

OCTOBRE 79

*Quelques Réflexions
sur la Démonstration*



par le "Groupe Premier Cycle"
de l'I.R.E.M. Paris-Sud

- S O M M A I R E -

- <u>La démonstration à travers les âges</u>	1
- <u>Nous, vous, la démonstration</u>	
. A travers deux manuels	6
. Démontrez-moi Pythagore	7
. Une démonstration formalisée est-elle le meilleur moyen de convaincre ?	11
- <u>Dis, pourquoi c'est difficile?</u>	
. Décidément, rien n'est simple	15
. Trouvez le non-dit	18
. Et les dessins....	19
- <u>Qu'est-ce que j'ai pu faire, j'ai pas quoi faire</u>	
. Une question d'actualité	22
. Doit-on démontrer des évidences ?	23
. Le meilleur moyen de convaincre	26
. Conjecture	27
. Les belles démonstrations	30
. Réfléchir à une progression	31
. Que fait-on en classe de math?	34
- <u>Et, à propos, les définitions</u>	
. Quelques exemples	36
. La place des définitions dans l'enseignement	38
- <u>Le coin des collectionneurs</u>	
. Soyons sérieux; quelques procédés de démonstration	43
. Rions un peu	52
- Matériaux pour une bibliographie	58

Exemple de démonstration formelle:

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $u^0 \rightarrow (v^0 \rightarrow u^0)$ | axiome 1 |
| 2. $u^0 \rightarrow (u^0 \rightarrow u^0)$ | (u^0/v^0) 1 |
| 3. $(u^0 \rightarrow (u^0 \rightarrow v^0)) \rightarrow (u^0 \rightarrow v^0)$ | axiome 2 |
| 4. $(u^0 \rightarrow (u^0 \rightarrow u^0)) \rightarrow (u^0 \rightarrow u^0)$ | (u^0/v^0) 3 |
| 5. $u^0 \rightarrow u^0$ | modus ponens (2, 4) |
| 6. $(u^0 \leftrightarrow v^0) \rightarrow (v^0 \rightarrow u^0)$ | axiome 5 |
| 7. $(w^0 \leftrightarrow v^0) \rightarrow (v^0 \rightarrow w^0)$ | (w^0/u^0) 6 |
| 8. $(w^0 \leftrightarrow s^0) \rightarrow (s^0 \rightarrow w^0)$ | (s^0/v^0) 7 $s^0 \neq w^0$ |
| 9. $(u^0 \vee v^0 \leftrightarrow s^0) \rightarrow (s^0 \rightarrow u^0 \vee v^0)$ | $(u^0 \vee v^0/w^0)$ 8 |
| 10. $(u^0 \vee v^0 \leftrightarrow (\neg u^0 \rightarrow v^0)) \rightarrow ((\neg u^0 \rightarrow v^0) \rightarrow u^0 \vee v^0)$ | $(\neg u^0 \rightarrow v^0/s^0)$ 9 |
| 11. $u^0 \vee v^0 \leftrightarrow (\neg u^0 \rightarrow v^0)$ | axiome 8 |
| 12. $(\neg u^0 \rightarrow v^0) \rightarrow u^0 \vee v^0$ | modus ponens (10, 11) |
| 13. $(\neg u^0 \rightarrow \neg u^0) \rightarrow u^0 \vee \neg u^0$ | $(\neg u^0/v^0)$ 12 |
| 14. $\neg u^0 \rightarrow \neg u^0$ | $(\neg u^0/u^0)$ 5 |
| 15. $u^0 \vee \neg u^0$ | modus ponens (13, 14) |

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμητῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίσω, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσια ἐσὶ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξύ τῶν τομῶν τετραγώνου (Si une droite est divisée en parties égales et en parties inégales, la somme des carrés des segments inégaux de la droite entière est égale à la double somme du carré de la moitié de cette droite et du carré du segment compris entre les sections).

Soit une droite AB, coupée en C et D, de telle sorte que $AC = BC$ et $AD \neq BD$ (fig. 4). Il s'agit de prouver que

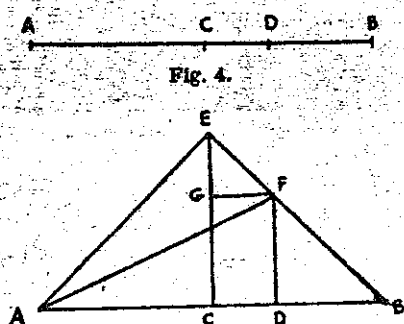


Fig. 5.

$$AD^2 + BD^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$$

Élevons sur AB, du point C, la perpendiculaire CE, égale à AC; joignons AE et BE; élevons du point D une autre perpendiculaire à AB jusqu'à sa rencontre avec BE, en F. Traçons le droite AF; menons enfin FG, parallèle à AB (fig. 5).

Le triangle ACE est rectangle et isocèle par construction, donc $\widehat{EAC} = \widehat{AEC} = 1$ demi-droit. Le triangle ECB est égal au triangle

ACE. Les triangles EGF et BDF, semblables au triangle ECB, sont, comme lui, rectangles et isocèles.

Donc $EG = FG$ et $DF = BD$

Or $AC^2 = CE^2$

$$AC^2 + CE^2 = 2 AC^2$$

$AE^2 = AC^2 + CE^2 = 2 AC^2$ (théorème de Pythagore, Eucl., I, 47).

D'autre part, en vertu du même théorème, $EF^2 = 2 FG^2 = 2 CD^2$.

Donc $AE^2 + EF^2 = 2 AC^2 + 2 CD^2$.

Mais AF étant à la fois l'hypoténuse du triangle AEF, rectangle en E, et du triangle ADF, rectangle en D, on a

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 = 2 AC^2 + 2 CD^2$$

et $AF^2 = AD^2 + DF^2$

Mais nous savons que $DF = BD$

Donc $AF^2 = AD^2 + BD^2$,

et $AD^2 + BD^2 = 2 AC^2 + 2 CD^2$, c. q. f. d.

Telle est, en substance, la démonstration d'Euclide.

On a assisté ces dernières années à un développement du formalisme dans l'enseignement des mathématiques que l'on peut rapprocher d'un pareil développement au sein des mathématiques elles-mêmes - Développement qui se fait à partir du 19ème siècle.

POURQUOI CETTE (R-)EVOLUTION ?

Un peu d'histoire

Au 19ème siècle on assiste à une remise en cause de la présentation de la géométrie classique (sous la forme donnée par Euclide) qui était considérée jusque là comme un modèle insurpassable de théorie déductive. Les termes propres de la théorie n'y sont pas introduits sans être définis, les propositions n'y sont pas avancées sans être démontrées sauf un petit nombre d'entre elles, les postulats qui sont énoncés à titre de principe mais qu'on a pris soin de choisir de façon à satisfaire n'importe quel "esprit sain".

Ce qui a d'abord gêné c'est le fameux "postulat d'Euclide" - par un point extérieur à une droite il passe une seule parallèle à cette droite - beaucoup essayèrent de le démontrer mais l'analyse de ces démonstrations montrait qu'elles s'appuyaient sur d'autres propositions non explicitées et non démontrées; on n'avait fait que changer de postulat.

Toutes ces vaines tentatives finirent par donner l'idée que le "postulat d'Euclide" devait être indépendant des autres. On vit alors la création de systèmes différents où gardant les "autres" on postule selon les cas que par un point extérieur à une droite il passe une infinité de parallèles (LOBATCHESKY) ou bien - qu'il n'en passe aucune (RIEMANN). Or ces systèmes de propositions que l'expérience sensible ne permettait pas de confirmer se sont révélés cohérents au niveau logique.

L'apparition de ces nouvelles géométries a eu un double effet :

- d'une part, ce qui a été fait pour "le postulat d'Euclide" devrait naturellement s'étendre à l'ensemble des postulats.

- d'autre part et plus important encore, la notion de vérité en mathématiques s'est trouvée fortement déplacée : c'est là que l'on peut parler de révolution.

Jusqu'alors un théorème de géométrie était à la fois une loi physique et un élément d'un système logique. L'expérience était là pour corroborer la démonstration. Avec ces nouvelles géométries seule prévaut la cohérence logique d'un système de propositions, le but d'une démonstration n'est plus d'affirmer qu'un énoncé est vrai dans l'absolu mais de montrer qu'il découle logiquement d'un certain nombre de principes arbitraires, on ne peut plus parler que de "vérité-dans-une-théorie".

Examinons alors comment se développe une théorie déductive.

. De même que, ne pouvant pas remonter indéfiniment dans l'enchaînement des propositions, on est bien obligé d'en fixer quelques-unes non démontrées, de même un terme étant défini par d'autres, ceux-ci à leur tour par d'autres il faut bien là encore s'arrêter à quelques termes non définis. Donc il apparaît que lorsqu'on "axiomatise" une théorie, on doit faire figurer au départ un certain nombre de propositions non démontrées (- appelées axiomes ou postulats -) et des termes non définis (souvent appelés termes premiers); la théorie se développe alors en construisant des termes nouveaux fixés par les définitions et des propositions nouvelles justifiées par des démonstrations.

. Mais il faut alors savoir ce que seront les bonnes définitions, les bonnes démonstrations

Sans vouloir faire un long discours sur tous les problèmes liés à l'axiomatisation des théories mathématiques, nous allons regarder dans quelle voie engage la volonté de donner un sens au mot "bonne".

Lorsqu'on met une théorie sous forme axiomatique on cherche à la dégager des significations concrètes et intuitives sur lesquelles elle s'est d'abord construite, afin d'en faire apparaître le schéma logique. Ainsi s'est fait sentir le besoin de substituer aux mots qui désignaient les termes premiers, trop lourds de leur signification intuitive, des symboles dénués de sens préalable. La logique classique ayant été elle-même engagée dans la voix du symbolisme les propositions premières d'une théorie énonçant des relations entre les termes premiers pouvant donc être écrits en langage symbolique, il en va de même pour toutes les définitions et démonstrations qui suivent. Pour autant, tout n'était pas gagné. La discussion pouvait encore se faire sur les principes mêmes de la déduction logique,

telle démonstration jugée bonne par certains est sans force pour d'autres. Pour retrouver un terrain d'entente il reste un moyen : faire maintenant pour les règles de logique selon lesquelles on raisonne, ce qu'on avait fait précédemment pour les postulats. Et, en effet, on assiste au début de ce siècle à l'apparition de théories logiques axiomatisées.

Ce qui fait que depuis lors une théorie axiomatique formalisée se présente comme un ensemble de signes, assorti de règles, les unes des règles de structure concernant la formation des expressions (en particulier règles de définition) les autres des règles de déduction (utilisées pour les démonstrations), On ne s'occupera plus que de la structure formelle des expressions, une démonstration ne s'occupera plus que de transformer une ou plusieurs formules par étapes successives en mentionnant pour chacune de ces transformations élémentaires le numéro de la règle utilisée sans faire appel à notre sentiment spontané de l'évidence de certains enchaînements logiques.

Faisons la part des choses

Pourtant il ne faudrait pas croire que même à notre époque, dans les mathématiques qui se font, démonstrations et définitions répondent à ces canons idéals. Même les ouvrages de N. BOURBAKI qui tentent d'exposer d'une manière axiomatique l'ensemble des théories mathématiques ne sont pas des pages couvertes de symboles.

En fait, la démonstration hésite entre une fonction psychologique - convaincre l'auditoire - et une fonction logique - organiser les propositions en système -; la définition vise de même, d'une part à délimiter la compréhension d'une idée, d'autre part, à établir (un lien) logique entre un terme nouveau et un ensemble de termes antérieurs.

L'histoire des mathématiques, comme l'histoire de l'enseignement des mathématiques, nous apporte de nombreux exemples de ce flottement entre deux pôles : convaincre d'une idée $\leftrightarrow$ vérifier un déroulement formel. En voici d'ailleurs deux illustrations :

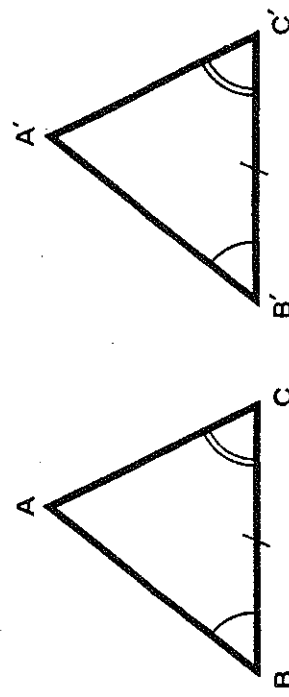
- On raconte l'anecdote de ce précepteur princier finissant par faire admettre un théorème à son élève en s'écriant "Monsieur, je vous en donne ma parole d'honneur" ou bien de ce professeur affirmant devant tel énoncé "on en est moralement sûr !"

- Plus récemment on connaît, à l'inverse, le rôle néfaste qu'ont pu avoir certaines démonstrations du début du programme de géométrie après la réforme de 1970. Quel sens peut bien avoir, pour un élève de 4ème, la démonstration de ce qu'un plan a au moins trois points?

Mieux même, si l'on s'intéresse à l'histoire des mathématiques on découvre que beaucoup de démonstrations qui se sont révélées insuffisantes voire même fausses, ont été longtemps convaincantes. On a même souvent accepté comme vraies des propositions n'ayant jamais fait l'objet d'une démonstration.

Finalement, la tradition, les modes qui la font évoluer peuvent permettre à chacun de se débrouiller pour fixer un intervalle de tolérance à un moment donné, dans son milieu de travail.

A TRAVERS DEUX MANUELS, de 1957 à 1972.

Monge 4ème p. 149 : Premier cas d'égalité des triangles quelconques Programme 1957	à partir de QUEYSANNE-REVUZ 3ème: Enoncé de la perpendiculaire Programme 1972
1. Premier cas : Deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux sont égaux. Hypothèse $\left\{ \begin{array}{l} B'C' = BC \\ \hat{B}' = \hat{B} \\ \hat{C}' = \hat{C} \end{array} \right.$ Conclusion $\overline{tr.A'B'C'} = \overline{tr.ACB}.$  FIG. 1. Portons le calque du triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC de manière à faire coïncider le côté $B'C'$ avec son égal BC; B' en B, C' en C (fig. 1); les points A et A' sont d'un même côté par rapport à la droite BC. Par hypothèse $\hat{B}' = \hat{B}$, donc la demi-droite $B'A'$ s'applique sur la demi-droite BA. De même $\hat{C}' = \hat{C}$, donc la demi-droite $C'A'$ s'applique sur la demi-droite CA. Le point A' doit se trouver à la fois sur BA et sur CA; il coïncide avec le point A. Les deux triangles sont superposables, donc égaux.	Voici le schéma de la démarche suivie pour - dans le cadre de l'axiomatique alors uniformément en vigueur - démontrer que par un point donné passe une unique perpendiculaire à une droite donnée Les 3 axiomes d'incidence dont EUCLIDE Le parallélisme est une relation d'équivalence : classe=direction Un point et une direction étant donnés, il existe une seule droite de la direction passant par le point axiomes de l'orthogonalité il existe une application ω de l'ensemble des directions dans lui-même qui soit : - involutive - $\forall \delta \in E, \omega(\delta) \neq \delta$ être l'image de par ω "se dit être orthogonale à" Une direction étant donnée, il existe une unique direction qui lui soit orthogonale Un point et une droite étant donnés il existe une unique perpendiculaire à la droite passant par le point

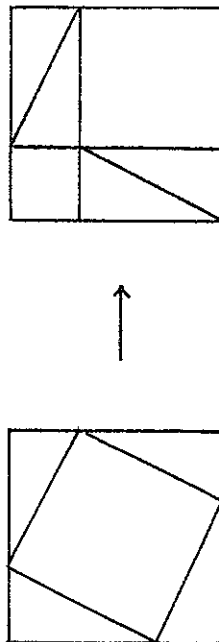
Quelques questions à se poser :

- Une formalisation complète, des fondements sans bavures, facilite-t-elle l'activité de démonstration comme certains ont pu l'espérer à une certaine époque?
- Le discours sur les cas d'égalité est-il convaincant? Est-ce une démonstration?

Pour un élève de 3ème en 1980 (pédago-fiction)

axiome : ABC étant 3 points du plan, si $(AB) \perp (AC)$ alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Ce résultat n'est pas démontré, ce qui ne dispense pas de convaincre l'interlocuteur de sa vérité !
par exemple en utilisant l'un des découpages classiques :



Pour des parlementaires américains de 1876 (démonstration du président Garfield, seule contribution aux mathématiques d'un président des USA)

(d'après M. Gardner - Jeux du scientifique American)

présupposés :
 . cas d'égalités des triangles rectangles
 . aire du trapèze - du triangle rectangle
 . un peu d'algèbre

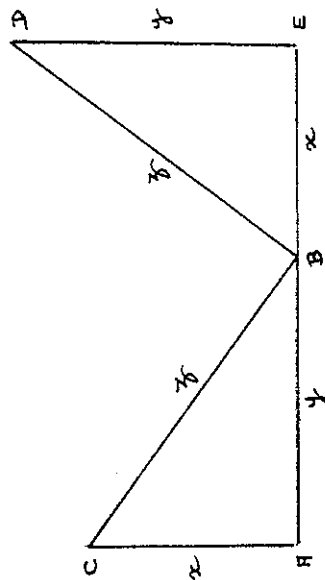
ABC est un triangle rectangle
 D est défini par BCD rectangle isocèle
 E projeté orthogonal de D sur (AB)

Cas d' "égalité" : les triangles ABC et EDB sont "égaux" d'où $AC = BE$ et $AB = ED$

On pose

$$AC = x \quad AB = y \quad BC = z$$

$$\text{Aire du trapèze ACDE} = \frac{(x + y) \times (x + y)}{2} = \frac{z^2 + 2xy}{2} \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = z^2$$



Remarque : Gardner quand il fait de la "vulgarisation mathématique" ne donne pas une démonstration mais beaucoup de démonstrations correspondant à divers pré-supposés, qu'il n'explicité d'ailleurs pas.

Pour un élève de lère dans les années 1978

Présupposés : La notion d'espace vectoriel et de produit scalaire.

$$\text{notation : } \vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

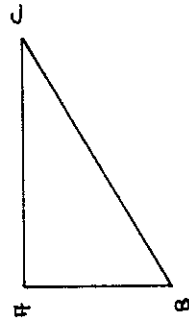
un rapide calcul

$$(\vec{v} - \vec{v}') \cdot (\vec{v} - \vec{v}') = \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v}' + \vec{v}' \cdot \vec{v}'$$

$$\text{d'où } \|\vec{v} - \vec{v}'\|^2 = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{v}' + \|\vec{v}'\|^2$$

$$\text{et donc } \vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \|\vec{v} - \vec{v}'\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}'\|^2$$

rhabillons pythagore (ce qui n'est pas toujours fait pour l'élève de lère) en revenant dans le plan affine



$$(AB) \perp (AC) \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2$$

$$\|BC\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Pour qui veut :

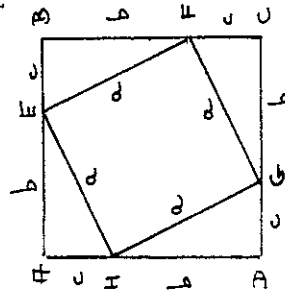
présupposés : des énoncés concernant les angles : - les angles d'un carré sont droits

+ - les angles d'un triangle rectangle sont complémentaires

- 2 triangles dont les côtés ont même mesure 2 à 2, ont des angles de même mesure 2 à 2

- si $\widehat{BAC} = 180^\circ$, BAC sont alignés

formules d'aires
+
un peu de calcul



EFCH carré de côté a

B, A, D, C : 3ème sommets du triangle rectangle donné par ces 2 mesures des côtés b et c, à l'extérieur du carré.

Les énoncés sur les angles permettent de démontrer que AEB (resp. BFC, GCD, DHA) sont alignés et que ABCD est un carré

$$\text{alors } (b+c)^2 = a^2 + 4 \frac{b-c}{2} \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = a^2$$

↑
aire du carré des
gd carré pt carré pts triangles

10

QUELQUES QUESTIONS A SE POSER ?

Quelle est la démonstration la plus convaincante?

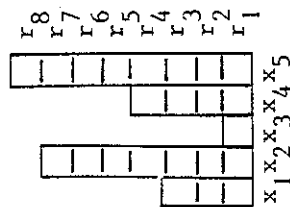
- les démonstrations 1 et 2 sont-elles si différentes qu'il y paraît?
- quels critères doivent intervenir dans le choix de telle ou telle démonstration. Doit-on uniquement se préoccuper des présupposés? le seul souci doit-il être d'intégrer harmonieusement le nouveau théorème dans la théorie?

Une démonstration formalisée est-elle le meilleur moyen de convaincre?

$x_1, x_2, \dots, x_n$ est une suite de naturels
 $r_1, r_2, \dots, r_{x_n}$ est la suite ainsi définie:
 r_i est le nombre de x_j supérieurs ou égaux à i
 Un résultat surprenant : $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{x_n} r_i$

Exemple	
$x_1 = 3$ $x_2 = 7$ $x_3 = 1$ $x_4 = 4$ $x_5 = 8$	$\xrightarrow{\quad}$ $\sum_{i=1}^5 x_i = 23$
$r_1 = 5$ $r_2 = 4$ $r_3 = 4$ $r_4 = 3$ $r_5 = 2$ $r_6 = 2$ $r_7 = 2$ $r_8 = 1$	$\xrightarrow{\quad}$ $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = 23$

Ça surprend mais ça peut se comprendre si on dessine:



et voici la démonstration formalisée :

On peut supposer que $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ (on peut toujours les renuméroter).

$$\left. \begin{matrix} r_1 = n \\ \vdots \\ r_{x_1} = n \end{matrix} \right\} x_1 \text{ lignes}$$

$$\left. \begin{matrix} r_{x_1} + 1 = n - 1 \\ \vdots \\ r_{x_2} = n - 1 \end{matrix} \right\} (x_2 - x_1) \text{ lignes}$$

$$\left. \begin{matrix} r_{x_{i-1}} + 1 = n - i \\ \vdots \\ r_{x_{i+1}} = n - i \end{matrix} \right\} (x_{i+1} - x_i) \text{ lignes}$$

$$\left. \begin{matrix} r_{x_{n-1}} + 1 = 1 \\ \vdots \\ r_{x_n} = 1 \end{matrix} \right\} (x_n - x_{n-1}) \text{ lignes}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= r_{x_1} + (n-1)(x_2 - x_1) + \dots + (n-i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_1 [n - (n-1)] + \dots + x_i [n-i + 1 - (n-i)] + \dots + x_{n-1} (2-1) + x_n \cdot 1 \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \end{aligned}$$

Qu'en pensez-vous?

On a vu que, sans pouvoir définir le mot démonstration d'une façon précise, on pouvait attribuer ce label à une activité qui se situe quelque part entre 2 périodes extrêmes.

un discours dont le but est de convaincre celui à qui il s'adresse

←-----→

une démonstration formelle à l'intérieur d'une théorie mathématique où termes primitifs, axiomes et règles de logique ont été préalablement exprimés

Les deux extrêmes eux-mêmes sont flous : à gauche, c'est extrêmement vague

à droite, bien que tout le monde semble ici à peu près d'accord,

on peut s'interroger sur l'existence d'une telle démonstration et sur où

nous entraîne un tel souci de rigueur [il y a bien quelque part, au début, du méta-mathématique]

De toutes façons, en particulier dans l'enseignement secondaire, on se situe quotidiennement entre les deux. Il faut bien réaliser que :

— 1 — Vu le flou artistique qui entoure la question, ça ne sert pas à grand chose de se demander entre gens qui savent un peu de maths, si tel ou tel discours peu être baptisé démonstration. C'est une question de mot, et ça n'est guère intéressant.

Malheureusement au niveau de sa pratique, le professeur de maths est amené quotidiennement à discerner dans le discours de l'élève ce qui est ou n'est pas une démonstration, et à l'aider à discerner lui-même.

— 2 — La réponse à cette question (tel discours est-il une démonstration?) est fluctuante : il n'y a pas de critères précis exprimables pour 2 raisons au moins :

- la première liée à la démarche démonstrative elle-même :

on en peut pas exclure complètement le "non-dit" d'une démonstration, il faudrait donc pouvoir déterminer un seuil à partir duquel trop de non-dit fait qu'on n'a plus une démonstration; et ça semble impossible.

- la seconde liée au public :

L'acquiescement de l'interlocuteur dépend de l'interlocuteur lui-même, tel argument peut être jugé "démonstration" à un moment donné et ne plus l'être un peu plus tard - Souvent d'ailleurs parce qu'un argument reste convaincant tant qu'on n'a pas trouvé mieux, ou cesse de l'être à partir du moment où on s'est aperçu qu'il ne l'était pas (!)

- la troisième liée à celui qui a le pouvoir:

Tout dépend des objectifs que se donne l'orateur en fonction du niveau de son public.

- 3 Que le consensus se fait cependant plus facilement qu'il n'y paraît - au moins au niveau local, c'est-à-dire entre individus ayant à un moment donné des préoccupations communes (par exemple un groupe de professeurs du 1er cycle - ou un professeur et ses élèves)
- 4 Que la réponse à ce type de question est avant tout affaire d'histoire et de tradition. Notre rôle consiste à transmettre cette tradition sur laquelle se fait l'accord - il faudra bien que l'élève s'y fasse.
- 5 Cela ne nous dispense pas de nous rendre compte qu'il peut avoir du mal à s'y faire. Voir la question qui revient souvent dans le 2nd cycle : "Qu'est-ce que je peux utiliser, est-ce que je dois démontrer ça ou est-ce que ce que j'ai dit suffit etc..." De telles questions naissent nécessairement du statut flou de la démonstration, dans la phase d' "habitation". Tout au plus peut-on essayer de ne pas les susciter en évitant de poser des questions qui débouchent sur ce type de problème.

DIS, POURQUOI C'EST DIFFICILE

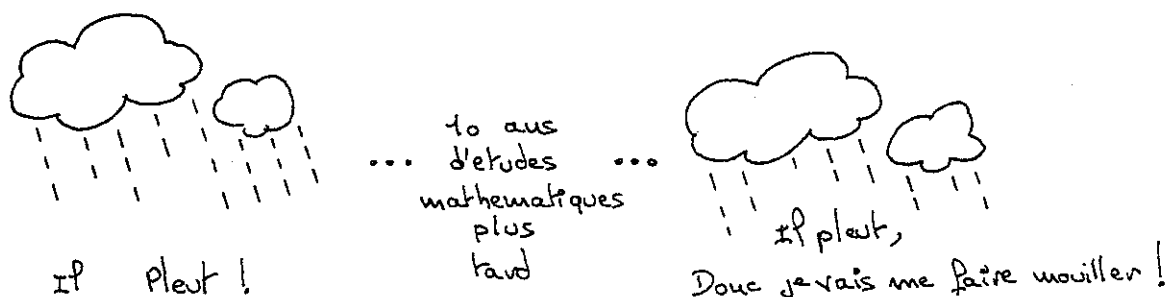
Décidément rien n'est simple

Ne sachant pas ce que c'est de démontrer on peut toujours se demander pourquoi c'est difficile!

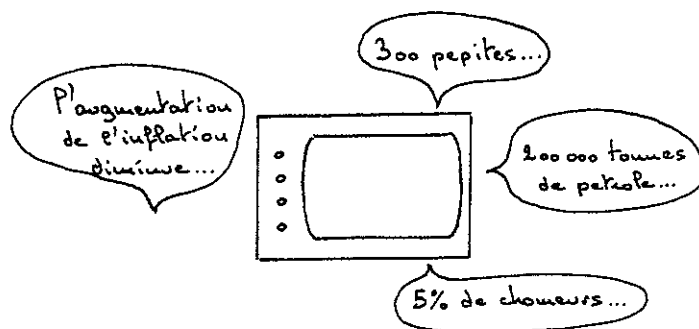
. Il n'est pas facile de démontrer il n'est pas non plus facile d'apprendre aux enfants à démontrer

. Si, avoir une conscience claire d'un problème est un premier élément permettant d'avancer vers sa solution, il n'est peut être pas inutile de rappeler quelques-unes des raisons de ces difficultés (la liste reste ouverte, le lecteur est invité à la compléter en fonction de ses expériences personnelles)

- dans le plus classique des exercices de démonstration il s'agit, à partir d'un certain nombre d'informations d'en déduire d'autres.



Il ne semble pas que le fait de pouvoir utiliser l'information soit une idée naturelle chez tous les enfants. Un message peut parfaitement être ressenti comme sans conséquences : chez le très jeune enfant, une information du type "nous partons dans 1/2 heure" ne saurait avoir comme suite que l'enfant de lui-même soit prêt à l'heure dite, car il est incapable d'imaginer ce qui implique la condition donnée. En outre l'enfant reçoit au cours de son éducation bon nombre d'informations qu'on ne lui demande pas d'utiliser mais de retenir (en vue peut être d'une utilisation ultérieure mais ceci n'est pas toujours saisi, voire même explicité)



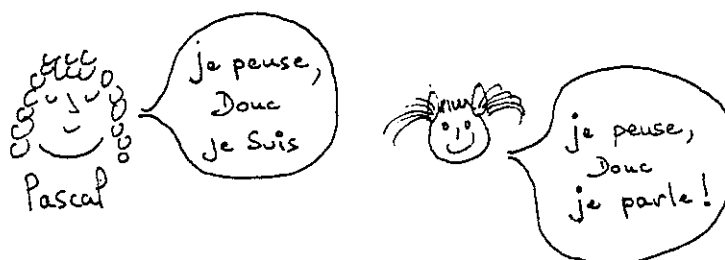
On ne peut, bien sûr, pas dire quand l'idée d'utiliser l'information se fera jour, ni quand elle sera suffisamment ancrée pour pouvoir être réinvestie dans des activités mathématiques.

- Pourquoi ne veux-tu pas aller au lit?
 - Parce que
 - Parce que quoi ?
 - Parce que je veux pas
- peu à peu l'argumentation s'affinera..

- on peut de plus noter que les règles logiques de la déduction que l'on utilise en mathématique ne sont pas le propre de cette science - elles sont en fait transmises, au moins en partie, avec le langage. Quand un enfant tente de convaincre en argumentant, sa démarche est tout à fait similaire à celle d'un raisonnement mathématique

exemple de première argumentation
explicitée chez un enfant de 2 ans
Je veux emporter ce livre.....
... tu en as un à la maison qui est
beaucoup plus beau
(longue, longue réflexion de l'enfant)
oui mais j'en ai pas deux

Réciproquement, (bien entendu) la capacité de construire des raisonnements mathématiques, l'aidera peut être à mieux structurer sa pensée et son langage qui en est l'expression. Il en résulte, par exemple, qu'un blocage à ce niveau (élève incapable de construire un raisonnement) peut ne pas relever simplement d'une difficulté en mathématiques, et qu'une coordination, Maths-Français entre autres, donnerait peut-être de meilleurs chances de réussite.



- par ailleurs la transmission de l'information elle-même pose des problèmes -
Le message reçu est souvent déformé par rapport au message émis et ce pour des causes très diverses parmi lesquelles :

- incompréhension du vocabulaire (mots inconnus, problème de "traduction"
- incompréhension de la signification du message

Vois-tu, il n'y a jamais que la transcendence subconstentielle qui soit susceptible de réconcilier la problématique Kantienne avec l'instinct de mort de Nietzsche"

A ce sujet de nombreux exercices de lecture et d'interprétation de textes, mathématiques ou non, (là encore la coordination entre matières peut s'avérer utile) la description de figures, d'objets, de situations, la recherche de définitions sont autant d'activités utiles.

Dans une expérience "maths-français" l'exercice consistait à démêler la cause et la conséquence dans des phrases comme :

"Sans travail supplémentaire, Y vous permet d'avoir à la fois des sols propres et brillants. Tout simplement parce que Y contient des détergents pour laver et des cires pour faire briller"

"Le produit de 2 nombres est nul si l'un des deux est nul"

" Elle lave mieux que vous, rince mieux que vous, sèche mieux que vous : elle mérite votre confiance"

Beaucoup d'élèves font des confusions.

"Outre les problèmes dus au vocabulaire lui-même une constatation générale est que les enfants ont tendance à "gommer" à la lecture certains mots; et les mots ainsi éliminés sont très souvent les "petits mots" (c'est-à-dire les mots grammaticaux) qui donnent leur sens aux divers constituants de la phrase. Cependant, pour que le texte, lui, ait un sens les mots ainsi "gommés" sont, en général, remplacés par d'autres. C'est ainsi que "des éléments de A" pourront être lu "les éléments de A ".

Démontrer,

C'est difficile aussi parce que l'on ne dit pas tout et que l'on ne peut tout dire.

En particulier, en géométrie, cela apparaît bien

- Dans le rôle fréquent du non-dit
- Dans la place de dessin

Trouvez le non-dit

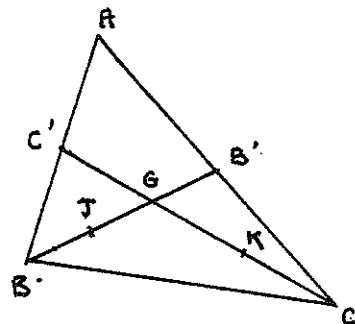
Concurrence des médianes d'un triangle d'après IREM de Strasbourg 4ème (1979).

présupposés : le quadrilatère formé avec les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.

On étudie la position du point d'intersection de deux des médianes :

ABC est un triangle

Ses médianes (BB') et (CC') se coupent en un point G



L'astuce consiste à introduire J et K milieux de [GB] et [GC].

Le quadrilatère B'C'JK, formé avec les milieux des côtés du quadrilatère ABGC est un parallélogramme de centre G

D'où les égalités : $GC' = GK = KC$ et donc $GC = 2 GC'$
 $GB' = GJ = BJ$ $GB = 2GB'$

Conclusion : Le point où la médiane BB' est coupée par la médiane CC' est le point G du segment BB' tel que $GB = 2 GB'$

Une fois G positionné sur (BB') il reste à regarder le point de concours de (BB') et (AA') et à démontrer de même qu'il est situé au même endroit.

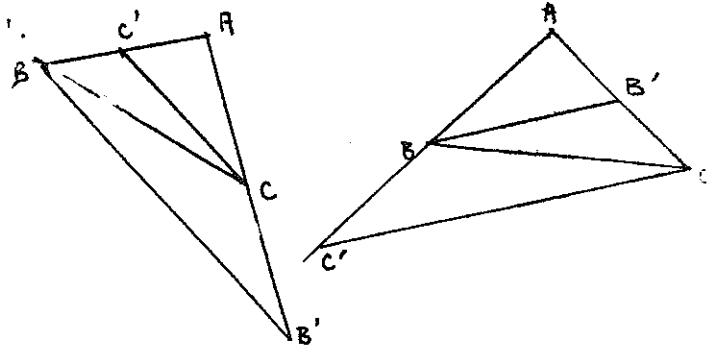
Question : Où est(sont) le(les) cas sous-entendu(s)? Que faudrait-il

dire pour l'expliciter ? Pourquoi est-ce que personne ne le fait jamais?

Aide : Si les droites (BB') et (CC') sont parallèles, alors B est le milieu de AC' ? ou bien c'est le milieu de AB' .

Ce qui est contradictoire avec C' milieu de AB ou avec B' milieu de AC

Mais tout n'est pas encore dit!



Et les dessins.....

A quoi servent les dessins en mathématiques? Peut-on s'en passer ?

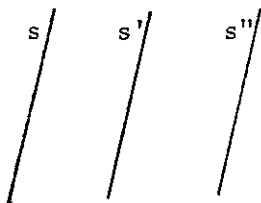
Les amoureux de la théorie axiomatique nous répondront que oui :

Une démonstration formelle n'a besoin d'aucun support visuel

Mais pour les élèves, les professeurs, les dessins ne sont-ils pas utiles, voire indispensables? Il est hors de question de faire un exercice de géométrie sans faire une figure : elle servira de guide au raisonnement - Il faut insister auprès des élèves sur la différence qu'il y a entre voir et démontrer; mais il faut aussi être conscient que "voir" c'est trouver ce qu'il faut démontrer et peut être comment le démontrer.

• Un dessin peut convaincre

Exemple La transitivité du parallélisme est évidente sur un dessin

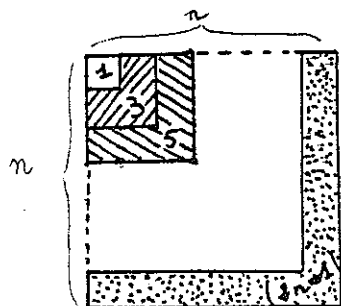


mais n'est pas évidente à démontrer
(voir procédés de démonstration)

Voir aussi le chapitre "Nous vous la démonstration" l'exemple du paragraphe "qui est-ce qui convainc le mieux?" ($\Sigma x_i = \Sigma y_j$)

• Un dessin peut aider à conjecturer

Ex 1 : Calculer $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ la somme des n premiers nombres impairs



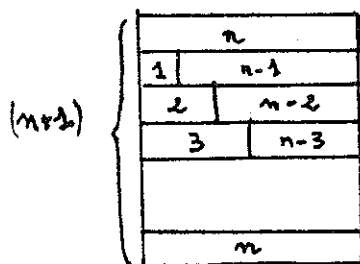
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

On devine que la somme

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Ex 2 Calculer $1 + 2 + \dots + n$



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Ce dessin suggère même une façon de démontrer que le calcul :

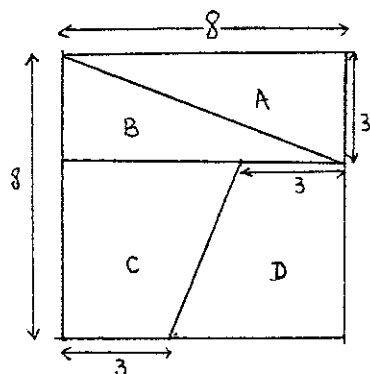
$$\begin{aligned} &1 + 2 + \dots + n \\ &+ n + n-1 + \dots + 1 \\ \hline &(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

• Un dessin peut être un contre exemple

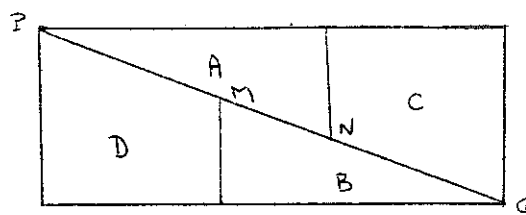
Ex : Si on affirme que l'orthocentre d'un triangle est situé à l'intérieur du triangle, exhiber un triangle ayant un angle obtus, donc ayant son orthocentre hors du triangle convaincre que cette affirmation est fausse. Il reste à le démontrer, mais le plus important n'est-il pas fait lorsque le dessin est réalisé.

• Mais il faut parfois se méfier des dessins

Ex 1



Si on découpe ce carré 8×8
selon les segments indiqués
on peut reconstituer un rectangle:



On aurait donc $8 \times 8 = 5 \times 13$ soit $64 = 65$

Ceci vient du fait que P, M, N, Q ne sont pas vraiment alignés.

Ex2 Où tous les triangles sont isocèles

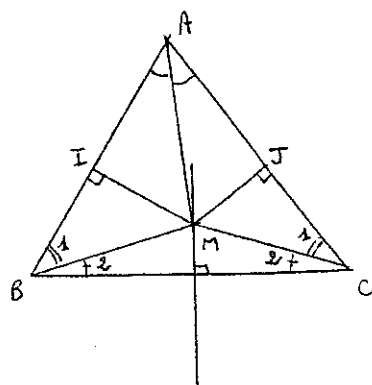


Figure 1

Soit un triangle (A, B, C)
Traçons la bissectrice de l'angle
A et la médiatrice de [B, C]

Plusieurs cas se présentent

- la bissectrice et la médiatrice sont parallèles (au sens large) alors dans le triangle ABC la bissectrice est aussi hauteur (et médiatrice donc elles sont confondues et le triangle est isocèle.

- la bissectrice et la médiatrice sont sécantes en M

- Si M est à l'intérieur du triangle (fig. 1)

$$MB = MC$$

$$MI = MJ$$

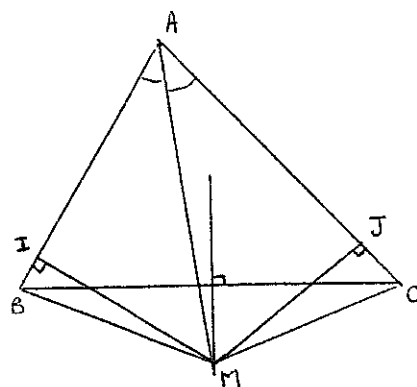
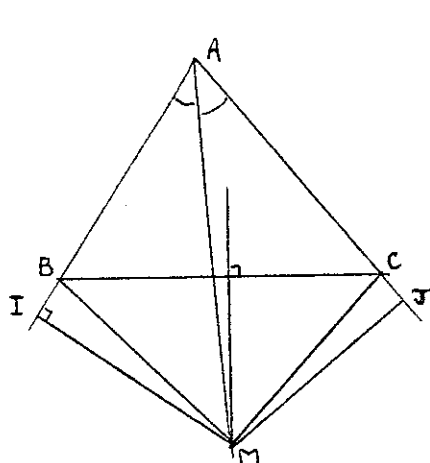
Donc les triangles rectangles IMB et JMC sont superposables

d'où l'égalité des angles B_1 et C_1

B_2 et C_2

donc B et C par addition

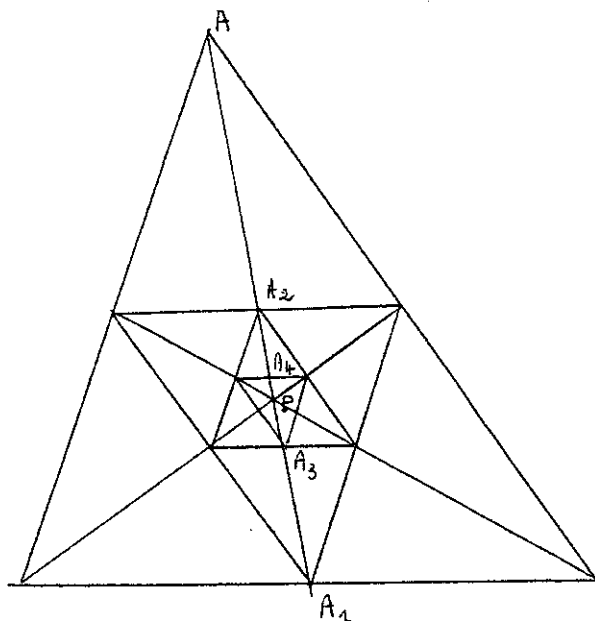
- Si M est à l'extérieur fig 2



Même raisonnement mais par soustraction.

- Si M est sur BC, la bissectrice passant par le milieu de BC
le triangle est isocèle

- Un dessin peut aider à voir ce qui se passe, même dans des situations inattendues



La suite $AA_1 = 1$

$$AA_2 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$AA_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

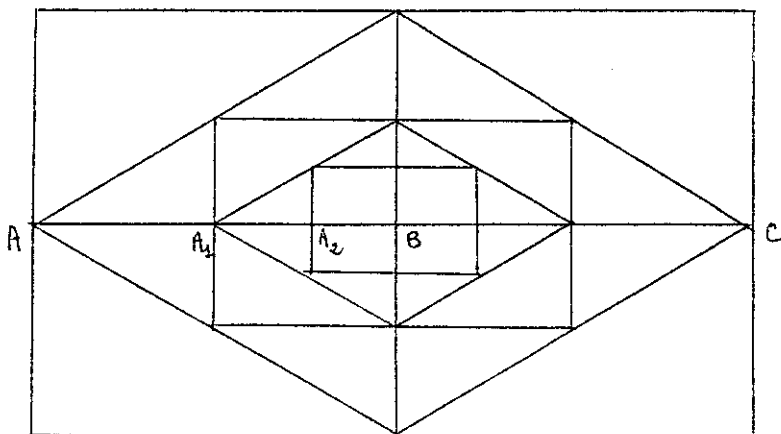
$$AA_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

tend vers AP

d'où $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}$
a pour limite $\frac{2}{3}$ quand $n \rightarrow +\infty$

On voit aussi que la suite AA_2, AA_4, AA_6, AA_8 tend vers AP

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ tend vers } \frac{2}{3} \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$



$$AC = 2$$

$$AA_1 = \frac{1}{2}$$

$$AA_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$AA_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots \text{ limite } AB = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \text{ tend vers } 1 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty$$

QU'EST-CE QUE J'PEUX FAIRE, J'SAIS PAS QUOI FAIRE ...

Une question d'actualité

1971 : L'objectif est clair. Montrer à l'élève ce qu'est un modèle mathématique. Dans ce cadre là, que faut-il démontrer ? Tout bien sûr, puisqu'on désire montrer une théorie complète.

1973 : Confrontés à la pratique, et faute de temps, les dérouleurs se permettent de sauter quelques étapes. C'est pour gagner du temps, mais si on veut, on peut tout démontrer, certains maillons sont cachés, mais ils existent.

1979 : Quelque chose a changé. On a la possibilité de ne plus dérouler une théorie. L'objectif précédent n'est plus mis au premier plan. Cela laisse la possibilité de choisir autant d'axiomes que l'on veut, et de ne se préoccuper du fait que tel énoncé est la conséquence de tel autre que si on le veut bien. Mais alors, ouh la la, il va falloir choisir ce que l'on démontre, et réfléchir à ce pourquoi on le démontre.

. Extrait du programme de 1971. A la fin de l'année scolaire, la géométrie née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique : c'est-à-dire, que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes).

Ne vaut-il pas mieux éviter de démontrer des "évidences" surtout quand la démonstration formelle, elle, n'a rien d'évident ?

Dans un 'ancien' livre de 4ème

présupposés : des axiomes d'incidence :

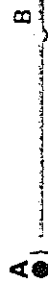
i_1 : il existe au moins une droite; une droite ~~est~~ non vide et distincte du plan tout entier.

i_2 : toute paire de points distincts est incluse dans une droite et une seule.

i_3 : Euclide

Comme première application de ces axiomes, puisque toute droite de $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide, toute droite contiendra au moins un point, cherchons à voir s'il existe des droites ne contenant qu'un point A.

Si $\{A\}$ est une droite, d'après i_1 il existe au moins un point B de Π distinct de A. A et B déterminent la droite (AB) qui d'après i_1 ne constitue pas tout le plan; il existe donc un point C du plan tel que $C \notin (AB)$ et d'après i_2 , il existe une droite Δ contenant C et disjointe de (AB). Mais alors par le point A passerait (fig. 7) deux droites distinctes toutes deux disjointes de Δ à savoir $\{A\}$ et (AB) ce qui est en contradiction avec l'axiome i_3 . Toute droite du plan contient donc au moins deux points distincts.



Ne pas oublier de remarquer en passant le raisonnement par l'absurde. (C'est la première démonstration du livre)

ou dans un livre de 6ème actuel

Par définition :

Deux droites d et d' d'un plan, disjointes ou égales, sont dites **parallèles**⁽¹⁰⁾. On note : $d \parallel d'$.

1.8 Démontrer que d et d' sont parallèles si et seulement si :
 $d = d'$ ou $d \cap d' = \emptyset$.

RELATION DANS L'ENSEMBLE DES DROITES D'UN PLAN

Soit E l'ensemble des droites d'un plan.

Dire qu'une droite d de E est parallèle à une droite d' de E , c'est définir une *relation* dans cet ensemble : la *relation de parallélisme*.

Cette relation possède les trois propriétés suivantes :

1 Quelle que soit la droite d de E :

$$d \parallel d.$$

2 Quelles que soient les droites d et d' de E

$$\text{si } d \parallel d' \text{ alors } d' \parallel d.$$

3 Quelles que soient les droites d, d', d'' de E :

$$\text{si } d \parallel d' \text{ et si } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''.$$

1.9 1° Pourquoi pouvez-vous dire que d est parallèle à elle-même ?

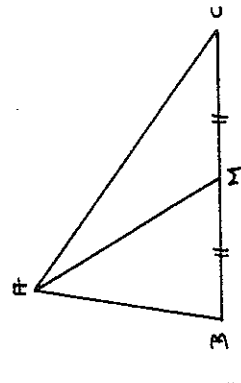
2° Justifiez la deuxième propriété.

3° Faites une figure qui illustre la troisième propriété.

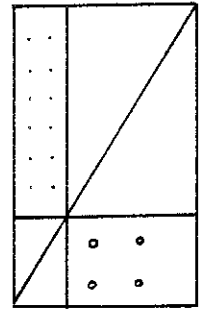
Questions : Quel sens peut ou veut prendre un tel discours, de telles questions, pour un élève de 4ème ou de 6ème ? Peut-il raisonnablement comprendre à quel jeu nous jouons ?

Et, en revanche, il est des cas où la démonstration est le meilleur moyen de convaincre de la vérité, ou de la non vérité d'un énoncé.

Questions d'aires

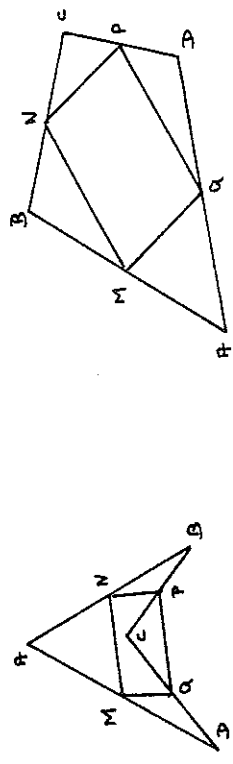


Les triangles AMB et AMC ont la même aire. Mais seule une démonstration peut convaincre.
(présupposé : formule de l'aire du triangle)



Les 2 rectangles colorés ont la même aire. Ici aussi la nécessité de démontrer est évidente. (présupposé : la diagonale d'un rectangle partage celui-ci en 2 triangles d'aires égales)

Milieu des côtés d'un quadrilatère



ABCD est un quadrilatère. M,N,P,Q sont les milieux des côtés. MNPQ est un parallélogramme. Le résultat est suffisamment surprenant, et il y a suffisamment de cas de figures pour que les dessins ne soient pas entièrement convaincants. (présupposé : l'énoncé des milieux)

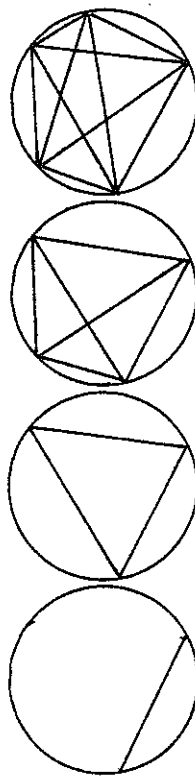
Pour que l'élève prenne en charge l'activité de démonstration, il faut qu'il conjecture.

A - La conjecture, une motivation à la démonstration

* Pour motiver, en premier cycle, ou ailleurs, la nécessité qu'il y a à faire des démonstrations, rien n'est plus efficace que de "piéger" l'élève en le mettant dans une situation où son intuition ou sa culture ne sont pas bonnes conseillères : voici quelques exemples :

exemple 1 :

On place n points sur un cercle et on joint chaque point à tous les autres. On s'interroge sur le nombre de régions ainsi délimitées.



2 points	3 points	4 points	5 points
2 régions	4 régions	8 régions	16 régions

Emettre une conjecture ! (...et peut-être la tester un peu plus loin).

exemple 2 :

Peut-on dire quelque chose d'intéressant à propos de l'image de la suite des naturels par le polynôme

$$n^2 - n + 41 \quad ?$$

exemple 3 :

Que peut-on dire d'intéressant sur la somme de 3 entiers consécutifs ? Peut-on proposer une généralisation de ce résultat ?

exemple 4 : ("chausse-trappe culturelle")

Soient 3 droites concourantes d, d', d''

Soient 3 droites concourantes e, e', e'' dont aucune n'est parallèle à d, d' ou d'' .

A, A', A'' (respectivement B, B', B'' ; respectivement C, C', C'') sont les points de concours de d (resp. d' ; resp. d'') avec e (resp. e' ; resp. e'')

Peut-on dire quelque chose d'intéressant à propos des rapports $\frac{AB}{AC}, \frac{A'B'}{A'C'}, \frac{A''B''}{A''C''}$?

exemple 5 : ("chausse-trappe culturelle")

Si A, B, C sont 3 points alignés et A', B', C' aussi tels que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Peut-on dire quelque chose d'intéressant à propos des droites $(AA'), (BB'), (CC')$?

* On peut remarquer que les exemples choisis sont de deux types :

- soit, on a affaire à un énoncé indicé qui n'est vrai que jusqu'à un certain rang. (exemples 1 et 2)
- soit, il s'agit d'énoncés apparaissant comme vrais
 - de par l'imprécision des mesures que l'on peut faire sur un dessin (exemple 3)
 - de par le fait que nos dessins se limitent, par habitude, à un cas particulier (exemple 4, où l'on fera souvent un dessin en "situation de Thalès")

* Mais il faut bien dire que de tels exemples ne fourmillent pas : l'intuition est généralement bonne conseillère, heureusement ...

B - Puisque la démonstration est nécessaire, il faut tenter d'en faire !

et donc trouver des conjectures (vraies) que les élèves aient les possibilités de démontrer. En voici quelques unes :

exemple 1 :

C est un cercle, et A un point quelconque.

Peut-on dire quelque chose d'intéressant à propos de l'ensemble des points I, milieux de AM quand M décrit le cercle C ?

(la démonstration requiert "l'énoncé des milieux", qui est, par ailleurs, riche du point de vue de l'enseignement de la démonstration.)

exemple 2 :

Si ABC est un triangle équilatéral et M un point intérieur à ce triangle;

Peut-on dire quelque chose d'intéressant à propos de la somme (MH + MI + MJ) où H, I, J sont les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ?
(celle-ci ne requiert que la connaissance de la formule qui donne l'aire du triangle)

C - Relativiser ...

Une autre propriété intéressante de certaines conjectures est de relativiser la toute puissance du savoir de l'enseignant.

L'élève gagnera à apprendre que la démonstration d'énoncés à l'apparence simple est inaccessible à son professeur. (et à quiconque pour l'instant, d'ailleurs)

exemple 1 :

tout nombre impair peut-il s'écrire comme somme de 2 nombres premiers ?

(la réponse est apparemment oui à partir de 5, c'est la "Conjecture de Goldbach")

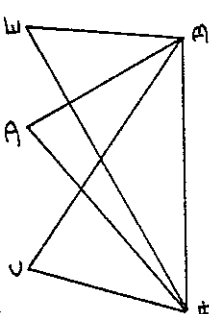
exemple 2 :

Si n est un naturel, peut-on trouver 3 naturels différents de 0 x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$?

(la réponse est (apparemment) non si $n > 3$;
c'est le "grand théorème de Fermat")

On peut dès la classe de 6^e-5^e présenter des démonstrations simples, qui prépareront la suite

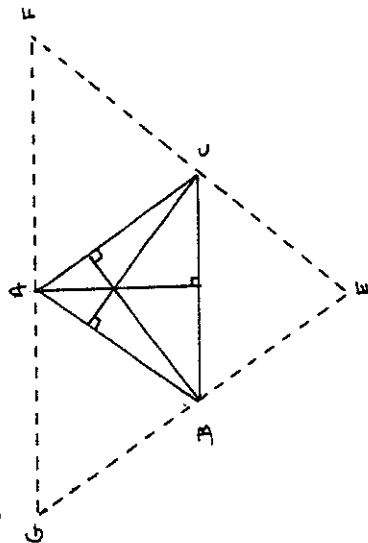
et on a tort de ne pas le faire.

ex. en arithmétique	ex. en algèbre	ex. en géométrie
La somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5. et généralisation éventuelle. Tout multiple de 10 est multiple de 5. et généralisation éventuelle etc.... Ce type d'exemple permet de montrer ce qu'est une démonstration et se prête bien à l'apprentissage car la démonstration "colle" à l'exemple numérique et permet une généralisation facile	démonstrations par contre-exemple : La soustraction dans D n'est pas commutative, associative, etc... Démontrer à l'aide des propriétés de l'addition dans D que : $a \in D, b \in D$ $a-b = a + oppb$ ce qu'il faut ajouter à b pour trouver a $a \in D, b \in D$ $a-b$ et $b-a$ sont des nombres opposés. Calcul littéral : démonstration d'identités. Démonstration par contre-exemples.	Certains énoncés simples peuvent facilement être utilisés pour de première démonstrations. ex : somme des angles d'un triangle + caractérisation angulaire pour démontrer qu'un triangle ABC tel que $A = 15^\circ, B=75^\circ$ est rectangle ou qu'un triangle ABC tel que $B = 100^\circ, C= 60^\circ$ est isocèle. ex : Si la médiatrice de AB est l'ensemble des points équidistants de A et de B, on peut faire la démonstration de la concurrence des médiatrices du triangle ex : Démonstration d'égalités d'aires en utilisant les formules démontrer que ABC, ABD, ABE ont la même aire
x multiple de 5 donc il existe un rationnel k $x = 5k$ $x + y = 5xk + 5xn$ $x + y = 5 \times (k+n)$ $x + y$ multiple de 5	y multiple de 5 donc il existe un rationnel n $y = 5n$ 35 est multiple de 5 car $35 = 7 \times 5$ 15 est multiple de 5 car $15 = 3 \times 5$ $35 + 15 = 5 \times 7 + 5 \times 3$ $35 + 15 = 5 \times (7+3) = 5 \times 10$ $35 + 15$ est multiple de 5	

On peut noter aussi que la pratique de jeux déductifs (Mastermind ou autres) va dans le même sens.

On peut aussi présenter une démonstration aux élèves, simplement parce qu'elle est belle, ou qu'elle fait appel à un "truc" qui peut servir ailleurs. Et l'enthousiasme est souvent contagieux...

Démonstration de la concurrence des hauteurs d'un triangle par "plongement" dans un triangle plus grand.



les hauteurs de ABC sont médiatrices de EFG

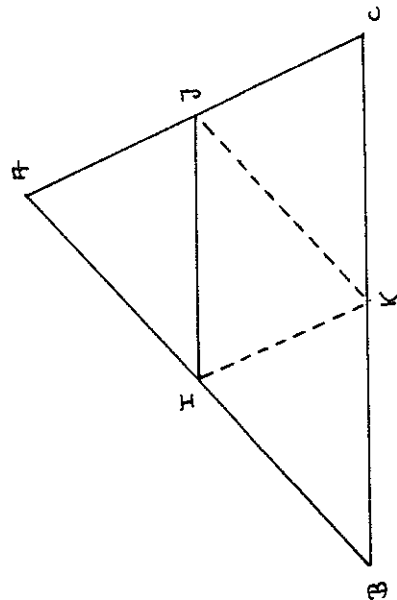
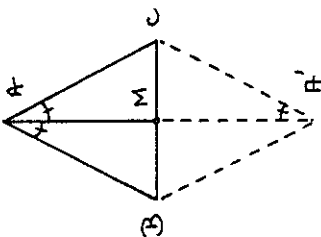
Démonstration du théorème : un triangle où une médiane est aussi bissectrice est isocèle

idée : rajouter $A' = s_M(A)$
 $\widehat{BAM} = \widehat{MA'C} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MA'C}$
 $\widehat{BAM} = \widehat{MAC} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MA'C}$
 $\Downarrow$
 $AC = A'C$

De même $AB = A'B$

De plus $AB = A'C$

D'où $AB = AC$



Connaissant l'énoncé "une droite joignant les milieux des côtés d'un triangle est parallèle à un côté", démontrer que $\overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{IJ}$.

On peut porter sur la figure le milieu K de BC et voir alors des parallélogrammes.

Calcul de la somme S des n premiers entiers :

astuce : on calcule non pas S mais $2xS$, et on regroupe :

$$2S = 1 + 2 + \dots + n \\ + n + (n-1) + \dots + 1 = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \\ = n \times (n+1).$$

Refléchir à une progression

La méthode d'apprentissage de la démonstration à peu près universellement en vigueur aujourd'hui, consiste à montrer à l'élève une ou plusieurs démonstrations et à lui demander de faire "pareil" (éducation par imitation; voir "psittacisme" dans le Petit Larousse).

Quoiqu'on puisse penser d'une telle méthode, l'honnêteté oblige à dire que personne ne voit très bien pour l'instant ce qu'on pourrait proposer d'autre.

Ceci étant, ce n'est pas prendre un grand risque que d'affirmer : les choses ne peuvent qu'aller mieux si on réfléchit aux premières démonstrations que l'on présente, si on prend soi-même conscience des difficultés propres qu'elles renferment (dûes par exemple à tel ou tel type de raisonnement), et si l'on choisit les démonstrations à 'montrer' en fonction de cela et non de leur place dans un exposé linéaire.

C'est avec de telles arrières pensées que nous avons relevé dans quelques manuels de 4ème (1979) les premières démonstrations présentées, tant en algèbre qu'en géométrie (nous avons regardé l'esprit plutôt que la lettre de chaque démonstration : la formulation ici reproduite n'est donc pas nécessairement exactement celle du manuel. Les ouvrages utilisés sont, par ordre alphabétique : Galion - IREM de Strasbourg - Mauguin - Monge - Thirioux : Rendez à César ...)

1ère démonstration en algèbre

Connaissant : les propriétés de l'addition dans $\mathbb{D}$, démonstration de :

Dans $\mathbb{D}$ si $x+y=z+y$ alors $x = z$

méthode : on ajoute $(-y)$ aux 2 membres après avoir formulé pour la circonstance le théorème préalable :

dans $\mathbb{D}$ si $x = y$ alors $x + z = y + z$

Connaissant les propriétés de l'addition dans $\mathbb{D}$ et la définition $a-b = a+oppb$, démonstration de :

Pour tout x de $\mathbb{D}$ } $-(x+y) = (-x)+(-y)$
 Pour tout y de $\mathbb{D}$ }

méthode : Calcul de $(x+y) + [(-x)+(-y)]$

Sans présupposés explicites (implicitement les programmes de 5è d'arithmétique)

démonstration de :

la somme de 3 naturels consécutifs est multiple de 3.

méthode : le calcul auquel on s'attend mais précédé : 1°) d'exemples

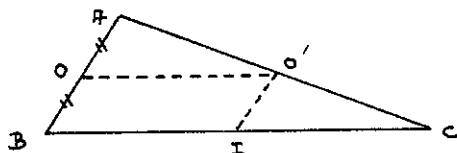
2°) d'un énoncé analogue

$(6n+1)$ est premier) qui peut sembler vrai sur certains exemples, mais dont on montre par un contre-exemple qu'il est faux.

Connaissant $\frac{mp}{mn} = \frac{p}{n}$ et 2 fractions de même dénominateur représentent le même rationnel si et seulement si elles ont le même numérateur, démonstration de :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

méthode : le calcul auquel on s'attend



1ère démonstration en géométrie

Connaissant : positions relatives de 2 droites et énoncé d'Euclide, démonstration de :

Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

méthode : Disjonction en deux cas dont l'un est impossible (A ou B et non $A \Rightarrow B$)

Démarche compliquée par le fait que "non A" est lui-même démontré par l'absurde

Connaissant : positions relatives de 2 droites et énoncé d'Euclide, démonstration de :

transitivité du parallélisme

méthode : disjonction en 2 cas, l'un et l'autre conduisant à la conclusion désirée.

Connaissant 1 les propriétés liant orthogonalité et parallélisme, démonstration de :

Si dans un quadrilatère 3 angles sont droits, alors le 4ème est droit aussi

méthode : 2 implications successives, Chacune étant une utilisation directe d'un énoncé des cours

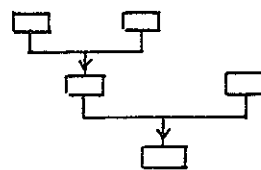


schéma du type

Connaissant : définition du parallélogramme par deux parallélismes + les côtés opposés ont même longueur + si 2 segments parallèles ont même longueur, leurs extrémités sont les sommets d'un parallélogramme, démonstration de :

Si par le milieu d'un côté d'un triangle on mène la parallèle à l'un des autres côtés, alors cette parallèle coupe le 3è côté du triangle en son milieu.

Méthode : on rajoute I, point d'intersection de BC avec la parallèle à AB passant par O'. OBIO' est un parallélogramme donc OAO'I est un parallélogramme aussi (considérations métriques), OO'CI aussi (idem) donc O' est bien le milieu de AC.

Connaissant : "soustraire, c'est ajouter l'opposé" et le fait que

$$\text{opp}(a+b) = \text{opp}a + \text{opp}b$$

démonstration de :

$$\text{opp}(a-b) = b - a$$

méthode : (in extenso)

$$\text{opp}(a-b) = \text{opp}(a+\text{opp}b) = \text{opp}a + \text{opp} \text{opp} b$$

$$\text{opp}(a-b) = \text{opp}a + b = b + \text{opp}a = b-a$$

(on utilise en passant un énoncé non explicité ailleurs : $\text{opp}(\text{opp}b) = b$).

Connaissant : position relative de 2 droites, et la définition : on dit que deux droites et sont parallèles si et seulement si elles sont confondues ou strictement parallèles.

Démonstration de :

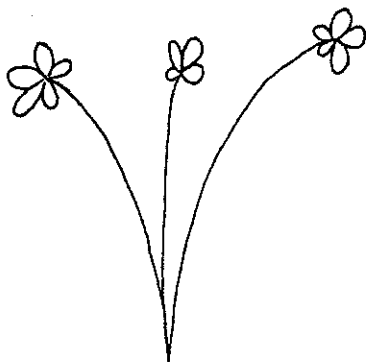
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ne sont pas sécantes.

méthode : quel que soit Δ et Δ' on a

$$\Delta \cap \Delta' = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Delta \cap \Delta' = \{A\} \quad \text{ou} \quad \Delta \cap \Delta' = \Delta$$

$$\Delta // \Delta' \Leftrightarrow \Delta \cap \Delta' = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Delta \cap \Delta' = \Delta$$

d'où la conclusion.



"L'atonie des élèves est peut-être ce qu'il y a de plus frappant dans ce périple à travers les collèges". (Michèle Saltiel in Le Monde de l'Education)

"Résoudre un problème nécessite un élan de curiosité, une mobilisation effective de l'intelligence" (Glaeser).

"La résolution d'un problème est une aventure d'une telle intensité qu'elle fait date dans la mémoire de tous ceux qui l'ont vécue. Heureux le professeur qui la révèle à ses élèves" (livre du pb T I).

Où: Que fait-on en classe de maths ?

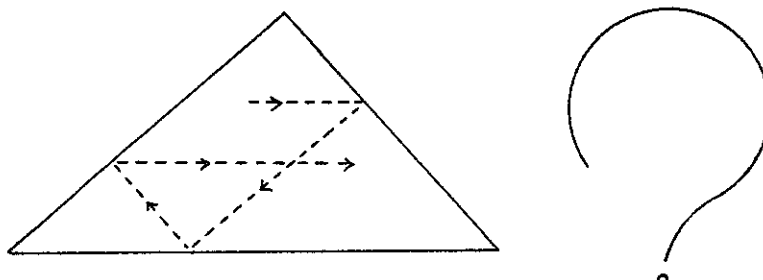
On peut distinguer deux sortes de problèmes:

→ Les problèmes "à démontrer" : le but d'un tel problème est de montrer l'exactitude ou la fausseté d'une affirmation clairement énoncée.

A noter que les cours de mathématiques de 2ème cycle sont truffés de problèmes à démontrer correspondant à des affirmations exactes. La réfutation d'affirmations fausses, qui aurait pourtant sur le plan du raisonnement une importance aussi grande, est plus rarement rencontrée.

→ Les problèmes "à résoudre" dans lesquels on cherche à découvrir "l'inconnue" du problème
Comme exemple on peut citer :

- tous les problèmes de construction ainsi : On donne trois points A,B,C ; tracer une droite passant par A équidistante de B et C.
- le problème des ricochets :



Quelles sont les places de ces deux types d'activités dans les mathématiques ?

En face d'une nouvelle situation on commence par émettre une hypothèse, qui peut s'avérer mal adaptée, mais on l'essaie et on la modifiera plus ou moins suivant le résultat obtenu. L'aboutissement du travail créateur sera souvent un raisonnement démonstratif, une preuve. Mais cette preuve est découverte par un raisonnement par "intuition" en essayant de deviner.

Les mathématiques achevées, présentées sans forme définitive, paraissent purement deductives. Mais les mathématiques en gestation sont toutes différentes.

Le travail créateur doit-il faire partie intégrante de l'enseignement des maths... ou bien doit-on tenir les élèves à l'écart de ce type d'activités... Peut-on leur cacher que les théorèmes démontrés aujourd'hui furent un jour devinés... et n'est-il pas également intéressant de savoir par quelles méthodes, avec quelles analogies...?

N'y aurait-il en mathématiques qu'une activité noble : celle du raisonnement déductif rigoureux ?

ET ; A PROPOS, LES DEFINITIONS.....

« Lorsque *moi* j'emploie un mot, répliqua Heumpty Deumpty d'un ton de voix quelque peu dédaigneux, il signifie exactement ce qu'il me plaît qu'il signifie... ni plus, ni moins. »

« La question, dit Alice, est de savoir si vous avez le pouvoir de faire que les mots signifient autre chose que ce qu'ils veulent dire. »

« La question, riposta Heumpty Deumpty, est de savoir qui sera le maître... un point, c'est tout. »

(Lewis Carroll: de l'autre côté du miroir)

On n'a guère parlé jusqu'à présent des définitions et pourtant en regardant les documents on ne peut que se dire : "il y a des choses à dire".

Quelques exemples :

La droite

1. La droite est la ligne dont les extrémités sont ombragées par les points intermédiaires

(Platon IV^{ès}. av. J.C.)

2. La droite est la ligne telle que si l'on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobilisés par cela seul

(Leibniz 1679)

3. Une droite affine est un ensemble E muni d'une famille Φ de bijections de E SUR R telle que a) pour tout élément f de Φ et pour tout élément (a,b) de $R \times R$, l'application définie par $g(M) = af(M) + b$ appartient aussi à Φ .

b) Réciproquement si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de Φ , il existe (α, β) appartenant à $R \times R$ tel que $f_2(M) = \alpha f_1(M) + \beta$

(instructions relatives au programme pour les classes de 4^{ème}, 3^{ème}, 1971)

Une définition formelle

Pour définir la collection des ordinaux

On a $(\alpha) \Leftrightarrow \forall x \forall y [x \in \alpha \text{ et } y \in \alpha \Rightarrow x \in y \text{ ou } y \in x]$
 et $\forall x \forall y \forall z (x \in \alpha \text{ et } y \in \alpha \text{ et } z \in \alpha \text{ et } x \in y \text{ et } y \in z \Rightarrow x \in z)$

et $\forall z [z \subset \alpha \text{ et } z \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in z \text{ et } \forall y (y \in z \Rightarrow x \in y \text{ ou } x = y))]$
 et $\forall x \forall y [x \in \alpha \text{ et } y \in x \Rightarrow y \in \alpha]$

(Théorie axiomatique des ensembles, J.L. Krivine)

Le cercle

1. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne telle que toutes les droites tombant sur elle, à partir d'un point parmi ceux intérieurs à la figure sont égales entre elles

(Euclide, éléments)

2. C'est l'ensemble des points équidistants d'un point donné

Droites perpendiculaires

1. Lorsqu'une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée

(Euclide, éléments)

2. L'équerre est l'instrument qui permet d'obtenir une droite perpendiculaire à une droite donnée.

3. Axiomes de l'orthogonalité

Il existe une application ω de l'ensemble E des directions du plan dans lui-même qui possède les deux propriétés :

1°) Cette application est involutive

2°) Aucune des directions du plan n'est sa propre image par cette application

On dit alors qu'une direction S du plan est orthogonale à une autre direction S' du plan pour traduire que S' est l'image de S par ω ; et on écrit $S' \perp S$

(manuel de 3ème, 1974)

Un entier relatif

1. C'est un nombre naturel précédé d'un signe

2. C'est une classe d'équivalence de couples de naturels modulo une certaine relation.

La symétrie orthogonale dans le plan

1. Etant donné une droite Δ , la symétrie orthogonale par rapport à Δ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M fait correspondre le point M' tel que Δ soit la médiatrice de $[MM']$
2. Une symétrie orthogonale est une isométrie ayant une droite de points invariants.

Quelques remarques (mais c'est loin d'être exhaustif)

1. Il semble qu'il ne soit pas facile de donner une définition d'un objet aussi "simple" que la droite.
2. On peut comme pour la démonstration envisager deux pôles :
 - . Un premier où le discours vise à mieux appréhender un objet mathématique ; si dans certains cas il semble que ce soit vrai (déf (1) (2) de la perpendiculaire) on peut constater que le discours ne répond pas toujours à cet objectif (déf.(1) et (2) pour la droite ; déf (1) pour le cercle) et même se demander si le seul but n'est pas de définir à tout prix.
 - . Un deuxième où l'on établit une équivalence logique entre un terme nouveau et un ensemble de termes antérieurs (en langage formel ou non). Parmi ces définitions certaines semblent opérationnelles (au moins à un niveau donné) et d'autres restent et resteront parfaitement obscures (déf. (3) de la droite, déf. de la collection des ordinaux).
3. Là encore, afin d'éviter de "graves problèmes de conscience" on ne cherchera pas à définir ce que c'est que définir, mais on peut dire que, au minimum, une définition d'un objet doit permettre de mieux le faire fonctionner. (La déf.(1) de la symétrie orthogonale semble à cet égard meilleure que la déf.(2)).

QUELQUES REFLEXIONS SUR LA PLACE DES DEFINITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

* Il n'est pas nécessaire pour faire des mathématiques de définir toutes les notions mises en jeu : on peut se contenter pour certaines d'entre elles d'un consensus à un moment donné entre gens travaillant ensemble.

ex : avoir déterminé si un triangle est un triplet de points, un ensemble de trois points, une réunion de segments, l'intersection d'un demi-plan et d'un secteur angulaire saillant

N'EST PAS

un préalable nécessaire à toute activité sur le triangle.

Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas entraîner l'enfant à traduire ce qu'il cherche à dire avec un vocabulaire précis, mais ceci est une autre affaire. C'est un exercice - utile - de formulation que de se demander "si pour moi un triangle, c'est "les bords", comment le formuler correctement ? ou "si pour moi un triangle c'est "l'intérieur", comment le dire bien, etc... C'est parfaitement inutile de commencer par là, et à fortiori de s'interdire de parler de triangle tant qu'on ne s'est pas mis d'accord là-dessus.

Par contre l'histoire de l'enseignement des maths est pleine de pseudo-définitions qui font croire que l'on a dit quelque chose alors qu'on n'a rien dit. Pourquoi ne pas admettre simplement qu'il y a des termes premiers qu'on ne définit pas mais que tout le monde comprend (il y en a beaucoup au départ - leur nombre diminue au fur et à mesure que s'affinent les connaissances et les formulations de l'élève - leur minimalisation est un objectif lointain).

Mais alors évitons :

. définition : 2 figures sont égales lorsqu'elles sont superposables (manuel de 4^e années 1960)

. Ou alors

a et b étant 2 points d'une droite D

($a \leq b$) signifie (a est à gauche de b ou $a = b$) (manuels de 4^e année 1979)

(défense de faire pivoter, pardon "rotationner", le livre de 90°, d'utiliser un miroir, de regarder par transparence).

et ceci pour démontrer très scientifiquement que la dite relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

. Ou alors :

définition : lorsqu'une droite distincte de S est conservée globalement par retournement autour de S , on dit qu'elle est orthogonale à S .

pour un esprit curieux qui s'interroge sur le retournement, un renvoi lui permet d'aller se renseigner :

— Le retournement

Soit C un cercle de centre O de rayon R, et soit (AB) un diamètre. Décalquons la figure, retournons le calque et plaçons A sur A et B sur B. O coïncide avec O (fig. D-12). Les deux droites (AB) et (AB) coïncident. Nous constatons que le cercle coïncide avec son calque retourné.

Si on « retourne » un cercle autour d'une droite contenant le centre, le cercle coïncide avec son « retourné ».

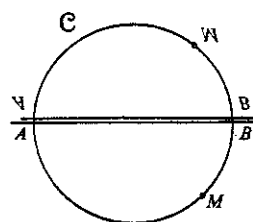


Fig. D-12

Ainsi parés, nous démontrons allègrement le théorème :

Si δ est orthogonale à δ' , alors δ' est orthogonale à δ .

Le "prenons le calque..." n'est pas loin.

* Pour préciser un peu la question on peut remarquer que :

. Certaines notions nécessitent une définition simplement parce qu'elles recouvrent un objet entièrement nouveau : c'est par exemple le cas de "la valeur absolue des nombres relatifs" qui n'évoque rien pour un élève de 5è tant qu'on ne lui a pas dit de quoi il s'agissait.

. Dans d'autres cas, l'acquis culturel des enfants fait que les définitions d'un objet mathématique peuvent apparaître comme plus difficiles à appréhender que l'objet lui-même.

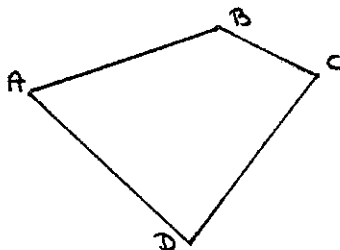
Tout est alors affaire d'objectifs :

. si le professeur souhaite montrer à ses élèves comment l'on peut construire une définition mathématique pour un objet ou une classe d'objets préexistants au niveau de l'intuition, alors donner ou faire chercher la définition permettra peut-être d'atteindre l'objectif.

. Si le but est de manipuler une notion parce qu'elle est intéressante en soi et/ou parce qu'elle offre des situations intéressantes pour l'activité et le raisonnement mathématique, alors donner une définition - si elle n'est pas évidente à comprendre - ne risque-t-il pas de détourner les élèves de l'objectif fixé ?

Exemple : Voici plusieurs définitions proposées pour un quadrilatère :

* Un quadrilatère c'est ça



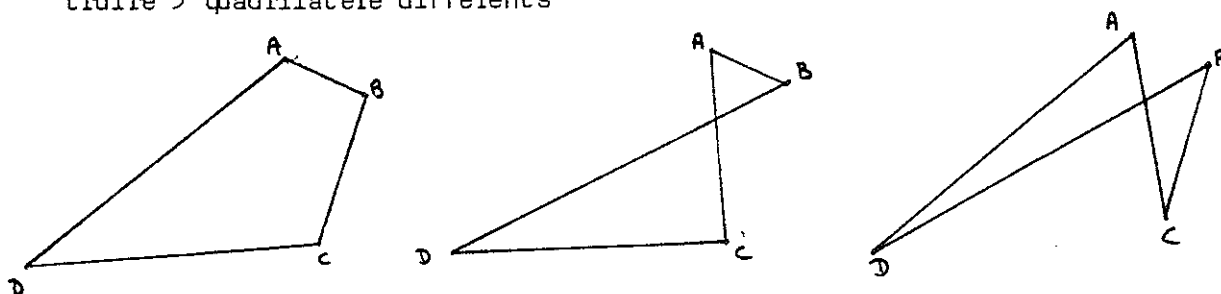
* Un quadrilatère est une ensemble de quatre points $\{A, B, C, D\}$ dont trois quelconques ne sont pas alignés.

* Un quadrilatère est un quadruplet de points (A, B, C, D) dont trois quelconques ne sont pas alignés.

* Un quadrilatère est une ligne polygonale fermée à quatre côtés.

* Un quadrilatère est l'intersection de quatre demi-plans.

Aucune de ces définitions n'est vraiment satisfaisante (question : pourquoi ?)
 Mais, pour rendre compte du fait, pourtant simple, que sur 4 points on peut construire 3 quadrilatères différents



il faut se donner un arsenal du type :

un quadrilatère c'est . un ensemble de 4 points $\{A, B, C, D\}$ (on peut rajouter : dont 3 quelconques ne sont pas alignés)

. et un ensemble de 4 paires de points pris parmi ceux-ci
 ($\{ \{A, B\} ; \{B, C\} ; \{C, A\} ; \{A, D\} \}$ dans le premier dessin).

Le jeu en vaut-il la chandelle ?

* La fabrication, l'utilisation, la compréhension des définitions posent aux élèves des problèmes spécifiques :

. Méfions-nous d'abord de ce que le sens de l'activité de définition n'est généralement pas perçu par les élèves :

Demandez : "Qu'est-ce que c'est qu'une définition ?" à un auditoire de bambins. La réponse généralement reçue : "C'est quelque chose qu'il faut apprendre par cœur" (preuve -d'ailleurs- que l'enfant donne lui-même spontanément ses définitions en termes fonctionnels !).

La réponse attendue était quelque chose du genre : "c'est une phrase destinée à préciser la signification d'un mot nouveau". Une telle réponse n'est jamais venue. Et à la réflexion ce n'est pas d'ailleurs très étonnant :

L'élève a-t-il attendu d'avoir écrit sur son cahier :

définition : le milieu du segment $[AB]$, c'est.....

pour savoir marquer un milieu sur son dessin ?

Comment le mot "milieu" peut-il lui apparaître alors comme un mot nouveau ?

Nouveau le mot l'est bien pour quelqu'un, le prof (!) qui, lui, sait qu'il se promène à l'intérieur d'une théorie mathématique dans laquelle il vient d'introduire un mot nouveau. Mais il est généralement le seul à le savoir. A quel jeu étrange jouons-nous ?

. Un autre type de difficultés peut se présenter quand une définition utilise des mots ayant un sens indépendamment de toute théorie mathématique ; le langage

mathématique et le langage usuel ont des recoupements qui dans un certain nombre de cas doivent être particulièrement "troublants" (au sens propre) pour les enfants.

Ainsi par exemple comparaison du sens du mot "direction" dans

- direction d'une droite
- prendre le métro direction "St Lazare".

LE COIN DES COLLECTIONNEURS

Soyons sérieux. Quelques procédés de démonstration.

Il y a quelques grands "procédés" de démonstration : les chaînes d'implication, la récurrence, le raisonnement par l'absurde, le contre-exemple.... Ils peuvent se mélanger et être accompagnés de "trucs" si nombreux qu'il serait impossible de tous les énumérer. Voici quelques exemples utilisés ou utilisables dans l'enseignement secondaire.

I. Les démonstrations par "exhibition". (contre-exemple et théorème d'existence).

Ce type de raisonnement est très courant : il faut habituer les plus jeunes élèves à l'utiliser.

exemple 1 : La soustraction n'est pas commutative (à l'aide d'un contre-exemple)

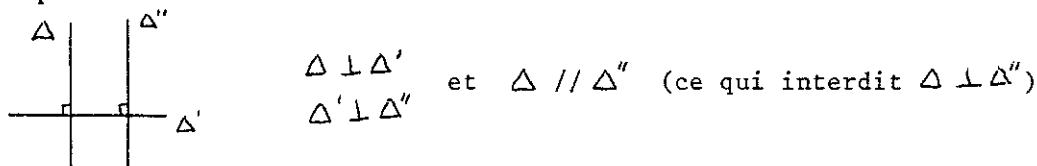
exemple 2 : "Tous les nombres impairs sont premiers" est une phrase fausse.

exemple 3 : Montrer que l'équation, dans $\mathbb{R}$, $x^2 - 20x + 100 = 0$ a au moins une solution :
On exhibe la solution 10.

Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est fausse (non $(P \Rightarrow Q)$ c'est P et non Q), on donne un exemple où P et (non Q) sont vraies simultanément.

exemple 4 : $\underbrace{ac = bc}_P \Rightarrow \underbrace{a = b}_Q$ est fausse car pour $a = 2, b = 3, c = 0$
 P et (non Q) sont vraies.

exemple 5 : La relation "est perpendiculaire à" dans l'ensemble des droites du plan, n'est pas transitive car



II La chaîne d'implications

a) Schéma général : Hypothèse, conclusion.

Le schéma le plus courant dans le premier cycle est celui-ci : si "hypothèses", alors "conclusion".

Dans une telle démarche il faut remarquer que :

- on ne travaille que "sur du vrai".
- Le schéma implicitement en vigueur la plupart du temps :

$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ vrai} \\ \text{et } (P \Rightarrow Q) \text{ vrai} \end{array}}$
 alors $\boxed{Q \text{ vrai}}$ généralement présenté ainsi : "Si P alors Q".

exemple : Problème : Etudier les médiatrices d'un triangle (A,B,C)

Conjecture : elles sont concourantes

Présupposés : • propriété caractéristique de la médiatrice

$$(M \in \text{médiatrice de } AB \Leftrightarrow MA = MB)$$

• si deux droites sont sécantes toute perpendiculaire à l'une est sécante avec toute perpendiculaire à l'autre.

• transitivité de l'égalité.

1°) démonstration de l'existence du point d'intersection de deux médiatrices.

2°) Démonstration par chaîne d'implication :

Hypothèse : M est le point commun à la médiatrice de AB et à celle de BC

Conclusion : M appartient à la médiatrice de AC

$$\left. \begin{array}{l} M \in \text{méd. de } A,B \text{ donc } MA = MB \\ M \in \text{méd. de } B,C \text{ donc } MB = MC \end{array} \right\} \text{ donc } MA = MC \text{ donc } M \in \text{méd. de } A,C.$$

b) Une variante : la contraposée

L'implication $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à sa contraposée $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$

On peut remplacer la démonstration de l'une par celle de l'autre.

ex1 : L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x-3 \text{ est-elle injective ?}$$

Présupposés : - définition d'une application injective

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \quad (1)$$

- calculs dans $\mathbb{R}$

Au lieu de démontrer l'implication (1) $x \neq x' \Rightarrow 2x-3 \neq 2x'-3$

on démontre la contraposée $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

puisque les propriétés de

l'égalité sont bien définies

ex.2 où l'implication à démontrer est valable dans "un certain cadre".

Cadre: D1 et D2 sont 2 droites parallèles.

Pour montrer que, si $D3 // D1$ alors $D3 // D2$ on peut montrer que si $D3 \nparallel D2$, alors $D3 \nparallel D1$, c'est-à-dire : pour montrer que si deux droites sont parallèles toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre, on peut montrer que si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

c) Les différents "habillages" de l'implication :

1) Raisonnement par conditions suffisantes

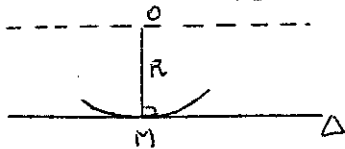
exemples : Pour montrer qu'une fonction est injective, il suffit de montrer qu'elle est strictement monotone.

Pour qu'une fonction soit continue il suffit qu'elle soit dérivable.

2) Conditions nécessaires et suffisantes

exemples : Equivalence des équations.

Problème : Quel est l'ensemble des centres des cercles de rayon donné R, tangents à une droite donnée ?
(un cercle de centre O et de rayon R est tangent à Δ)
est équivalente à
(la distance de O à Δ est R).
D'où l'ensemble cherché formé de deux droites parallèles à Δ .



3) Conditions nécessaires

exemple : Résolution d'équation ou de système.

Si, ayant calculé le déterminant d'un système linéaire on sait qu'il admet une solution unique, on peut se contenter d'écrire une suite d'implications pour trouver l'ensemble des solutions. Pour que (x,y) soit solution, il faut que

d'où $x =$

$y =$

Je tiens mon unique solution.

d) Disjonction des cas

4/ Pour démontrer qu'une proposition C est vraie on peut considérer deux propositions A et B telles que $(A \text{ ou } B)$ soit vraie. Il suffit alors de démontrer successivement que $(A \Rightarrow C)$ et $(B \Rightarrow C)$.

ex 1 $a \in \mathbb{N}$ montre que $a^2 \neq 2$

2 cas sont possibles $a \leq 1$ (proposition A)

ou $a \geq 2$ (proposition B)

$(A \text{ ou } B)$ est vraie

Si $a \leq 1$ alors $a^2 \leq 1$ donc $a^2 \neq 2$

Si $a \geq 2$ alors $a^2 \geq 4$ donc $a^2 \neq 2$

ex.2 Montrer la transitivité du parallélisme.

Hypothèse : $\Delta // \Delta'$ et $\Delta' // \Delta''$ Conclusion : $\Delta // \Delta''$

Deux cas sont possibles : A : $\Delta \cap \Delta'' = \emptyset$ on a bien $\Delta // \Delta''$

B : $\Delta \cap \Delta'' \neq \emptyset$. Soit $A \in \Delta \cap \Delta''$. Comme Δ et Δ'' sont parallèles à Δ' d'après l'axiome d'Euclide $\Delta'' = \Delta$. On a bien encore $\Delta // \Delta''$

ex.3 Problème : existe-t-il deux nombres irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel ?

Réponse : oui

Démonstration : Soit $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

Deux cas sont possibles : A : a est rationnel alors $x = y = \sqrt{2}$ répondent à la question

B : a n'est pas rationnel alors $x = a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$ répondent à la question :

$$x^y = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

2/ Un autre type de disjonction des cas qui intervient fréquemment est basé sur le

schém : A ou B
et
non B $\Rightarrow$ A

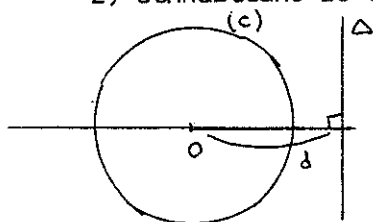
exemples

1) Reprenons la transitivité du parallélisme :

Deux cas sont possibles $\Delta // \Delta''$

ou $\Delta \nparallel \Delta''$, mais Δ et Δ'' seraient alors sécantes et toutes deux parallèles à Δ' , ce qui est impossible d'après l'axiome d'Euclide.

2) Connaissant le théorème concernant l'intersection d'une droite et d'un cercle



$d < R \Rightarrow \Delta$ sécante

$d = R \Rightarrow \Delta$ tangente

$d > R \Rightarrow \Delta$ extérieure

Montrer la réciproque :

Hypothèse : Une droite Δ est sécante au cercle.

3 cas possibles : $d = R$

$d > R$

$d < R$

Les deux premiers sont impossibles, d'après le théorème direct.

Conclusion $d < R$.

II Le raisonnement par l'absurde

Le principe est le suivant : Pour établir que dans une théorie T une proposition R est vraie, on construit la théorie T' obtenue en adjoignant à T l'axiome $(\text{non } R)$. Il suffit alors de prouver que T' est une théorie contradictoire.

Autrement dit on démontre qu'une affirmation est fausse en en tirant une contradiction.

Exemple 1 : Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2$, p et q premiers entre eux avec

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{donc } p^2 = 2 q^2 \quad \text{donc } 2 \text{ divise } p.$$

$$p = 2p' \quad 4p'^2 = 2 q^2, \quad 2p'^2 = q^2 \quad \text{donc } 2 \text{ divise } q \quad \text{en contradiction avec le fait que } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux.}$$

Exemple 2 : Ecrire des nombres dont la somme est 100 en ne se servant qu'une seule fois de chacun des 10 chiffres.

On peut faire des essais, conjecturer l'impossibilité. Pour la démontrer : supposons que c'est possible

$$0+1+2+3+4+\dots+9 = 45$$

donc pour faire 100 il faut des nombres de 2 chiffres.

Appelons t la somme des chiffres des dizaines employés ,

$$45-t \text{ est la somme des chiffres des unités}$$

$$\text{On doit avoir } 10t + (45-t) = 100$$

d'où $t = \frac{55}{9}$, qui n'est pas un nombre entier, ce qui est contradictoire avec la définition de t .

Exemple 3 : Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers, appelons P le plus grand et considérons $Q = (2 \times 3 \times \dots \times P) + 1$

$$Q > P$$

Q n'est divisible ni par 2 ni par 3... ni par P , donc

Q est premier. Contradiction avec la définition de P .

Remarque : Dans ce dernier exemple on peut formuler le problème différemment et éviter le raisonnement par l'absurde:

Connaissant les nombres premiers, $2, 3, 5, \dots, P$, trouver un nouveau nombre premier plus grand :

$$\text{Réponse : } Q = (2 \times 3 \times \dots \times P) + 1$$

Inconvénients du raisonnement par l'absurde

Commencer un raisonnement en supposant vraie une proposition dont on sait qu'elle est fausse paraît à priori artificiel et n'est pas du tout naturel aux élèves qui ont plutôt tendance à utiliser le résultat qu'ils veulent démontrer.

Exemple : Plusieurs livres de 4^e (programme 71) présentaient dans leur 1^{er} chapitre de géométrie la démonstration par l'absurde de la transitivité du parallélisme.

Hypothèse $\Delta // \Delta'$ et $\Delta' // \Delta''$

Conclusion $\Delta // \Delta''$



Comment vouloir que les élèves supposent que Δ et Δ'' se coupent ?

III - Non employé dans le premier cycle, souvent mal compris dans le deuxième cycle, le Raisonnement par récurrence

$\begin{aligned} &\forall n \geq n_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ &\text{et } P(n_0) \text{ vrai} \\ &\text{donc } \forall n \geq n_0, P(n) \text{ vrai} \end{aligned}$

est très utilisé pour montrer des identités :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exemple 1

Démontrons la troisième que l'on peut conjecturer par des essais :

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24} = 1 - \frac{1}{24}$$

Supposons que $\frac{1}{2!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (P(n))$

$$\forall n \quad \frac{1}{2!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{n+2-n-1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Si le résultat est vrai pour n il l'est pour $n+1$

Comme il est vrai pour $n = 1, \dots$ il est vrai pour tout n .

Exemple 2 : Montrer que si $A > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = +\infty$

Une méthode consiste à poser $A = 1+x$ avec $x > 0$, et à montrer par récurrence que $(1+x)^n > 1+nx$

vrai pour $n = 2 \quad : (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \quad \text{donc } (1+x)^2 > 1+2x$

supposé vrai pour n

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x), \text{ donc } (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) > 1 + (n+1)x$$

Ici on a choisit une hypothèse de récurrence (H1) : $(1+x)^n > 1+nx$

On aurait pu en choisir une autre : (H2) : $(1+x)^n > nx$.

L'hypothèse H2 est moins forte que H1 ($H1 \Rightarrow H2$) et pourtant H1 est plus facile à démontrer que H2.

IV - "Des petits truc rigolos"

Les pointillés dans une démonstration

Exemple 1 : Calculer la somme des n premiers entiers sans récurrence :

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + \dots + n \\
 + n + n-1 + \dots + 1 \\
 \hline
 (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1) \\
 \text{donc } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{array}$$

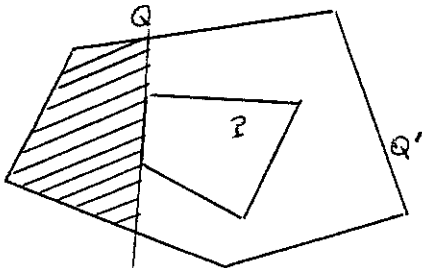
exemple 2 : Calcule du PGDC à 2 nombres entiers a et b par les divisions successives

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ r_1 < b \end{cases} \quad \begin{cases} b = r_1q_2 + r_2 \\ r_2 < r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = r_2q_3 + r_3 \\ r_3 < r_2 \end{cases} \quad \text{etc...}$$

$$\begin{cases} r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \\ r_n = 0 \end{cases}$$

r_{n-1} divise r_{n-2} donc r_{n-3} donc b donc a

Exemple 3 : Si un polygone P convexe est intérieur à un polygone Q le périmètre de P est inférieur au périmètre de Q .



Prolongeons un côté de P . P est situé entièrement d'un côté de cette droite.

Soit Q' le nouveau polygone ainsi obtenu en enlevant de Q la partie hachurée.

Le périmètre de Q' est inférieur à celui de Q .

On recommence de même pour chaque côté de P .

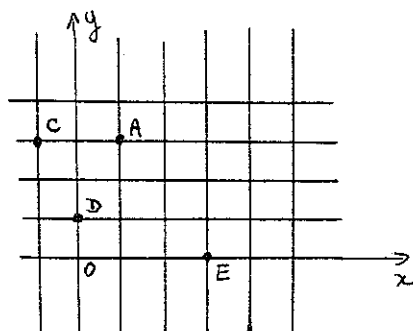
$$Per(Q) > Per(Q') > Per(Q'') \dots > Per(P).$$

Les pointillés sont utilisés pour remplacer un nombre fini d'étapes (ou d'éléments) impossibles à écrire pour n quelconque mais explicites dès que n est fixé.

Le raisonnement des tiroirs (En anglais "Pigeon-hole principle")

Utilisé surtout en analyse combinatoire, et chaque fois que le problème se ramène à n objets à répartir dans p cases avec $p < n$

Exemple : On donne 5 points distincts dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un segment dont les extrémités sont deux de ces points et dont le milieu appartient à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (olympiades polonaises).



Si I est le milieu de $[M, N]$ $x_I = \frac{x_M + x_N}{2}$

$$y_I = \frac{y_M + y_N}{2}$$

$I \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si $x_M + x_N$ et $y_M + y_N$ sont pairs c'est-à-dire si x_M et x_N ont la même parité ainsi que y_M et y_N .

x y	paire	impaire
paire	B D	
impaire	E	A C

Il faut placer 5 points dans ces 4 cases.

Il y a donc au moins deux points dans une même case.

Leur milieu répond à la question

RIONS UN PEU

Nous pensons savoir démontrer parce que nous avons acquis un certain nombre d'habitudes et de mécanismes de pensée. Il suffit de se placer sur un terrain un peu plus vierge pour nous que nous constatons à notre tour que démontrer c'est difficile.

Le théorème des 4 couleurs est faux

Voici dans le plan une carté à 4 régions.



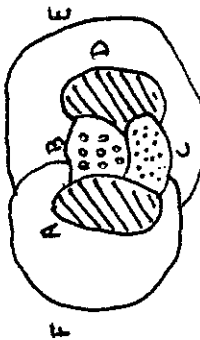
Il me faut assurément 3 couleurs pour colorier A, B et C.

Quelschoix sont alors possibles pour D

- soit je colorie D comme A
- soit j'utilise une 4ème couleur.

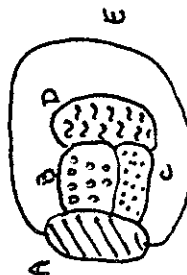
a) Si je colorie D en gris comme A :

alors il me faudra une 4ème couleur pour colorier E.
et une 5ème couleur pour colorier F.



b) Si je colorie D avec une 4ème couleur

Alors il me faut une 5ème couleur pour colorier E.



Conclusion : dans tous les cas, j'ai besoin d'une cinquième couleur.

Le théorème des 4 couleurs est vrai

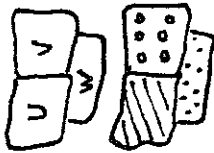
On cherche à colorier avec un minimum de couleurs des cartes de manière que 2 pays adjacents ne portent pas la même couleur

Voici une carte de 3 pays

adjacents 2 à 2 :

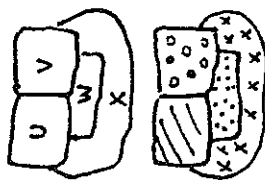
Pour la colorier, il

faut 3 couleurs.



Comment dessiner une carte de 4 pays adjacents 2 à 2 ?

par exemple on peut dessiner



Pour la colorier il est nécessaire de disposer de 4 couleurs.

Essayez de dessiner une telle carte à 5 pays ...! Difficile n'est-ce pas ?

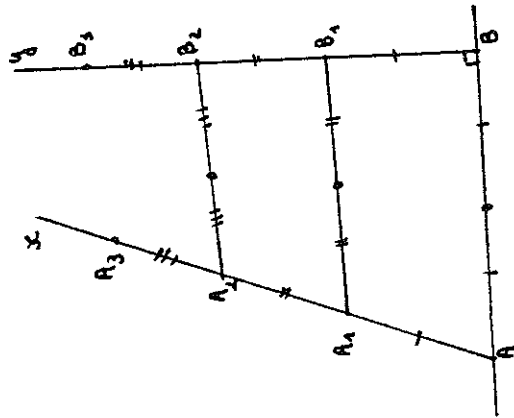
En fait on peut démontrer assez facilement qu'il n'existe pas de carte à

5 pays adjacents 2 à 2.

Il n'est donc jamais besoin de cinq couleurs pour colorier

une carte, quatre suffisent.

Une perpendiculaire et une oblique à une même droite ne se coupent pas !



Hypothèse : La demi-droite Ax forme un angle aigu BAx avec la droite AB.

La demi-droite By est perpendiculaire en B à la droite AB.

Conclusion : Ax et By ne se coupent pas.

Démonstration : Divisons le segment $[A, B]$ en deux parties égales et reportons sur Ax et By des segments $[A, A_1]$ et $[B, B_1]$ de longueurs égales à la moitié de la longueur AB.

* Ax et By ne peuvent pas se couper sur les segments $[A, A_1]$ et $[B, B_1]$ car sinon

on aurait un triangle (A, K, B) dans lequel $AK + KB$

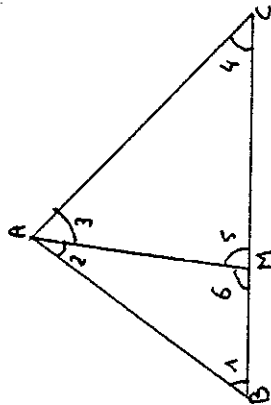
(qui est inférieur à $AA_1 + BB_1$ qui est lui-même égal

à $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB$) serait inférieur à AB ce qui est contraire aux inégalités triangulaires.

* Ax et By ne peuvent pas non plus se couper sur les segments $[A_1, A_2]$ et $[B_1, B_2]$ pour la même raison.

* etc... Ax et By ne se couperont jamais.

+ La somme des angles d'un triangle est égale à 2 droits



Soit un triangle (A, B, C) et ME [A, B]

Appelons x la somme des angles d'un triangle

On a : triangle (A, C, M) $\hat{1} + \hat{2} + \hat{6} = x$

triangle (B, C, M) $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = x$

en ajoutant $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} = 2x$

Triangle (A, B, C) $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 2$

en retranchant $\hat{5} + \hat{6} = x$ donc $x = 2$ droits

Question : Qu'avons nous démontré exactement ?

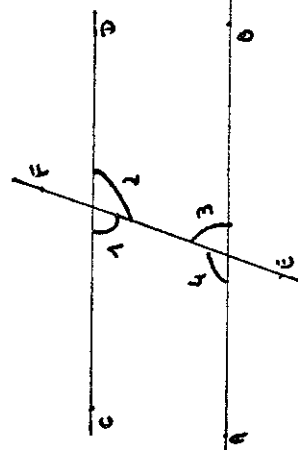
+ Si deux droites sont coupées par une sécante, la somme des angles intérieurs d'un même côté de la sécante vaut 2 droits :

Soient 2 droites (AB) et (CD) coupées par une sécante (EF). Appelons x la somme des angles intérieurs d'un même côté de la sécante. 3 cas possibles :

$x > 2$ droits

$x = 2$ droits

$x < 2$ droits



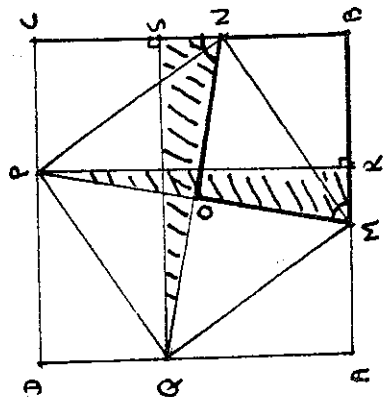
Si $x > 2$ droits $1 + 4 > 2$ droits donc $1 + 2 + 3 + 4$ 2 droits or $1 + 2 + 3 + 4 = 2$ droits
 $2 + 3 > 2$ droits

Si $x < 2$ droits : même raisonnement

Donc seule possibilité $x = 2$ droits.

Un rectangle inscrit dans un carré est également un carré ou les dangers du dessin.

Soit un carré (A, B, C, D) et un rectangle (M, N, P, Q) tel que $M \in [A, B]$, $N \in [B, C]$, $P \in [C, D]$, $Q \in [D, A]$.
Montrons que (M, N, P, Q) est forcément carré.



Traçons $(P, R) \perp (A, B)$ et $(Q, S) \perp (B, C)$

Comparons les triangles (Q, S, N) et (P, M, R) : $PR = QS$ (côté du carré (A, B, C, D))

$PM = QN$ (diagonales du rectangle (M, N, P, Q))

Ce sont des triangles rectangles.

L'égalité des triangles prouve celle des angles PMR et QNS

dans le quadrilatère (M, B, N, O) : $\widehat{OMB} + \widehat{MBN} + \widehat{BNO} + \widehat{NOM} = 4$ droits

or : $\widehat{OMB} + \widehat{BNO} = 2$ droits

$\widehat{MBN} = 1$ droit

Conclusion $\widehat{MON} = 1$ droit

Donc les diagonales du rectangle (M, N, P, Q) sont perpendiculaires ce qui prouve qu'il est carré.

Remarque 1 : Inscrivez un rectangle dans un carré : est-il toujours carré ?

Remarque 2 : Si vous ne voulez pas utiliser l'égalité des triangles on peut parler d'isométries :

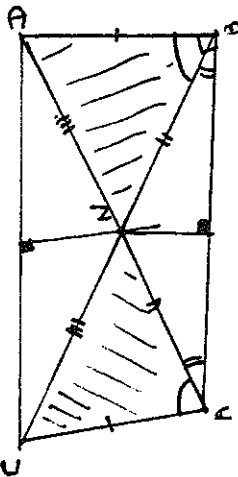
Les triangles (P, M, R) et (Q, N, S) sont isométriques

Un angle obtus est droit

Soit un segment $[A, B]$ et dans un même demi-plan de frontière (AB) $\{A, C\}$ un segment faisant un angle obtus avec $[A, B]$ et $\{B, D\}$ un segment perpendiculaire à $[A, B]$ avec $AC = BD$.

Si (CG) est parallèle à (AB) le trapèze (A, B, D, C) est isocèle et $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$

Sinon les médiatrices de $[CD]$ et $[AB]$ se coupent en N qui a 3 positions possibles :



- N est dans le même demi-plan de frontière (AB) que C et D

$NC = ND$ (car $N \in$ (médiatrice de $[CD]$))

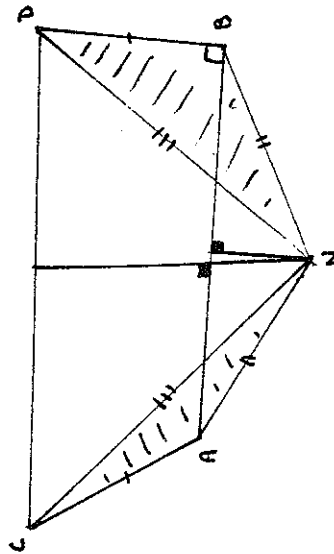
$NA = NB$ (car $N \in$ (médiatrice de $[AB]$))

$AC = BD$

donc les triangles (A, N, C) et (B, N, D) sont égaux et $\widehat{NAC} = \widehat{NBD}$

or le triangle (A, N, B) étant isocèle $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$

donc en ajoutant $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$

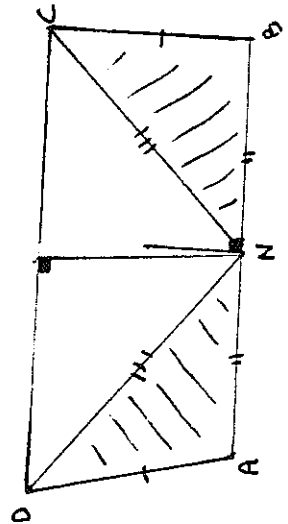


- N est dans l'autre demi-plan :

L'égalité des triangles (A, N, C) et (B, N, D) prouve $\widehat{NAC} = \widehat{NBD}$

on a toujours $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$

en retranchant $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$



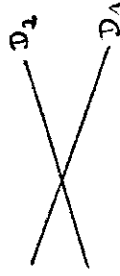
- N est sur (AB) , au milieu de $[AB]$

L'égalité des triangles (A, N, C) et (B, N, D) prouve celle des angles :

$\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$

Les surprises du raisonnement par récurrence

Démontrons que si n droites sont sécantes deux à deux, alors elles sont concurrentes (c'est-à-dire qu'elles ont toutes un point commun).



- La propriété est vraie évidemment pour $n = 2$

- Démontrons que :

"Si la propriété est vraie pour n , alors elle est vraie pour $n+1$ ".

Soient $D_1, D_2, \dots, D_{n+1}$ les $(n+1)$ droites.

Regardons les n premières $D_1, D_2, \dots, D_n$: d'après l'hypothèse de récurrence elles sont concurrentes en un point A .

Regardons alors $D_2, \dots, D_{n+1}$: ces n droites sont concurrentes, d'après l'hypothèse de récurrence, en un point qui ne peut être que A .

Conclusion : $D_1, \dots, D_{n+1}$ sont concurrentes.

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Octobre 1979
ISBN : 2-86612-140-6
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05