

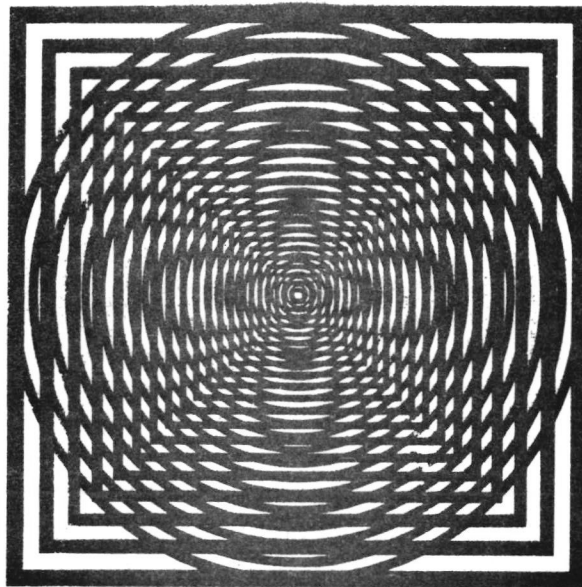
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

UNIVERSITÉ PARIS VII



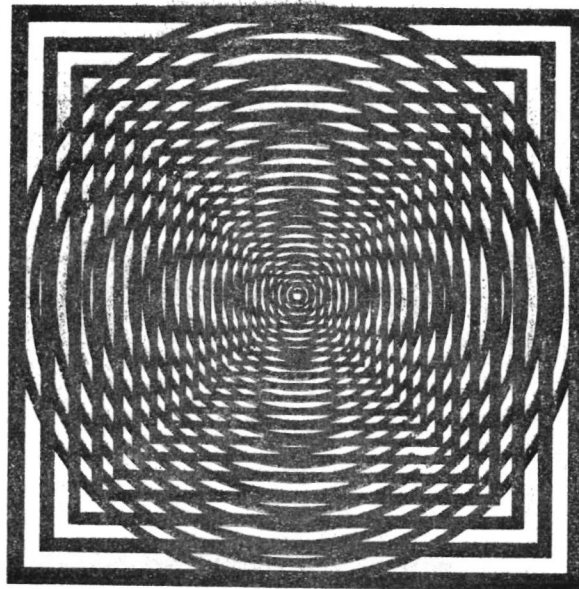
MOIRÉS



par Hervé HAMON et Isabelle TENAUD

<u>NIVEAU</u>	1 ^{ère} / Terminale
<u>PUBLIC</u>	Elèves
<u>SUJET</u>	. Familles de courbes à 1 paramètre . Superposition de dessins
<u>OBJECTIF</u>	Modéliser une situation concrète

MOIRÉS



par Hervé HAMON et Isabelle TENAUD

« Le paysage, ineffablement assoupi, avait cette moire magnifique que font sur les prairies et sur les rivières les déplacements de l'ombre et de la clarté ;... » HUGO, *Quatre-vingt-treize*, I, IV, VII.

« Un vacillement pâlisait les teintes, des moires de vieil or couraient le long des blés, les avoines bleuisaient, tandis que les seigles frémissants avaient des reflets violâtres. Continuellement, une ondulation succédait à une autre, l'éternel flux sous le vent du large. » ZOLA, *La terre*, III, I.

« Devant nous, la Méditerranée n'avait pas un frisson sur toute sa surface qu'une grande lune calme moirait. » MAUPASS., *Contes de la Bécasse*, La peur.

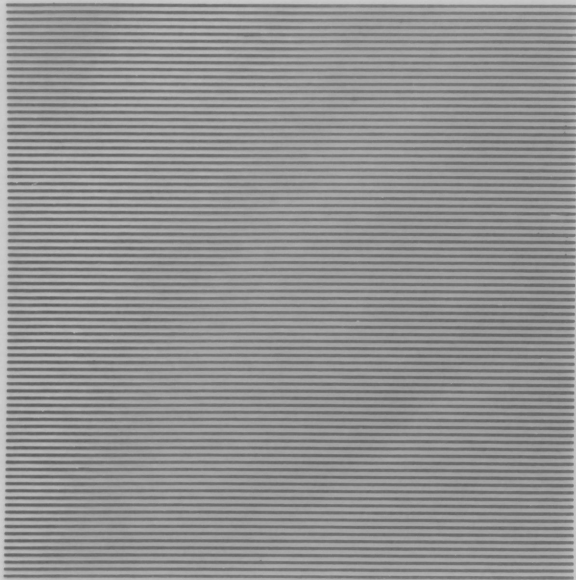


Fig. A

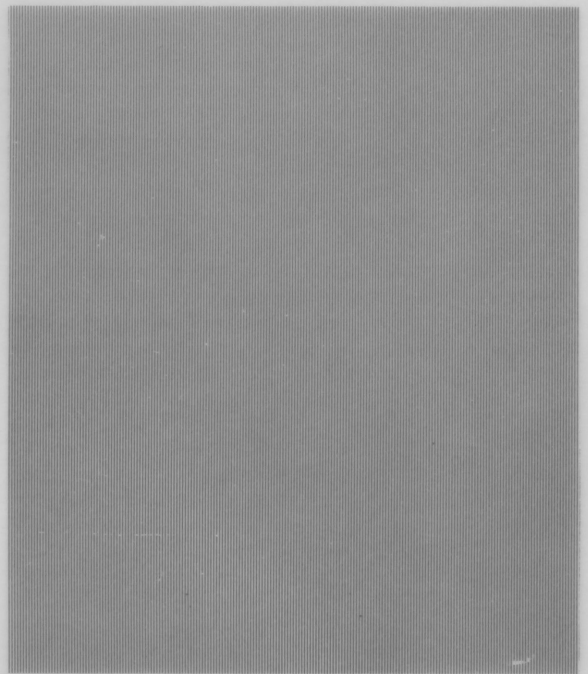


Fig. B

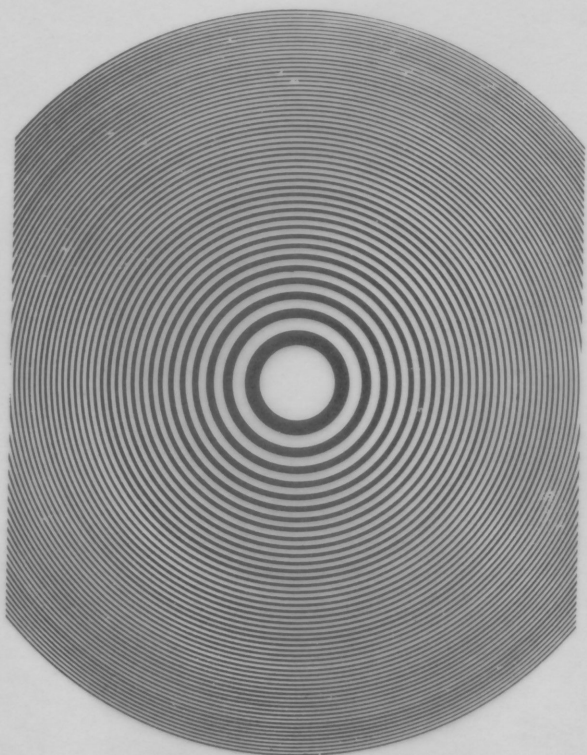


Fig. C



Fig. D

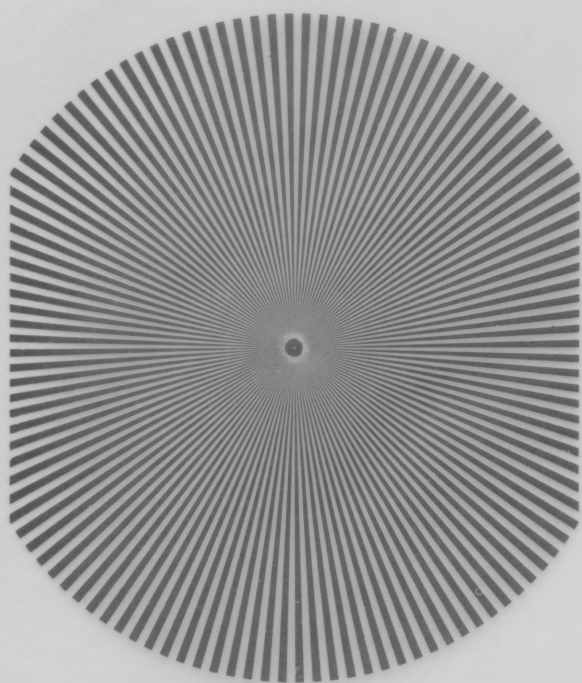


Fig. E

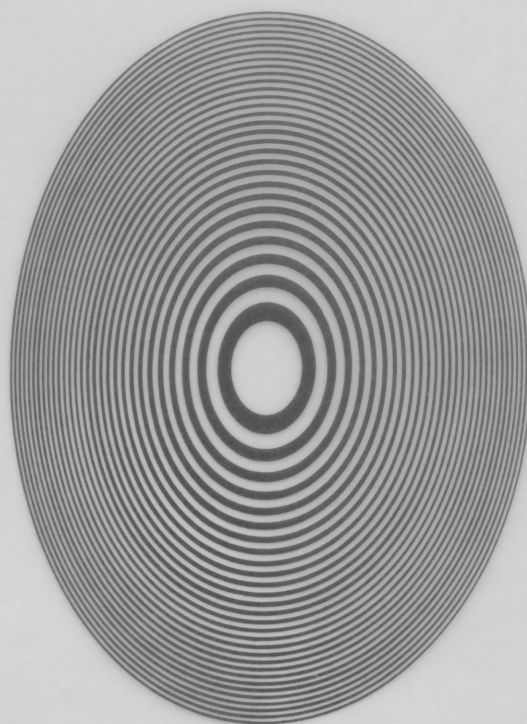


Fig. F

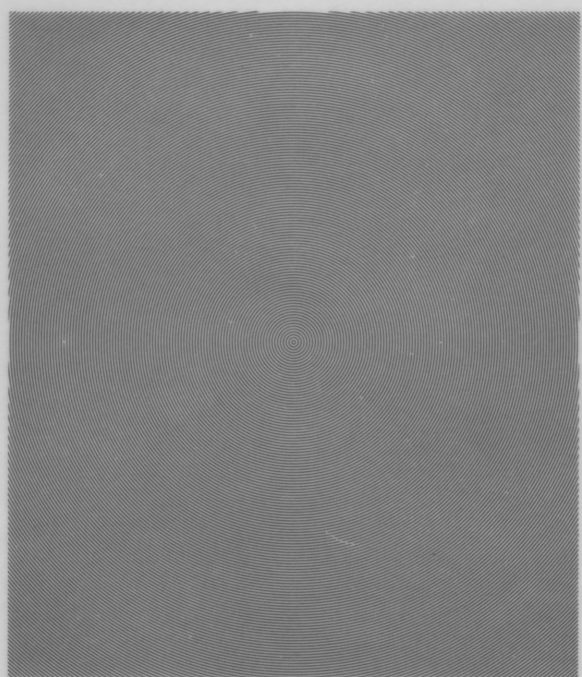


Fig. G

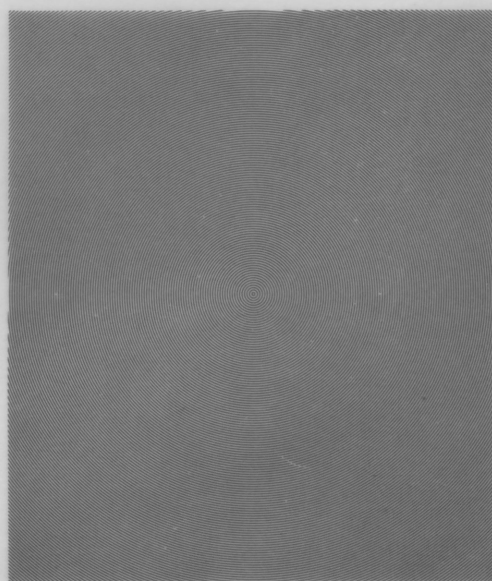


Fig. H

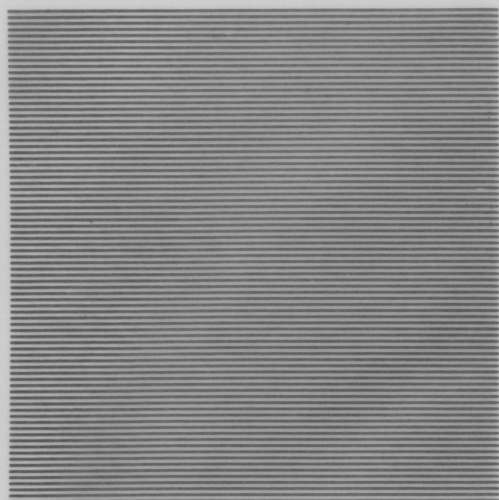


Fig. I

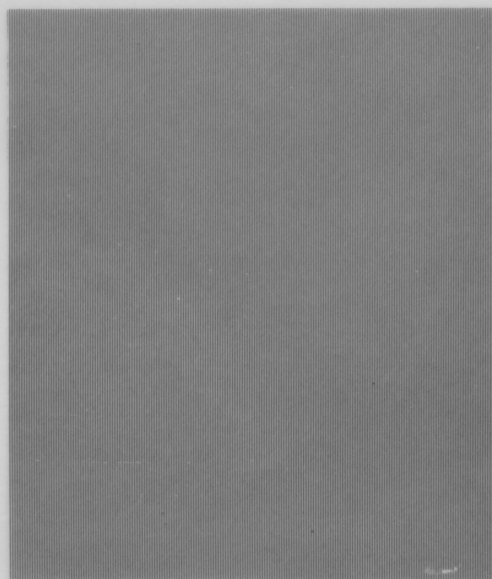


Fig. J

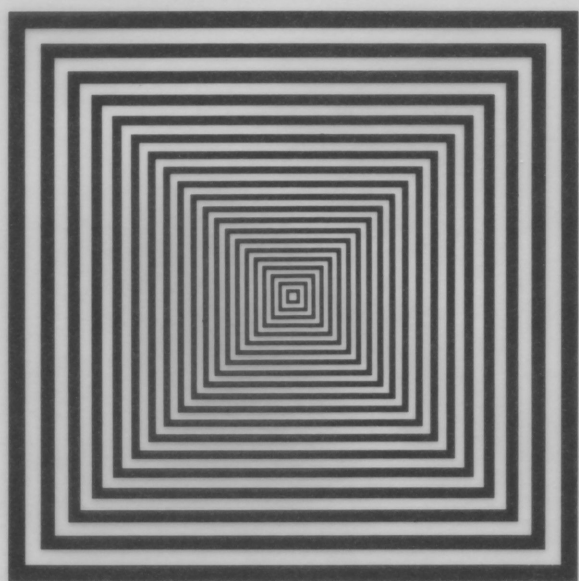


Fig. K

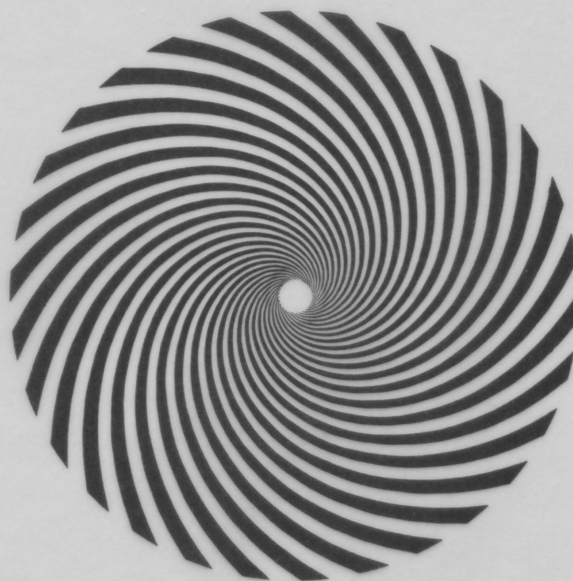


Fig. L

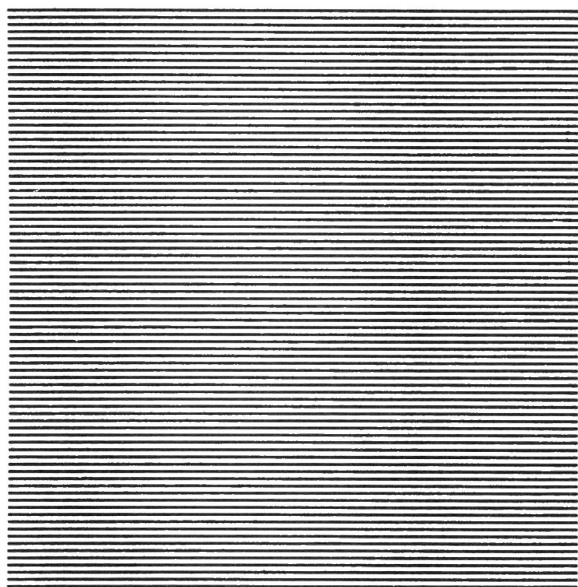


Fig. A

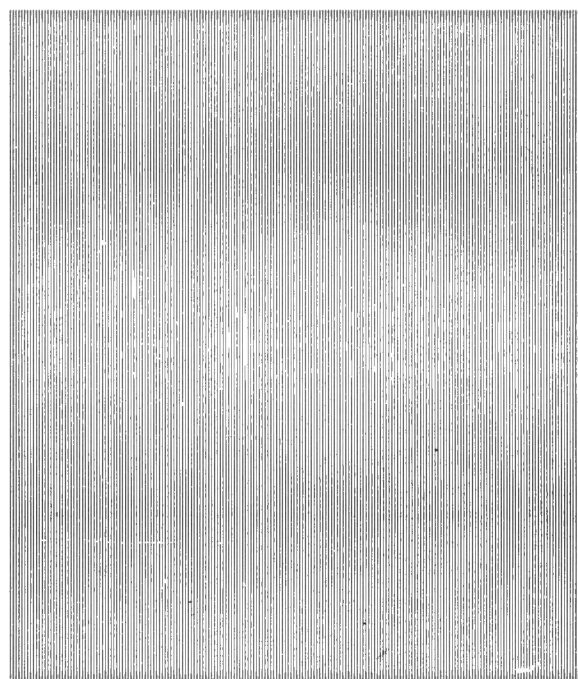


Fig. B

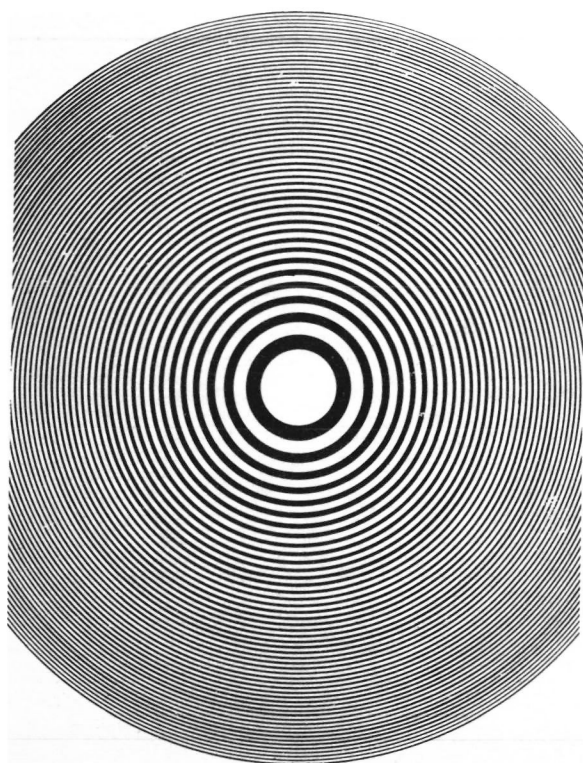


Fig. C

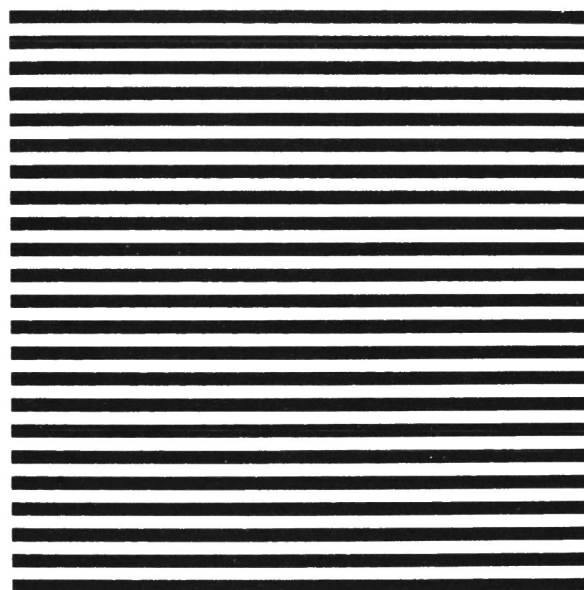


Fig. D

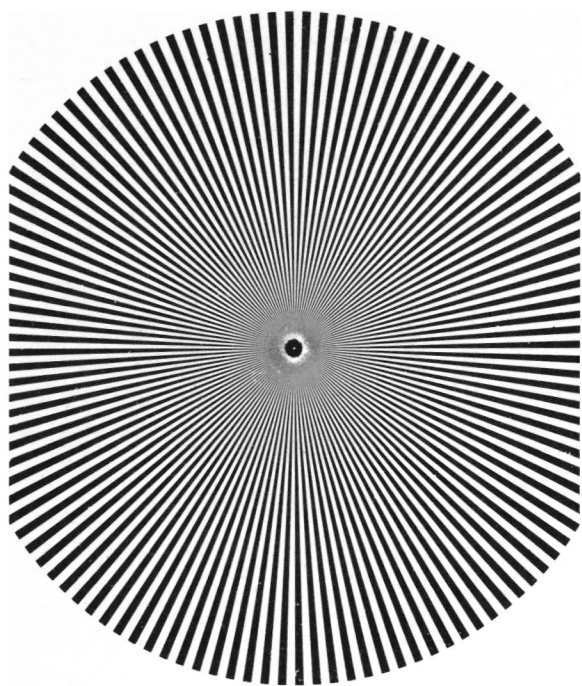


Fig. E

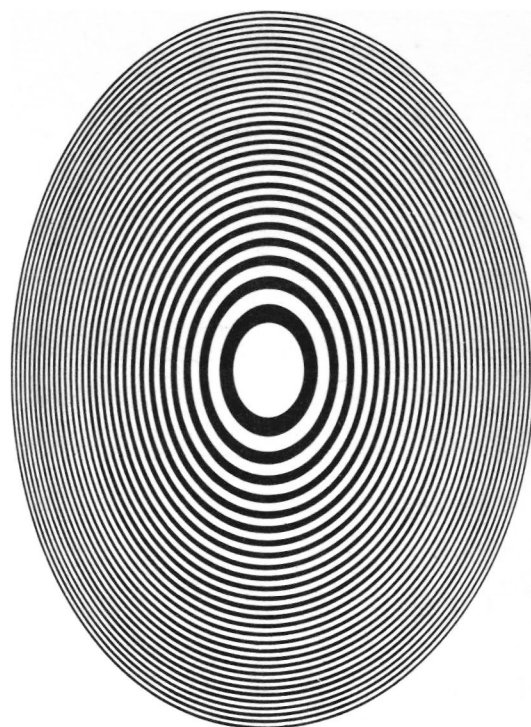


Fig. F

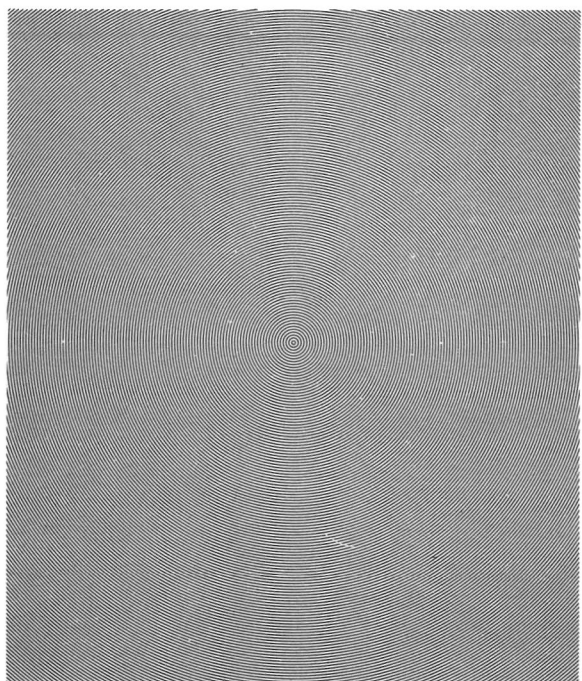


Fig. G

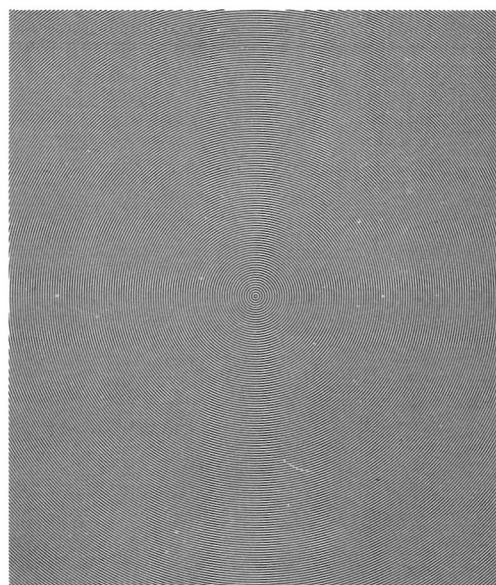


Fig. H

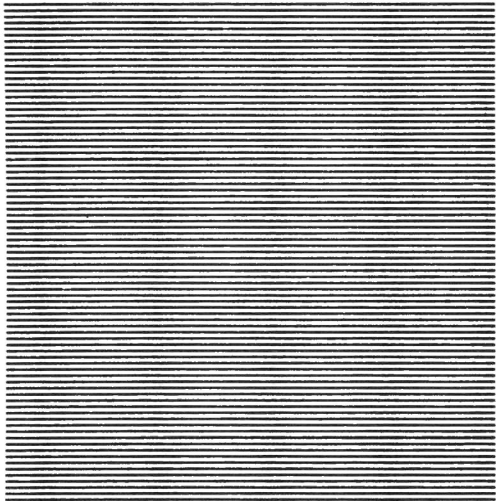


Fig. I

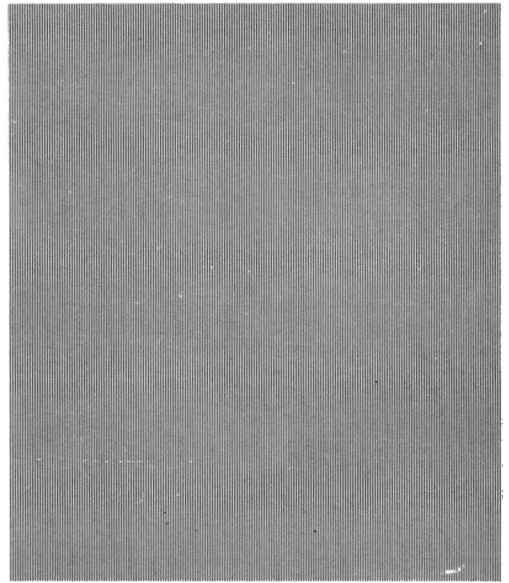


Fig. J

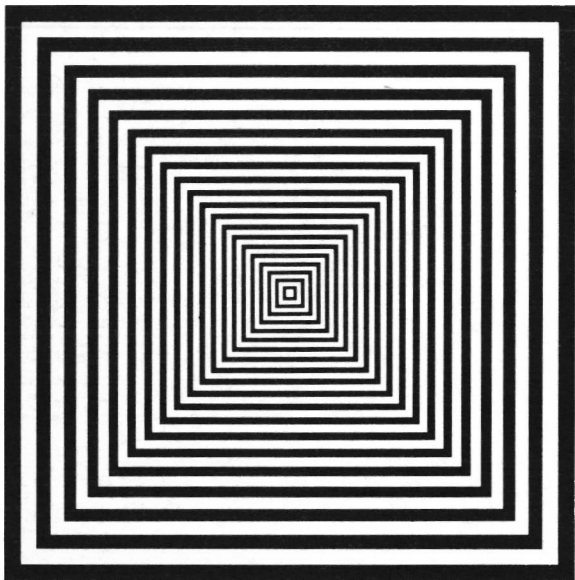


Fig. K

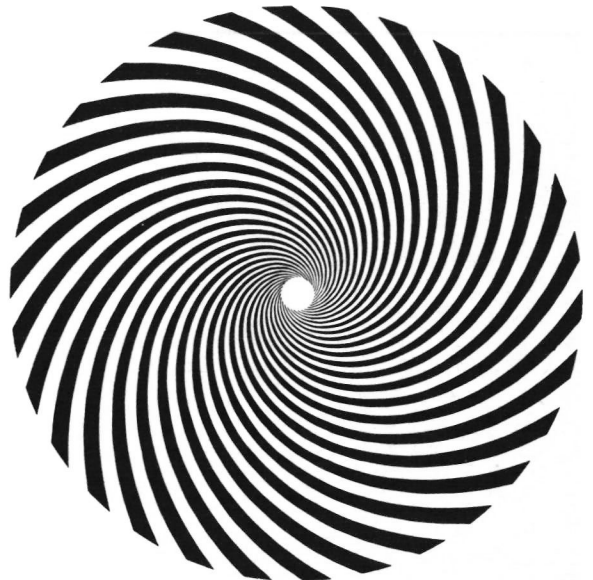


Fig. L

S O M M A I R E

page 3	Mode d'emploi
page 5	chap. 1 : Les moirés dans la vie quotidienne
page 7	chap. 2 : Etude théorique
page 19	chap. 3 : Etude de quelques exemples
page 31	chap. 4 : Compléments sur des familles de droites parallèles
page 37	chap. 5 : Applications des moirés
page 43	Annexe : Rappels mathématiques

MODE D'EMPLOI

Cette brochure est destinée aux élèves du second cycle. Elle se compose de deux parties.

Le premier qui lira cette brochure devra découper les calques des figures, les mettre dans une enveloppe, qui sera collée sur la page 2 de couverture, afin que ces calques, qui sont indispensables pour faire soi-même des moirés, ne se perdent pas.

D'abord amusez-vous avec les figures des planches précédentes et leurs calques : prenez un calque et posez-le sur une autre figure (par exemple calque H et figure B) et vous apercevrez peut-être quelque chose.....

Et ensuite, si vous voulez en savoir plus, vous trouverez dans la suite de la brochure, une étude théorique d'un exemple, d'autres exemples que vous pouvez étudier vous-même (il y a les solutions) et quelques applications pratiques.

(★) Ce signe indique un renvoi à l'annexe mathématique qui est située en fin de brochure.

=====

Les images et documents qui ont servi de base à ce travail ont été fournis par ANDRE DELEDICQ.

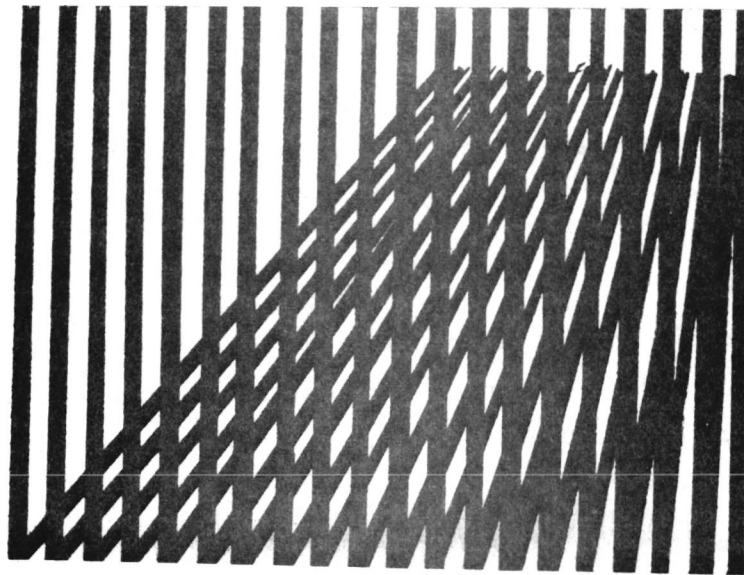


Figure 1



Figure 2

1- LES DESSINS DE MOIRE DANS LA VIE QUOTIDIENNE

Le terme moiré vient d'un adjectif utilisé pour qualifier un tissu ; il s'agit d'étoffes anciennes avec des dessins changeants obtenus par une technique particulière : ces tissus étaient apprêtés par écrasement irrégulier de leur grain.

Actuellement, on observe couramment des dessins analogues en regardant les plis ou l'ourlet d'un rideau de nylon ; on voit en effet des familles de courbes qui évoluent en suivant les mouvements du rideau.

Une haie formée de poteaux, éclairés par le soleil, a une ombre formée elle aussi de segments de lignes parallèles entre elles. Une nouvelle famille de lignes courbes apparaît lorsque la haie se superpose à son ombre (fig. 1).

Des dessins de moiré sont susceptibles d'apparaître chaque fois qu'on superpose une structure répétitive sur une autre structure répétitive.

Ainsi, on peut voir des dessins de moiré sur des corbeilles à papier grillagées en les regardant dans un certain sens, on peut aussi en trouver en regardant une forêt à travers les cordes d'un hamac, ou un zèbre à travers les grilles d'un zoo.

Les dessins moirés étant assez fascinants et attirants, ils sont aussi utilisés en publicité (fig. 2).

Ils peuvent aussi apparaître en architecture, mais il faut alors s'en méfier. Par exemple, des stores et leurs images sur les vitres provoqueront des effets moirés, mobiles au moindre souffle de vent, et détruiront l'équilibre esthétique du bâtiment.

Toutes sortes de moirés apparaissent aussi à la télévision, on essaie aussi de les éviter. C'est pourquoi, les présentateurs sont instamment priés de ne pas porter des vêtements finement rayés. Le moindre mouvement se transformerait en un gigantesque dessin de moiré mobile formé par les rayures et les lignes de l'écran.

En physique, les interférences et les battements (voir cours de terminale) sont dûs à la superposition de deux phénomènes physiques. Leur interprétation conduit à étudier des familles de courbes et on peut aussi y trouver des phénomènes analogues à ceux d'un moiré (voir photo dans un livre de physique).

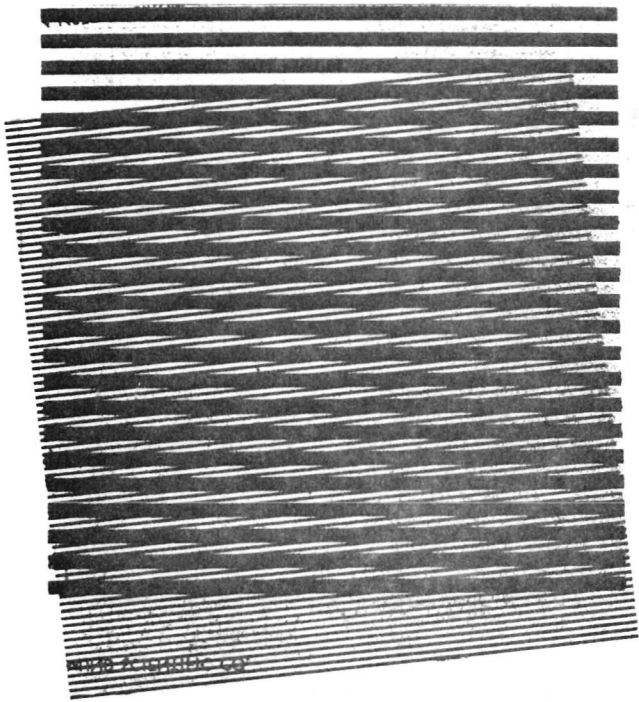


Figure 3

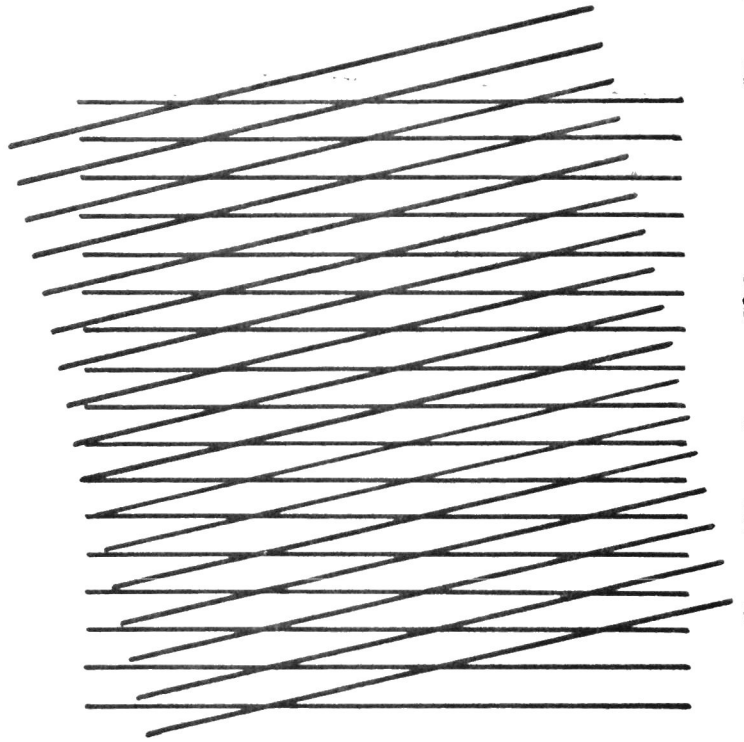


Figure 4

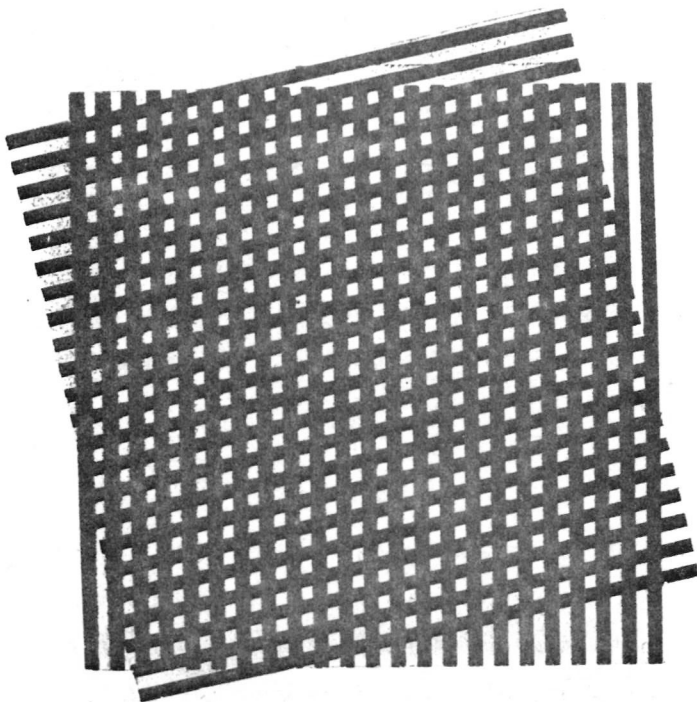


Figure 5

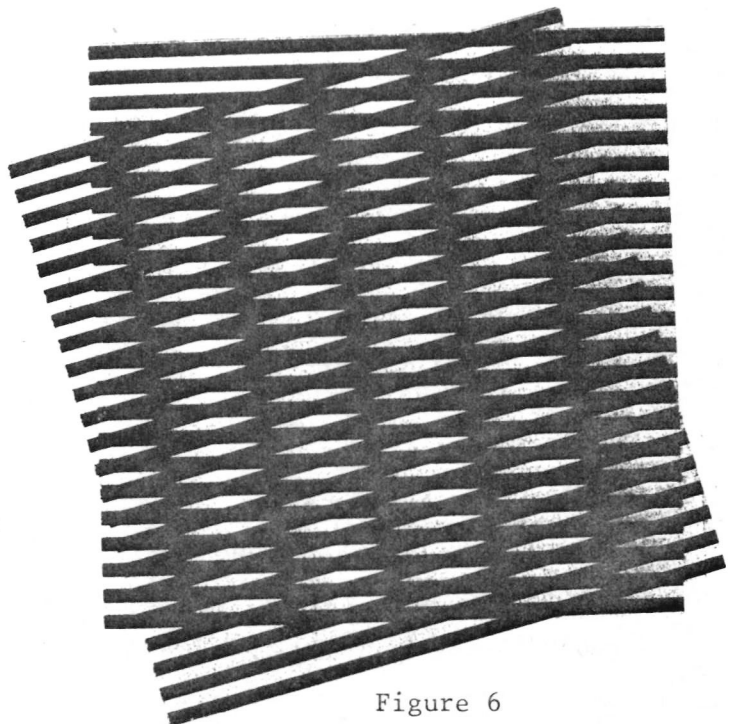


Figure 6

2- ETUDE THEORIQUE

1°) Conditions d'apparition d'un moiré.

On peut dire qu'il y a un phénomène de moiré si, lorsqu'on superpose deux familles de courbes, il en apparaît visuellement une troisième.

Le lecteur est invité à étudier expérimentalement les conditions d'apparition de moirés à l'aide des figures et des calques qui se trouvent au début de la brochure.

L'étude qui suit a pour but de déterminer des équations des courbes susceptibles d'apparaître en moiré lorsqu'on superpose deux familles de courbes dont on connaît des équations.

Toutefois, cette étude ne permet pas de savoir a priori si le phénomène de moiré sera visible, cela restant ici du domaine expérimental.

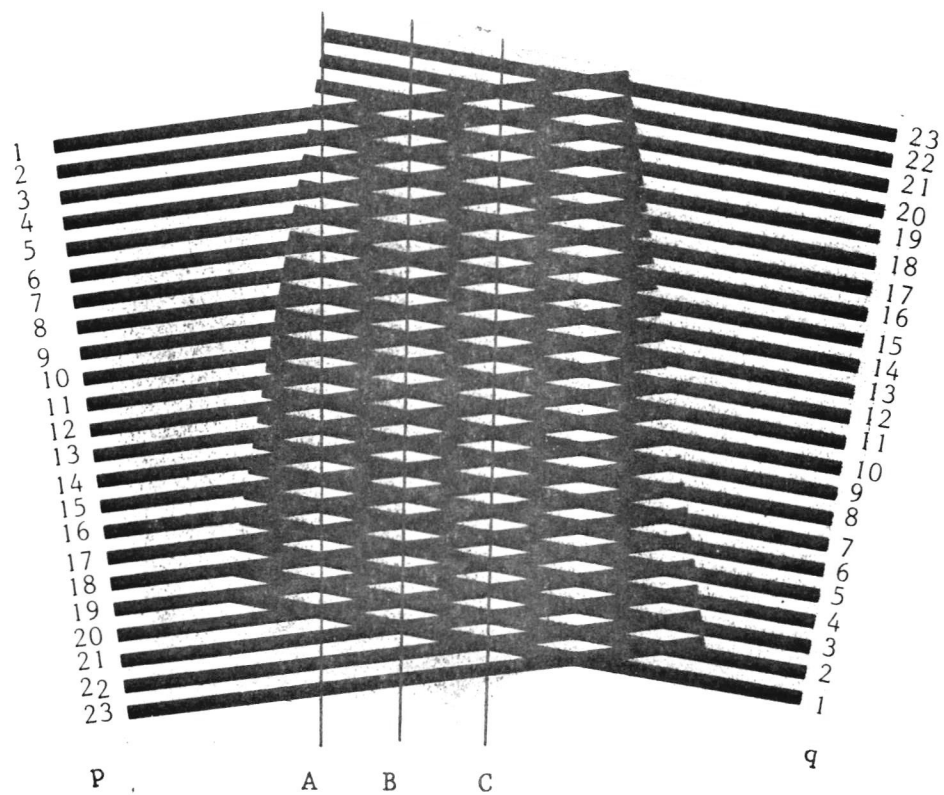
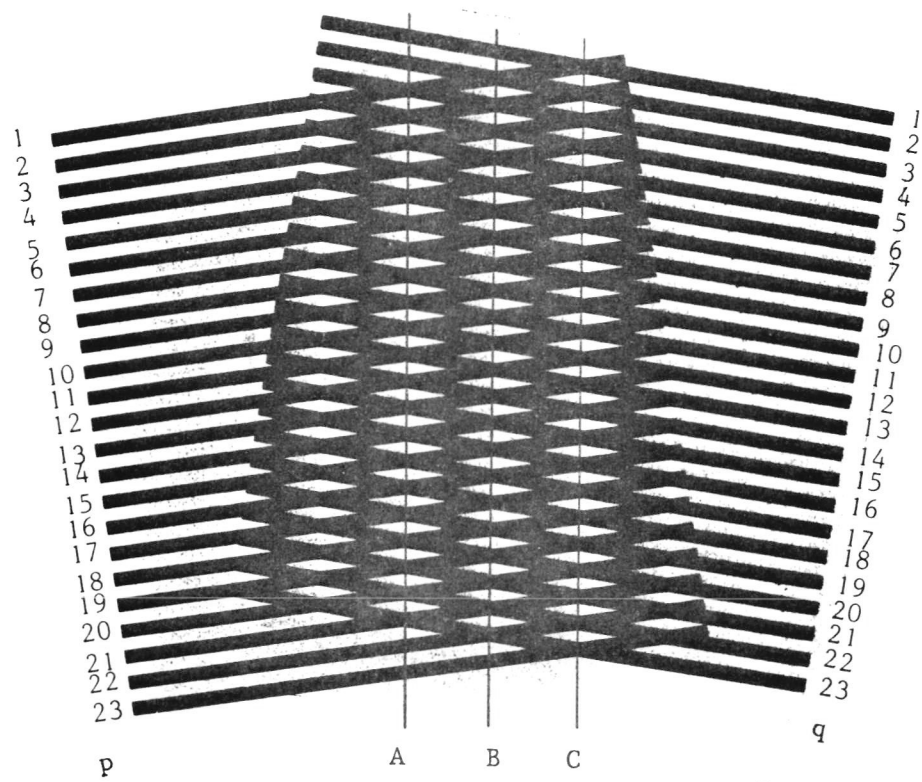
Pour étudier expérimentalement les conditions d'apparition d'un moiré, considérons un exemple très simple : superposition de deux familles de droites parallèles telles que la distance entre deux droites consécutives de la même famille soit constante. Nous constatons que, pour qu'un effet de moiré apparaisse nettement, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- les épaisseurs des lignes blanches et noires de chaque famille doivent être du même ordre.
- les épaisseurs des lignes des deux familles doivent être du même ordre.
- les angles entre les lignes des deux familles ne doivent pas être trop grands (si ces lignes ne sont pas des droites, il s'agit des angles formés par les tangentes aux points d'intersection)

On a représenté sur la page ci-contre trois exemples dans lesquels deux seulement des conditions sont vérifiées (fig. 3, 4, 5).

Nous laissons au lecteur le soin de trouver dans chaque cas laquelle des conditions n'est pas vérifiée.

Sur la figure 6, en revanche, les trois conditions sont satisfaites et on voit nettement les lignes de moiré.



2°) Premier exemple de mise en équation.

On superpose deux familles identiques de droites parallèles, la distance de deux droites consécutives de la même famille étant constante. Cherchons à déterminer les droites qui apparaissent en moiré (lorsque les conditions précédentes sont satisfaites). Il ne s'agit d'ailleurs pas à proprement parler de droites, mais de successions de "taches" blanches ou noires suggérant des droites. Nous parlerons néanmoins de "droites blanches" et "droites noires" pour décrire ce que nous voyons.

Numérotions les droites de chaque famille de façon que deux droites consécutives aient des numéros consécutifs (fig. 7). Nous constatons que la "droite blanche" notée A passe par les points d'intersection des droites de numéros respectifs p et q tels que : $q - p = 3$. La droite notée B passe par les points d'intersection des droites de numéros p et q tels que $q - p = 2$.

De façon générale, pour toute "droite blanche" Δ , il existe un entier n tel que Δ passe par les points d'intersection des droites de numéros p et q tels que $q - p = n$.

Remarquons que l'on aurait pu numérotter les droites comme sur la figure 8. Dans ce cas, la droite A est la droite passant par les points d'intersection des droites de numéros p et q tels que $p + q = 21$. Plus généralement, pour toute "droite blanche" Δ il existe un entier n tel que Δ passe par les points d'intersection des droites de numéros p et q tels que $p + q = n$.

Nous voyons donc que, de façon générale, pour étudier les "lignes blanches" de moiré, on est amené à étudier les points d'intersection des courbes de numéros respectifs p et q tels que $q - p = n$ ou $p + q = n$, n étant un entier donné.

Par ailleurs, nous ne chercherons pas à déterminer les lignes noires, puisque celles-ci sont de même nature que les blanches. Dans la suite, nous ne préciserons donc plus la couleur de ces lignes.

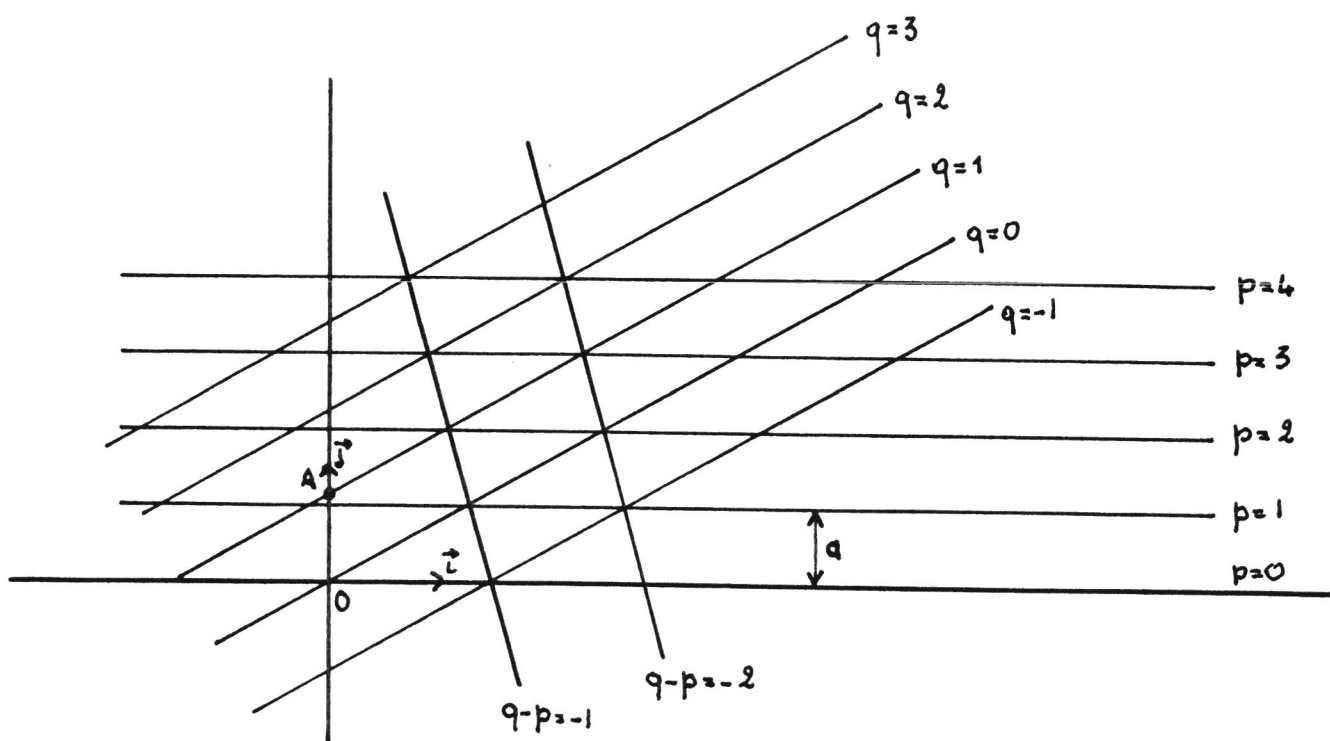


Fig. 9

Voyons maintenant comment on peut déterminer des équations des lignes de moiré. Pour cela, il faut évidemment avoir des équations des courbes initiales dans un repère convenablement choisi.

Pour notre exemple, prenons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe $(O, \vec{i})$ soit parallèle à l'une des familles de droites.

Les droites de cette famille ont pour équation (*) :

$$y = p a$$

où p est le numéro de la droite et a la distance entre deux droites consécutives.

Appelons m le coefficient directeur commun à toutes les droites de la seconde famille (on suppose évidemment que ces droites ne sont pas parallèles à $(O, \vec{j})$) et a' la distance OA ; ces droites ont donc pour équation :

$$y = mx + qa'$$

où q est le numéro de la droite considérée (voir figure 9).

Soit (x, y) les coordonnées d'un point appartenant à l'intersection de deux droites d'indices respectifs p et q tels que $q - p = n$; on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} y &= pa \\ y &= mx + qa' \\ q - p &= n \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$p = \frac{y}{a} \quad \text{et} \quad q = n + p$$

donc
$$y = mx + \left(n + \frac{y}{a}\right)a'$$

Soit
$$\left(1 - \frac{a'}{a}\right)y = mx + na' \quad (1)$$

Cela signifie que les coordonnées des points d'intersection des droites d'indices p et q tels que $q - p = n$ vérifient la relation (1) qui est une équation de droite. Autrement dit, la ligne de moiré considérée est la droite ayant (1) pour équation (pour plus de détails sur ce cas, voir p. 31).

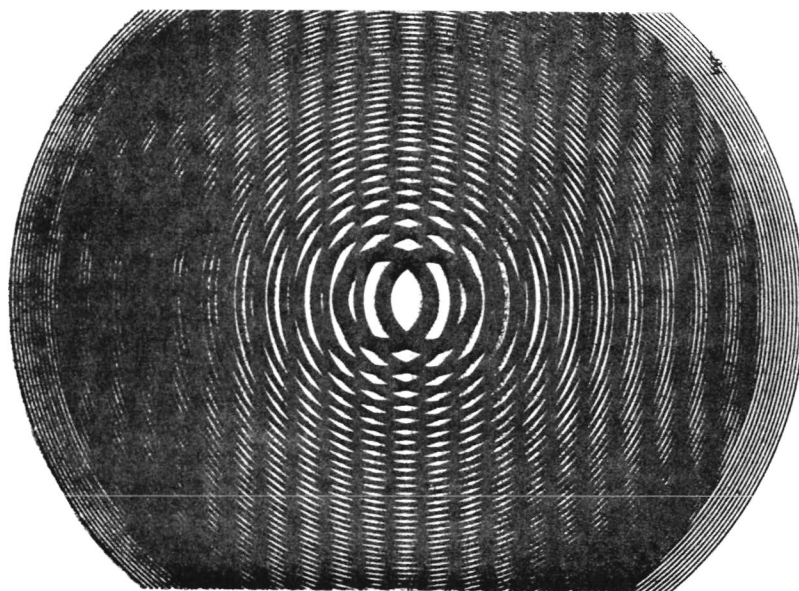


Figure 10

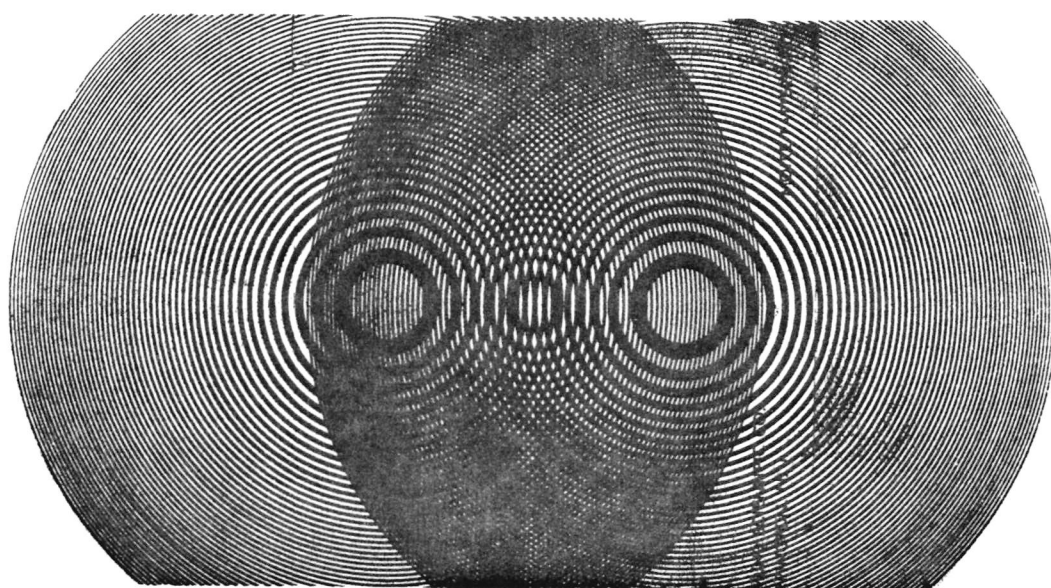


Figure 11

3°) Deuxième exemple de mise en équation.

Superposons deux familles identiques de cercles de Fresnel (voir définition ci-dessous).

Si les centres des deux familles ne sont pas trop écartés, on voit apparaître des droites (Fig. 10).

Dans le cas contraire, on voit apparaître des cercles (Fig. 11).

Numérotions les cercles de chaque famille à partir du centre (Fig. 12). Dans le cas de la figure 10, nous voyons que les lignes de moiré sont dues aux intersections des cercles d'indices p et q tels que $q - p = n$; dans le cas de la figure 11, ce sont les intersections des cercles tels que $p + q = n$ qui interviennent.

Pourquoi avons-nous deux cas différents ? Cela est dû au fait que, dans le cas de la figure 10, seuls les cercles vérifiant $q - p = n$ se coupent sous un angle assez faible pour donner lieu à un effet de moiré ; dans le cas de la figure 11, seuls les cercles vérifiant $p + q = n$ satisfont à cette condition.

Pour chercher les équations des lignes de moiré, prenons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'axe $(O, \vec{i})$ contient les centres A et A' des deux familles et dont l'origine O est le milieu de (A, A') (Fig. 12) Appelons x_0 l'abscisse de A' ; celle de A est donc $-x_0$.

Les cercles considérés sont tels que l'aire de la couronne limitée par deux cercles consécutifs est constante. Notons R_k le rayon du cercle d'indice k .

L'aire de la couronne limitée par les cercles d'indices k et $k + 1$ est :

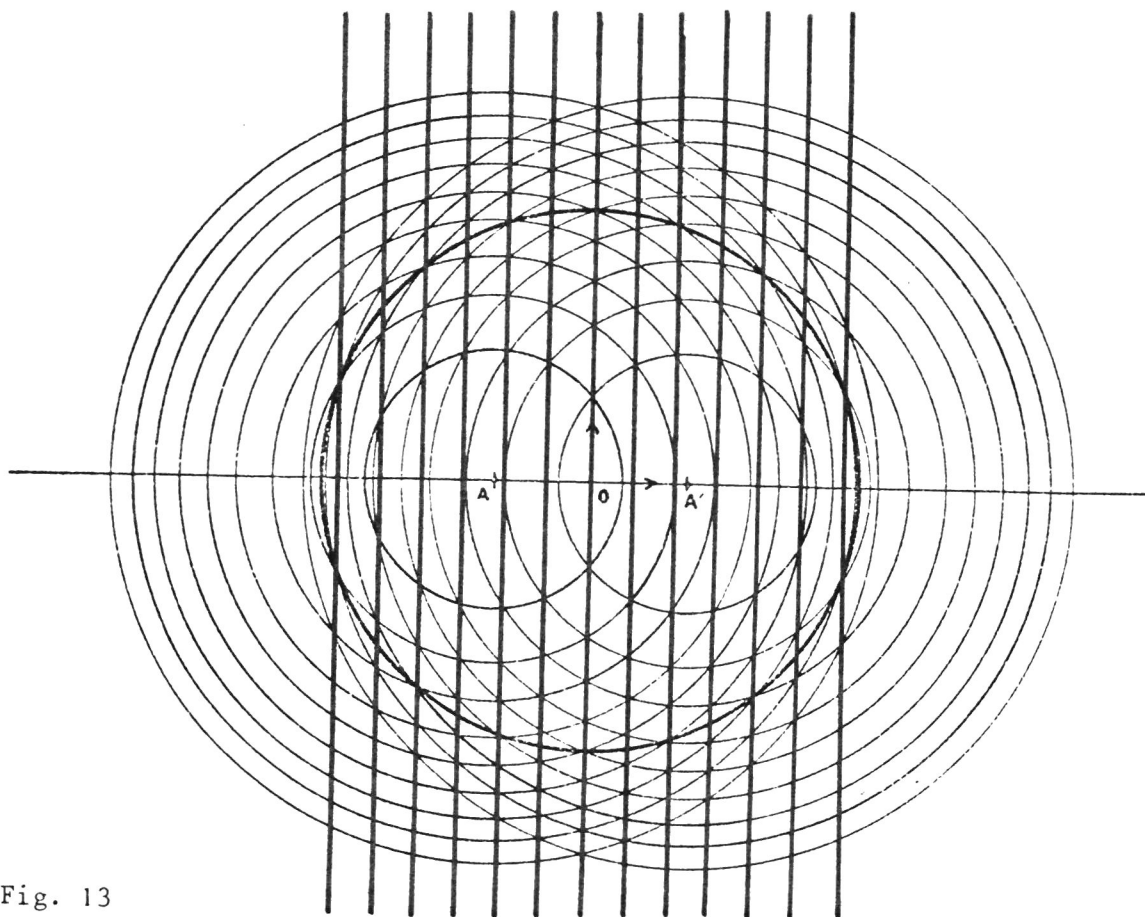
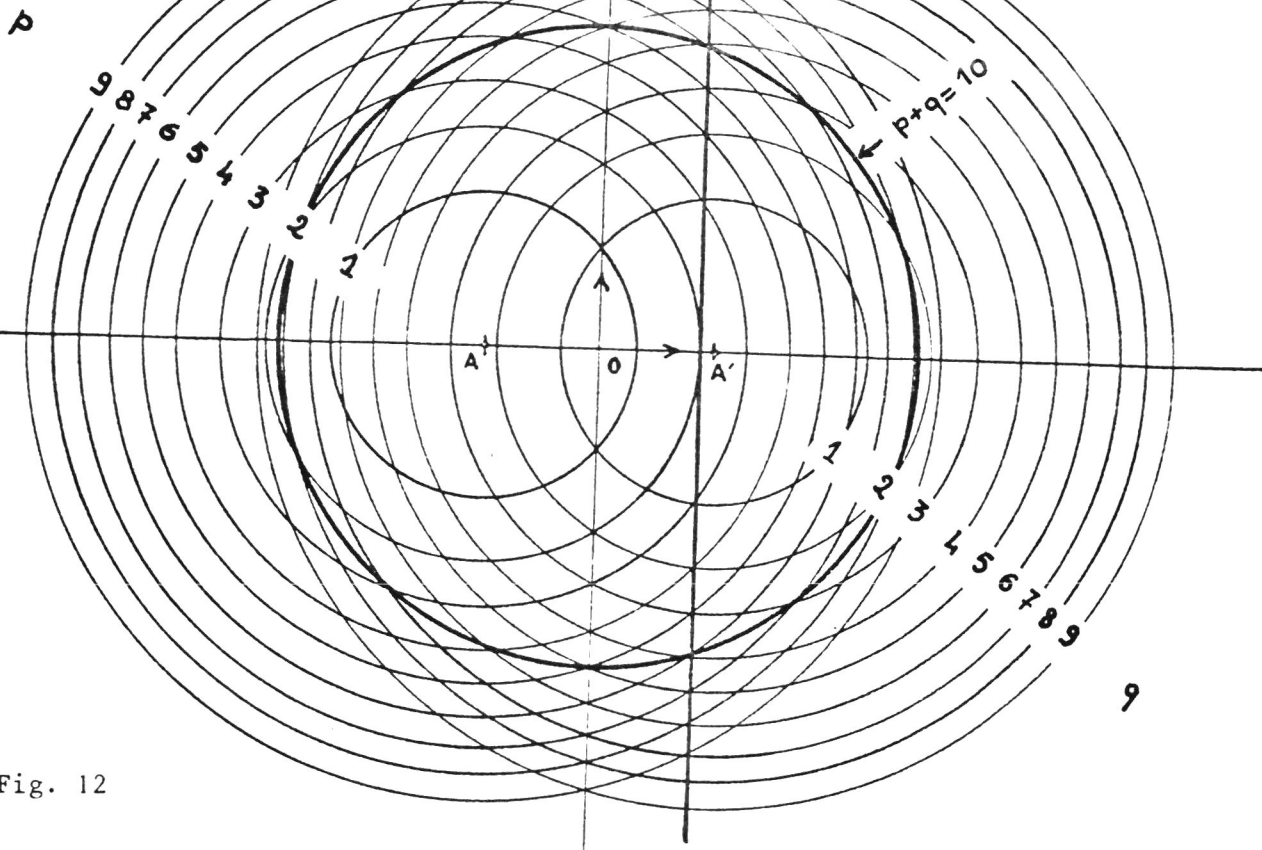
$$\pi (R_{k+1}^2 - R_k^2)$$

Il résulte de l'hypothèse que $R_{k+1}^2 - R_k^2$ est indépendant de k ; autrement dit, la suite (R_k^2) est une suite arithmétique (*). Posons alors :

$$a = \sqrt{R_{k+1}^2 - R_k^2} \quad \text{et} \quad b = R_1$$

On a donc :

$$R_k^2 = (k - 1) a^2 + b^2$$



Les cercles ont donc pour équations (*) :

$$(x + x_0)^2 + y^2 = (p - 1) a^2 + b^2 \quad (\text{cercle de centre } \Lambda, \text{ d'indice } p)$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (q - 1) a^2 + b^2 \quad (\text{cercle de centre } A', \text{ d'indice } q)$$

Cherchons les points d'intersection des cercles tels que $q - p = n$; les coordonnées (x, y) de ces points vérifient :

$$\begin{cases} (x + x_0)^2 + y^2 = (p - 1) a^2 + b^2 \\ (x - x_0)^2 + y^2 = (q - 1) a^2 + b^2 \\ q - p = n \end{cases}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} (q - 1) &= n + (p - 1) \\ \text{et} \quad (p - 1) a^2 &= (x + x_0)^2 + y^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad (x - x_0)^2 + y^2 &= na^2 + (x + x_0)^2 + y^2 - b^2 + b^2 \\ (x - x_0)^2 - (x + x_0)^2 &= na^2 \\ -4x_0 x &= na^2 \end{aligned}$$

$$x = - \frac{na^2}{4x_0}$$

Cette dernière égalité est une équation d'une droite parallèle à $(0, \vec{j})$; autrement dit, pour un entier n donné tous les points d'intersection considérés se trouvent sur cette droite ; ce que l'on vérifie sur la figure 12, avec $n = -2$.

Si nous donnons à n plusieurs valeurs successives, nous obtenons une famille de droites parallèles, la distance entre deux droites consécutives étant : $\frac{a^2}{4x_0}$ (Figure 13).

Ce sont les droites qui apparaissent en moiré sur la figure 10.

Cherchons maintenant les points d'intersection des cercles tels que $p + q = n$; les coordonnées (x, y) de ces points vérifient le système :

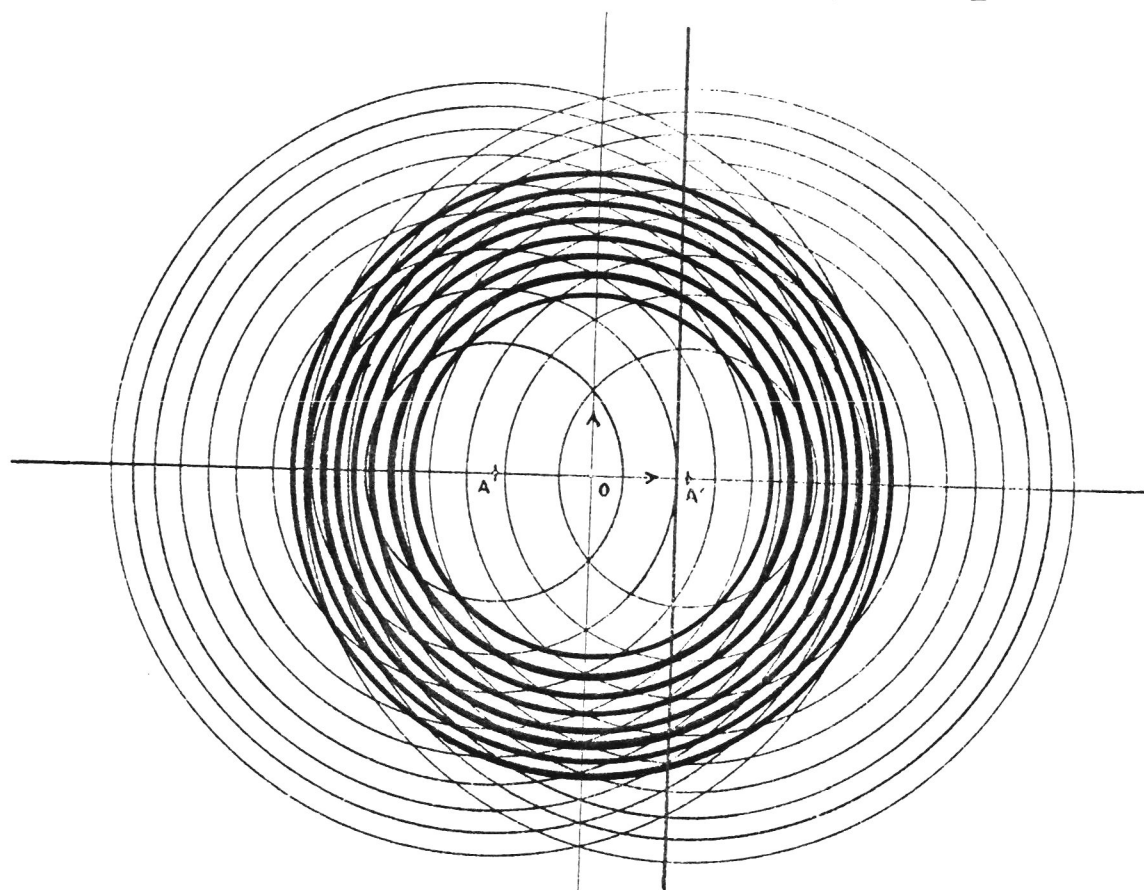


Fig. 14

$$\begin{cases} (x + x_0)^2 + y^2 = (p - 1) a^2 + b^2 \\ (x - x_0)^2 + y^2 = (q - 1) a^2 + b^2 \\ p + q = n \end{cases}$$

On en déduit :

$$q - 1 = n - 2 - (p - 1)$$

et
$$(p - 1) a^2 = (x + x_0)^2 + y^2 - b^2$$

d'où
$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + y^2 &= (n - 2) a^2 - (x + x_0)^2 - y^2 + b^2 + b^2 \\ (x - x_0)^2 + (x + x_0)^2 + 2y^2 &= (n - 2) a^2 + 2b^2 \\ 2x^2 + 2x_0^2 + 2y^2 &= (n - 2) a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = (n - 2) \frac{a^2}{2} + b^2 - x_0^2$$

Cette dernière égalité est une équation du cercle de centre 0

et de rayon $\sqrt{(n - 2) \frac{a^2}{2} + b^2 - x_0^2}$ (sous réserve que $(n - 2) \frac{a^2}{2} + b^2 - x_0^2$ soit positif, c'est-à-dire que n soit assez grand pour que les cercles se coupent effectivement, ce que nous supposons dans la suite).

Les points d'intersection considérés sont donc sur ce cercle, ce que l'on vérifie sur la figure 12, avec $n = 10$. Remarquons que, si nous donnons à n plusieurs valeurs successives, nous obtenons une famille de cercles de Fresnel. En effet, si nous posons :

$$R'_n = \sqrt{(n - 2) \frac{a^2}{2} + b^2 - x_0^2}, \text{ on a :}$$

$$R'^2_{n+1} - R'^2_n = \frac{a^2}{2}$$

Voir figure 14.

Ce sont certains de ces cercles qui apparaissent en moiré sur la figure 11.

4°) Cas général :

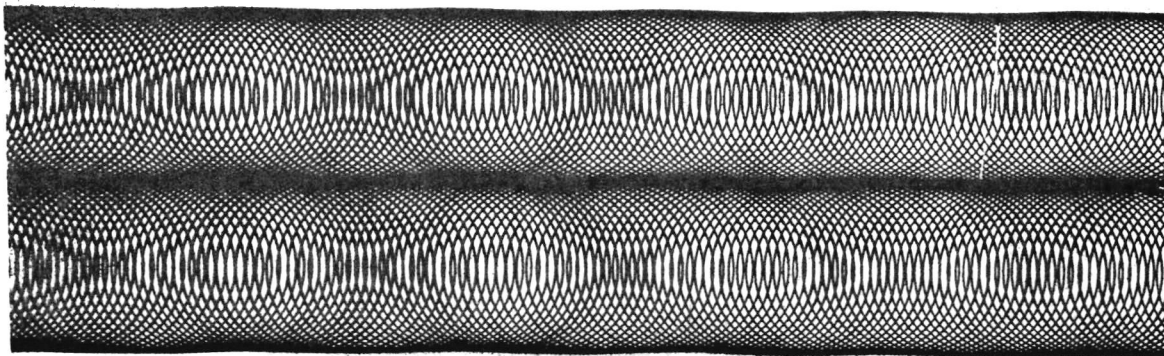
On choisit d'abord un repère adapté au cas que l'on étudie, puis on détermine des équations de chacune des deux familles de courbes. On obtient ainsi deux relations : $f(x, y, p) = 0$ pour la première famille, $g(x, y, q) = 0$ pour la seconde. Ainsi, p étant fixé, $f(x, y, p) = 0$ est une équation de la courbe d'indice p de la première famille).

Ensuite, n étant un entier, on cherche une relation vérifiée par les coordonnées (x, y) des points d'intersection des courbes d'indices p et q tels que $p + q = n$ ou $q - p = n$.

Suivant le cas étudié, (x, y) vérifie l'un des systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, p) = 0 \\ g(x, y, q) = 0 \\ p + q = n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, p) = 0 \\ g(x, y, q) = 0 \\ q - p = n \end{array} \right.$$

On cherche à déduire du système correspondant au cas étudié une relation indépendante de p et q vérifiée par (x, y) (on dit qu'on "élimine" p et q) ; soit $h(x, y, n)$ la relation obtenue. Pour n fixé, $h(x, y, n) = 0$ est une équation d'une courbe contenant tous les points d'intersection considérés. Les courbes observées en moiré ont donc pour équation $h(x, y, n) = 0$ pour certaines valeurs de n .



3- AUTRES EXEMPLES

Pour étudier d'autres moirés nous vous proposons ici certaines superpositions de familles de courbes, avec leurs équations.

En appliquant la technique du chapitre précédent, essayez de trouver les équations du moiré. En cas de besoin vous pouvez utiliser l'annexe mathématique page 43. Et vous trouverez les résultats page 22.

Exemple 1 : figure C et calque A.

La figure C est la famille de cercles de Fresnel déjà étudiée, on suppose ici que le premier cercle est de rayon a , ce qui donne comme équations, lorsque le centre des cercles est l'origine du repère :

$$x^2 + y^2 = p a^2 ,$$

La figure A est une famille de droites parallèles d'écartement b .

Dans un repère dont l'axe $(0, \vec{j})$ est l'une d'entre elles, ces droites ont pour équations :

$$x = qb ,$$

Exemple 2 : figure F et calque F

On superpose une famille d'ellipses de Fresnel sur elle-même.

Lorsque le repère a pour origine le centre de ces ellipses, pour axe $(0, \vec{i})$ le grand axe des ellipses et pour axe $(0, \vec{j})$ le petit axe, on obtient comme équations des ellipses :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = p , \text{ a et b sont des constantes,}$$

p est le numéro de l'ellipse considérée lorsqu'on commence en numérotant 1 la plus petite ellipse.

On peut ici faire trois expériences :

1er cas : le centre des ellipses du calque est sur le grand axe des ellipses de la feuille de papier et il est proche de leur centre.

2ème cas : on éloigne le centre des ellipses du calque de celui des ellipses de la feuille de papier, en restant sur le grand axe.

3ème cas : on superpose les centres des deux familles d'ellipses, et on fait tourner une famille par rapport à l'autre : elles n'ont donc plus les mêmes axes.

Pour faire les calculs dans ces trois cas, il vaut mieux bien choisir le repère dans lequel on va travailler, c'est-à-dire qu'il faut essayer de le placer de façon symétrique par rapport à chaque famille.

Exemple 3 : figure B et calque G.

figure B et calque H.

figure J et calque G.

Dans les trois cas on considère une famille de droites parallèles d'écartement b , et une famille de cercles concentriques dont les rayons forment une suite arithmétique de raison a (le premier cercle ayant comme rayon a , le $p^{\text{ième}}$ aura comme rayon pa).

Ces équations sont :

$$\text{- pour les cercles} \quad x^2 + y^2 = (pa)^2$$

$$\text{- pour les droites} \quad x = qb$$

lorsque l'origine du repère est le centre des cercles, et lorsque l'une des droites est l'axe $(0, \vec{j})$.

Exemple 4 : figure G et calque G

figure H et calque H

On superpose deux familles identiques de cercles concentriques analogues à ceux de l'exemple précédent.

Soient A et B les centres respectifs de chaque famille ; le cercle d'indice p de la première famille est l'ensemble des points M tels que $AM = pa$; le cercle d'indice q de la seconde famille est l'ensemble des points M tels que $BM = qa$.

Exemple 5 : figure E et calque E

1er cas : on les superpose en mettant les centres de ces 2 familles de droites radiales très proches.

2ème cas : on éloigne ces centres.

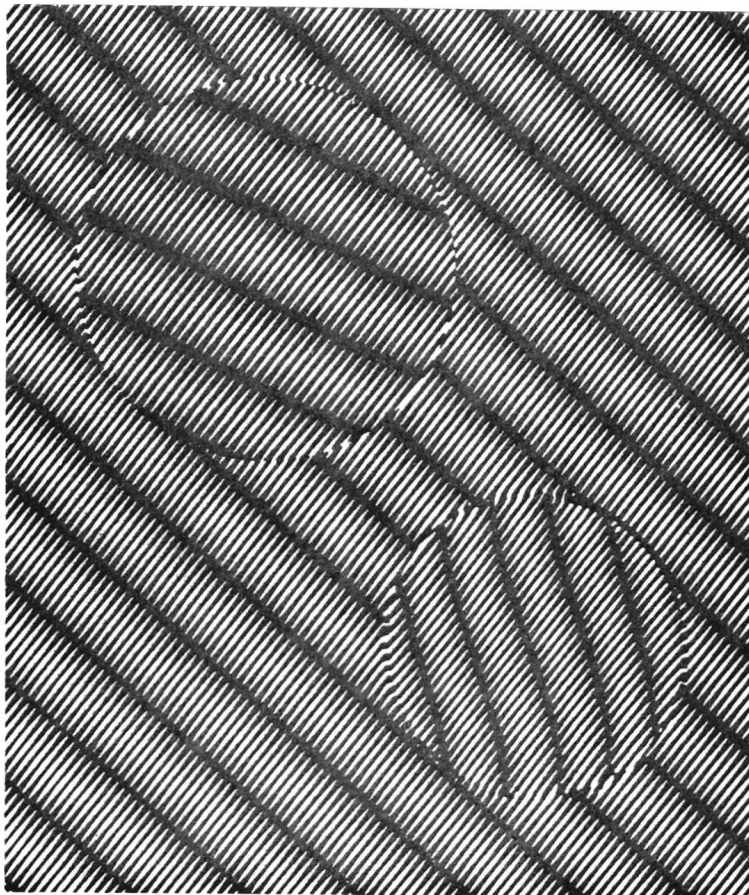
L'angle entre deux droites consécutives a pour mesure α ; lorsque l'origine du repère est le centre de la figure, et que l'axe $(0, \vec{i})$ est l'une

des droites, on numérote les droites de telle façon que la droite de numéro p ait pour équation $y = (\operatorname{tg} p\alpha)x$

Questions subsidiaires :

- Lorsque dans une superposition vous remplacez une famille de droites parallèles par une famille de carrés, qu'observez-vous ? Pourquoi ? (exemple calque K sur figure C).

- Superposez le calque H sur la figure G en faisant bien correspondre les centres. Qu'observez-vous ? Cherchez une explication après avoir lu le chapitre 4.



- 22 -

RESULTATS :Exemple 11er cas : $p + q = n$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = pa^2 \\ x = qb \\ p + q = n \end{cases}$$

d'où $p = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$ et $q = \frac{x}{b}$

et ensuite $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{x}{b} = n$

Soit :

$$\left(x + \frac{a^2}{2b}\right)^2 + y^2 = na^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$

On obtient des cercles de Fresnel de centre $\left(-\frac{a^2}{2b}, 0\right)$

2ème cas : $p - q = n$

On obtient alors

$$\left(x - \frac{a^2}{2b}\right)^2 + y^2 = na^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$

On a donc des cercles de Fresnel de centre $\left(\frac{a^2}{2b}, 0\right)$, symétriques des précédents par rapport à l'axe Oy.

Exemple 2

1er cas : on choisit comme origine du repère orthonormé le milieu des centres, comme axe Ox le grand axe des ellipses, et on en déduit Oy.

Les centres des ellipses ont alors comme coordonnées $(x_0, 0)$ et $(-x_0, 0)$.

Une famille est numérotée par p , l'autre par q et on obtient dans ce cas :

$$\begin{cases} p - q = n \\ \left(\frac{x + x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = p \\ \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = q \end{cases}$$

d'où
$$\left(\frac{x + x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 = n$$

$$\frac{4xx_0}{a} = n$$

Soit :

$$x = n \frac{a}{4x_0}$$

On obtient une famille de droites parallèles à Oy.

2ème cas : on choisit le même repère.

Par rapport à ce qui précède seule ici la relation entre les numéros est différente : $p + q = n$

d'où
$$p + q = n$$

$$\left(\frac{x + x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = p$$

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = q$$

On obtient ainsi :
$$\left(\frac{x + x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{b}\right)^2 = n$$

Soit :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{n}{2} - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2$$

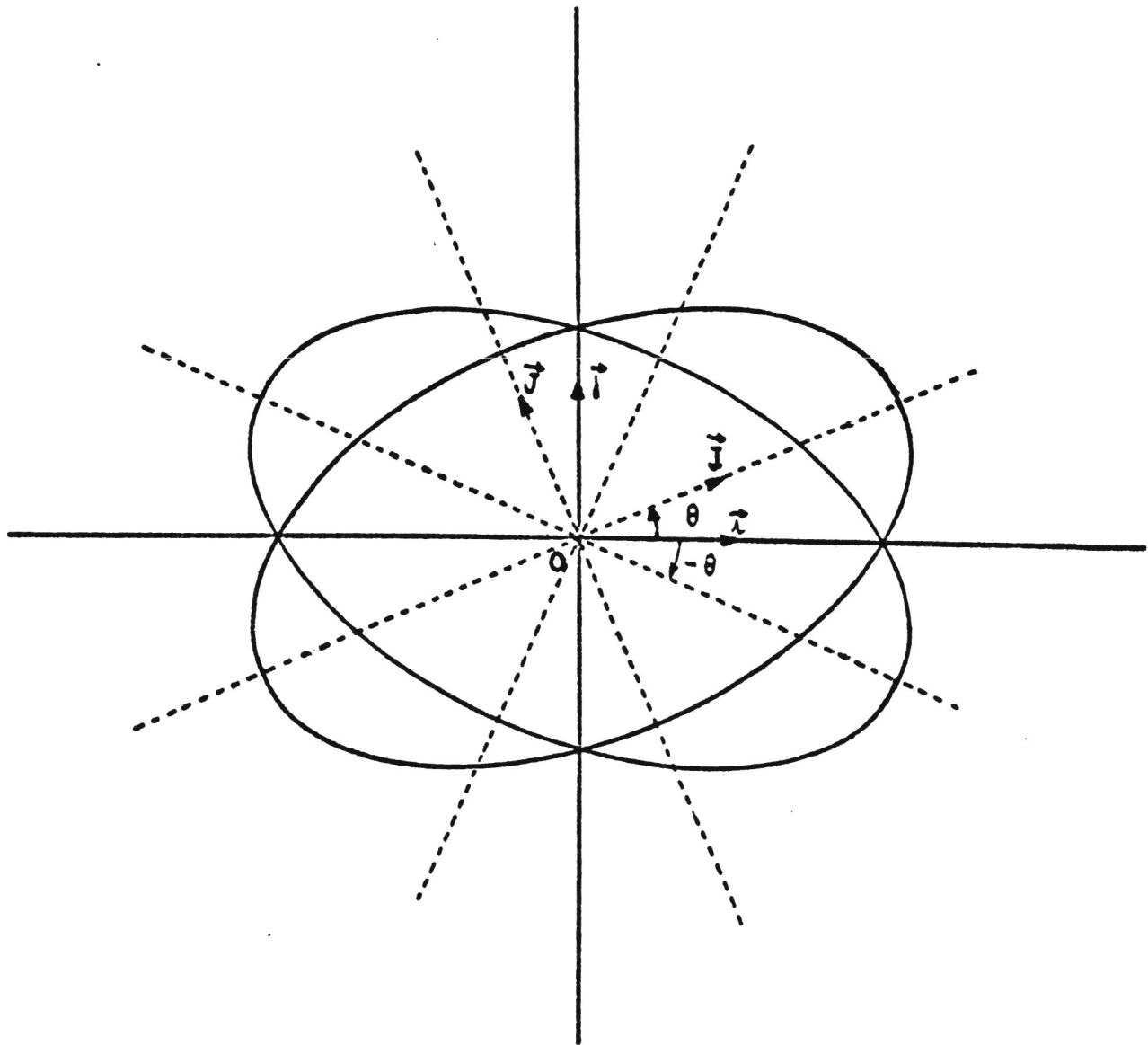


Fig. 15

On a donc un faisceau d'ellipses.

3ème cas : on choisit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ de telle façon que 0 soit le centre commun des deux familles, que le grand axe de la première famille soit incliné d'un angle θ par rapport à $(0, \vec{i})$ et le grand axe de la seconde famille d'un angle $(-\theta)$ (voir figure 15).

L'hyperbole de numéro p de la première famille a pour équation $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = p$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ formé de son centre, de son grand axe et de son petit axe.

On a donc ici (*) : $\vec{i} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

d'où $X = x\cos\theta + y\sin\theta$ et $Y = -x\sin\theta + y\cos\theta$

La première famille a donc pour équations dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\left(\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{b}\right)^2 = p$$

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2 + 2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)xy = p$$

Pour obtenir les équations de la 2ème famille il suffit de remplacer θ par $-\theta$ et p par q , d'où :

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2 - 2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)xy = q$$

On constate que le moiré apparaît seulement pour $p - q = n$, les courbes obtenues ont donc pour équations :

$$4\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)xy = n$$

Soit

$$xy = n \frac{ab}{2(a - b)\sin 2\theta}$$

On a donc une famille d'hyperboles ayant pour asymptotes les axes $(0, \vec{i})$ et $(0, \vec{j})$.

Exemple 3

1er cas : $p + q = n$

on obtient

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (pa)^2 \\ x = qb \\ p + q = n \end{cases}$$

d'où :

$$p = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \quad \text{et} \quad q = \frac{x}{b}$$

et

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} + \frac{x}{b} = n$$

donc

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \left(n - \frac{x}{b}\right)^2$$

soit

$$x^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) + 2 \frac{n}{b} x + \frac{y^2}{a^2} = n^2$$

On obtient donc des coniques dont la nature dépend du coefficient de x^2 (voir cours de T C).

- si $a < b$ (c'est-à-dire si les cercles sont moins écartés que les droites) le coefficient de x^2 a le même signe que celui de y^2 , on obtient des ellipses.
- si $a > b$ (c'est-à-dire si les cercles sont plus écartés que les droites) le coefficient de x^2 a le signe contraire de celui de y^2 , on obtient des hyperboles.
- si $a = b$, x^2 disparaît, on obtient des paraboles.

2ème cas $p - q = n$

On obtient les courbes symétriques des précédentes par rapport à O.

Exemple 4

Entre les centres apparaît un moiré qui correspond à $p + q = n$, c'est-à-dire qu'il est défini par la relation :

$AM + BM = na$, qui caractérisent une famille d'ellipses de foyers A et B (*).

Un autre moiré, correspondant à $p - q = n$ apparaît ;
ce moiré est caractérisé par la relation $AM - BM = na$; il s'agit
d'une famille d'hyperboles de foyers A et B (*).

Exemple 5 : on choisit comme origine O du repère le milieu des deux centres, chaque famille ayant une droite qui passe par O, et on choisit cette droite (orientée) comme axe $(O, \vec{i})$. Alors les deux centres ont comme coordonnées $(d, 0)$ et $(-d, 0)$. La première famille a donc pour équations : $y = (\operatorname{tg} p\alpha) (x - d)$ et la deuxième : $y = (\operatorname{tg} q\alpha) (x + d)$

1er cas : le moiré apparaît pour $q - p = n$,

d'où

$$\begin{cases} y = (\operatorname{tg} p\alpha) (x - d) \\ y = (\operatorname{tg} q\alpha) (x + d) \\ q - p = n \end{cases}$$

alors

$$\operatorname{tg} n\alpha = \operatorname{tg}(q - p)\alpha = \frac{\operatorname{tg} q\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{1 + \operatorname{tg} q\alpha \operatorname{tg} p\alpha}$$

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\frac{y}{x + d} - \frac{y}{x - d}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - d^2}}$$

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{-2 y d}{x^2 + y^2 - d^2}$$

Soit

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{d}{\operatorname{tg} n\alpha} y - d^2 = 0$$

$$x^2 + \left(y + \frac{d}{\operatorname{tg} n\alpha}\right)^2 - d^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 n\alpha}\right) = 0$$

On trouve donc des cercles de centre $(0, \frac{d}{\operatorname{tg} n\alpha})$ passant par les deux points $(d, 0)$ et $(-d, 0)$, centres des familles radiales.

- 28 -

2ème cas : ici le moiré apparaît pour $q + p = n$

d'où :

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} p\alpha (x - d) \\ y = \operatorname{tg} q\alpha (x + d) \\ q + p = n \end{cases}$$

alors

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} p\alpha + \operatorname{tg} q\alpha}{1 - \operatorname{tg} p\alpha \operatorname{tg} q\alpha}$$

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\frac{y}{x-d} + \frac{y}{x+d}}{1 - \frac{y^2}{x^2 - d^2}} = \frac{2yx}{x^2 - y^2 - d^2}$$

Soit

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{\operatorname{tg} n\alpha} xy - d^2 = 0$$

On peut déjà remarquer que ces courbes, comme les cercles du cas précédent, passent par les centres des familles radiales.

D'autre part le moiré apparaît expérimentalement comme une famille d'hyperboles. On va le montrer en effectuant quelques calculs et un changement d'axes.

Soit donc

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{\operatorname{tg} n\alpha} xy - d^2 = 0$$

alors

$$\left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} n\alpha}\right)^2 - y^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 n\alpha}\right) = d^2$$

$$\left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} n\alpha}\right)^2 - \frac{y^2}{\sin^2 n\alpha} = d^2$$

$$\left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} n\alpha} - \frac{y}{\sin n\alpha}\right) \left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} n\alpha} + \frac{y}{\sin n\alpha}\right) = d^2$$

en multipliant par $\sin n\alpha$:

$$[x \sin n\alpha - y(\cos n\alpha + 1)] [x \sin n\alpha - y(\cos n\alpha - 1)] = d^2 \sin n\alpha$$

en faisant intervenir $\frac{n\alpha}{2}$:

$$[2x \sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} - 2y \cos^2 \frac{n\alpha}{2}] [2x \sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} + 2y \sin^2 \frac{n\alpha}{2}] = 2d^2 \sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$$

en simplifiant :

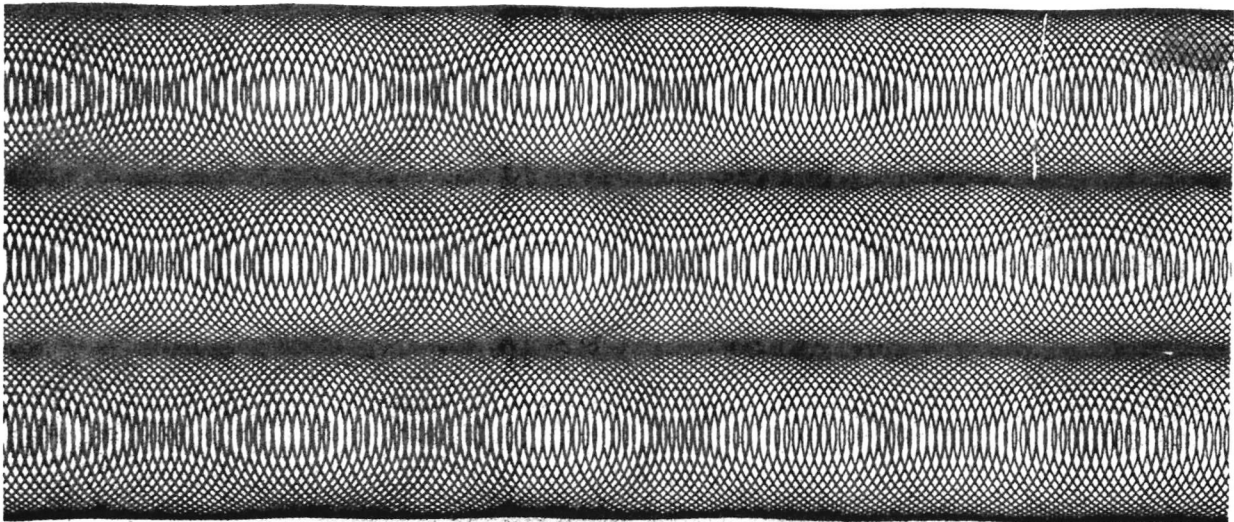
$$[x \sin \frac{n\alpha}{2} - y \frac{\cos n\alpha}{2}] [x \cos \frac{n\alpha}{2} + y \sin \frac{n\alpha}{2}] = \frac{d^2}{2}$$

On pose :

$$\begin{cases} X = x \sin \frac{n\alpha}{2} - y \cos \frac{n\alpha}{2} \\ Y = x \cos \frac{n\alpha}{2} + y \sin \frac{n\alpha}{2} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire que le nouveau}$$

repère $(0, \vec{I}, \vec{J})$ est obtenu (*) en faisant tourner de $\frac{\pi}{2} + \frac{n\alpha}{2}$ le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans le repère $(0, \vec{I}, \vec{J})$ on obtient donc : $XY = \frac{d^2}{2}$, équation d'une hyperbole d'asymptote $(0, \vec{I})$ et $(0, \vec{J})$.



4- COMPLEMENTS SUR DES FAMILLES DE DROITES PARALLELES

1) La distance entre deux droites consécutives est la même pour les deux familles.

On a vu plus haut qu'avec deux réseaux de droites parallèles, on peut obtenir un dessin moiré, lui aussi formé de droites parallèles (exemple : Fig. A et son calque, Fig. B et son calque, Fig. D et son calque).

On peut essayer de préciser certains points : quelle est la distance entre les droites qui apparaissent, quel est leur angle avec l'une ou l'autre des familles de départ ? (Essayez de trouver la réponse à la 2ème question sans calcul).

On peut toujours choisir les axes de telle façon que les droites d'une des familles soient parallèles à l'axe Ox, et que l'angle des deux directions des deux familles de droites ait une mesure α telle que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Alors dans les équations du chapitre 2, $m = \operatorname{tg} \alpha$ et $a' = \frac{a}{\cos \alpha}$ et le calcul devient alors :

$$\begin{cases} y = pa \\ y = \operatorname{tg} \alpha x + q \frac{a}{\cos \alpha} \\ q - p = n \end{cases}$$

$$y = \operatorname{tg} \alpha x + \frac{a}{\cos \alpha} \left(n + \frac{y}{a} \right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) y = \operatorname{tg} \alpha x + \frac{an}{\cos \alpha}$$

$$y = \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - 1} x + \frac{an}{\cos \alpha - 1}$$

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1} x + \frac{an}{\cos \alpha - 1}$$

$$y = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{-2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} x + \frac{an}{\cos \alpha - 1}$$

$$y = - \cotg \frac{\alpha}{2} x + \frac{an}{\cos \alpha - 1}$$

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right) x + \frac{an}{\cos \alpha - 1}$$

Les droites du moiré font donc avec l'axe Ox un angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire que ces droites ont comme direction celle d'une des bissectrices de l'angle des directions des deux familles.

Ce qui était prévisible ! En effet, les deux familles de droites ont des rôles symétriques et donc la nouvelle famille doit être placée de façon symétrique par rapport à chacune des deux premières, notamment en ce qui concerne les angles. Il n'y a donc que deux possibilités : les deux directions de bissectrices.

Et les dessins montrent que c'est la direction de la bissectrice de l'angle "obtus" qui convient.

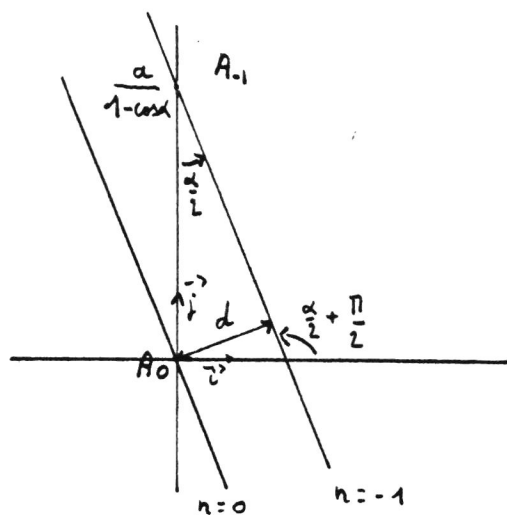
Pour calculer la distance entre les droites du moiré, on reprend leurs équations : $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot x - \frac{an}{1 - \cos\alpha}$.

Elles sont parallèles (même coefficient directeur) et elles coupent l'axe Oy en des points d'ordonnées $-\frac{an}{1 - \cos\alpha}$, la distance entre deux points consécutifs est toujours la même $(A_n A_{n+1} = \overline{OA_{n+1}} - \overline{OA_n} =$

$-\frac{a(n+1)}{1 - \cos\alpha} + \frac{an}{1 - \cos\alpha} = -\frac{a}{1 - \cos\alpha}$, $d(A_n, A_{n+1}) = \frac{a}{1 - \cos\alpha}$). Donc ces droites sont équidistantes et pour étudier leur distance, il suffit d'en choisir deux consécutives, par exemple celles obtenues pour $n = 0$ et $n = -1$.

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{A_0 A_{-1}} &= \sin \frac{\alpha}{2} \\ d &= A_0 A_{-1} \sin \frac{\alpha}{2} \\ d &= \frac{a}{1 - \cos\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \\ d &= a \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \boxed{d} &= \boxed{\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}} \end{aligned}$$



En particulier, lorsque α est petit, $\sin \frac{\alpha}{2}$ est peu différent de $\frac{\alpha}{2}$ (en remplaçant $\sin \frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha}{2}$ lorsque α est inférieur à 5 degrés, on commet une erreur inférieure à 10^{-3}). En faisant cette approximation dans l'équation précédente, on obtient :

$$\boxed{d \approx \frac{a}{\alpha}}$$

(voir applications - chapitre 6)

C'est-à-dire que la distance d est inversement proportionnelle à α .

On peut constater cela expérimentalement en prenant 2 familles identiques de droites parallèles (par exemple la Fig. D ou A et son calque).

On numérote les lignes de bas en haut et on superpose les deux familles de la façon suivante : l'extrémité gauche de la ligne n° 1 de la première famille est toujours sur l'extrémité gauche de la ligne n° 1 de la seconde famille. L'extrémité droite de la ligne n° 1 de la première famille est : cas n° 1 : sur l'extrémité droite de la ligne n° 2 de la seconde famille. On voit 1 ligne de moiré.

cas n° 2 : sur l'extrémité droite de la ligne n° 3 de la seconde famille. On voit 2 lignes de moiré.

cas n° 3 : sur l'extrémité droite de la ligne n° 4 de la seconde famille. On voit 3 lignes de moiré.

cas n° 4 : sur l'extrémité droite de la ligne n° 5 de la seconde famille. On voit 4 lignes de moiré.

etc.....

Dans le cas n° 1, en appelant D la longueur d'une ligne et a leur distance on a $\text{tg } \alpha_1 = \frac{a}{D}$, on voit 1 ligne de moiré.

Dans le cas n° 2, $\text{tg } \alpha_2 = \frac{2a}{D} = 2\text{tg } \alpha_1$, on voit 2 lignes de moiré.

Dans le cas n° 3, $\text{tg } \alpha_3 = \frac{3a}{D} = 3\text{tg } \alpha_1$, on voit 3 lignes de moiré.

Dans le cas n° 4, $\text{tg } \alpha_4 = \frac{4a}{D} = 4\text{tg } \alpha_1$, on voit 4 lignes de moiré, etc.....

C'est-à-dire que lorsque, par rapport au cas n° 1, la tangente est multipliée par un nombre entier N , le nombre de lignes de moiré est aussi multiplié par N , or, tant que α est assez petit, les N lignes de moiré sont à peu près perpendiculaires aux lignes des familles de base de longueur D , leur distance est donc à peu près $d = \frac{D}{N} = D \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha}$.

On constate ainsi que d est inversement proportionnelle à $\text{tg } \alpha$, or lorsque α est petit α et $\text{tg } \alpha$ sont peu différents.

On retrouve ainsi le fait que d est inversement proportionnelle à α .

2) La distance entre deux droites consécutives est a pour une famille, b pour l'autre.

On observe ce cas lorsque, par exemple, deux grilles semblables bordent une route. Elles ont le même écartement, mais un observateur, à cause de la perspective, voit la superposition de deux grilles d'écartements légèrement différente, la grille la plus proche étant la plus écartée (Fig. 16).

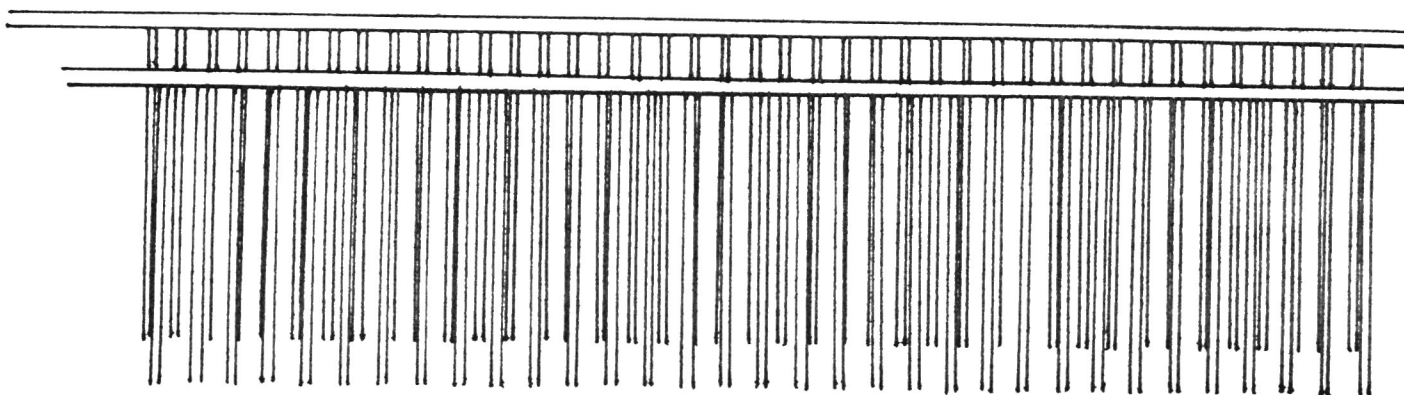


Fig. 16

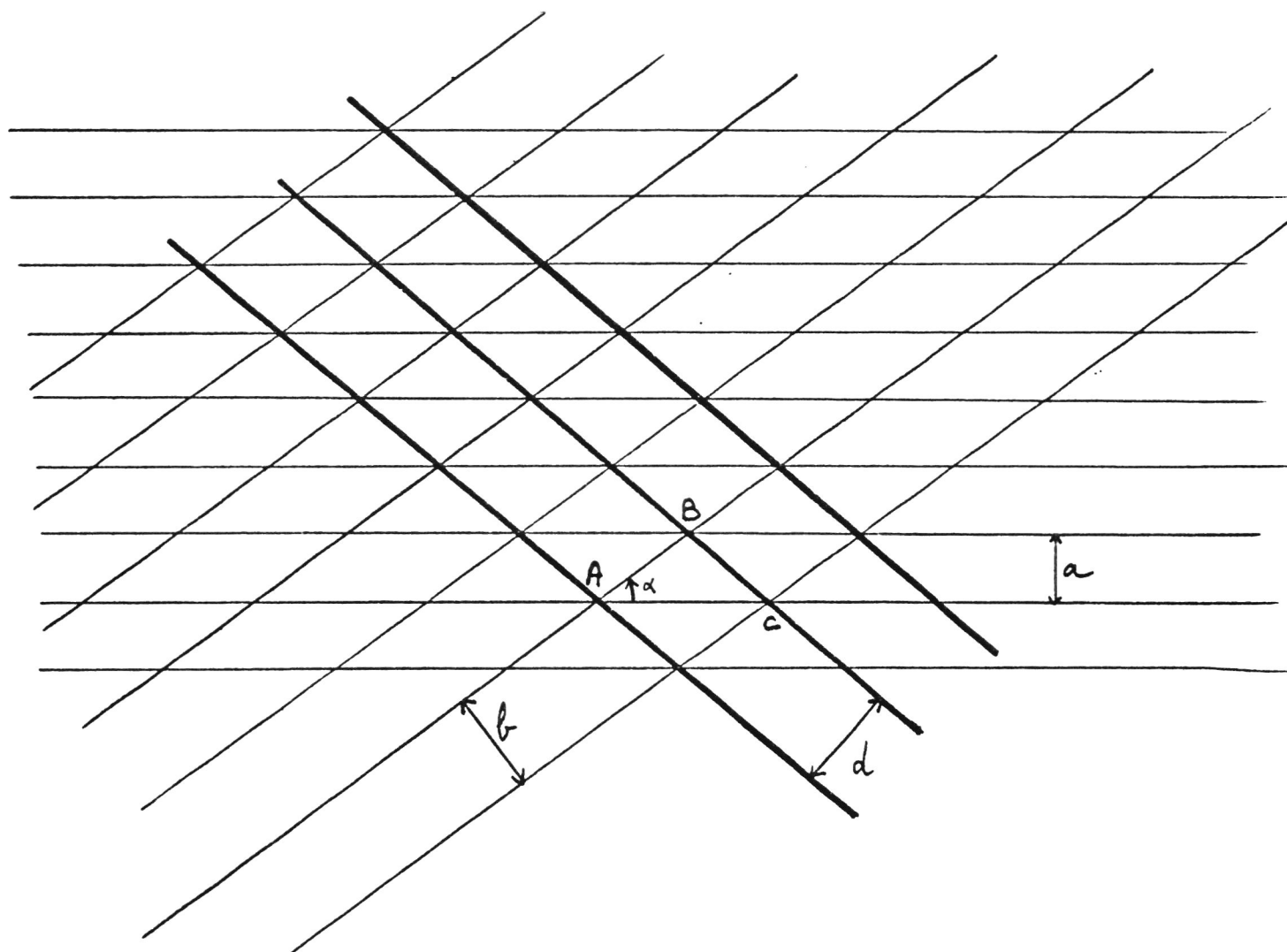


Fig. 17

Un phénomène de moiré apparaît, formé de franges verticales, appelées battements. Vous pouvez les obtenir en superposant le calque de la figure I sur la figure A, ou le calque de la figure J sur la figure B.

Pour étudier cela, on reprend un dessin analogue à la figure 9, mais la 2ème famille a un écartement b . On étudie d'abord le cas où les directions des deux familles forment un angle α , puis on fait tendre α vers 0, ce qui permettra d'étudier le cas où, comme dans l'exemple choisi les droites des deux familles ont la même direction.

Considérons la figure 17, et calculons l'aire T du triangle $A B C$. En utilisant successivement les trois côtés, nous obtenons :

$$2T = AC \times a$$

$$2T = AB \times b$$

$$2T = BC \times d \quad (d \text{ est la distance entre deux lignes du moiré})$$

Calculons le carré scalaire de $\vec{BC}$:

$$\begin{aligned} \vec{BC} \cdot \vec{BC} &= (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ BC^2 &= BA^2 + AC^2 + 2 \vec{BA} \cdot \vec{AC} \end{aligned}$$

$$\frac{T^2}{d^2} = \frac{T^2}{b^2} + \frac{T^2}{a^2} + 2 \frac{T}{b} \cdot \frac{T}{a} \cos(\vec{BA}, \vec{AC})$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + 2 \frac{1}{ab} \cos(\pi - \alpha)$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} \cos \alpha$$

$$d'ou \quad d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} \quad (E)$$

lorsque α tend vers 0, la distance limite est :

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}$$

$$d = \frac{ab}{|a - b|}$$

(voir applications - chapitre 5)

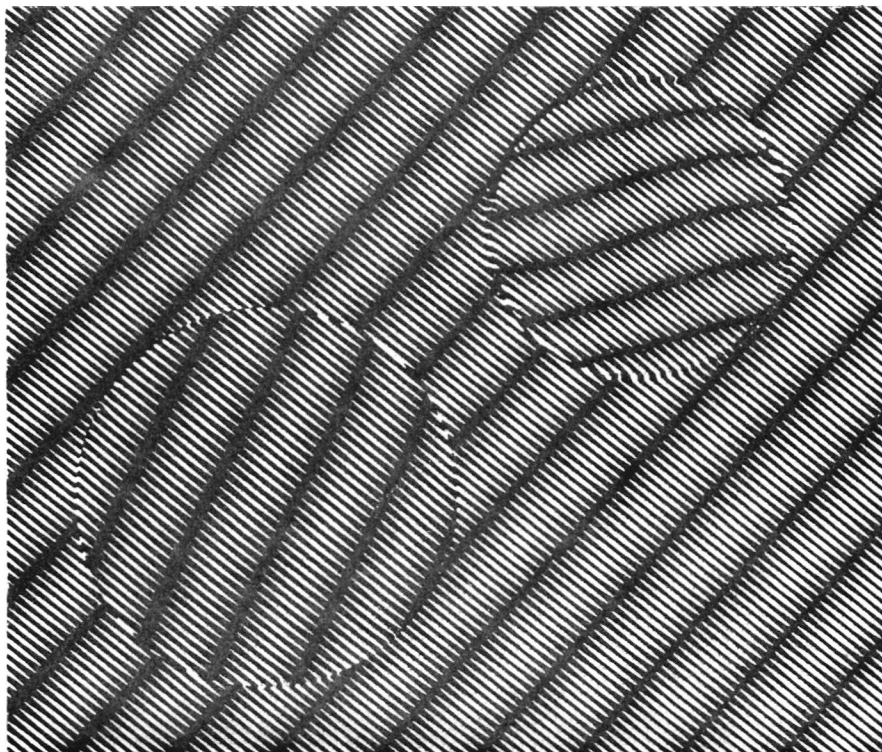
Remarque : si dans l'équation (E) on pose $a = b$, on retrouve le premier cas
 et alors
$$d = \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha}}$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$d = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

mais ici lorsque α tend vers 0, d tend vers l'infini, il n'y a plus de moiré.



5- APPLICATIONS DES MOIRES

Comme nous l'avons signalé au début les moirés interviennent dans plusieurs domaines et on pourrait étudier leurs utilisations en publicité, à la décoration.... On se bornera ici aux applications à la physique, c'est-à-dire essentiellement aux instruments de mesure et à l'étude de certains phénomènes.

1) Mesure et réglage.

Pour mesurer de petites rotations, il suffit de lier à l'objet qui tourne une famille de droites parallèles qui se superpose à une famille identique mais fixe. Si initialement les deux familles se recouvrent exactement, on calculera l'angle de rotation à partir de la formule $d \approx \frac{a}{\alpha}$ (voir chapitre 4) en déterminant la distance d qui sépare 2 droites du moiré (a est fixe et connu au départ).

De même, si on veut connaître l'espacement b d'une famille de droites parallèles, il suffit de la superposer à une famille d'écartement connu a , et de mesurer la distance d qui sépare deux battements. Cette distance est bien plus grande que la distance b , elle est donc plus facile à mesurer. On en déduit b par la formule $d = \frac{ab}{|b - a|}$ (voir chapitre 4), en ayant déterminé avant si b est plus grand que a ou si c'est le cas contraire.

De même, un instrument relativement simple mais étonnamment sensible pour mesurer des petites variations d'angle ou de distance utilise deux grilles pour amplifier les variations.

La figure 18 représente un montage simplifié : un rayon lumineux éclaire une première grille, passe à travers une lentille, est réfléchi par un miroir, repasse par la lentille qui focalise le rayon sur la deuxième grille. Une lentille placée derrière la 2ème grille concentre la lumière sur une cellule photo-électrique.

Un moiré apparaît lorsque l'image de la 1ère grille se superpose à la seconde.

On mesure la quantité de lumière qui atteint la cellule photo-électrique ; cette quantité dépend du moiré, qui dépend lui-même de la rotation du miroir pivotant.

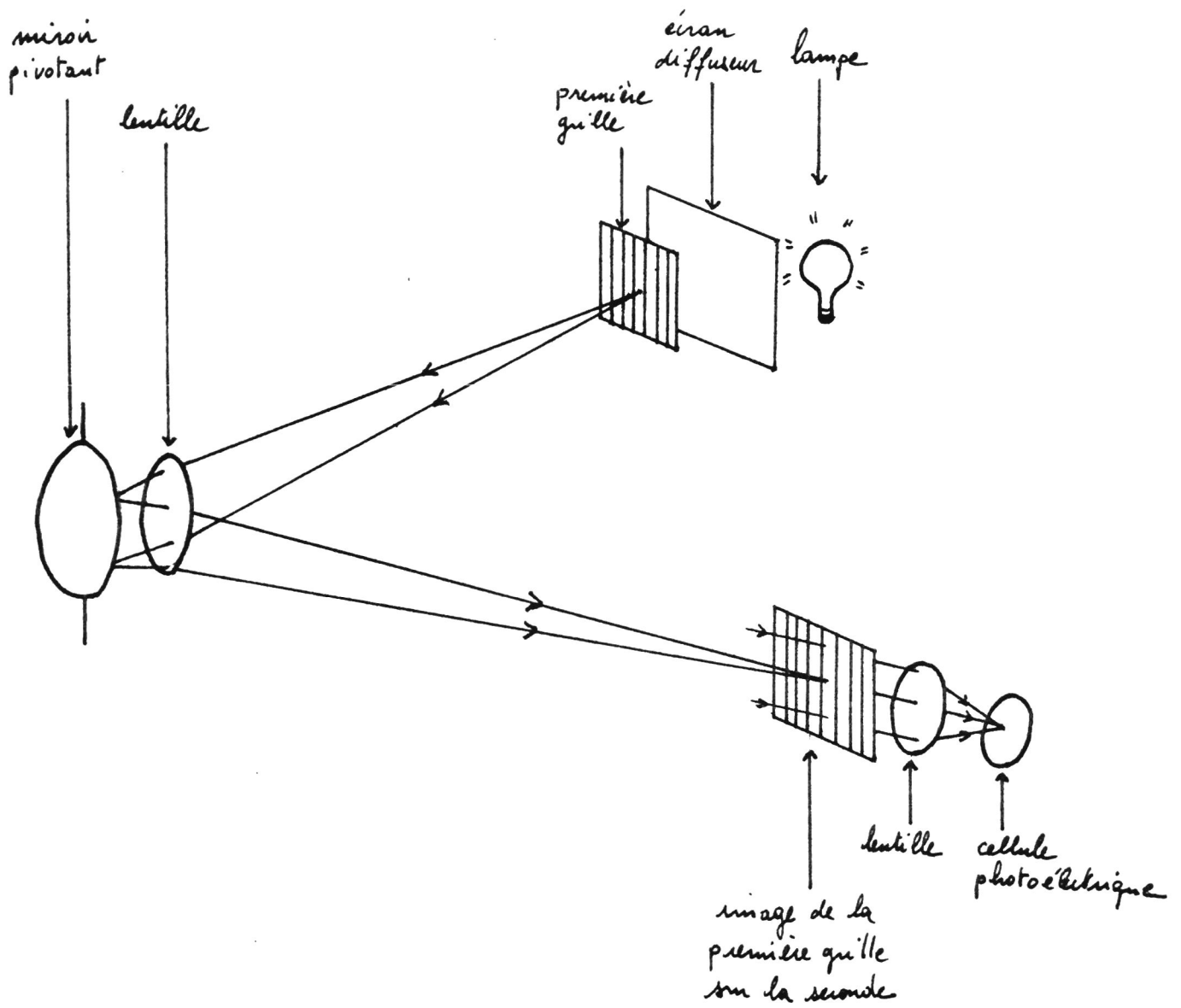


Fig. 18

Mais cet appareil est trop simplifié, il serait trop sensible aux changements d'intensité de la lampe, aux instabilités du circuit électrique etc....

Cependant avec un appareil basé sur ce principe, on a pu faire l'expérience suivante : le miroir était attaché par un fil de fer et un fil de laiton entouré par du fil de cuivre. Quand le cuivre était excité par de la lumière, le champ magnétique résultant changeait la longueur du fil de fer et le miroir tournait très légèrement mais suffisamment pour envoyer l'aiguille de mesure en dehors de l'échelle des graduations.

Pour les appareils de réglage, il s'agit, par exemple, de deux familles de courbes identiques qui se superposent. Lorsqu'elles ne se recouvrent pas exactement il y a un moiré qui apparaît. On peut relier ces deux familles à deux parties d'un appareil qu'on doit régler l'une par rapport à l'autre, de telle façon que le moiré disparaît lorsque le réglage est bien fait.

Un principe analogue est utilisé par les constructeurs de télescope amateurs pour polir un miroir jusqu'à obtenir la forme voulue (par exemple : parabolique). Pendant le polissage le miroir est examiné de temps en temps à travers une grille connue sous le nom de "règle de Ronchi" ; les lignes de la grille se superposant à leurs images renvoyées par le miroir engendrent un moiré. On arrête de polir lorsqu'on obtient le moiré qu'on doit observer avec un miroir parabolique.

Les propriétés de certains corps s'observent particulièrement bien par leurs effets sur des structures répétitives.

Par exemple, le spath d'Islande (cristal de Ca CO_3) a la propriété de décomposer la lumière en deux parties polarisées dont l'une satisfait aux lois de la réfraction et dont la seconde est déplacée latéralement par rapport à la première.

On observe cet effet et on mesure le déplacement en observant une seule famille de cercles concentriques à travers une lame de spath d'Islande. Les 2 composantes polarisées donnent chacune une image de la famille qui, pour un observateur se superposent et provoquent un moiré qui peut permettre de mesurer le déplacement optique.

2) Applications à l'étude qualitative de certains phénomènes.

Certains phénomènes, comme la propagation d'une onde, un champ de potentiel, un champ magnétique, sont schématisés de façon élémentaire par des familles de courbes. En superposant des familles de courbes, on représente la

superposition des phénomènes physiques et on peut ainsi en faire une étude très simple.

Une famille de lignes parallèles équidistantes schématise une onde plane dont la longueur d'onde est donnée par l'espacement des lignes.

En appliquant l'étude faite au chapitre 4, on obtient ainsi que deux ondes de longueur légèrement différente se propageant dans la même direction provoque un phénomène de battement dont la longueur d'onde d est donnée par l'égalité $d = \frac{ab}{|a - b|}$ (voir livre de physique). Et deux ondes de même longueur d'onde a qui se superposent en se coupant sous un angle α , donnent des points d'intersection alignés sur des droites espacées de la distance d avec $d = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ (voir la diffraction des rayons X dans un livre de physique)

Les interférences de 2 ondes sphériques sont représentées par la superposition de deux familles de cercles concentriques équidistants (voir chapitre 3).

Les cercles concentriques équidistants et les lignes parallèles forment un moiré analogue à l'interférence d'une onde sphérique et d'une onde plane. Il s'agit, par exemple, d'une onde qui se propage sur la mer, un écueil affleure et provoque des vaguelettes concentriques. Ou bien, il s'agit en optique d'expérience où la lumière issue d'une source éloignée est réfléchie à la fois par un miroir plan et par un miroir sphérique.

Les dessins de moirés décrivent aussi des problèmes de champ de potentiel. L'image la plus intuitive est peut-être celle d'un liquide qui coule. Les lignes radiales représentent ainsi un liquide qui vient d'une source centrale et qui se répand uniformément sur la surface, les lignes représentant alors la direction de l'écoulement. Ou bien ce même dessin peut-être interprété comme l'image d'un liquide qui est aspiré vers le centre.

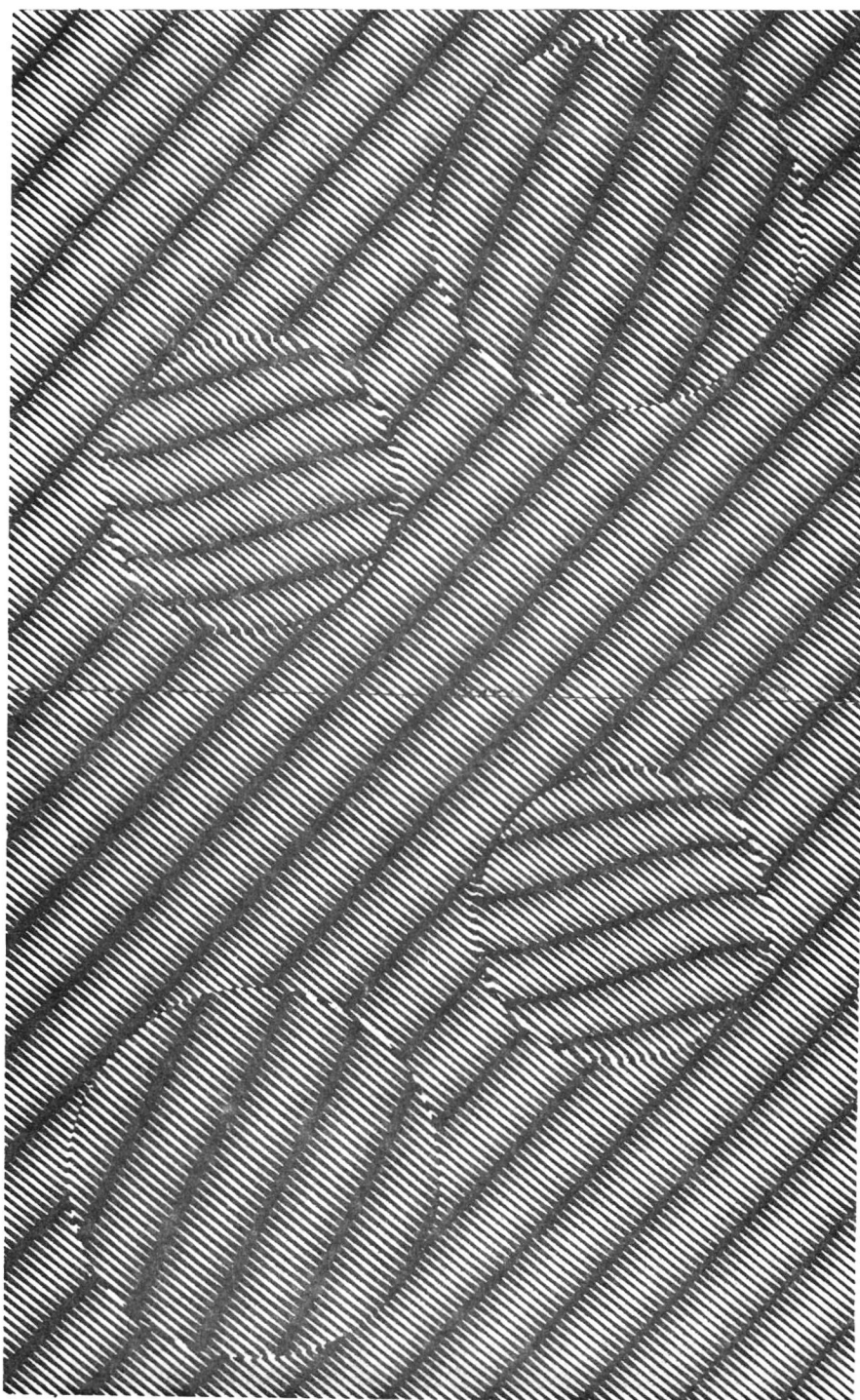
Si on veut étudier le phénomène produit par deux sources il suffit de prendre la figure E et son calque ; lorsque les centres sont écartés, on observe entre eux un moiré dont le centre représente un point immobile entre les deux sources.

On peut interpréter ces deux figures autrement : l'une représentant une source et l'autre une absorption. Le liquide va donc d'un centre vers l'autre, il suit alors les grands cercles du moiré.

On obtient un point immobile d'une autre façon : un liquide qui

s'écoule en passant sur une source (Fig. A et E). Mais un seul point du moiré est un point physiquement immobile car le dessin ne fait pas intervenir le sens du courant.

Les familles de courbes représentent aussi des lignes de champ électrostatique. Par exemple, les cercles concentriques correspondent à un champ produit par un fil parcouru par un courant perpendiculaire au plan de la feuille et passant par le centre des cercles. Par superposition on obtient les lignes de champ provoqué par plusieurs fils parallèles.



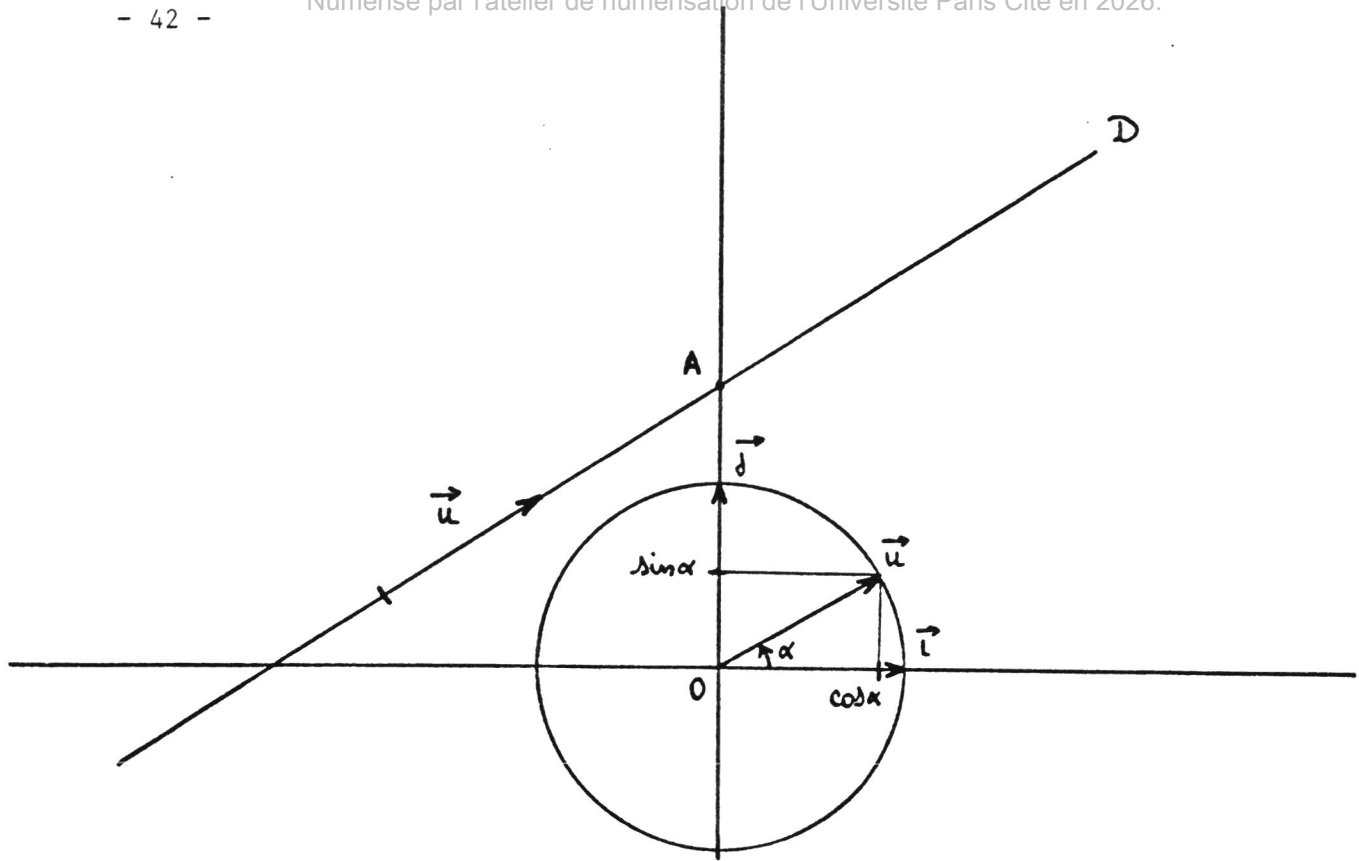


Fig. 19

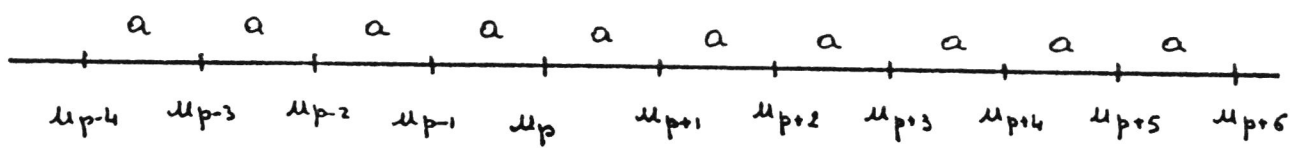


Fig. 20

ANNEXE

Equations de droites :

Soit P un plan affine muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et D une droite de ce plan. On sait que, si D n'est pas parallèle à $(0, \vec{j})$, il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que D ait pour équation dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$y = ax + b$$

a est appelé coefficient directeur de D dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et b est l'ordonnée du point A , intersection de D et de l'axe $(0, \vec{j})$. Les vecteurs directeurs de D sont les vecteurs non nuls dont les coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vérifient : $y = ax$.

Dans le cas où P est euclidien orienté et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct, on a donc : $|b| = OA$; d'autre part, soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de D et α une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$; $\vec{u}$ a donc pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et on a :

$$\cos\alpha = a \sin\alpha$$

d'où $a = \operatorname{tg}\alpha$ (voir fig. 19)

Suites arithmétiques :

Soit (u_n) une suite (finie ou infinie) de réels ; on suppose que u_n est défini pour tout n élément d'un intervalle I de $\mathbb{N}$.

(u_n) est dite arithmétique si et seulement si la différence de deux termes consécutifs est constante. Cette différence est appelée raison de la suite. Ainsi, a étant un réel, (u_n) est une suite arithmétique de raison a si et seulement si, pour tout entier n tel que $n \in I$ et $n+1 \in I$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = a$$

Supposons que (u_n) soit une suite arithmétique de raison a . Nous allons voir que l'on peut calculer tous les termes de cette suite dès que l'on connaît l'un d'eux. En effet, soit $p \in I$; supposons comme u_p . n étant un élément quelconque de I , posons $k = n - p$. On voit, grâce à la figure 20 que l'on a :

$$u_{p+k} = u_p + ka$$

c'est-à-dire

$$u_n = u_p + (n - p)a$$

Equations de cercles.

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A un point de P et R un réel positif. Le cercle C de centre A et de rayon R est l'ensemble des points dont la distance à A est R . Soit (x_0, y_0) les coordonnées de A et M un point quelconque de P de coordonnées (x, y) .

On a :

$$AM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Il en résulte que M appartient à C si et seulement si :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Cette égalité est donc une équation de C .

Changements de repères :

Soit P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(A, \vec{I}, \vec{J})$ deux repères de ce plan.

Le problème du changement de repère est le suivant : connaissant les coordonnées d'un point dans l'un des deux repères, calculer les coordonnées de ce point dans l'autre repère. Pour cela, il est nécessaire de connaître la position d'un des deux repères par rapport à l'autre.

Supposons que l'on connaisse les coordonnées (x_0, y_0) de A dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées (a, b) et (c, d) de $\vec{I}$ et $\vec{J}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point de P de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(A, \vec{I}, \vec{J})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ &= \vec{OA} + \vec{AM} \\ &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{I} + Y\vec{J} \\ &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j}) \\ &= (x_0 + aX + cY)\vec{i} + (y_0 + bX + dY)\vec{j} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$$

On obtient ainsi (x, y) en fonction de (X, Y) . Si l'on veut (X, Y) en fonction de (x, y) on résoud le système ci-dessus.

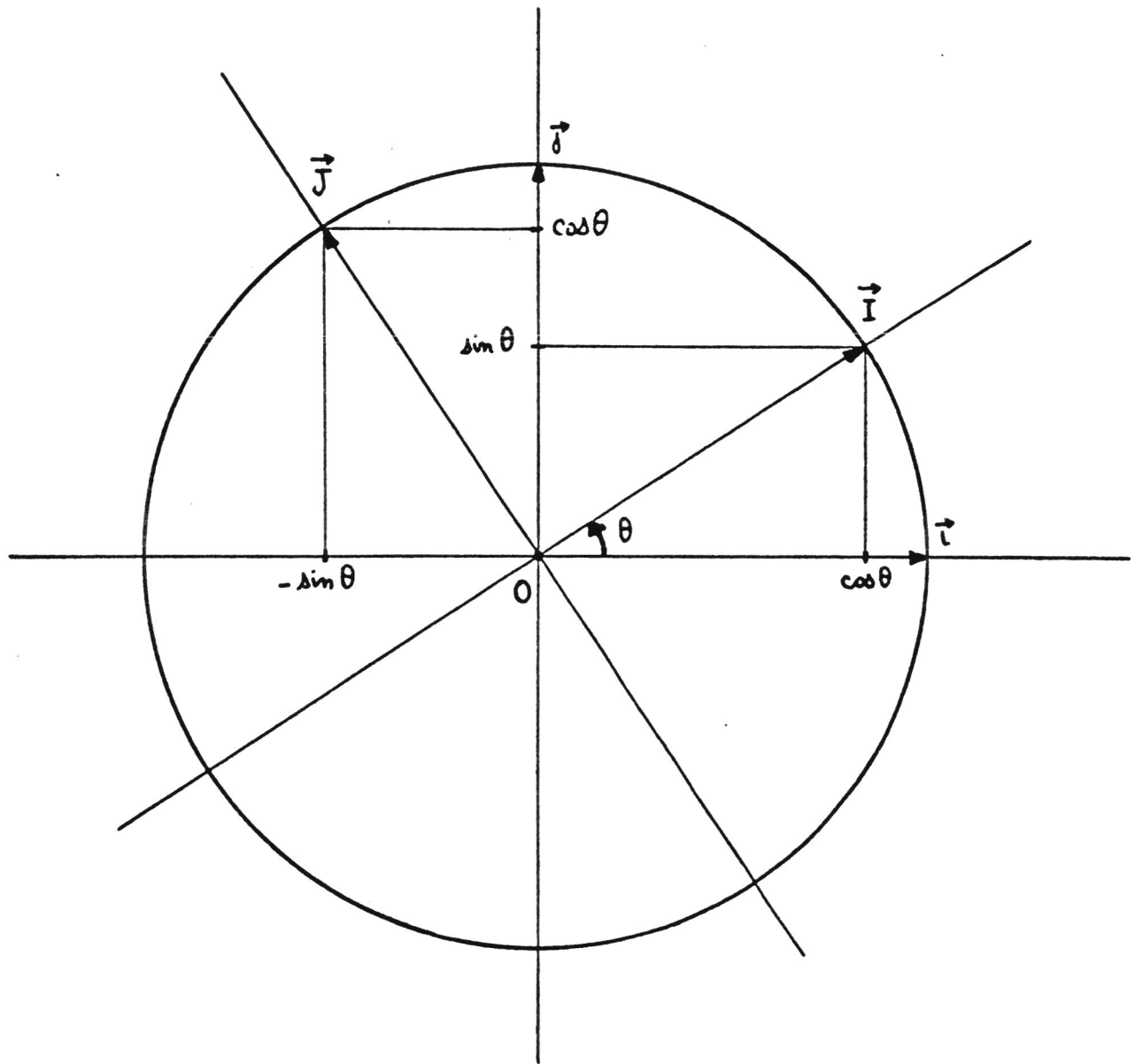


Fig. 21

Dans la brochure on n'utilise les changements de repères que dans deux cas particuliers :

1er cas : on change seulement l'origine.

On a donc $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = \vec{j}$; donc $a = d = I$ et $b = c = 0$

Les formules de changement s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{array} \right.$$

2ème cas : Le plan P étant euclidien orienté et le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on conserve l'origine et on fait subir à $(\vec{i}, \vec{j})$ une rotation de mesure θ . On a donc, (fig. 21) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{I} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{J} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array} \right.$$

Comme la base $(\vec{i}, \vec{j})$ se déduit de $(\vec{I}, \vec{J})$ par une rotation de mesure $-\theta$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array} \right.$$

Coniques :

Il n'est pas possible de donner ici les démonstrations des propriétés énoncées (pour cela, voir un livre de géométrie de T C). Dans ce qui suit, P désigne un plan affine euclidien.

Ellipse : étant donnés deux points F et F' de P et un réel a tel que $2a > FF'$, l'ensemble des points M tel que $MF + MF' = 2a$ est appelé ellipse (Fig. 22) (Si $F = F'$, on obtient un cercle de centre F et de rayon a).

Dans le cas où $F \neq F'$, soit $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que Ω soit le milieu de (F, F') et que la droite $(\Omega, \vec{i})$ contienne F et F'. Dans ce repère l'ellipse a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- 48 -

où $a = OA$ et $b = OB$ (voir figure 22)

Hyperbole : étant donnés deux points distincts F et F' de P et un réel a tel que $0 < 2a < FF'$, l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ est appelé hyperbole (Fig.23).

Soit $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que Ω soit le milieu de (F, F') et que la droite $(\Omega, \vec{i})$ contienne F et F' . Dans ce repère l'hyperbole a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $a = OA$ et $b = \sqrt{a^2 - \Omega F^2}$

Cette hyperbole a deux asymptotes et dans tout repère dont les axes sont les asymptotes elle a une équation de la forme $xy = k$, où k est un réel non nul. Réciproquement, toute courbe d'équation $xy = k$ dans un repère quelconque est une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.

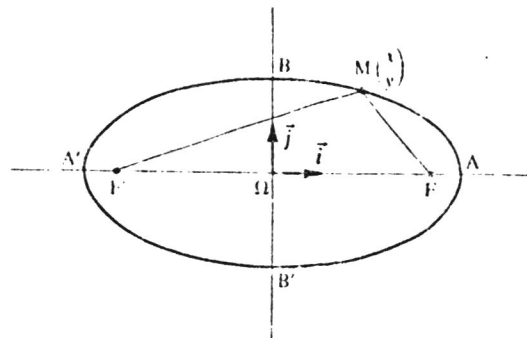


Fig. 22

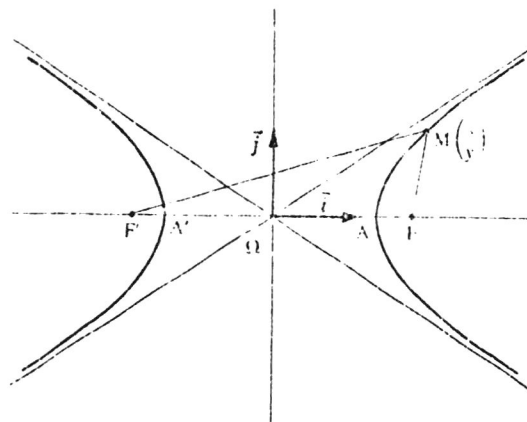


Fig. 23

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. - PARIS VII

- 1 - Bibliographie pour l'enseignement des mathématiques (Ed. 78)
- 2 - Mathématiques et autonomie/gestion (7/78)
- 3 - Nombre à l'école élémentaire (6/79)
- 4 - Groupe français-mathématiques (Ed. 79)
- 5 - Quelques réflexions sur la démonstration (11/79)
- 6 - Moirés (12/79)
- 7 - Pavages et coloriage (1/80)
- 8 - Autour du cube (2/80)

Autres publications :

- Bulletin-Afrique n° 21 - Maths et dessin (6/79)
- " " n° 22 - Spécial vectoriel (10/79)
- " " n° 23 - Raisonner (12/79)

- Informatique APMEP n° 3 - Spécial microprocesseurs (11/79)

Directeur-Responsable de la publication : André DELEDICQ

Tirage : 500 exemplaires - Dépôt légal -

IREM-PARIS VII - T 56 - 2 Place Jussieu - PARIS 5ème.
