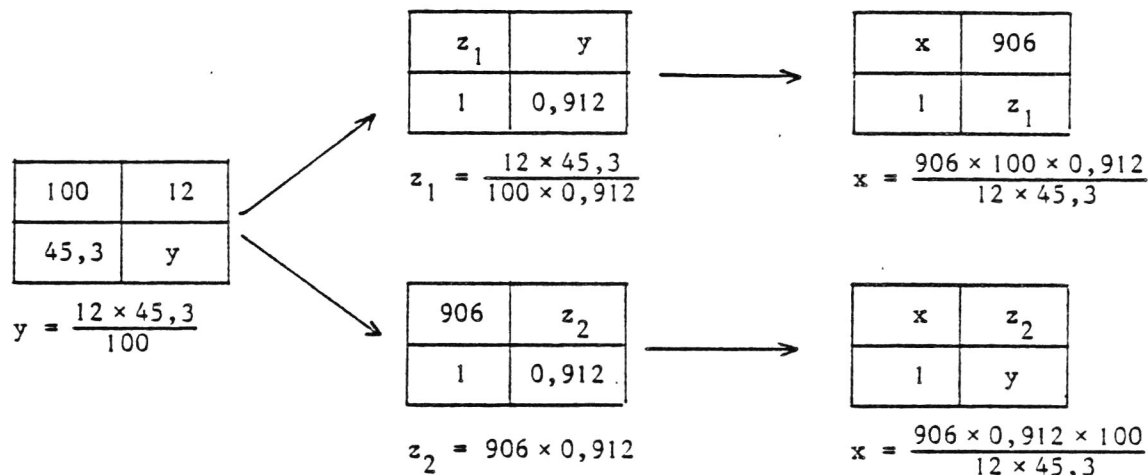
Les olives ...

Olives fraîches		Huile	
Volume (Hl)	Masse (Kg)	Volume (l)	Masse (Kg)
x		906	z_2
	100		12
1	45,3	z_1	y
		1	0,912

maths

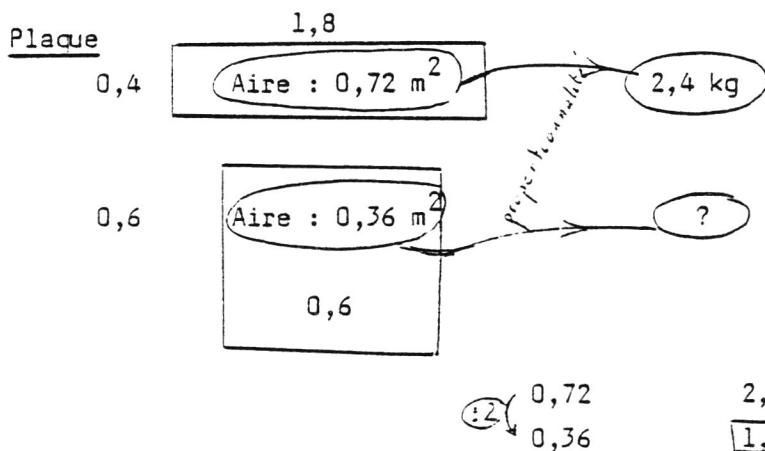
maths

expérience



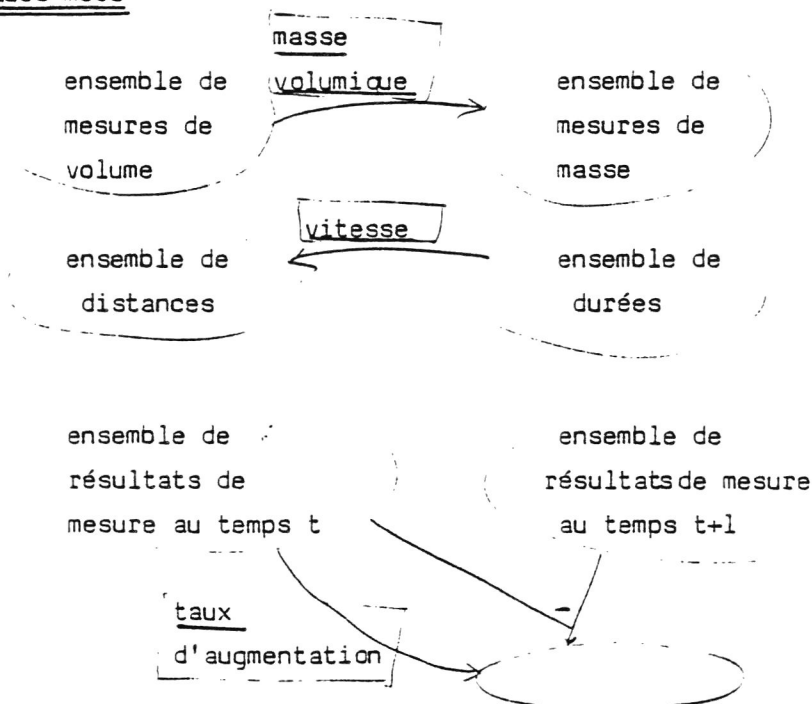
soit $x = 152 \text{ Hl}$ (et ça tombe juste !)

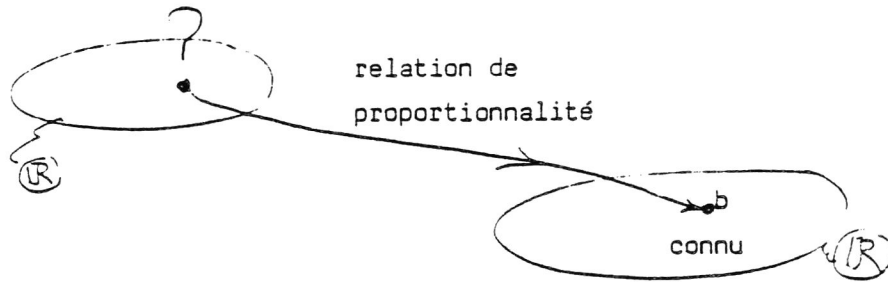
G4



G5

Quelques mots



Equation linéaire :Proportions

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

équivaut à

l'application f :

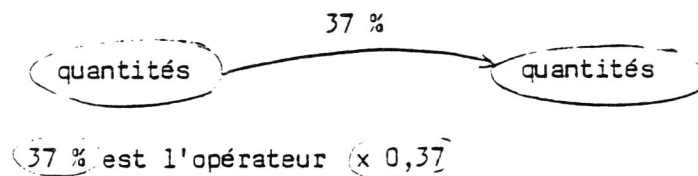
a	a'
b	b'
c	c'
d	d'

est une relation de proportionnalité

conséquence

$$\frac{a}{a'} = \frac{ma + nb}{ma' + nb'}$$

$$ma + nb \quad ma' + nb'$$

Pourcentage

Dans l'ouvrage de Fauvergüe et Briançon, on rencontre l'exercice suivant que l'on peut proposer à des enfants de 10/11 ans :

(P1)

Une ménagère achète au marchand de fruits 7 Kg de fraises et 2 Kg de cerises pour 28 F.

Une autre achète au même marchand 5 Kg de fraises et 3 Kg de cerises pour 24,40 F.

Combien dois-je payer si je vais acheter :

- 12 Kg de fraises et 5 Kg de cerises ?
- 24 Kg de fraises et 10 Kg de cerises ?
- 2,4 Kg de fraises et 1 Kg de cerises ?
- 1 Kg de fraises et 0 Kg de cerises ?
- 0 Kg de fraises et 1 Kg de cerises ?

Pourquoi y a-t-il proportionnalité ?

Comment résoudre un tel problème autrement que par la "méthode dite algébrique" ?

Analyser les propriétés du tableau à double entrée pouvant servir de barème à ce marchand.

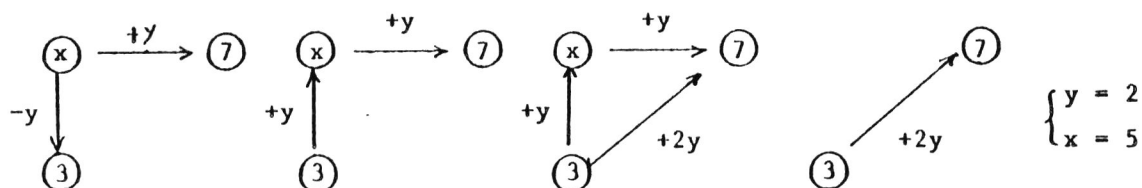
(7 , 2)	→	28
(5 , 3)	→	24,40
(14 , 4)	→	...
(10 , 6)	→	
.....		
(1 , 0)	→	...
(0 , 1)	→	...

(P2)

Voici le film de la résolution de $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

selon une méthode

"dynamique" . Est-elle toujours applicable ?



DES MELANGES

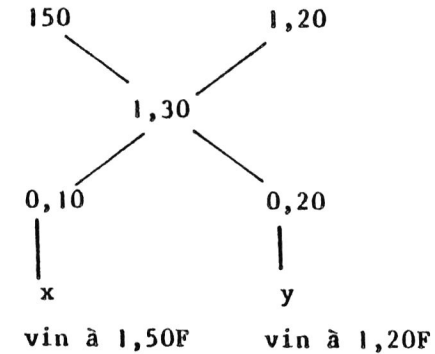
(P3) Un problème de certificat d'études ...

On veut mélanger du vin à 1,50F le litre et du vin à 1,20F le litre pour obtenir 228 litres de mélange revenant à 1,30F le litre.

Combien dois-je prendre de litres de chaque sorte ?

Expliquer le fonctionnement de la "croix des mélanges"

Le croix des mélanges :



$$\frac{x}{0,10} = \frac{y}{0,20} \quad \text{et} \quad x + y = 228$$

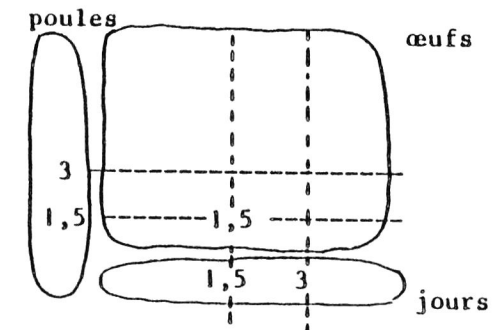
(P4) Quels "poids" de deux lingots d'or à 0,900 et à 0,750 doit-on prendre pour obtenir un lingot de 3 Kg au titre de 0,840 ?

$$\text{titre} = \frac{\text{"poids" total du métal fin}}{\text{"poids" total de l'alliage}}$$

D'AUTRES PETITS PROBLEMES

(P5) Une poule et demie pond un œuf et demi en un jour et demi.
Combien pondent 9 poules en 9 jours ?

(P6) Une équipe d'ouvriers travaillant 9h par jour a mis 7 jours pour faire un chemin de 35m de long. Combien de jours faudrait-il à cette équipe, travaillant 8h par jour pour faire un chemin de 40 mètres ?



On proposait autrefois deux types de raisonnement :

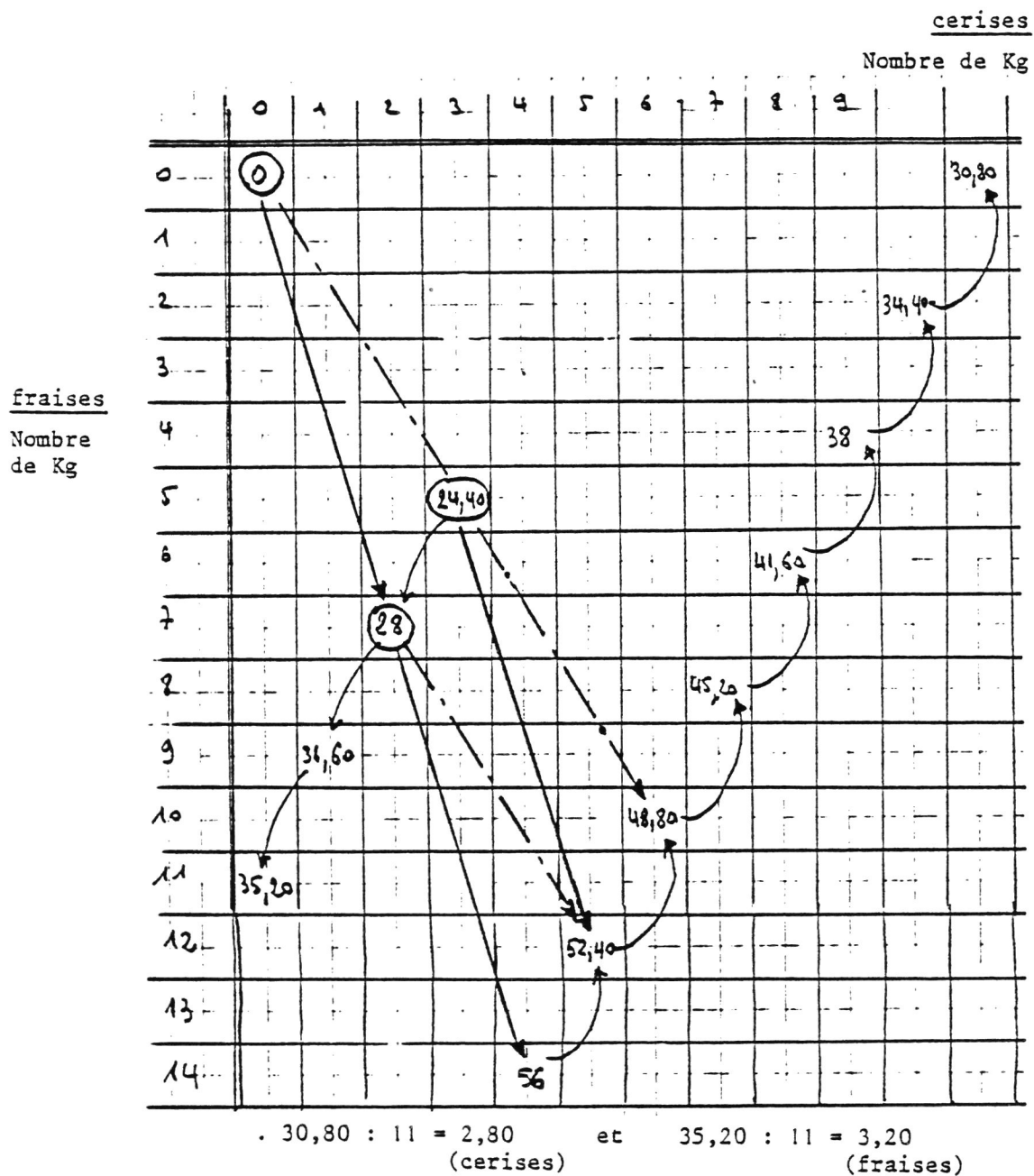
+ méthode des proportions

+ méthode de réduction à l'unité.

Notions mathématiques

- * Formes linéaires
- * Barycentre
- * Equations linéaires
- * Techniques de calculs dans les relations de proportionnalité

P1 Etablissons un tableau à double entrée de cette marchande:



. Ce tableau à double entrée et le travail "vectoriel" que nous y avons représenté permet de bien illustrer le caractère LINEAIRE de la situation proposée.

Ⓕ DES MELANGES

Dans le cours d'arithmétique de E. REAU, l'auteur propose deux types de solution. Les voici :

Solution "arithmétique"

Le prix moyen, 1f,30 est intermédiaire entre le prix fort 1f,50 et le prix faible 1f, 20. D'où :

En vendant 1f,30 (prix moyen) 12 de vin à 1f,50 (prix fort), on perd :

$$1f,50 - 1f,30 = 0f,20$$

En vendant 1f,30 (prix moyen) 12 de vin à 1f,20 (prix faible), on gagne :

$$1f,30 - 1f,20 = 0f,10$$

- Le gain devant compenser la perte on devra prendre :

12 à 1f,50 sur lequel on perd
0f,20
et 22 à 1f,20 sur lesquels on gagne
 $0f,10 \times 2 = 0f,20$.

Le mélange se fera donc dans la proportion de 1 à 2.

Pour trouver les quantités à mélanger, il suffit de partager 2282 proportionnellement à 1 et à 2. On prendra :

$$\frac{2282 \times 1}{1 + 2} = \frac{2282}{3} = 762 \text{ à } 1f,50 .$$

$$\text{Et } \frac{2282 \times 2}{1 + 2} = \frac{2282 \times 2}{3} = 1522 \text{ à } 1f,20 .$$

Solution "algébrique"

Soit x le nombre de litres à 1f,50 celui de l'autre qualité sera $228 - x$ et la valeur de chaque qualité sera :

$$\text{Pour la 1ère: } 1,5x$$

$$\text{Pour la 2ème: } (228 - x) \times 1,2 .$$

La somme de ces valeurs doit être égale à la valeur de 2282 à 1f,20 . D'où l'équation :

$$1,5x + (228 - x)1,2 = 228 \times 1,3 .$$

En effectuant la parenthèse, il vient :

$$1,5x - 273,6 - 1,2x = 296,4$$

$$0,3x = 296,4 - 273,6 = 22,8 .$$

$$\text{D'où : } x = \frac{22,8}{0,3} = 762$$

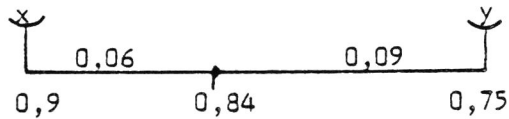
$$\text{Et } 228 - x = 228 - 76 = 1522$$

Remarque. - En disposant les données comme ci-dessous, on trouve immédiatement le rapport des quantités à mélanger.

Prix fort: 1f,50 0,10 ou 12 à 1f,50
 Prix moyen: 1f,30
 Prix faible: 1f,20 0,20 ou 22 à 1f,20

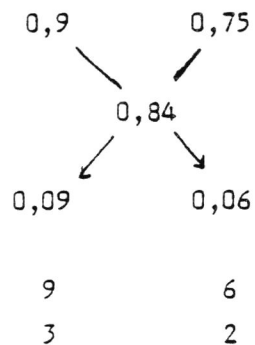
-25-

Ⓟ On peut aussi raisonner en termes de "barycentre" c'est-à-dire de centre de gravité :



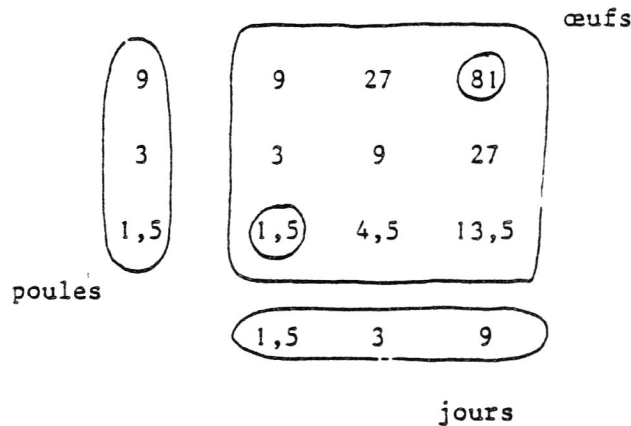
On doit avoir $x \times 0,06 = y \times 0,09$

$\frac{x}{9} = \frac{y}{6}$ et la somme $x + y$ est fixée



Réponse : 1,8 kg et 1,2 kg pour 1 total de 3 kg
 (à 0,900) (à 0,750)

(P5) D'AUTRES PROBLEMES



(P6)

Voici deux solutions données dans un cours d'arithmétique du Cours Supérieur (E. REAU, programme de 1923).

Méthode des proportions

Données:

9h	35m	7j
8h	40m	x

- 1°) Supposons la journée de 9h dans les 2 cas et cherchons le nombre de jours mis pour faire 40m.

La durée est directement proportionnelle à la longueur du chemin, d'où

$$\frac{35}{40} = \frac{7}{x}$$

$$\text{et } x = \frac{7 \times 40}{35} = 8j$$

- 2°) Les données deviennent:

Pour 9h par jour, il faut 8j.

Pour 8h par jour, il faut x.

Ces 2 grandeurs sont inversement proportionnelles d'où:

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Et } x = \frac{8 \times 9}{8} = 9 \text{ jours}$$

Méthode de réduction à l'unité

9h	35m	7j
8h	40m	x

- 1°) Pour faire 1m de chemin, il faut, la journée étant de 9h : $\frac{7j}{35}$

Et pour faire 40m, il faut:

$$\frac{7j \times 40}{35}$$

la journée étant toujours de 9h.

- 2°) Si la journée était d'1h, il faudrait 9 fois plus de jours, ou

$$\frac{7j \times 40 \times 9}{35}$$

La journée étant de 8h, il faudra le $\frac{1}{8}$ de ce temps,

ou :

$$\frac{7j \times 40 \times 9}{35 \times 8} = 9 \text{ jours}$$

- (D1). Par la technique de la division, trouver les périodes des développements décimaux illimités de :

$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{22} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{37} \quad \frac{1}{54} \quad \frac{1}{66} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{74} \quad \frac{1}{81} \quad \frac{1}{97} \quad \frac{1}{98} \quad \frac{1}{99}$$

Grouper les résultats analogues. Les questions suivantes permettent de comprendre quelques phénomènes.

- (D2). Que dire au sujet des développements de $1/7$ et $1/81$? (calculer $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$).

- (D3). Quels sont les nombres rationnels dont la période est 0 ?

- (D4). Observer les périodes de $\frac{1}{22}, \frac{1}{66}, \frac{1}{27}, \frac{1}{37}, \frac{1}{54}, \frac{1}{74}$.

Faire le produit du "dénominateur" par le nombre formé par les chiffres de la période. Ce résultat et la séquence écrite en marge peuvent vous permettre de comprendre : comment trouver une écriture fractionnaire d'un rationnel dont on connaît la période ?
Exemple : $0,197819781978... = ?$ $0,365365365... = ?$ $0,696969 = ... ?$

- (D5). Les écritures en marge sont une illustration de la formule suivante :

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots \text{ Cette formule n'est valable que pour } |a| < 1.$$

Poser $a = \frac{1}{1000}$ et "développer" : $0,123 \times \frac{1}{1-a}$.

Reprendre la question 4 sous cet aspect.

- (D6). Poser $a = \frac{2}{100}$. Cela explique-t-il le développement de $\frac{1}{98}$? et de $\frac{1}{97}$?

- (D7). Quels sont les nombres tels que la période du développement de l'inverse soit constituée d'un seul chiffre ?

$$\frac{2}{9} \times \frac{23}{11} \times \frac{43}{101} = 0, \dots\dots\dots ?$$

$$x = 0,123 \, 123 \, 123 \, \dots$$

$$1000x = 123,123 \, 123 \, 123 \, \dots$$

$$1000x = 123 + x$$

$$x = ?$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$$- a [1 + a + a^2 + a^3 + \dots]$$

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = (1-a) [1 + a + a^2 + a^3 + \dots]}$$

Notions mathématiques

- Pratique de la division.
- Le phénomène de la "retenue" dans les additions et multiplications.
- Décomposition en facteurs premiers.
- Puissances négatives de 10 et décalage des chiffres de l'écriture décimale.
- Formule donnant la somme des puissances positives d'un nombre inférieur à 1.

PERIODE D'UN DEVELOPPEMENT DECIMAL ILLIMITE (Question 1)

On effectue une division. Par exemple $\frac{a}{327}$.

Tous les restes partiels trouvés sont inférieurs à 327 ; ils peuvent donc valoir 0, 1, 2, ... ou 326.

Donc en 327 étapes au maximum, on sera sûr de trouver deux restes partiels égaux : r_i et r_j .

A partir du deuxième (r_j), la division se poursuivra évidemment comme à partir du premier (r_i) : ces étapes se répéteront alors indéfiniment.

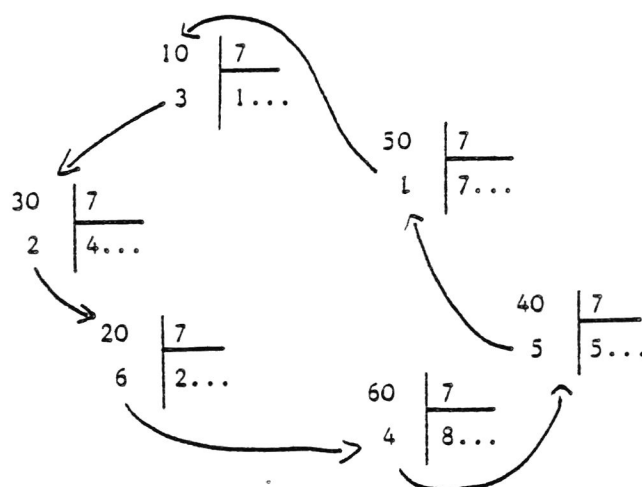
Sur les développements décimaux illimités demandés on peut faire les remarques suivantes :

• Période de un septième (Question 2)

$$\bullet \frac{1}{7} = 0, \underline{142857}$$

Les développements de $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, et $\frac{6}{7}$ commencent justement par un des chiffres de la période de $\frac{1}{7}$.

D'où le fait que le nombre 142857 multiplié par 2,3,4,5,6 donne une permutation circulaire de ces chiffres :



D'autre part $7 \times \frac{1}{7} = 1 = 0,999999$, permet de comprendre que

$$142857 \times 9 = 999999.$$

(voir aussi question).

• Période de 1 chiffre

$$\frac{1}{18} = 0,0\overline{5}$$

$$\frac{1}{36} = 0,02\overline{7}$$

$$\frac{1}{72} = 0,13\overline{8}$$

(voir question 4).

• Fractions décimales (Question 3)

$$\frac{1}{32} = 0,03125\overline{0}$$

A

Si la technique de division ne donne que des zéros à partir d'un certain rang, c'est que le nombre s'écrit $\frac{1}{10^n}$. Ici :

$$\frac{1}{32} = \frac{3125}{100\,000}. \text{ Les rationnels de période } \overline{0}, \text{ sont les nombres "décimaux".}$$

Puisque $10^n = 2^n \cdot 5^n$, les nombres décimaux sont les rationnels dont l'écriture fractionnaire irréductible a un dénominateur dont les facteurs premiers ne sont que des 2 ou des 5.

Autres exemples intéressants donc :

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{80}$$

• Périodes de 2 ou 3 chiffres

$$\frac{1}{22} = 0,04\overline{5}$$

$$\frac{1}{66} = 0,01\overline{5}$$

$\frac{1}{66} = \left(\frac{1}{22}\right) : 3$. Il y a des cas où les relations entre rationnels se transportent entre leurs périodes. Mais cela n'est pas général car, même si les périodes sont égales, il peut y avoir des "retenues" qui "mélangent" les chiffres. Exemples : cela marche bien pour : $\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66} = 0,04\underline{5} + 0,01\underline{5} = 0,06$. Mais cela ne marche pas bien pour :

$$2 \times \left(\frac{1}{36}\right) = 2 \times (0,027) = 0,054$$

$$\bullet \quad \frac{1}{27} = 0,\underline{037}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{37} = 0,\underline{027}$$

Cette coïncidence doit venir du fait que $27 \times 37 = 999$ (voir plus loin).

$$\bullet \quad \frac{1}{54} = 0,0185, \quad \frac{1}{74} = 0,0135,$$

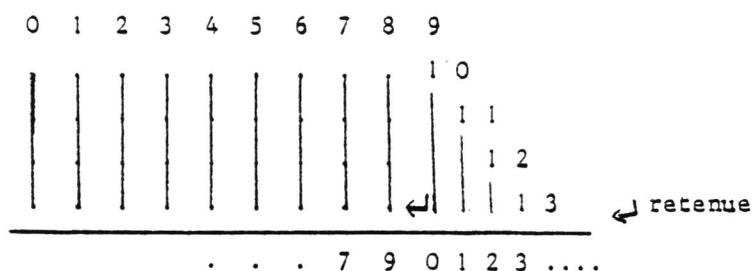
● Le développement du carré de un neuvième (Question 2)

$$\frac{1}{81} = 0,\underline{012345679}$$

Le "8" est absent de la suite des chiffres. Cela provient du fait suivant :
si on additionne les nombres successifs en les décalant chacun d'une position
vers la droite, la retenue au passage

9
10

 transforme le 8 en 9.



On peut expliquer ce phénomène en "posant" d'une certaine manière la multiplication de $\frac{1}{9}$ par $\frac{1}{9}$:

```

0, I I I I I I I I I I I I . .
x 0, I I I I I I I I I I I I . .

```

```

I I I I I I I I I I I I . .
I I I I I I I I I I I I . .
I I I I I I I I I I I I . .
I I I I I I I I I I I I . .
. . . .
. . . .

```

```

1 2 3 4 . . . . .

```

• Développement des inverses des nombres proches de 100

$$\frac{1}{97} = 0,01\ 03\ 09\ 27\ 83\ \dots$$

$$\frac{1}{98} = 0,01\ 02\ 04\ 08\ 16\ 32\ \dots$$

Les puissances de 3 = 100 - 97 et 2 = 100 - 98 apparaissent. Pour l'explications, voir question 6 .

De même pour $\frac{1}{99} = 0,01,$

Question 4 :

$$0,1978\ 1978\ 1978\ \dots = \frac{1978}{9999} = \frac{2 \times 23 \times 43}{9 \times 11 \times 101} \quad (\text{calcul en marge})$$

$$0,365\ 365\ 365\ \dots = \frac{365}{999} = \frac{73 \times 5}{27 \times 37}$$

$$0,6969969\ \dots = \frac{69}{99} = \frac{23}{33}$$

D'une façon générale : $\frac{\overline{99..9}}{\overline{99..9}} = 0, \overline{}$

Pour le montrer on peut refaire le raisonnement en marge de la fiche. Mais on peut aussi utiliser la formule de la question 5.

Question 5 :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \left[1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1\ 000\ 000} + \dots \right]$$

$$= 1 + 0,001 + 0,000001 + \dots$$

Donc $\frac{0,123}{1 - \frac{1}{1000}} = 0,123 + 0,000123 + 0,000\ 000\ 123 + \dots = 0,123\ 123\ 123\ \dots$

Et, par ailleurs $\frac{0,123}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{0,123}{1000 - 1} \times 1000 = \frac{123}{999}$

. De même $\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{100}{99}$

-33-

Question 6 :

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{100}} = \frac{100}{100 - 2} = \frac{100}{98} = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2^2}{(100)^2} + \frac{2^3}{(100)^3} + \dots$$

$$= 1 + 0,02 + 0,0004 + 0,000008 + \dots$$

Les puissances de 2 apparaissent donc naturellement :

$$\begin{array}{r|l} 02 & 04 & 08 & 16 & 32 & 64 \\ \hline & 1 & 28 \\ & 2 & 56 \\ \hline \uparrow & & \end{array}$$

à partir d'ici les puissances de 2 sont supérieures à 100 et une retenue s'introduit.

Pour $\frac{1}{97}$, les retenues arrivent plus vite !...Question 7 :Quels sont les nombres dont la période n'a qu'un chiffre ? α/g s'écrivant $0, \alpha \alpha \alpha \dots$ (α étant un chiffre),si $\frac{1}{N} = 0, \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{m} \alpha \alpha \dots$ c'est que $\frac{1}{N} = [m + \frac{\alpha}{g}] \cdot 10^{-m}$. N est donc un diviseur de $g \cdot 10^m = 3^2 \cdot 2^m \cdot 5^m$ et s'écrit donc sous la forme: $3^x \cdot 2^m \cdot 5^m$ avec $x = 0, 1 \text{ ou } 2$.• $\underline{x=0}$ $\frac{1}{N}$ est décimal, $\alpha = 0$ • $\underline{x=1}$ $\frac{1}{N} = \frac{2^{b-a}}{3} \cdot \frac{1}{10^a}$ Sauriez-vous montrer que α vaut 3 ou 6 selon la parité de $b-a$?

Il vaut reste à étudier

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{45}, \frac{1}{72}, \frac{1}{90} \dots$$

Les quelques remarques faites ci-dessus sur les développements décimaux illimités donnent une idée des recherches que peuvent déclencher leur observation. Pour vous permettre d'autres exploitations nous joignons ci-après les développements décimaux illimités des inverses des entiers de 1 à 100.

[illegible]

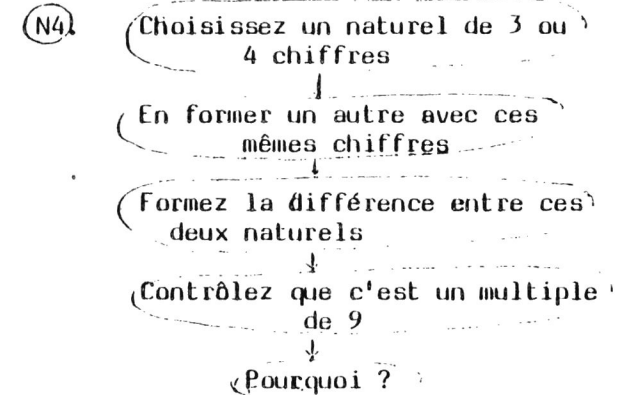
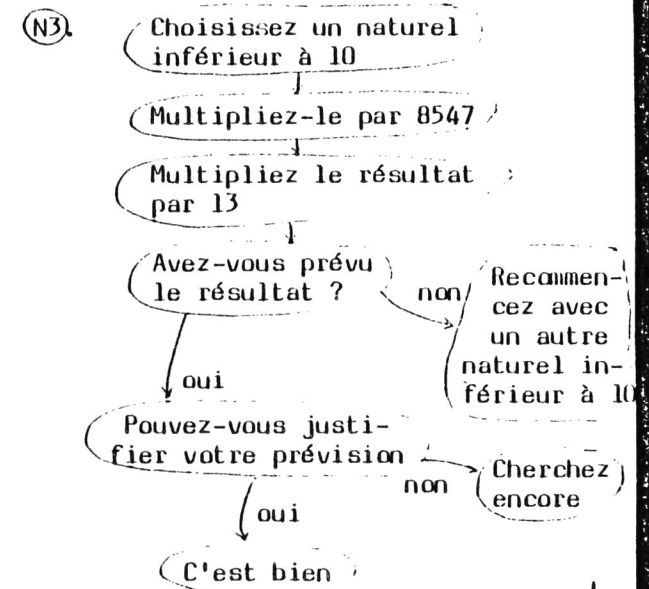
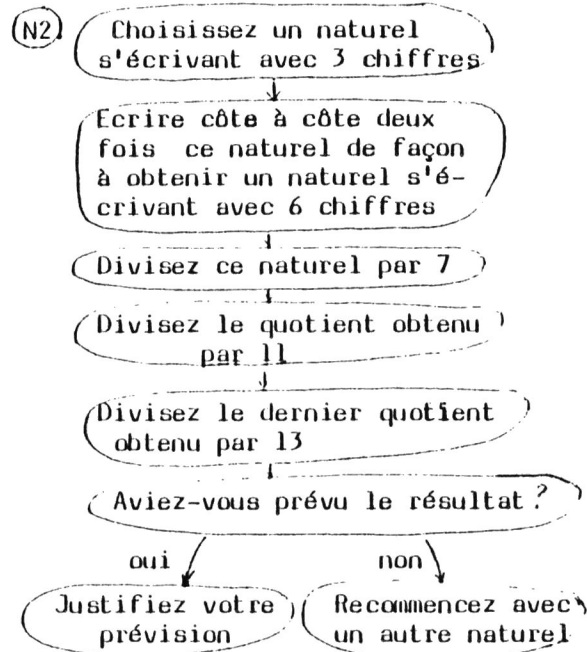
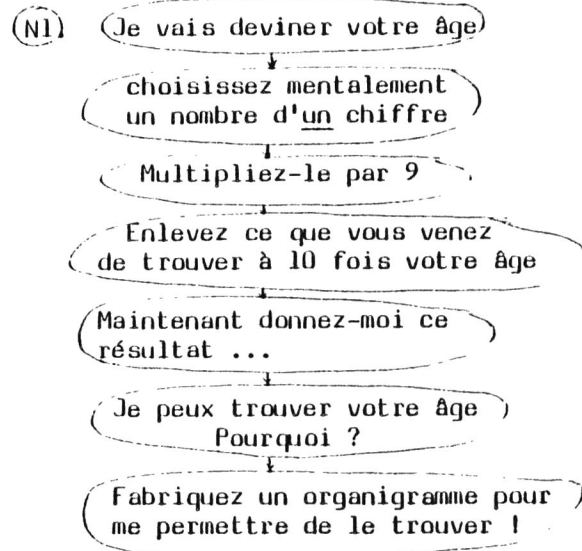
[illegible]

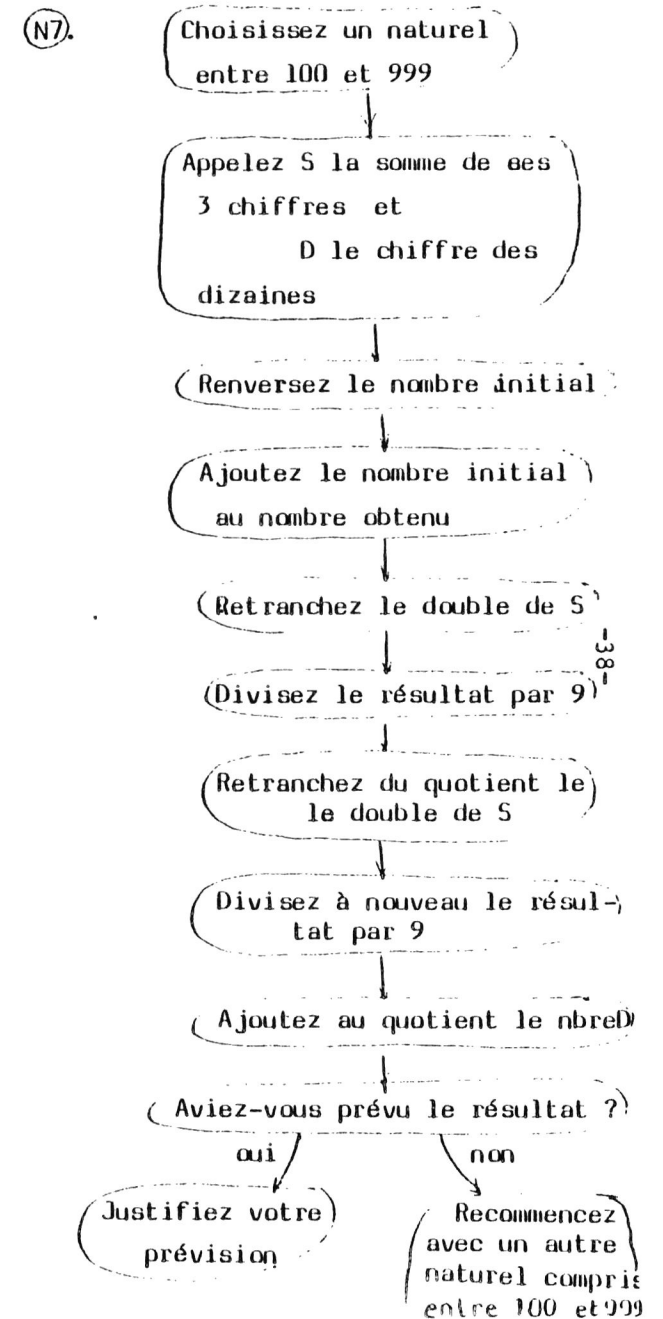
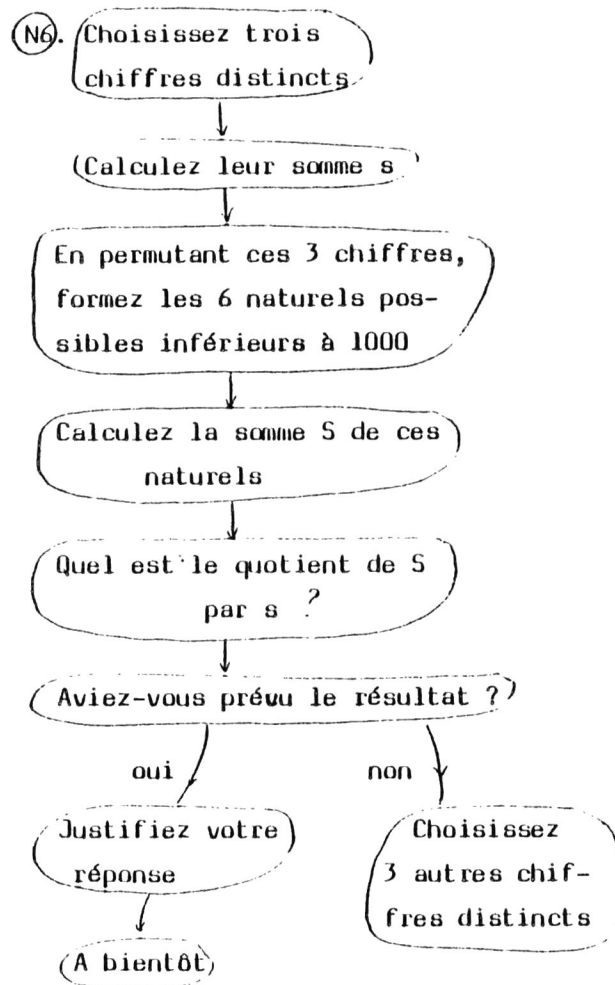
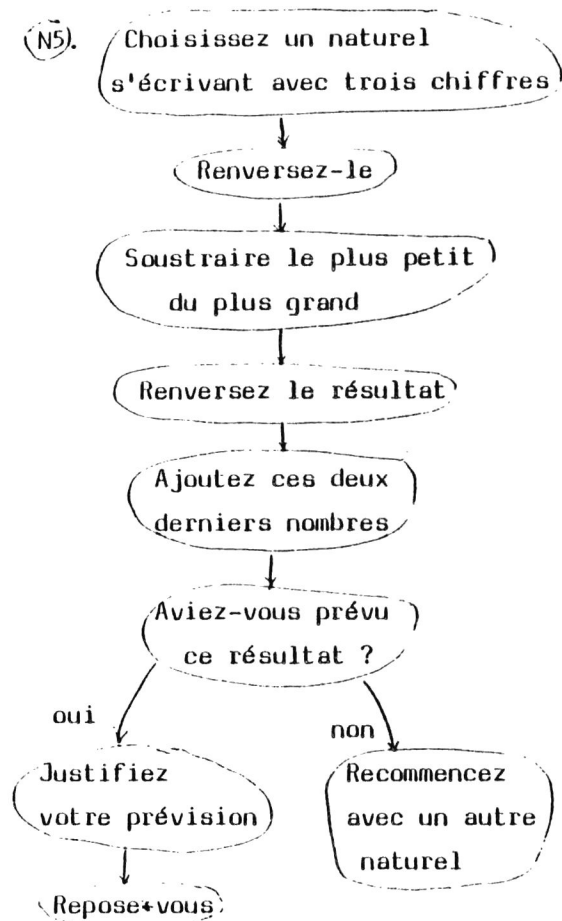
La "table" ci-dessous indique le d.b.i. des inverses des entiers de 1 à 47.

$$\frac{1}{5} = 0,001100110011 \dots$$

→	. 1	
→	. 2	
⇒	. 3	
→	. 4	
⇒	. 5	
↗	. 6	
⇓	. 7	
→	. 8	
⇒	. 9	
→	. 10	
→	. 11	
→	. 12	
→	. 13	
↘	. 14	
⇓	. 15	
→	. 16	
⇒	. 17	
→	. 18	
→	. 19	
→	. 20	
→	. 21	
→	. 22	
→	. 23	
→	. 24	
→	. 25	
→	. 26	
→	. 27	
→	. 28	
→	. 29	
↘	. 30	
⇓	. 31	
→	. 32	
↘	. 33	
→	. 34	
→	. 35	
→	. 36	
→	. 37	
→	. 38	
→	. 39	
→	. 40	
→	. 41	
→	. 42	
→	. 43	
→	. 44	
→	. 45	
→	. 46	
→	. 47	

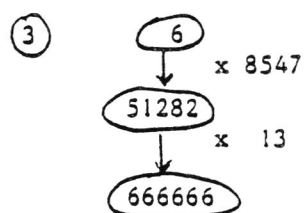
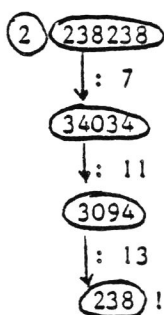
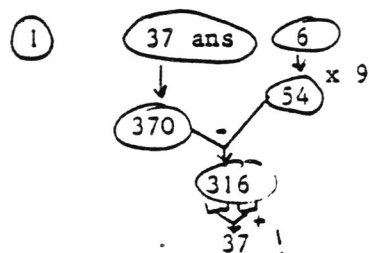
Suivre les instructions indiquées dans les "bullogrammes".
Expliquer les résultats obtenus





Notions mathématiques

- * Décomposition de l'écriture décimale d'un nombre
- * Poids des chiffres
- * Critère de divisibilité
- * Décomposition en facteurs premiers

Exemples :

④

$$\begin{array}{r} 8324 \\ - 2384 \\ \hline 6930 \end{array}$$

6930 est divisible par 9 !

⑤

$$\begin{array}{r} 832 \\ - 238 \\ \hline 594 \\ + 495 \\ \hline 1089 \end{array}$$

1089 !

⑥

$$\begin{array}{r} 832 \\ 328 \\ 283 \\ 823 \\ 238 \\ 382 \\ \hline 2886 \end{array}$$

2886 : 13 → 222 !

⑦

$$\begin{array}{r} 238 \\ + 832 \\ \hline 1070 \\ - 26 \\ \hline 1040 \end{array}$$

1040 : 9 = 116

$$\begin{array}{r} 14 \\ 54 \end{array}$$

14 : 9 = 1

54 : 9 = 6

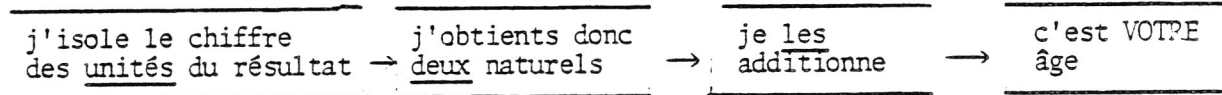
6 : 3 = 2

2 : 2 = 1

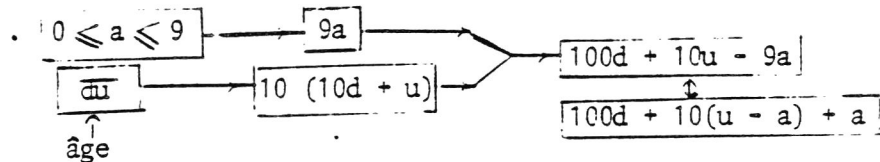
13 c'est S !

(N1) Pour connaître l'âge d'un ami

Voici un organigramme possible :



Pour le valider :



$$\begin{aligned}
 100d + 10(u - a) + a &= 10(10d + u - a) + a \\
 \text{donc} \\
 (10d + u - a) + a &= 10d + u = \overline{du}
 \end{aligned}$$

(N2) $\overline{abc\ abc}$

$$\overline{abc\ abc} = 1001 \times \overline{abc} = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 a & b & c & \\
 \times & 1001 & & \\
 \hline
 a & b & c & \\
 a & b & c & . . . \\
 a & b & c & a & b & c
 \end{array}
 \end{array}$$

(N3) De la même façon

$$8547 \times 13 = 111\ 111$$

. Autre idée :

$$3 \times 7 \times 13 \times 37 = 10101$$

$$\text{et } 54\ 54\ 54 = 10101 \times 54$$

(N4) Le critère de divisibilité par 9 explique le résultat.

. Voici des propriétés sur des produits "remarquables".

Cela pourra vous aider à fabriquer d'autres jeux numériques du même genre.

12345679	×	9	=	111 111 111
	×	18	=	222 222 222
	×	27	=	333 333 333 ... etc.
142857	×	2	=	285714
	×	3	=	428571
	×	4	=	571428
	×	5	=	714285
	×	6	=	857142
	×	7	=	999999
7	×	143	=	1001
7	×	286	=	2002
7	×	429	=	3003
7	×	572	=	4004
7	×	715	=	5005 ... etc.
7	×	15873	=	111, 111
7	×	31746	=	222, 222
7	×	47619	=	333, 333
7	×	63492	=	444, 444
6	×	7	=	42
66	×	67	=	4422
666	×	667	=	444222
6666	×	6667	=	44442222
66666	×	66667	=	4444422222
666666	×	666667	=	444444222222
333667	×	1113	=	371 371 371
33336667	×	11133	=	3711 3711 3711

N5

Un 1089 renversant

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

Si on suppose $a \geq c$

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ &= 100(a - c) - (a - c)\end{aligned}$$

Si $a = c$, le résultat est nul.Si $a \neq c$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}\text{Renversons :} & 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c) & \\ & 100(10 - a + c) + 90 + (a - c - 1) & \\ \hline & 100(9) & + 180 + (10-1)\end{array}$$

$$\text{Finalement : } 1089$$

N6

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ + \overline{bca} \\ + \overline{cab} \\ + \overline{acb} \\ + \overline{cba} \\ + \overline{bac} \\ \hline S = \end{array} \quad \begin{array}{l} s = a + b + c \\ (2 \times s) \times 100 \quad (2 \times s) \times 10 \quad 2 \times s \end{array} \quad \text{D'où } S = 222s$$

N7

Le dernier organigramme

$$\begin{array}{|l|} \hline \overline{abc} \\ \hline S = a + b + c \\ D = b \\ \hline \downarrow \\ \overline{cba} \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq a \leq 9$$

$$\overline{abc} + \overline{cba} = 101(a+c) + 20b$$

$$101(a+c) + 20b - 2S = 99(a+c) + 18b$$

↓

$$11(a+c) + 2B$$

↓

$$11(a+c) + 2b - 2S = 9(a+c)$$

↓

$$a + c$$

↓

$$\overline{a+b+c}$$

TECHNIQUES DE MULTIPLICATION

En partie extrait de "Faire des Mathématiques - 6ème"
Edition CEDIC - A. DELEDICQ

Tu connais les chiffres romains : Il est difficile de multiplier MCLVIII par DCCCIX : la façon de multiplier dépend de la façon d'écrire les nombres !

Le principe de notre écriture des nombres a certainement été inventée par les hindous vers 200 ou 300 ap. J.-C. ; les arabes puis les commerçants méditerranéens s'en sont ensuite servis. Mais, en 1259, le Pape interdisait encore aux marchands de Florence l'utilisation des chiffres arabes !

Nous allons te montrer des techniques de multiplication parfois très anciennes. Mais, nous ne te parlerons pas des « abaques » et des « bouliers » ; ces objets sont pourtant très utiles mais il vaut mieux les manipuler vraiment, plutôt que de lire des discours qui en parlent.

Pour t'expliquer ces techniques, nous emploierons évidemment le langage et les symboles d'aujourd'hui.

1. Décomposer en somme l'un des termes du produit

Si les romains n'avaient pas détruit la bibliothèque d'Alexandrie, nous saurions à coup sûr, comment les égyptiens faisaient leurs multiplications des centaines d'années avant J.-C.

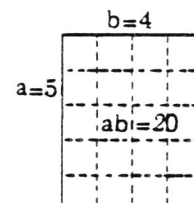
D'après les dessins que l'on a découvert, on peut cependant reconstituer un peu leurs connaissances :

Ils associaient le produit de 2 nombres a et b à l'aire ($a \times b$) du rectangle de côté a et b . Cela leur a permis de faire une importante découverte :

$$a \times (x + y + z) = a \times x + a \times y + a \times z.$$

Les égyptiens remplaçaient donc les « grands » nombres par la somme de nombres plus petits. Ainsi pouvaient-ils se contenter de savoir multiplier par de petits nombres.

Ils savaient même s'arranger pour effectuer seulement des multiplications par 2 ; comme ceci :



décomposition en somme

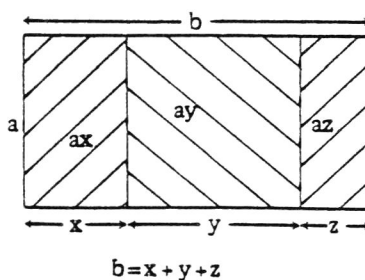
$$36 \times 21 = 36 \times (16 + 4 + 1)$$

— distributivité

$$[36 \times 16] + [36 \times 4] + [36 \times 1]$$

uniquement des « 2 »

$$[36 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2] + [36 \times 2 \times 2] + [36]$$



2. Multiplication dite « égyptienne » ou « éthiopienne ».

Comme cela faisait de longues multiplications par 2, ils se sont alors aperçus qu'il valait mieux opérer petit à petit :

	36	21	①
(x2)			:2
	72	10	
(x2)			:2
	144	5	①
(x2)			:2
	288	2	
(x2)			:2
	576	1	①

$$36 \times 21$$

$$36 \times (2 \times 10 + 1)$$

$$[36 \times 2 \times 10] + [36]$$

on conserve [36]

$$72 \times 10$$

$$72 \times (2 \times 5 + 0) \quad \text{la division de 10 par 5 tombe juste !}$$

$$[72 \times 2 \times 5]$$

$$144 \times 5$$

$$144 \times (2 \times 2 + 1)$$

$$[144 \times 2 \times 2] + [144]$$

on conserve [144]

$$288 \times 2$$

la division de 2 par 2 tombe juste !

$$576$$

et voilà [576]

$$\text{Tu vois que } [36] + [144] + [576] = 756$$

C'est bien 36×21 ! Effectue ainsi d'autres multiplications !

Evidemment, pour mener ces calculs, il est plus commode de construire le tableau qui figure dans la marge.

Aujourd'hui encore, chez les coptes éthiopiens, ce procédé est utilisé : les nombres ne sont pas « écrits », mais on place autant de cailloux, de fruits ou de sous dans deux séries de trous parallèles (comme pour former le tableau).

Il n'est donc pas nécessaire de connaître la table de multiplication pour trouver le produit de deux nombres. D'ailleurs, au Moyen Âge, on ne l'apprenait pas par cœur (la mode date du XV^e siècle) et le procédé précédent était très employé ; on l'appelait « duplication ».

Une autre présentation :

$$36 \times 21$$

36 x	1	=	36	→	36
36 x	2	=	72		
36 x	4	=	144	→	144
36 x	8	=	288		
36 x	16	=	576	→	576

$$21 = \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 16 \end{cases}$$

$$756$$

Table des 36 où l'on ne conserve que les multiplicateurs égaux à des puissances de deux.

Pensons à l'écriture numérique des Egyptiens :

$\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \text{||||} \\ \text{||||} \end{array} \begin{array}{ccc} \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 72 \end{pmatrix}$

$$21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 + 1 + 0 + 1$$
$$21 = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 1$$

28	$\begin{array}{c} : \\ \vdots \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \times$	38
14	$\begin{array}{c} : \\ \vdots \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \times$	75
7	$\begin{array}{c} : \\ \vdots \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \times$	152
3	$\begin{array}{c} : \\ \vdots \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \times$	304
1	$\begin{array}{c} : \\ \vdots \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \times$	608

$$28 \times 38 = 608 + 304 + 152 = 1064$$

$$a \times b = \frac{a}{2} \times (2b)$$
$$a = 2 \times \text{quotient} + \text{reste}$$

$$axb = \text{quotient} \times 2b + \text{reste} \times b$$

Nous appelons cette technique "technique égyptienne de base 2".

1. Calculez 72×47 par la technique égyptienne de base2
2. Calculez 72×47 par la technique égyptienne de base3
3. Calculez 72×47 par la technique égyptienne de base10
4. Calculez 72×47 par une technique de type égyptien associée à la décomposition de 72 en facteurs premiers.

MULTIPLICATION
PAR PAQUETS

(André MYX)

Nous savons que les Egyptiens procédaient par duplications successives pour calculer le produit de deux naturels :

Pour calculer le produit AB , on remplace A par $2A$ et B par $B \div 2$ (désignons ainsi provisoirement le quotient euclidien de B par 2).

Si le reste r est nul, alors $AB = (2A) \times (B \div 2)$

Si le reste r n'est pas nul ($r = 1$), alors $AB = (2A) (B \div 2) + A$
reliquat

Ceci nous met la puce décimale à l'oreille ! .. Bien que nous sachions (en principe) bien diviser et multiplier par deux, notre système de numération décimal fait que nous excellons dans les divisions par dix.

Pour calculer le produit AB , on peut remplacer A par $10A$ et B par $(B \div 10)$ et le "reliquat" est rA :

$$AB = (10A) \times (B \div 10) + rA$$

$B \div 10$ est	↓	r est le
le <u>nombre</u>		chiffre
de dizaines		des unités
de B		de B

Analysons un exemple : 127×4302

Pour être plus clair, nous avons réitéré le procédé jusqu'à obtenir un quotient nul ; ce qui fait que le produit AB est la somme de tous les reliquats :

A	B	restes	reliquats
127	4302		
1270	430	2	$\rightarrow 127 \times 2$
12700	43	0	
127000	4	3	$\rightarrow 12700 \times 3$
1270000	0	4	$\rightarrow 127000 \times 4$

d'où

$$127 \times 4302 = (127 \times 2) + 12700 \times 3 + (127000 \times 4) \dots$$

Résultat qui prend un air connu et nous signale que notre technique opératoire prend alors un coup de vieux-jeu ; mais fort heureusement notre système est décimal et positionnel et nous connaissons bien nos tables de multiplications.

N'en restons pas là et pensons que nous savons assez bien diviser et multiplier par 3, 5, 9, 11... etc et encore bien d'autres naturels pourvu que le naturel de départ ait une allure sympathique :

On peut donc mélanger les différents opérateurs multiplicatifs et divisifs au gré de notre calcul.

Souvenons-nous seulement :

$$A \times B = (nA) \times (B \div n) + rA$$

où r est le reste de la division euclidienne de B par n .

Voici trois exemples où cette technique est utilisée :

$$\boxed{37 \times 33}$$

$\begin{array}{r} 37 \\ \times 11 \quad \downarrow \\ 407 \\ \times 3 \quad \downarrow \\ 1221 \end{array}$	$\begin{array}{r} 33 \\ \downarrow \div 11 \\ 3 \\ \downarrow \div 3 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \div 11 \\ r = 0 \\ \div 3 \\ r = 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 37 \quad \times \quad 33 \\ (37 \times 11) \times (33 \div 11) \\ 407 \times 3 \\ \text{(ici il n'y a pas de} \\ \text{reliquat)} \\ \hline 37 \times 33 = 1221 \end{array}$
---	--	--	--

$$\boxed{37 \times 56}$$

$\begin{array}{r} 37 \\ \times 11 \quad \downarrow \\ 407 \\ \times 5 \quad \downarrow \\ 2035 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \\ \downarrow \div 11 \\ 5 \\ \downarrow \div 5 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \div 11 \\ r = 1 \\ \div 5 \\ r = 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{--- } 37 \\ 37 \times 56 = 2035 + 37 = 2072 \end{array}$
---	--	--	--

$$\boxed{307 \times 645}$$

$\begin{array}{r} 645 \\ \times 3 \quad \downarrow \\ 1935 \\ \times 10 \quad \downarrow \\ 19350 \\ \times 10 \quad \downarrow \\ 193500 \end{array}$	$\begin{array}{r} 307 \\ \downarrow \div 3 \\ 102 \\ \downarrow \div 10 \\ 10 \\ \downarrow \div 10 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \div 3 \\ r = 1 \\ \div 10 \\ r = 2 \\ \div 10 \\ r = 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 645 \\ 2 \times 1935 \end{array}$
--	---	--	---

$$307 \times 645 = 193500 + 645 + (2 \times 1935) = 198015$$

3. Décomposition en « carrés ».

Mais les civilisations d'avant Jésus-Christ avaient d'autres tours dans leur sac. Ainsi sur des « tablettes » trouvées à Nippur (datant de plus de 1 000 ans avant J.-C.), on a trouvé des tableaux donnant les carrés des nombres.

Regarde à quoi cela pouvait servir :

$$\begin{aligned}
 & 36 \times 21 \\
 & (15 + 21) \times 21 \\
 & [15 \times 21] + [21 \times 21] \\
 & 15 \times 21 + 21^2 \\
 & 15 \times (15 + 6) \\
 & [15 \times 15] + [15 \times 6] \\
 & 15^2 + 15 \times 6 \\
 & 6 + 6 + 3 \times 6 \\
 & [6 \times 6] + [6 \times 6] + [3 \times 6] \\
 & 6^2 + 6^2 + 3 \times 6 \\
 & 3 \times 3 + 3 \\
 & [3^2 \times 3] + [3 \times 3] \\
 & 3^2 + 3^2
 \end{aligned}$$

Finalement $36 \times 21 = 21^2 + 15^2 + 6^2 + 6^2 + 3^2 + 3^2$

$36 \times 21 = 441 + 225 + 36 + 36 + 9 + 9 = 756$

Effectue ainsi d'autres multiplications.

Carrés des nombres de 1 à 100.

0	0	50	2 500	50	2 500	100	10 000
1	1	49	2 401	51	2 601	99	9 801
2	4	48	2 304	52	2 704	98	9 604
3	9	47	2 209	53	2 809	97	9 409
4	16	46	2 116	54	2 916	96	9 216
5	25	45	2 025	55	3 025	95	9 025
6	36	44	1 936	56	3 136	94	8 836
7	49	43	1 849	57	3 249	93	8 649
8	64	42	1 764	58	3 364	92	8 464
9	81	41	1 681	59	3 481	91	8 281
10	100	40	1 600	60	3 600	90	8 100
11	121	39	1 521	61	3 721	89	7 921
12	144	38	1 444	62	3 844	88	7 744
13	169	37	1 369	63	3 969	87	7 569
14	196	36	1 296	64	4 096	86	7 396
15	225	35	1 225	65	4 225	85	7 225
16	256	34	1 156	66	4 356	84	7 056
17	289	33	1 089	67	4 489	83	6 889
18	324	32	1 024	68	4 624	82	6 724
19	361	31	961	69	4 761	81	6 561
20	400	30	900	70	4 900	80	6 400
21	441	29	841	71	5 041	79	6 241
22	484	28	784	72	5 184	78	6 084
23	529	27	729	73	5 329	77	5 929
24	576	26	676	74	5 476	76	5 776
25	625	25	625	75	5 625	75	5 625

Théon, lui, fabriqua la première table
« numérique » :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
2 = b	b	d	f	h	j	jb	jd	jf	jh	k	m	o	q	s	sk	sin	so	sq
3 = c	c	f	i	jb	je	jh	ka	kd	kg	l	o	r	sk	sn	sq	tj	tm	tp
4 = d	d	h	jb	jf	k	kd	kh	lb	lf	m	q	sk	so	t	tm	tq	uk	uo
5 = e	e	j	je	k	ke	l	le	m	me	n	s	sn	t	tn	u	un	v	vn
6 = f	f	jb	jh	kd	l	lf	mb	mh	nd	o	sk	sq	tm	u	uo	vk	vo	wm
7 = g	g	jd	ka	kh	le	mb	mi	nf	oc	p	sm	tj	tq	un	vk	vt	wo	xi
8 = h	h	jf	kd	lb	m	mh	nf	od	pb	q	so	tm	uk	v	vq	wo	xm	yk
9 = i	i	jh	kg	lf	me	nd	oc	qb	qa	r	sq	tp	uo	vn	wm	xl	yk	zj
10 = j	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	w	x	y	y	z	-

(Théon était le père de la première mathématicienne célèbre dénommée « Hypathie » ; elle fut lapidée par les chrétiens en 415).

(les lettres étaient des lettres grecques. Comprends-tu le code ?)

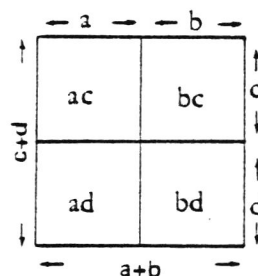
5. Utilisation d'une table de multiplication.

C'est Diophante et Théon (à Alexandrie vers 400 ap. J.-C.) qui montrèrent les premiers comment utiliser l'égalité suivante :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

On faisait alors :

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{36} \times \textcircled{22} \\
 \textcircled{30 + 6} \times \textcircled{20 + 2} \\
 [30 \times 20] + [6 \times 20] + [30 \times 2] + [6 \times 2] \\
 600 + 120 + 60 + 12 \\
 792
 \end{array}$$

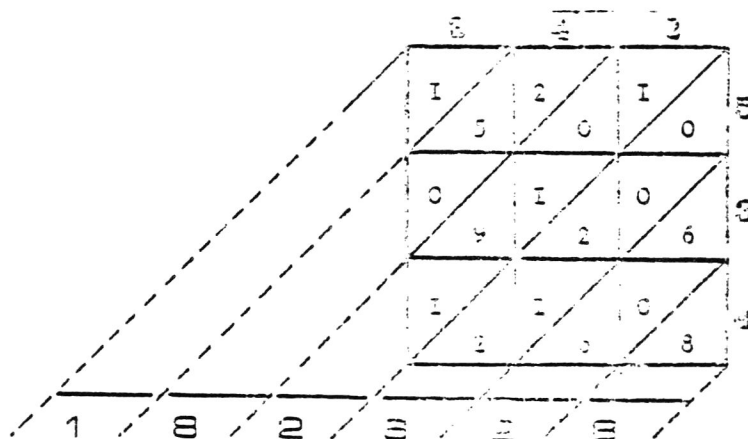


En réalité les calculs précédents étaient un peu différents, parce que le chiffre 0 n'était pas encore inventé. Les calculs étaient faits en disant, par exemple :

3 dizaines au lieu de 30

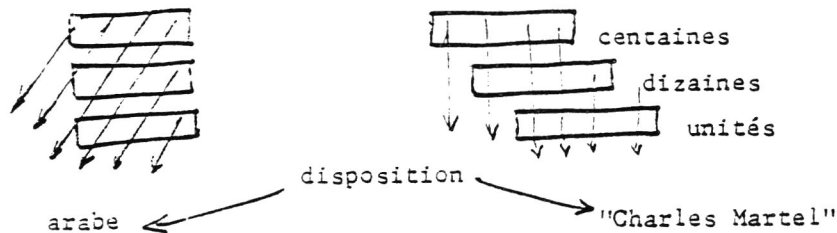
5 centaines au lieu de 500, etc...

En tout cas, il fallait disposer d'une « table de multiplication » des nombres de 1 à 9.



7. La technique actuelle.

Pourtant il n'était pas très commode de faire des additions en diagonale. C'est pourquoi on prit l'habitude de décaler l'écriture des produits partiels ; comme nous l'avons fait ci-contre :



```

100000
 70000
 12000
   500
    120
     3
-----
182628
    
```

Cela prenait beaucoup de place. On remarqua alors qu'il valait mieux commencer à multiplier par les chiffres de droite : on pourrait ainsi « retenir » la retenue (dans sa tête) au lieu de l'écrire :

Ainsi : 8 s'écrit directement 1368 (on dit : « 4 fois 2 : 8 » puis « 4 fois 4 : 16, j'écris 6 et je retiens 1 ». Ce 1 sera ajouté à 4 fois 3 : 12)

16

12

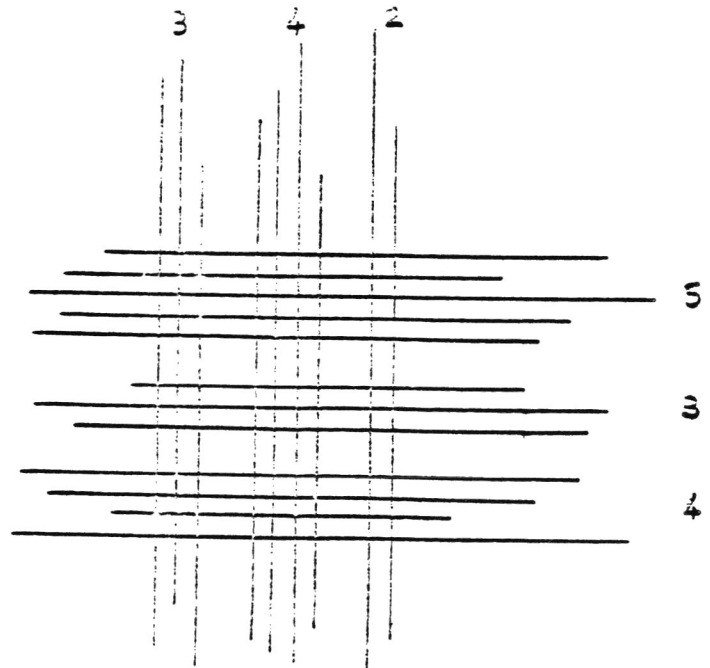
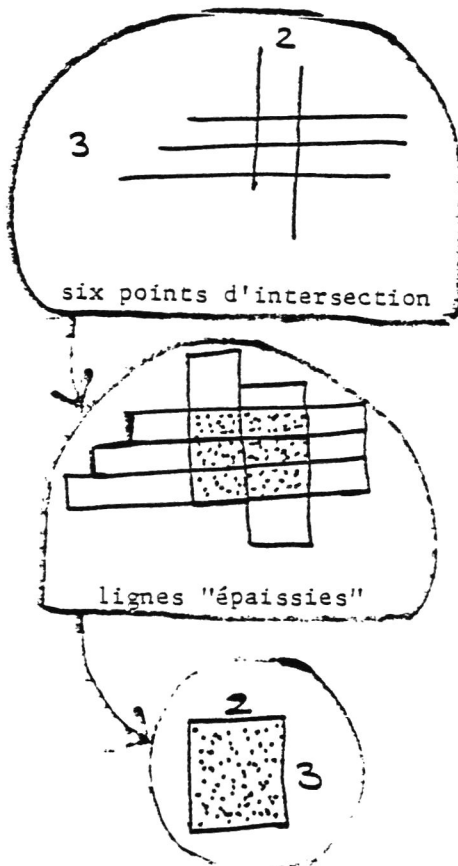
```

    342
  x 534
-----
   1386
   1026
   1710
-----
  182628
    
```

Et voilà exactement comment nous faisons aujourd'hui !

Les baguettes chinoises

Mais les bonnes idées se trouvent partout, et quelques chinois ont été surpris, traçant le réseau de traits suivant :



8. Des tables de multiplication toutes faites.

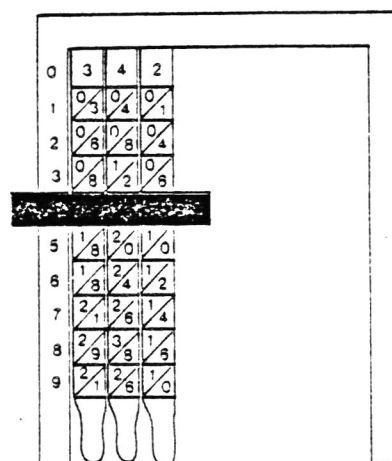
Tu vois que la disposition « arabe » (ou « russe » ou « italienne » comme disent certains) a un avantage sur la nôtre : on y écrit les retenues. On n'a donc pas besoin de s'en souvenir, mais tu as vu que cela obligeait à écrire un peu « penché ». (Tu as bien fait l'effort d'apprendre la table de multiplication, tu peux bien penser aux retenues !).

Comme toi, personne n'appréciait beaucoup la nécessité d'apprendre une table de multiplication. Beaucoup de gens ont donc essayé de trouver des « trucs » :

Neper, par exemple, inventa, en 1617, le système de « petits bâtons » que voici :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	2	4	6
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4
4	0	4	8	2	6	1	5	9	3
5	0	5	1	5	0	5	0	5	0
6	0	6	2	6	3	0	6	2	6
7	0	7	3	7	4	1	7	3	7
8	0	8	4	8	5	2	8	4	8
9	0	9	5	9	6	3	9	5	9

Mode d'emploi :



$$342 \times 4 = 1368$$

(Tu peux fabriquer de tels « bâtons » avec des bandes en carton)

Vers la fin du siècle dernier, un certain Monsieur Genaille perfectionna le procédé : les retenues sont toutes faites dans sa table.

Nous reproduisons cette table page suivante. En découpant les dix bandes verticales, vous pourrez effectuer des multiplications par un nombre de 1 chiffre comme ci-contre

6 x 1234 (marqué en gros points).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
2	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{0}{1}$ —
3	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{3}{4}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{9}{0}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{1}{2}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{7}{8}$ —	$\frac{0}{1}$ —
4	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{4}{3}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{4}{3}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{0}{1}$ —
5	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{0}{1}$ —
6	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{0}{1}$ —
7	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{7}{8}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{1}{2}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{9}{0}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{3}{4}$ —	$\frac{0}{1}$ —
8	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{0}{1}$ —
9	$\frac{0}{1}$ —	$\frac{9}{0}$ —	$\frac{8}{9}$ —	$\frac{7}{8}$ —	$\frac{6}{7}$ —	$\frac{5}{6}$ —	$\frac{4}{5}$ —	$\frac{3}{4}$ —	$\frac{2}{3}$ —	$\frac{1}{2}$ —	$\frac{0}{1}$ —

couper

9. Compter avec ses mains.

* Si tu ne veux pas traîner des petits bouts de carton et que tu as des trous de mémoire, voici comment tu peux utiliser tes deux mains :

Pour multiplier par 9

Pour 9×7 par exemple

Le 7ème doigt est baissé.

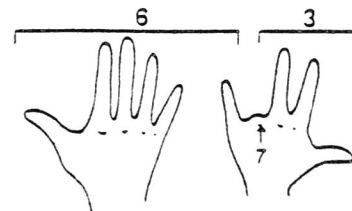
Il y a 6 doigts levés à gauche et 3 doigts levés à droite :

$$6 \times 3 = 9 \times 7$$

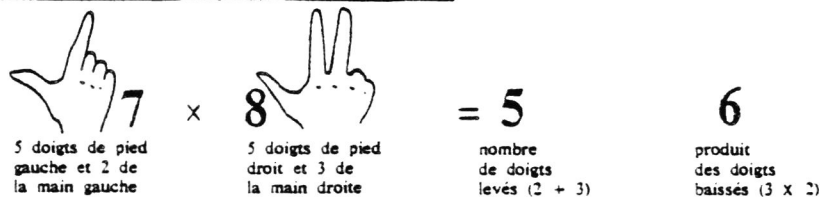
Cela marche toujours, parce que :

$$7 \times 9 = 7 \times (10 - 1) = 70 - 7 = 60 + (10 - 7) = \underbrace{(7 - 1)}_{\text{doigts levés à gauche}} 10 + \underbrace{(10 - 7)}_{\text{doigts levés à droite}}$$

$$a \times 9 = a \times (10 - 1) = a(10) - a = \underbrace{(a - 1)}_{\text{doigts levés à gauche}} 10 + \underbrace{(10 - a)}_{\text{doigts levés à droite}}$$



Pour multiplier 2 nombres compris entre 5 et 10.



Essaie : 7×7 , 8×8 , 9×6 , 6×7 (attention) :

Cela marche toujours parce que :

$$\begin{aligned} 7 \times 8 &= (5 + 2) \times (5 + 3) = 25 + (5 \times 2) + (5 \times 3) + 6 \\ &= (10 \times 2 - 5 \times 2) + (10 \times 3 - 5 \times 3) \\ &\quad + 25 + 6 \\ &= 10(2 + 3) + (5 - 2)(5 - 3) \\ (5 + x)(5 + y) &= 25 + 5x + 5y + xy = 10x - 5x + 10y - 5y + 25 + xy \\ &= 10(x + y) + \underbrace{(5 - x)(5 - y)}_{\text{doigts baissés à gauche à droite}} \end{aligned}$$

Les maghrébins se servent toujours de ce procédé.

PUBLICATIONS DE L'IREM DE PARIS VII

- 1 - Bibliographie pour l'enseignement des mathématiques (Ed. 78)
- 2 - Mathématiques et autonomie/gestion (7/78)
- 3 - Nombre à l'école élémentaire (6/79)
- 4 - Groupe français-mathématiques (Ed. 79)
- 5 - Quelques réflexions sur la démonstration (11/79)
- 6 - Moirés (12/79)
- 7 - Pavages et coloriations (1/80)
- 8 - Autour du cube (2/80)
- 9 - Des chiffres et des notes (3/80)
- 10- Calcul mental (3/80)

Autres publications :

- Bulletin-Afrique n° 21 - Maths et dessin (6/79)
- " " n° 22 - Spécial vectoriel (10/79)
- " " n° 23 - Raisonner (12/79)
- Informatique APMEP n° 3 - Spécial microprocesseurs (11/79)

Directeur-Responsable de la publication : A. DELEDICQ

Tirage : 200 exemplaires - *Dépot légal :* 1^{er} trimestre 1980

Editeur/Imprimeur : I.R.E.M. PARIS VII
2, place Jussieu - 75005 PARIS

Création : 198003