

Exploration du travail mathématique : quels enjeux entre l'intelligence artificielle générative et l'intelligence artificielle symbolique ?

Elizabeth Montoya Delgadillo

Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Valparaíso, Chile ;

elizabeth.montoya@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Ce travail explore le type de travail mathématique qui émerge lorsque des enseignants en formation initiale interagissent avec des intelligences artificielles génératives et symboliques dans des tâches de construction géométrique. À l'aide de la théorie des espaces de travail mathématiques (ThETM), on analyse les genèses instrumentale, sémiotique et discursive mises en œuvre lors de la construction d'un rectangle et d'une spirale d'or à l'aide de GeoGebra et d'une intelligence artificielle. À partir de l'analyse de quatre cas, des différences sont identifiées dans les stratégies de résolution, les raisonnements et les processus d'instrumentalisation. Les résultats montrent des erreurs discursives, sémiotiques et instrumentales associées au suivi d'instructions générées par l'IA, notamment en ce qui concerne la compréhension du nombre d'or et des dépendances géométriques. De même, certains étudiants développent des formes plus sophistiquées de travail mathématique par le biais de la programmation et de l'automatisation. Enfin, nous discutons de la nécessité de promouvoir une utilisation critique et épistémologiquement contrôlée de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques.

Mots clés : Intelligence artificielle, instrumentalisation, espace de travail mathématique, spirale d'or

Introduction

L'expression *intelligence artificielle* (IA) est attribué à John McCarthy (McCarthy et al., 2006) lors de la conférence de Dartmouth en 1955, considérée comme le point de départ de ce domaine. Avec son équipe, il a défini les objectifs et les approches de l'IA moderne. Cependant, d'autres étapes cruciales avaient déjà été franchies auparavant, qui ont étayé les fondements théoriques, comme les travaux de Turing (1950) ou ceux de McCulloch & Pitts (1943) à la même époque. Considérés comme les fondements théoriques de l'informatique moderne et essentiels à l'IA, ils ont remis en question et concrétisé l'idée de simuler la pensée humaine à l'aide d'une machine. S'il est reconnu que les fondements de l'IA existent depuis plusieurs décennies déjà, les avancées technologiques récentes ont accéléré la portée et le potentiel de ses applications, tout particulièrement dans l'éducation, domaine sur lequel se concentre l'intérêt de cette recherche. L'IA a connu un développement croissant qui a suscité, depuis des décennies, un grand intérêt de la part de la didactique pour le champ des technologies de l'information. Il existe toutefois un écart considérable entre les produits de l'industrie et ceux qui relient spécifiquement l'IA à la didactique des mathématiques (Emprin et Richard, 2023), ce qui place les chercheurs dans une position difficile et rend nécessaire le développement de la recherche.

Les défis auxquels est confronté le secteur de l'éducation sont considérables, et il est important d'étudier comment les modèles d'IA améliorent les connaissances dans les environnements éducatifs. À mesure que l'on procède à des revues systématiques sur le sujet, les informations disponibles ne cessent de s'étoffer ; on peut notamment citer une revue déjà réalisée par Ali et al. (2024), qui porte sur 618 articles. Les auteurs classent les thèmes et nous présentent une série d'effets liés à : l'IA dans l'apprentissage à partir du besoin d'indications créatives, la formation sur divers ensembles de données et genres, l'intégration des contributions humaines et la confidentialité des données, ainsi que l'élimination des biais. Dans cette recherche, nous nous intéresserons explicitement à l'effet sur l'apprentissage, à l'utilisation de ces outils numériques qui ont transformé (et continuent de transformer) le secteur éducatif, le raisonnement mathématique et, en définitive, la manière d'apprendre et d'enseigner les mathématiques.

Toutefois, la relation entre l'intelligence artificielle et la didactique des mathématiques fait l'objet de débats depuis plusieurs décennies. Les travaux de Balacheff (1994a) nous montrent que la transposition informatique n'est pas un simple transfert vers des environnements d'apprentissage informatisés, mais qu'elle résulte d'une construction de transformations des objectifs pédagogiques. Il établit un lien naissant avec la notion théorique de transposition didactique (Chevallard, 1985), en affirmant que l'introduction des technologies informatiques dans la salle de classe (à tous les niveaux) s'accompagne de nouveaux phénomènes et de transformations complexes, avec des dispositifs informatiques présentant des limites et des contraintes, tant au niveau du matériel que des logiciels.

Un des modèles présentés par Balacheff (1994b) repose sur le principe selon lequel les dispositifs informatiques divisent le « monde » en trois régions : l'univers interne, l'interface et l'univers externe. Dans ce dernier, il identifie l'humain (appelé opérateur humain) avec ses propres connaissances et, éventuellement, avec un accès à d'autres dispositifs. Il y a plus de 30 ans, Balacheff (1994a, 1994b, 2019, 2022) s'est interrogé sur la place de la connaissance, en se référant aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Le développement mondial des technologies numériques et l'essor des IA génératives (ou statistiques) ont relégué au second plan les IA dites symboliques ; on constate d'ailleurs que ces deux types d'IA n'ont pas fait leur entrée dans les salles de classe avec la même rapidité. Cette véritable révolution technologique, comme beaucoup d'autres, s'accompagne de grandes interrogations pour les chercheurs. Dans notre discipline, l'IA générative est en train de transformer les méthodes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, les contrats didactiques (Brousseau, 1988), et de remettre en question les modes de raisonnement et l'intelligence humaine.

À ce propos, des inquiétudes resurgissent quant à la place laissée à l'intelligence humaine, aux effets de « boîte noire » sur l'apprentissage et au contrôle des processus d'apprentissage (Emprin et Richard, 2023), ainsi qu'à la nécessité d'ouvrir des espaces de formation où enseignants et élèves apprennent à interagir avec les outils numériques de manière critique, réfléchie et mathématiquement significative.

Ce qui est présenté dans ce texte s'inscrit dans le cadre d'une étude sur le travail mathématique intégrant l'IA afin de favoriser les connaissances mathématiques des enseignants en formation initiale. Pour ce faire, nous étudierons comment l'enseignant s'approprie l'IA en contrôlant, grâce à ses connaissances, le système génératif et le système symbolique. Nous espérons qu'à l'issue de cette recherche, nous disposerons de preuves des changements intervenus dans l'espace de travail mathématique de l'enseignant en formation, afin qu'il devienne un opérateur épistémique capable de contrôler l'utilisation de l'IA pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Panorama général : IA génératives – IA symboliques

A partir de 2022, l'émergence des IA génératives telles que ChatGPT ou Gemini, entre autres, a déclenché une véritable révolution, sans précédent depuis près de 50 ans, dans le domaine de l'IA, surtout si on les compare aux IA symboliques utilisées spécifiquement pour l'enseignement des mathématiques, telles que Geogebra ou Matlab, entre autres. La littérature sur l'IA est vaste et, à chaque fois qu'une revue systématique est effectuée, de nouveaux articles apparaissent, ce qui témoigne de l'intérêt suscité par la recherche sur ce sujet.

À ce jour, il n'existe pas de définition unique, claire, précise et unanimement acceptée de l'IA. Cela dit, Balacheff (2022) la définit comme une propriété des machines qui manifestent des comportements qui attire l'attention par leur intelligence, sans oublier qu'il s'agit d'un jugement fondé sur une sorte d'empathie humaine. Ainsi, l'IA simule une illusion d'intelligence face à l'humain qui l'utilise. À cet égard, l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE¹) suggère de prendre en compte deux approches fondamentales qui font référence à la manière dont la machine apprend ou traite l'information : l'approche statistique et l'approche symbolique (OCDE, 2019 dans Richard et Emprin, 2023, p136) :

L'IA symbolique s'appuie sur des représentations logiques pour aboutir à une conclusion à partir d'un ensemble de contraintes. Elle exige que les chercheurs construisent des structures décisionnelles détaillées, compréhensibles par l'homme, pour traduire la complexité du monde réel et aider les machines à parvenir à des décisions semblables à celles des humains. (...)

L'IA statistique, qui permet aux machines d'inférer une tendance à partir de schémas, connaît depuis peu un engouement grandissant. Un certain nombre d'applications allient les approches symbolique et statistique. (pp. 29-30)

Il convient de mentionner que ces deux systèmes sont des algorithmes informatiques, mais de nature différente. À cet égard, Richard et Van Vaerenbergh (2026) soulignent que les approches symboliques, fondées sur des règles et des symboles, modélisent la pensée humaine à travers des processus logiques, générant ainsi des résultats vérifiables. « Elles sont particulièrement adaptées aux démonstrations formelles, aux calculs, à l'analyse symbolique (dérivées, résolution d'équations) et au traitement de données statistiques pour établir des corrélations théoriques. Cependant, ils ont des difficultés à gérer l'incertitude et les grandes quantités de

¹ Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD en anglais.

données » (p. 33). Les approches statistiques (ou génératives), quant à elles, utilisent des données et des techniques d'apprentissage automatique (qui sont en fait des algorithmes) pour reconnaître des modèles et faire des prédictions. « Elles excellent dans les tâches prédictives et la modélisation probabiliste » (p. 33), et les auteurs évoquent l'effet de *boîte noire*, car les décisions et les réponses fournies par ce système manquent de transparence. Dans certains cas, le raisonnement semble être déductif, mais il s'agit plutôt de la réutilisation de segments déductifs extraits des données d'apprentissage et articulés selon des mécanismes de fréquence.

Les auteurs nous présentent une classification, que nous adoptons dans cette étude, du diagramme original de l'OCDE (2019), dans laquelle ils ont ajouté l'approche numérique, représentée par des lignes pointillées autour de l'approche symbolique, ainsi que les modèles GML et génératifs dans les réseaux neuronaux profonds.

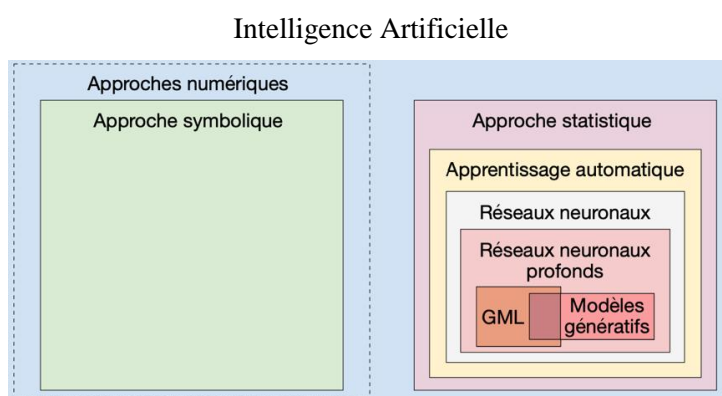


Figure 1 : Adaptation du diagramme original de l'OCDE (2019). Richard et Van Vaerenbergh (2026 p.33)

La classification proposée par ces auteurs nous semble essentielle pour intégrer le rôle décisif que joue l'humain grâce à sa propre intelligence. Il convient de noter que, dans le cadre de cette formulation, nous n'aborderons pas le concept d'intelligence en raison de sa complexité (Turing, 1950 ; Emprin et Richard, 2023).

Dans le cadre de notre propre revue systématique, nous avons relevé l'étude bibliographique d'Ali et ses collaborateurs (Ali, et al., 2024), qui a consisté en une sélection de 618 articles à l'aide de mots-clés liés à « ChatGPT », « IA » et « éducation » ; des filtres ont été appliqués par langue, année (2018-2023) et pertinence thématique, réduisant le nombre d'articles à 233. Enfin, ils ont appliqué un critère de qualité, ce qui a abouti à 124 articles constituant le corpus final, qu'ils ont classés en cinq catégories :

1. Utilisateur : difficultés liées à l'interaction, à la perception et aux compétences des utilisateurs (enseignants et étudiants) ;
2. Opérationnel : problèmes d'intégration et de fonctionnement technique ;
3. Environnemental : facteurs externes tels que la politique institutionnelle et le contexte social ;
4. Technologique : limitations techniques, biais et qualité des données ;
5. Éthique : préoccupations concernant la confidentialité, les biais, la dépendance et l'utilisation responsable.

L'équipe et les auteurs de cette synthèse ont également regroupé les résultats des articles examinés et soulignent les défis suivants :

1. Techniques et opérationnels :
 - Limites en termes de performances, biais dans les données d'entraînement et difficultés à intégrer ChatGPT dans les systèmes existants ;
 - Nécessité d'une personnalisation et d'une amélioration continue des versions pour différents contextes éducatifs.
2. Éthiques et liés à la confidentialité :
 - Préoccupations concernant la protection des données et la confidentialité ;
 - Risque de dépendance excessive à l'IA, biais dans les réponses pouvant favoriser certains groupes ou certaines idées.
3. Humains et liés à l'interaction :
 - Manque d'interaction humaine significative et d'empathie, qui sont essentielles dans l'éducation ;
 - Nécessité de former les enseignants et les élèves à l'utilisation efficace et responsable de ces outils.
4. Stratégies et opportunités :
 - Utilisation de ChatGPT comme complément et soutien plutôt que comme substitut au contact humain ;
 - Recommandations pour le développement de versions mieux adaptées, la formation et la réglementation de l'utilisation.

Bien sûr, plusieurs recommandations se dégagent, telles que la mise en œuvre de politiques garantissant une utilisation éthique et responsable de l'IA, la collaboration entre différents acteurs (formateurs, enseignants, développeurs) et l'adoption de politiques visant à relever ces défis. Mais l'une d'entre elles, dans laquelle s'inscrit cette recherche, consiste à développer davantage les recherches sur les effets sur l'apprentissage. Une question qui, pour nous, est au cœur de la formation des enseignants.

Fondements théoriques

La théorie des espaces de travail mathématiques (ETM) offre un cadre riche pour comprendre comment s'articulent les processus cognitifs et épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques, en mettant l'accent sur l'importance de la coordination entre les trois genèses : discursive, sémiotique et instrumentale (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak, Montoya Delgadillo et Richard, 2022). Cette interaction dynamique montre que le travail mathématique ne se limite pas à des actions isolées, mais qu'il est le résultat d'une activité complexe et intégrée. En effet, le travail mathématique peut être conceptualisé comme l'interaction entre un sujet épistémique (la personne qui apprend, enseigne ou produit des mathématiques) et un environnement épistémologique (le système dans lequel se déroule l'activité mathématique) dans un contexte éducatif.

Pour le chercheur, il est important d'identifier les genèses activées par un enseignant (ETM idoine) ou celles privilégiées par un élève lors de la réalisation d'une tâche mathématique (ETM personnel) afin de comprendre le travail mathématique. Or, les caractérisations de ces espaces

de travail mathématique sont déterminées par une autre notion, non moins importante, appelée *paradigmes*, qui dépend du domaine mathématique (Kuzniak et al., 2022).

Il est donc important de se pencher sur la genèse instrumentale, qui explique comment un objet devient un instrument et s'intègre ainsi à l'humain pour construire des connaissances mathématiques (Artigue, 2002). Cette genèse s'articule généralement autour de l'utilisation de matériel concret, mais aussi de routine opératoire et d'algorithme ; c'est un processus qui transforme l'outil en instrument, une dialectique entre l'*instrumentalisation* et l'*instrumentation* (Rabardel, 1995), appelée processus d'instrumentalisation (Trouche, 2002 ; Flores, Gaona et Richard, 2022). L'instrumentalisation peut conduire à l'enrichissement de l'artefact par une meilleure exploitation de celui-ci, mais aussi à sa sous-utilisation (Artigue, 2002). Les instruments deviennent des entités mixtes composées de l'objet technique (artefact matériel ou symbolique) et de composantes cognitives au moment de la manipulation du *representamen* (Peirce, 1974), liées à ses usages (schèmes d'usage) – la genèse sémiotique.

Il serait réducteur de considérer l'IA dans un nouveau *travail mathématique* uniquement sous l'angle de la genèse instrumentale, car l'utilisateur, en l'occurrence un étudiant (dans cette étude un enseignant en formation initiale), utilise d'autres raisonnements, d'autres visualisations et des registres de représentations propres aux IA utilisées. Mais comment les utilise-t-il ? Quelle est la qualité de l'utilisation de cette IA ? Et comment peuvent-elles bénéficier à son propre apprentissage ? Ce sont ces questions que nous abordons dans cette recherche.

Un exemple en formation initiale d'enseignants de mathématiques

Au cours du premier semestre 2025, dans le cadre d'une session de formation, il a été demandé à un groupe de 18 enseignants en formation initiale, en huitième semestre, de créer, en s'aidant éventuellement d'une IA, une spirale d'or avec Geogebra, le logiciel libre disponible à l'université. Par la suite, des questions leur ont été posées en tant qu'enseignant afin de les amener à réfléchir aux avantages, aux difficultés et aux obstacles que peut présenter la réalisation d'une construction de ce type.

La tâche demandée aux étudiants était de réaliser des constructions géométriques à l'aide de Geogebra, avec la possibilité de s'aider d'une IA :

1. Construisez un rectangle d'or.
2. Construisez une spirale d'or.
3. En tant que futur enseignant, quelles connaissances vos futurs élèves pourraient-ils acquérir ? Des savoirs mathématiques, pratiques (de la vie quotidienne) ou informatiques.

La construction géométrique associée au nombre d'or (ou proportion divine) n'est pas triviale, notamment en ce qui concerne l'obtention de segments et de quadrilatères faisant intervenir le nombre d'or (ou proportion divine). Mais de nombreux élèves ne connaissaient pas la spirale d'or, ni la suite de Fibonacci qui y est liée. La construction exigeait également des connaissances sur Geogebra en tant qu'artefact géométrique (ou outil) non classique, comme un compas ou une règle, avec un processus d'*instrumentalisation* de la part des étudiants. Cependant, pour certains d'entre eux, cet outil ne constituait pas encore pleinement un instrument. L'instruction

mentionnait donc la possibilité de s'appuyer sur une IA s'ils en avaient besoin pour réaliser cette construction, et ce librement.

Nous présentons ci-dessous, à titre d'illustration, une spirale d'or construite par l'un de ces enseignants en formation initiale.

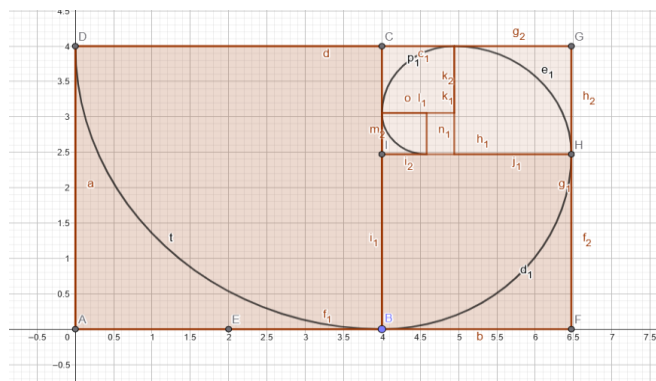


Figure 2 : Production d'un enseignant en formation

Nous présenterons ci-après les quatre cas qui ont été analysés lors de l'atelier des JETM4, au cours duquel ont été identifiés et étudiés : i) les stratégies possibles, ii) les éléments instrumentaux, discursifs et sémiotiques impliqués, iii) les domaines et les paradigmes ainsi que iv) les blocages dans le dialogue avec l'IA. Nous disposons des enregistrements vidéo des écrans d'ordinateurs et des requêtes effectuées auprès de l'IA choisie, en l'occurrence ChatGPT, pour suivre les instructions.

Sofía et le rectangle d'or : [Sem-Ins] et les paradigmes 1 et 2

L'étudiante demande d'emblée au chat de ChatGPT : « Bonjour chat, comment puis-je construire un rectangle d'or ? ». Elle suit alors les instructions de l'IA (Ins) et les affiche sur un écran adjacent au logiciel Geogebra pour réaliser la construction (voir figure 3). Nous détaillons à la suite les différents épisodes de son travail et nous concluons par une synthèse.

Épisode 1. Suivre des instructions sans comprendre le problème

Sofía lit les instructions de l'IA et recherche avec le moteur de recherche Google ce qu'est un rectangle d'or avant de suivre les instructions. Cependant, au bout de 20 minutes, elle se rend compte qu'elle n'a suivi que les instructions pour construire un carré (figure 3-a) ; elle se plaint donc à l'IA : « Chat, tu m'as donné de très mauvaises instructions ». L'IA lui donne raison et lui donne des instructions pour construire le carré à l'aide de l'outil de Geogebra permettant la construction d'un polygone régulier à quatre côtés (figure 3-b).

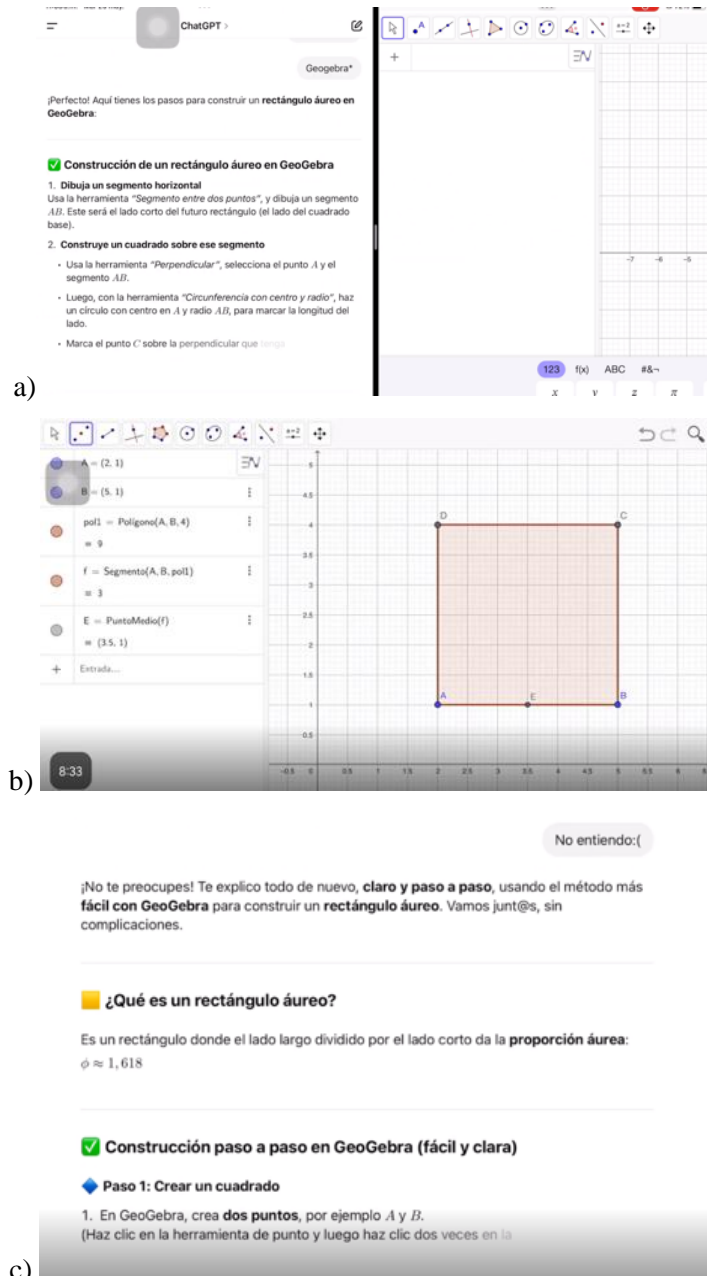


Figure 3 : Production de Sofía, épisode 1

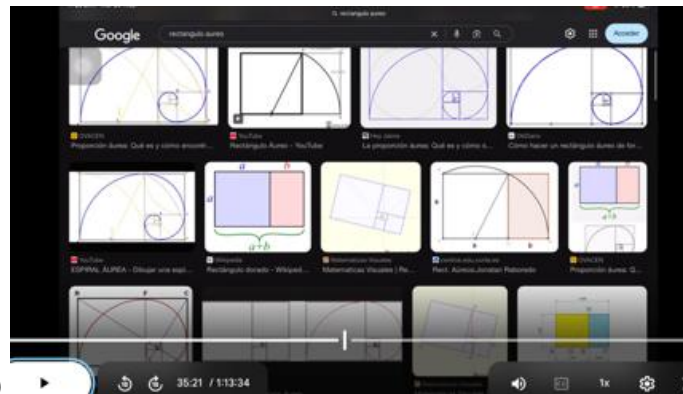
Une fois le rectangle construit à l'aide de l'applet Geogebra, Sofía ne comprend pas ce qu'elle doit faire ensuite ; elle écrit alors dans le chat de l'IA « je ne comprends pas » (figure 15-c). Après cet épisode, Sofía suit les instructions, en plaçant des points en s'aidant de la grille de Geogebra (en utilisant une géométrie cartésienne et non une géométrie synthétique).

Épisode 2. Le milieu dans la construction de nouveaux carrés

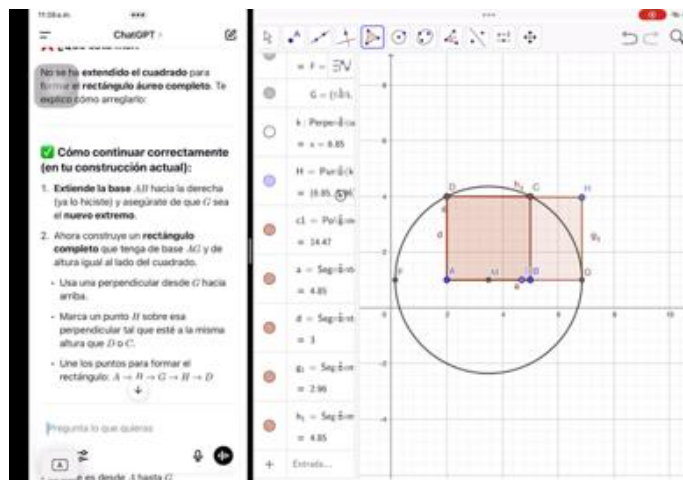
Sofía localise automatiquement le milieu, mais suit mal l'instruction pour la construction d'un cercle (ou d'un arc de cercle) requise. Elle est perdue dans la construction et demande donc à l'IA de vérifier où elle s'est trompée (elle charge le fichier dans le chat de l'IA), car ce qu'elle a construit ne ressemble pas visuellement à un rectangle d'or (Sem et iconique). L'IA « vérifie » la construction réalisée et lui fournit en réponse les étapes correctes et incorrectes (figure 4-a).

Sofía continue à poser des questions (à l'aide de *prompts*) pour améliorer sa construction, notamment pour savoir ce qu'est un rectangle d'or. Pour ce faire, Sofía consulte Google (figure 4-b) afin de savoir, une fois de plus, ce qu'est un rectangle d'or. Et bien qu'elle construise le rectangle (figure 5-c), elle retient l'image (iconique) et non le rapport (d'or) entre ses côtés.

- a) **✗ ¿Qué está mal?** Min 34.02. La estudiante
 No se ha **extendido el cuadrado** para prolonga el trazo y genera el
 formar el **rectángulo áureo completo**. Te rectángulo áureo
 explico cómo arreglarlo:



b)



c)

Figure 4 : Production de Sofía, épisode 2

Épisode 3. La construction sans comprendre le nombre d'or

Sofía construit le rectangle et, à l'aide d'un prompt, demande au chat « quelle est la proportion qui se forme ». La réponse qu'elle obtient fait référence aux carrés construits : ABCD et BCHG : « il y a congruence entre ces carrés, donc il y a une proportion de 1:1 ». Par la suite, Sofía se rend compte que la réponse n'est pas correcte, car elle comprend que le rapport concerne le rectangle construit, et elle « réclame » à nouveau l'IA (figure 5-a). Par la suite, le chat lui donne la réponse indiquant que ce que Sofía a construit est correct (figure 5-b). Malgré cela, Sofía mesure les côtés du rectangle dans Geogebra, puis effectue la division sur la calculatrice (figure 5-c) à titre de vérification.

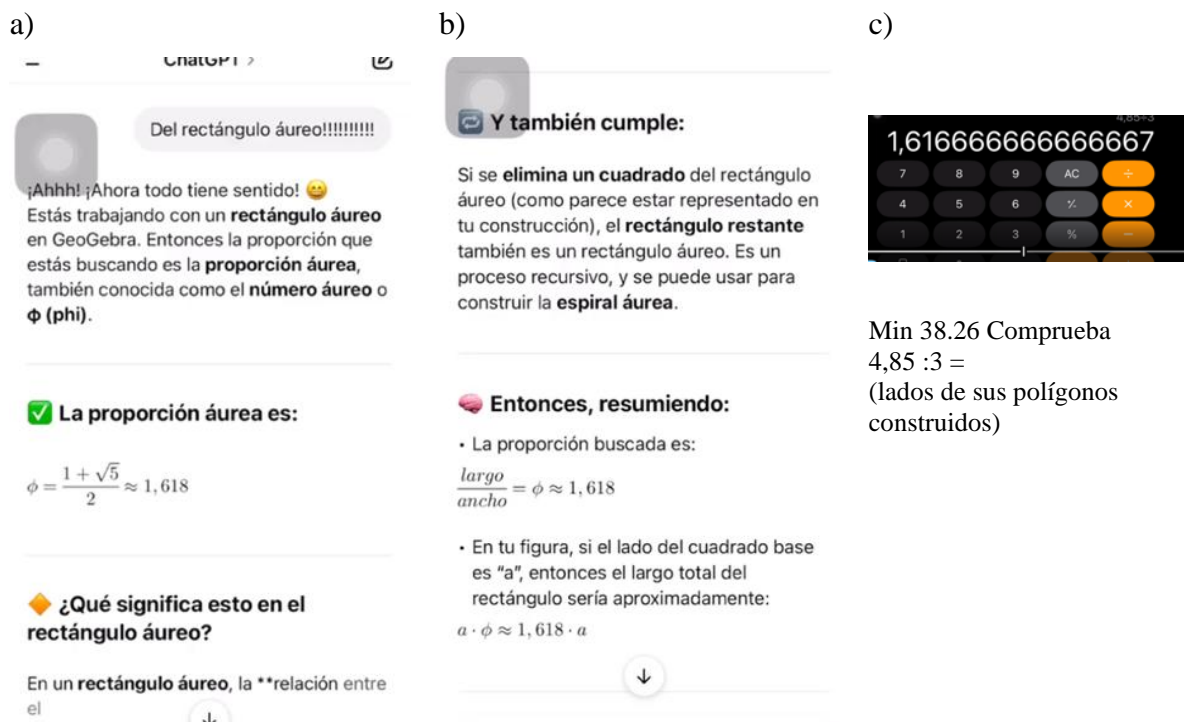


Figure 5 : Production de Sofía, épisode 3

Synthèse du travail de Sofía

Après 41 minutes de travail, Sofía parvient à construire un rectangle d'or. Cette construction a représenté une difficulté pour Sofía, non seulement sur le plan procédural, mais aussi dans la compréhension du nombre d'or qui en découlait. On observe notamment une faiblesse dans la genèse instrumentale (Ins), ce qui a limité sa capacité à mobiliser les outils de manière pertinente. De même, la genèse sémiotique (Sem), par le biais de la visualisation, a eu un effet prédominant, dans la mesure où l'étudiante s'est concentrée sur la forme sans parvenir à l'articuler avec la signification mathématique sous-jacente. Finalement, la genèse discursive (Dis) n'est pas suffisamment activée, car Sofía ne parvient ni à justifier ni à comprendre le rapport qui se dégage de la construction. Nous situons la production de Sofía dans les paradigmes 1 et 2.

A la question (P2), qui consistait à construire la spirale d'or, elle demande des instructions au chat et recommence à lui donner des consignes pour la construction du carré, qu'elle a déjà tracé ; elle envoie alors un prompt de « réclamation » pour lui demander les instructions précises permettant de le transférer dans Geogebra, ce qu'elle fait à l'aide d'une vidéo sur YouTube. Enfin, bien que Sofía se rende compte des imprécisions et des erreurs fournies par l'IA, elle répond à la question (P3) en tant que future enseignante sans faire référence à ses propres difficultés, ni faire allusion aux raisons géométriques en jeu :

En el ámbito computacional, los estudiantes podrían aprender a utilizar las distintas funciones de un software para poder construir el espiral áureo, así desarrollando distintas capacidades computacionales y además, aprendiendo a cómo buscar información sobre el tema, ya sea de la construcción de este o las propiedades del espiral

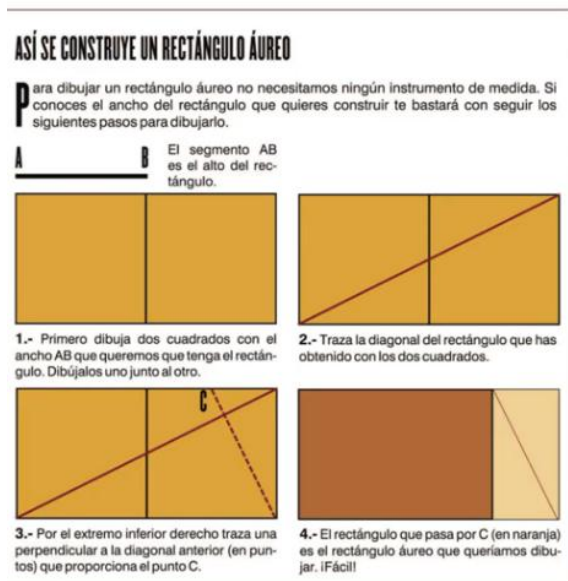
Humberto et la spirale d'or : [Ins-Dis] et le paradigme 1

L'étudiant recherche avec Google ce qu'est un rectangle d'or et considère une réponse générée par l'IA fournie par ce moteur de recherche, afin de suivre les instructions (Ins) d'une page qu'il reproduit ensuite avec succès en construisant un rectangle d'or. Cependant, il ne se rend pas compte des proportions qui existent entre les segments (Dis) et, lorsqu'il doit construire la spirale d'or il ne réutilise pas ces instructions, et il finit par tracer des arcs de cercle entre des points milieux. Ce qu'il construit ressemble visuellement à une spirale, mais n'est pas une spirale d'or, loin s'en faut.

Épisode 1. Suivre des instructions sans comprendre le problème

Humberto recherche sur Google ce qu'est un rectangle d'or pour ensuite suivre les instructions d'un document (figure 6-a) qui guide la construction de deux carrés pour former un premier rectangle, mais qui ne donne aucune indication sur la proportionnalité des segments. Humberto réalise la construction sur sa feuille de travail dans Geogebra (figure 6-b), mais sa non-compréhension de la proportionnalité qui se forme aura des conséquences sur la construction de la spirale d'or.

a)



b)

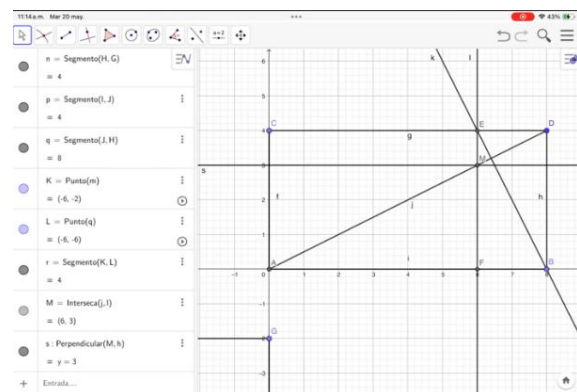


Figure 6 : Production de Humberto, épisode 1

Épisode 2. Une construction défailante.

L'étudiant consulte à nouveau différentes pages internet pour savoir ce qu'est un rectangle d'or, ce qui montre une certaine incertitude quant à la construction qu'il vient de réaliser. Par la suite, il écrit dans Google « comment construire un rectangle d'or » et élabore une nouvelle construction en essayant de reproduire les mesures observées, cette fois-ci à main levée (figure 7). Pour ce faire, il localise les points milieux en s'appuyant sur la grille de Geogebra, utilisée dans ce cas comme un outil symbolique et d'aide à la construction.

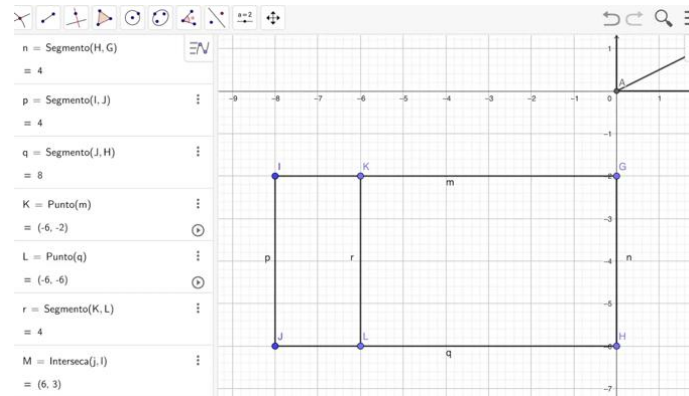
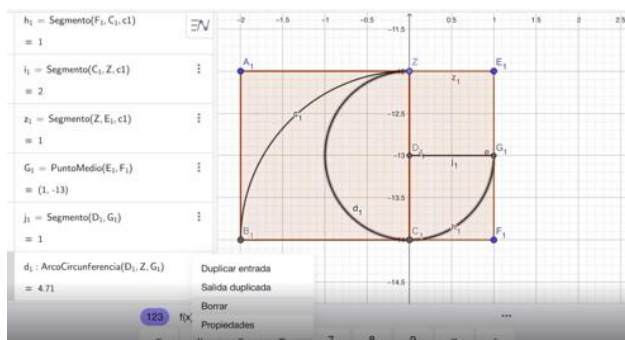


Figure 7 : Production de Humberto, épisode 2

Épisode 3. Une genèse discursive fragile

Cet épisode se caractérise par la recherche, sur différentes pages internet, de la définition d'une spirale d'or. Sans se rendre compte que le premier rectangle d'or, bien construit, lui était utile comme base pour la construction d'une spirale d'or, il l'écarte ainsi de son travail. Humberto construit automatiquement un nouveau polygone régulier à 4 côtés avec Geogebra, puis marque les points milieux des segments et trace des arcs de cercle (figure 8-a). On observe une certaine confusion dans la construction : il marque les milieux de segments puis trace des arcs de cercle (figure 8-b) pour obtenir une spirale, mais erronée.

a)



b)

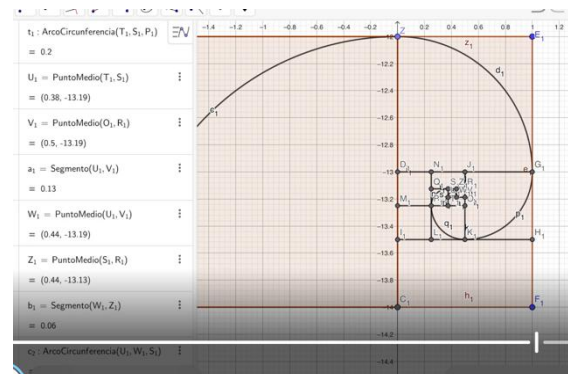


Figure 8 : Production de Humberto, épisode 3

Synthèse du travail de Humberto

On observe une certaine confusion dans la construction, car la procédure consistant à marquer les milieux des segments puis à tracer des arcs de cercle (Figure 8-b) a pour objectif d'obtenir la spirale demandée. Cependant, la construction obtenue est erronée, car il n'y a pas de compréhension des proportions entre les côtés ni des caractéristiques de la spirale d'or (Dis). Il s'agit d'un travail de construction en géométrie guidé par une visualisation iconique, donc plutôt caractéristique du paradigme 1.

Fernanda et le rectangle d'or : [Ins-Sem] et le paradigme 1

L'étudiante demande à l'IA ce qu'est un rectangle d'or, puis comment le construire. Il convient de noter que Fernanda fait trois tentatives pour construire le rectangle. Chacune d'elles présente

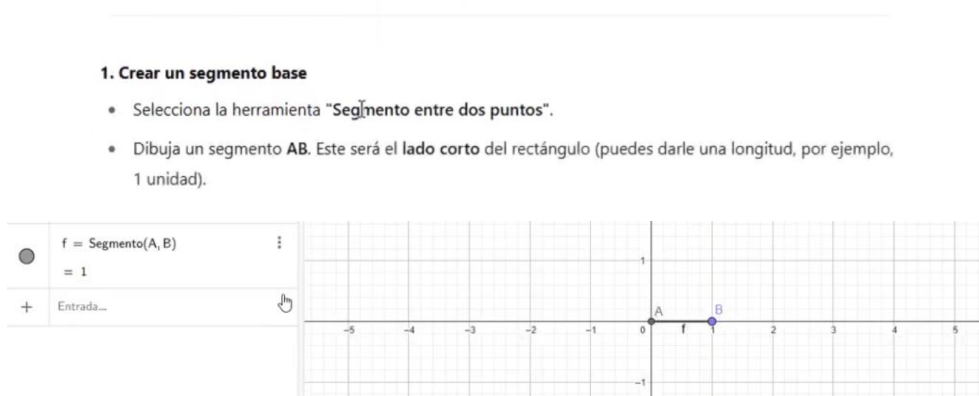
des erreurs de type instrumental, mais on constate également un manque de compréhension du rapport d'or qui s'établit entre les côtés du rectangle. L'instruction donnée par l'IA est de tracer un segment avec sa médiatrice, contrairement aux instructions données aux étudiants précédents, qui leur demandaient d'abord de construire un carré. On observe une construction numérique et non géométrique de la relation entre les côtés du rectangle, comme s'il s'agissait d'ajuster des mesures ; ce fait aura des conséquences sur la construction de la spirale d'or, dans laquelle elle procède à des ajustements et effectue un travail essentiellement visuel (Sem).

Épisode 1. La construction du segment

Elle génère un segment de longueur 1 en s'appuyant sur la grille de Geogebra (figure 9-a), puis elle utilise l'outil Médiatrice et l'outil d'intersection entre le segment et la médiatrice générée pour localiser le milieu I (figure 9-b). Bien que l'on observe l'utilisation d'un outil différent de celui fourni par l'IA, cela n'affecte pas l'objectif principal : « trouver le milieu ». Cependant, une représentation supplémentaire non nécessaire est ajoutée (la médiatrice), ce qui augmente la complexité instrumentale et peut constituer un facteur de distraction à l'origine des erreurs ultérieures commises par Fernanda. L'instruction de l'IA est imprécise et parle de « côté court ».

a)

Pasos para construir un rectángulo áureo en GeoGebra (método geométrico clásico):



b)

2. Hallar el punto medio del segmento

- Usa la herramienta "Punto medio o centro".
- Haz clic sobre el segmento AB para obtener el punto M, que es el punto medio.

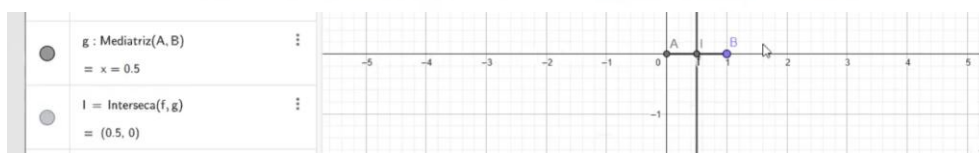


Figure 9 : Production de Fernanda, épisode 1

Épisode 2.

Cet épisode se caractérise par le fait que Fernanda trace des cercles sans bien comprendre à quoi ils servent. Elle trace une perpendiculaire passant par l'une des extrémités du segment

(figure 10-a), puis l'IA lui demande de tracer une droite perpendiculaire et des arcs de cercle (figure 10-b), mais Fernanda trace des cercles (figure 10-c) sans comprendre qu'elle doit tracer un rectangle aux proportions bien définies. Par la suite, elle utilise le bouton « polygone régulier » (figure 10-d) pour construire le rectangle demandé, mais celui-ci n'a pas la proportion d'or entre ses côtés.

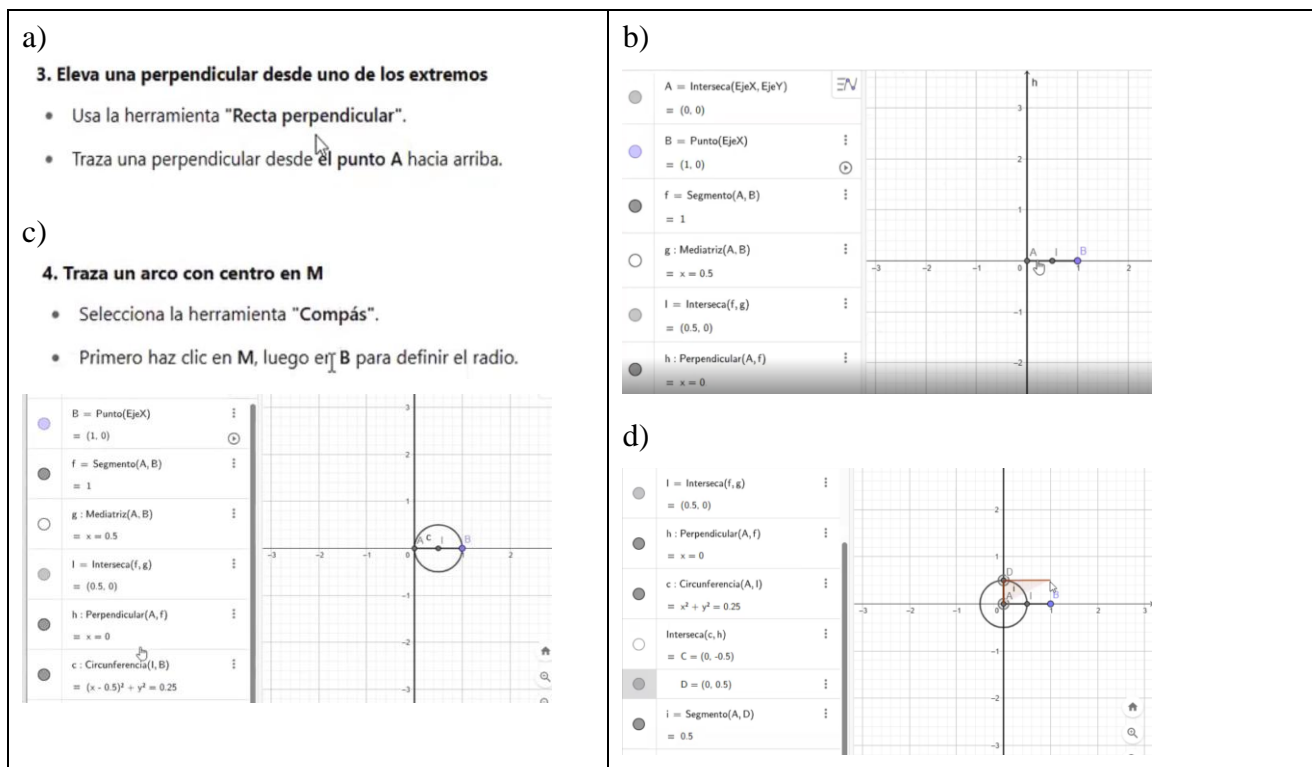


Figure 10 : Production de Fernanda, épisode 2

On relève une erreur instrumentale. L'étudiante utilise l'option « Cercle avec centre et point » (figure 10-c), ce qui entraîne la perte de la dépendance géométrique par rapport au segment précédemment construit. Cela signifie que, même si la construction semble identique, il n'est pas garanti que les proportions soient conservées si l'on déplace les points. En d'autres termes, le concept est correct, mais la dépendance géométrique est perdue.

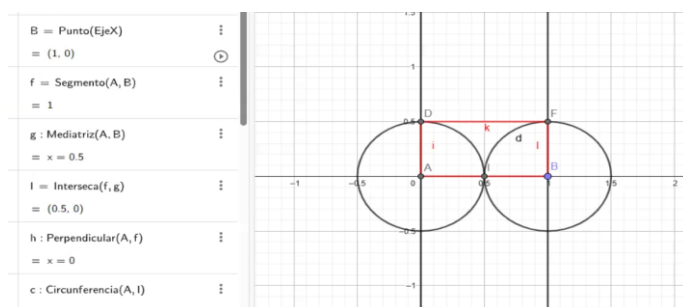


Figure 11 : Construction du rectangle

Par conséquent, le résultat obtenu n'est pas un rectangle d'or, car il ne découle pas de la division en extrême et moyenne raison et, par conséquent, le rapport de ses côtés n'est pas la raison d'or. Visuellement, il ressemble à un rectangle, mais la raison d'or ne peut pas être garantie. Les instructions de l'IA ne sont pas claires ; Fernanda a du mal à les comprendre et a effacé et

reconstruit à plusieurs reprises le rectangle, qui ne s'avère pas être un rectangle d'or (voir figure 11), ce qui témoigne d'une genèse discursive faible. Finalement, le rectangle construit ne peut pas lui être utile pour la suite du travail.

Épisode 3. La construction de la spirale d'or

Fernanda demande ensuite à l'IA comment construire une spirale d'or. La procédure suivie par Fernanda consiste en la construction de segments d'une mesure donnée, avec l'outil de Geogebra et à ajuster les mesures de ces segments (mesure de $AB = 1,618$, voir figure 12) ; elle ajuste même des segments pour que le rectangle ressemble au dessin fourni par l'IA.

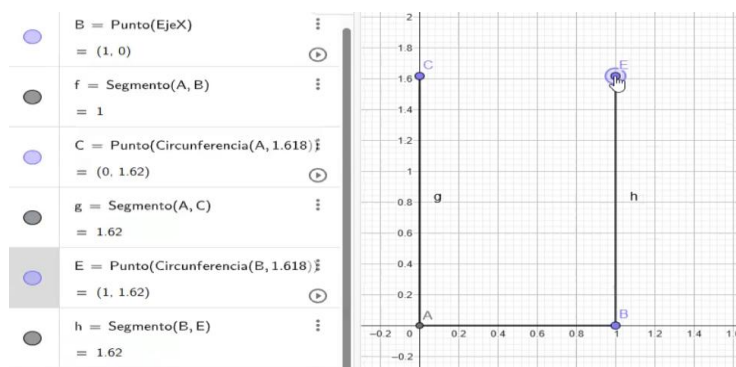


Figure 12 : Production de Fernanda, épisode 3

Elle utilise à nouveau l'outil « Segment de longueur donnée » (Ins), cette fois à partir du point B, avec une longueur de 1,618, en le déplaçant à nouveau verticalement. Ensuite, pour compléter la figure, elle relie les points C et E à l'aide de l'outil Segment.

Fernanda suit les instructions de l'IA, qui consistent à diviser le rectangle en carrés, et lit « extraire les rectangles » et « répéter le processus ». Fernanda répète ensuite la procédure en utilisant l'outil Distance pour mesurer différents côtés (Ins) et place les points manuellement à l'intérieur du polygone ; elle le fait à main levée et visuellement (Sem), et les mesure également (figure 13). Son travail relève du paradigme 1.

2. **Divide el rectángulo en cuadrados**

- Usa la herramienta "Segmento" o "Punto en objeto" para dividir el rectángulo en un cuadrado y un nuevo rectángulo áureo.
- Repite el proceso: en cada paso, extrae un cuadrado del rectángulo restante.
- Debes tener varios cuadrados encajados en forma de espiral (mínimo 5-6 para que se vea bien).

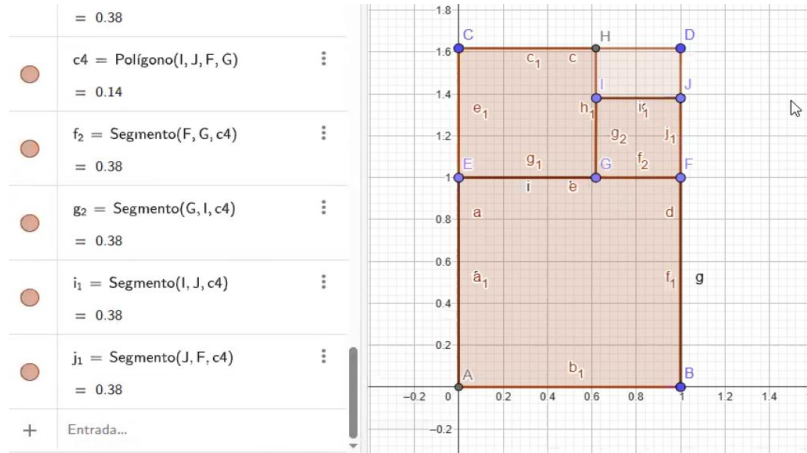


Figure 13 : Division de segments et mesure de longueurs

Au bout de 46 minutes, elle compare ce qu'elle a construit jusqu'à présent avec une image de référence représentant une spirale d'or (figure 14-a), puis utilise l'outil Distance pour ajuster ses segments (figure 14-b) et les déplace (figure 14-c).

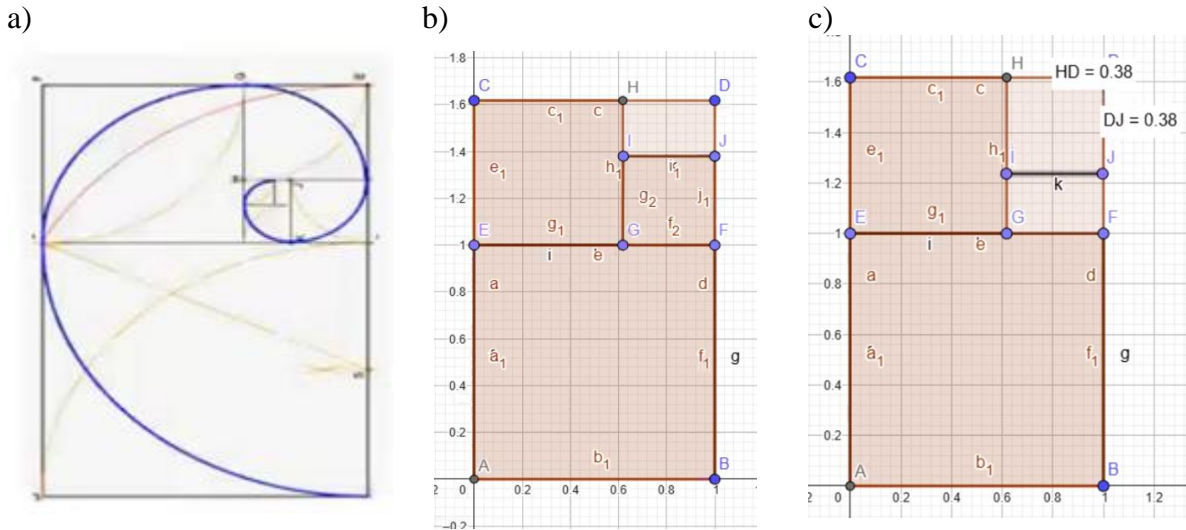


Figure 14 : Une comparaison de la figure construite

Finalement, elle utilise l'outil « secteur circulaire » pour tracer la spirale (figure 15-a). On constate une perte des propriétés géométriques, ce qui entraîne une déformation de la figure (figure 15-b) dès qu'on déplace un point.

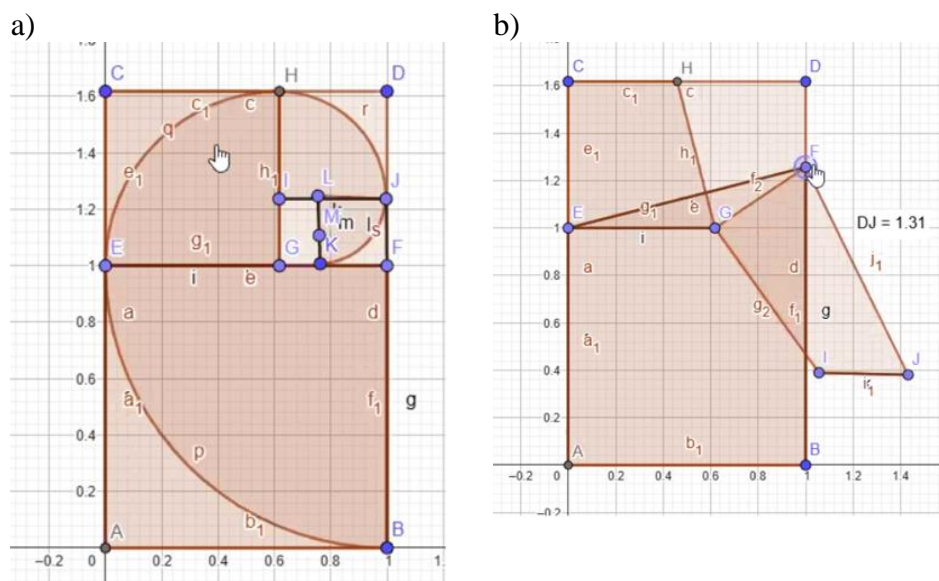


Figure 15 : La spirale d'or qui n'est pas dorée

Synthèse du travail de Fernanda

Le travail de Fernanda consiste à dessiner une figure avec un logiciel dans le paradigme 1. On peut observer des instructions ambiguës de l'IA et des raisonnements erronés tant au niveau de la construction elle-même (Ins) que de la propriété en jeu (Dis) :

- Erreur discursive : l'élève construit le « rectangle d'or » en reproduisant des mesures numériques fixes, sans tenir compte des relations géométriques qui le définissent (division en extrême et moyenne raison).
- Erreur instrumentale : en utilisant des mesures fixes et en déplaçant les objets manuellement, la dépendance géométrique entre les éléments est perdue. Le résultat n'est pas une construction géométrique, mais un « dessin approximatif ».

Nous situons la production de Fernanda dans le paradigme 1 parce que son travail se focalise sur des mesures de segments et il n'y a pas vraiment de construction géométrique. Les dessins du rectangle et de la spirale s'appuient sur une visualisation iconique déconnectée du référentiel théorique et de la raison d'or.

Alessandro et l'instrumentalisation dans le Paradigme 3

L'étudiant effectue une recherche sur Google concernant le rectangle d'or et, pour la spirale, il consulte Geogebra « en ligne ». On ne constate pas de recours à une IA générative. Sa construction se caractérise par le placement de points, dans un premier temps à l'aide de la grille de Geogebra, puis, pour la construction de la spirale, par leur automatisation². Sa construction diffère de celle de ses camarades, et le temps qu'il y a consacré est également moindre en comparaison.

² Dans cette section, le terme « automatisé » a été utilisé pour décrire la construction réalisée par Alessandro, qui a d'abord été programmée en Python avant d'être transposée dans un autre logiciel (Geogebra).

En approfondissant la raison pour laquelle il a terminé la construction si rapidement, et en ma qualité de professeure et de chercheuse, Alessandro m'a informée qu'il avait programmé en Python puis exporté les données pour la construction demandée dans Geogebra.

Épisode 1. Les premiers points

On constate qu'il place les points à sa convenance en s'aidant de la grille de Geogebra, en les espaçant d'une unité, afin de construire un carré (de côté 1) à partir d'un polygone régulier à 4 côtés. Il utilise ensuite l'outil de mesure de Geogebra pour vérifier que son rectangle répond aux exigences, et enregistre le résultat dans la même feuille de travail de Geogebra.

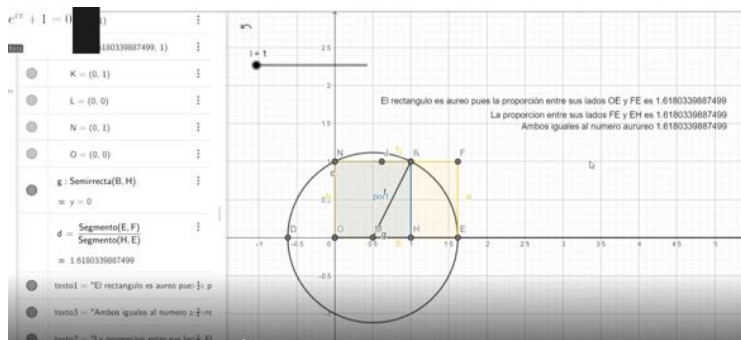


Figure 16 : Production de Alessandro, épisode 1

Épisode 2. Points automatisés

Le travail d'Alessandro est intéressant, car il parvient à comprendre qu'il a besoin de points qui font partie d'un rectangle qu'il ne dessine jamais (Sem, non iconique). Les points ne sont pas placés sur une grille, mais sont positionnés à une distance donnée (Dis) en soustrayant des segments (figure 17-b). Il convient de noter qu'auparavant, Alessandro a consulté la page Geogebra en ligne (figure 17-a), mais qu'il ne suit pas la construction proposée sur ce site.

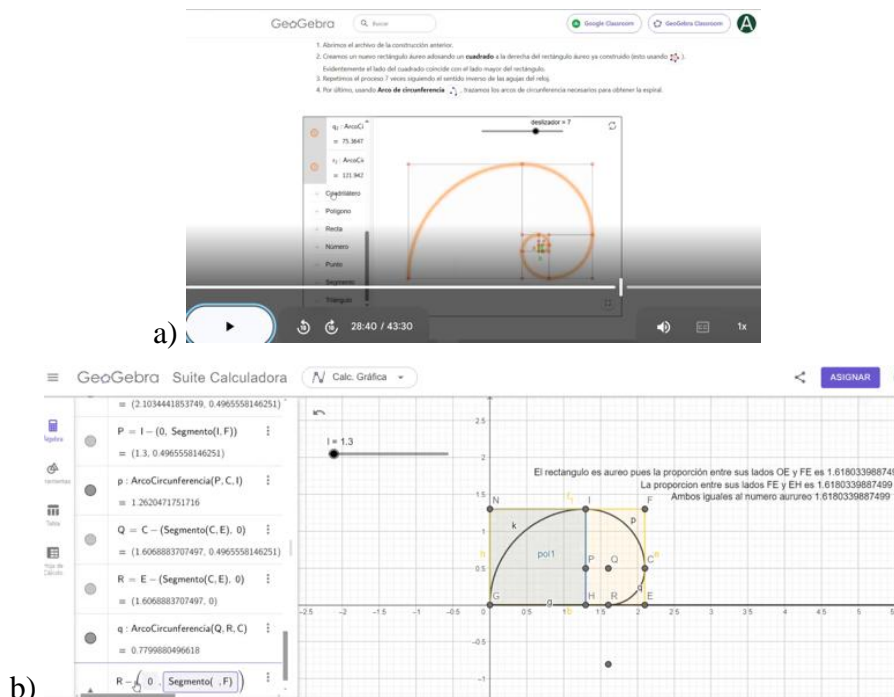


Figure 17 : Production de Alessandro, épisode 2

Épisode 3

À l'aide de l'outil Geogebra, Alessandro mesure les longueurs des segments générés par les points pour vérifier la raison d'or et l'écrit directement sur la feuille de travail Geogebra (voir la figure 17-b). De plus, il crée un curseur qui semble lui permettre de généraliser une construction (Dis) et, en quelque sorte, de mettre de côté le premier carré de côté 1. Il note ensuite sur sa feuille de travail Geogebra que la construction respecte les mesures et le nombre d'or.

À la minute 36, Alessandro a terminé les deux constructions et effectue un « zoom arrière » pour une dernière vérification, il masque les points de la construction (figure 18), puis enregistre l'image dans sa feuille de réponse. Ce temps de travail le distingue du reste de ses camarades.

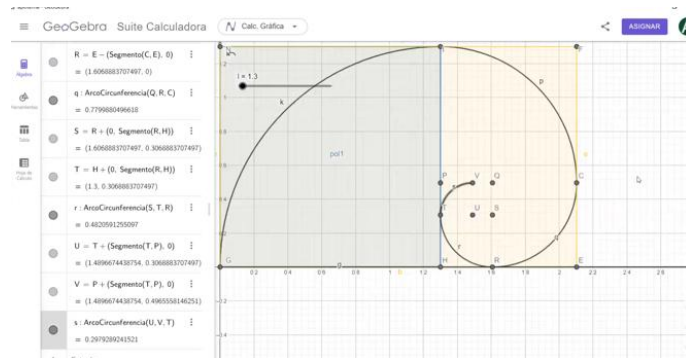


Figure 18 : Production de Alessandro, épisode 3

Dans la production d'Alessandro, on observe une abstraction consistant à visualiser un carré qu'il n'a jamais construit. Il s'agit d'une visualisation non iconique dans la genèse sémiotique, en relation avec les définitions et la propriété de proportionnalité liée à la raison d'or (Dis). De plus, il instrumentalise efficacement (Ins) avec des représentations sémiotiques plus sophistiquées en demandant à l'artefact Geogebra de placer des points présentant une proportionnalité avec des translations. Ces caractéristiques relèvent plutôt d'un travail dans le paradigme 2, avec même des traces du paradigme 3.

Enfin, à la question de savoir, en tant que futur enseignant, quels savoirs (ou connaissances) ses futurs élèves pourraient acquérir, Alessandro fait référence au développement de la pensée computationnelle, ainsi qu'à la résolution d'un problème par étapes et à la semi-automatisation du processus de construction. Il écrit :

Este ejercicio se puede aplicar para desarrollar el pensamiento computacional, mientras lo desarrollaba, tuve que **descomponer** el problema en partes más sencillas, y otra parte importante fue **depurar** la forma de desarrollar la espiral, esto me permitió “semi-automatizar” el proceso, [cela se voit dans la vidéo], y con más tiempo y conocimiento del programa podría llegar a una automatización más completa (según las herramientas de GeoGebra, u otro lenguaje, que tenga el alumno. Si hubiera usado Python, lo habría automatizado)

además de esto, es claro que se utilizan las razones y conocimientos geométricos de construcción, puntos en el plano y distancias para su construcción

Synthèse du travail d'Alessandro

Le travail d'Alessandro en matière d'IA relève de l'approche symbolique et de la programmation (approche numérique) et, contrairement à ses camarades, il n'utilise pas l'IA générative pour suivre des instructions et adapter son raisonnement aux constructions requises. Le niveau d'abstraction consistant à localiser des points et à imaginer les carrés requis témoigne d'une visualisation de type non iconique (Sem). L'instrumentalisation (Ins) dans sa construction est différente (et sophistiquée) et s'appuie sur la connaissance de la proportionnalité du nombre d'or (Dis). Ces éléments déterminants au niveau de l'ETM personnel d'Alessandro nous permettent de situer sa production entre les paradigmes 2 et 3, pour une « vision » plus générale de la propriété et la généralisation qu'il envisage.

Réflexions finales

Au cours de l'atelier, les travaux réalisés par les élèves ont été discutés dans le but de comprendre, de manière exploratoire, le type de travail mathématique qu'ils ont mené en suivant des instructions et en dialoguant avec une IA de nature différente (symbolique et générative). À cet égard, nous estimons qu'il est important de souligner la nature distincte de ces travaux, en évitant d'établir des comparaisons superficielles entre eux.

Les quatre cas présentés dans cet atelier nous permettent de comprendre certaines erreurs :

- Erreur discursive : l'élève construit des segments en leur attribuant une mesure fixe de 1,618, ce qui est incorrect, car pour que le nombre d'or soit respecté, il faut que la division en extrême et moyenne raison soit respectée. Cette division s'obtient à partir du milieu du segment AB et du prolongement de ce segment généré par un arc construit à partir dudit milieu. Par conséquent, attribuer une longueur numérique fixe ne garantit pas la propriété du nombre d'or.
- Erreur sémiotique : lorsque l'élève confond la valeur numérique approximative (1,618) avec le concept géométrique du nombre d'or, réduisant ainsi une relation mathématique à un nombre fixe. Cette confusion l'amène à reproduire des mesures plutôt qu'à construire la propriété.
- Erreur instrumentale : l'élève positionne manuellement les segments et les déplace librement, sans établir de dépendance géométrique avec les objets initiaux. En conséquence, la figure peut se déformer si l'on modifie un point précédent, ce qui montre qu'il ne s'agit pas d'une construction géométrique, mais d'un ajustement visuel.

Cette synthèse n'a pas approfondi en détail les analyses fondées sur la théorie des ETM, elle a plutôt présenté des éléments liés aux dimensions sémiotique, discursive et instrumentale. En particulier, nous avons abordé des aspects liés aux registres sémiotiques et aux processus de visualisation, aux raisonnements de validation et, enfin, à la dimension instrumentale, associée à l'utilisation de la tâche et au processus d'instrumentalisation réalisé par les étudiants. Ces éléments ont ensuite été discutés avec les participants à l'atelier.

Il convient de souligner que, sur les 18 élèves participants, la plupart ont réussi la construction géométrique et, grâce aux captures d'écran réalisées, nous disposons de données qui nous permettent d'identifier les questionnements, les difficultés et les doutes exprimés par ces élèves.

La question qui se pose ensuite est de savoir si les élèves peuvent contrôler l'IA générative (en lui demandant des instructions étape par étape) pour ensuite raisonner à partir de la construction dans un autre système symbolique (comme Geogebra). D'où la proposition de qualifier ce travail comme une *résolution assistée*. D'où également l'importance de la question de savoir comment renforcer toutes les genèses, et pas seulement la genèse instrumentale (avec les artefacts technologiques, Geogebra et ChatGPT dans ce cas précis), et faire évoluer leur ETM personnel. Nous pensons qu'avec des situations didactiques appropriées, nous pouvons réussir à guider l'apprentissage et permettre à l'humain de contrôler, grâce à son épistémè, l'utilisation des deux systèmes d'IA (génératif et symbolique).

Cela dit, il serait tentant de réduire l'idée d'un nouveau travail mathématique aux progrès rapides des logiciels ou de la technologie en général, en la considérant uniquement comme une conséquence directe des nouvelles possibilités technologiques ou comme un simple produit de l'univers discret qui caractérise largement l'informatique. Cependant, dès qu'un nouvel artefact technologique est utilisé dans le travail mathématique, nous devons nous demander si nous travaillons bien avec les mêmes objets mathématiques et les mêmes raisonnements.

Références

- Ali, O., Murray, P. A., Momin, M., Dwivedi, Y. K., & Malik, T. (2024). The effects of artificial intelligence applications in educational settings: Challenges and strategies. *Technological Forecasting and Social Change*, 199, Article 123076. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2023.123076>
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Balacheff, N. (2019). Proof, technology and learning in mathematics: Common issues and perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching*, (pp. 349–365). Springer.
- Balacheff, N. (2022). AI for the learning of mathematics. En P. R. Richard, M. P. Vélez & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. v–x). Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>
- Balacheff, N. (1994a). La transposition informatique : Note sur un nouveau problème pour la didactique. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 364–370). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1994b). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1), 9–42.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques, 1970–1990*. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnigot (Eds.). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition Didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

- Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 28, 131–181. <https://doi.org/10.4000/adsc.3286>
- Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. *Mathematics Education in the Digital Era*, 18. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-90850-8
- McCarthy, J., Minsky, M. L., Rochester, N., & Shannon, C. E. (2006). A proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955. *AI Magazine*, 27(4), 12. <https://doi.org/10.1609/aimag.v27i4.1904>
- McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5(4), 115–133. <https://doi.org/10.1007/BF02478259>
- Organisation for Economic Co-operation and Development OECD. (2019). *Artificial intelligence in society*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/eedfee77-en>
- Peirce, C. S. (1974). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne & P. Weiss, Eds.). Harvard University Press. (Édition originale publiée entre 1931 y 1958.)
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Richard, P. R. & Van Vaerenbergh, S. (2026). L'intelligence artificielle et le nouveau travail mathématique Van Vaerenbergh, S.; Vivier, L.; Arzarello, F.; Flores Salazar, J.; Gaona Paredes, J.; Gibel, P.; Gómez-Chacón, I.; Kuzniak, A.; Maschietto, M.; Montoya Delgadillo, E.; Nechache, A.; Nikolantonakis, K.; Páez Murillo, R.; Richard, P.; Vélez, M.; Venant, F (eds.). *Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8)*. Editorial Universidad de Cantabria: Santander, pp. 25-62. <https://doi.org/10.22429/Euc2026.005>
- Trouche, L. (2002). *Élèves et instruments : Approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques*. Éditions La Pensée Sauvage.
- Turing, A. M. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, 59(236), 433–460. <https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433>