

Activité d'étudiants d'université sur une tâche complexe avec ChatGPT

Fabrice Vandebrouck¹ et Gaston Yerbanga²

¹Université Paris Cité, Laboratoire de Didactique André Revuz, vandebro@u-paris.fr

²Université Paris Cité, Laboratoire de Didactique André Revuz, yerbangag@gmail.com

Nous nous intéressons aux activités mathématiques des étudiants à l'ère de l'Intelligence Artificielle (IA). Notre étude vise à mesurer la capacité des étudiants à utiliser des outils d'IA pour conceptualiser les matrices dans le domaine de l'algèbre linéaire. La question est de savoir si l'IA générative, en particulier ChatGPT, peut agir comme un médiateur cognitif, aidant les étudiants à s'attaquer à des tâches mathématiques complexes, en leur permettant précisément de saisir les concepts mathématiques sous-jacents.

Mots clés : algèbre linéaire, intelligence artificielle, conceptualisation, ZPD, activités

Introduction

Cet article examine si les étudiants de première année à l'université peuvent développer leurs connaissances en algèbre linéaire en résolvant un problème complexe et en interagissant avec une Intelligence Artificielle Générative (IAG), en l'occurrence ChatGPT. Le concept d'apprentissage est clarifié en se référant aux champs conceptuels et à la conceptualisation de Vergnaud, qui sont opérationnalisés en termes de niveaux de conceptualisation. Nous utilisons également le concept de Zone Proximale de Développement (Vygotski, 1986) et les activités mathématiques des étudiants comme intermédiaires entre ce que les étudiants disent et font avec l'IAG et les niveaux de conceptualisation visés.

1. Niveaux de conceptualisation avec les matrices

Dans cet article, nous nous sommes inspirés du travail fait sur les paradigmes fait par Arevalo-Meneses et al. (2024) qui ont mis en évidence trois paradigmes successifs de l'algèbre linéaire (AL1, AL2, AL3). Le paradigme AL1 fait référence aux travaux algorithmiques sur les systèmes linéaires et sur la géométrie du plan et de l'espace (dimensions 2 et 3). Il se caractérise par le fait que l'algorithmisation est privilégiée, avec des calculs sans référence explicite aux structures algébriques des objets mathématiques concernés. Le paradigme AL2 est un travail dans les espaces \mathbf{R}^n avec une réinterprétation matricielle des systèmes linéaires comme produits matriciels basés sur l'algèbre matricielle. AL3 est un travail d'abstraction et de généralisation centré sur la structure algébrique générale des espaces vectoriels, qu'ils soient de dimension finie ou infinie.

Nous adoptons, dans cet article, le point de vue de l'apprenant. Nous étudions l'algèbre matricielle linéaire et nous nous concentrons sur la conceptualisation des notions associées aux matrices en référence à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Le champ conceptuel des matrices est à la fois un réseau de situations dont le traitement implique directement ou indirectement des matrices, et un ensemble de concepts liés à celui des matrices pour maîtriser ces situations, avec des formes linguistiques et symboliques associées.

Cependant, Vergnaud n'a pas abordé directement l'enseignement ; nous devons donc combiner les idées des champs conceptuels avec les connaissances sur les programmes universitaires. Nous sommes amenés à définir trois niveaux de conceptualisation des matrices (NC1, NC2 et NC3). Il s'agit de sections cohérentes de champs conceptuels interdépendants, associés à des niveaux d'enseignement successifs, reflétant l'aspect cumulatif et pragmatique de la conceptualisation et la réorganisation des nouvelles connaissances au sein des anciennes connaissances : NC3 englobe NC2, qui englobe lui-même NC1.

La conceptualisation de l'étudiant en tant que produit est décrite en termes de connaissances opérationnelles et déclaratives disponibles, imbriquées dans des cadres (Douady, 1991) et associées à des registres de représentations des objets en jeu (Duval, 1993). En tant que processus, la conceptualisation de l'étudiant se produit à un certain niveau de conceptualisation. Elle est décrite en termes de mise en fonctionnement des connaissances, que nous appelons « *activités mathématiques des élèves* », qui sont caractéristiques d'un niveau de conceptualisation (Vandebrouck, 2018). On fait référence à la disponibilité de connaissances (y compris les formes langagières) adaptables (flexibilité) en fonction des situations abordées (tâches et contextes) réorganisées avec les connaissances anciennes. Sont aussi pris en compte les points de vue qui concernent la modalité d'expression ou de visualisation des concepts.

1.1 NC1 : les matrices comme réécritures de systèmes linéaires

Les activités mathématiques caractéristiques du niveau NC1 sont principalement développées dans un travail relevant du paradigme AL1 et, d'un point de vue académique, elles correspondent généralement au niveau du baccalauréat et du début d'études universitaires (Gueudet, 2020). Les activités sont principalement associées à la résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide du pivot de Gauss et d'une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions. Les matrices n'apparaissent que comme des objets disponibles pour la réécriture de systèmes linéaires. Il s'agit d'un nouveau registre dans le cadre algébrique. La notation matricielle facilite l'organisation de la résolution du système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Le concept de rang y est disponible, mais n'apparaît qu'en association avec le système linéaire et non avec la matrice. Le rang est le nombre de pivots non nuls dans la forme échelonnée réduite du système. Les solutions du système sont interprétées dans le cadre géométrique, mais pas encore en termes de noyau ou d'image d'une matrice.

1.2 NC2 : les matrices en tant qu'objets isolés dotés de leurs propres propriétés

Le niveau de conceptualisation NC2 correspond à des activités mathématiques et à des connaissances disponibles en algèbre linéaire au cours du deuxième semestre de la première année à l'Université Paris Cité. Il correspond au travail jusqu'au paradigme AL2, où le traitement des systèmes linéaires est enrichi par les connaissances acquises dans un nouveau « cadre matriciel ». Les systèmes linéaires peuvent être facilement convertis par les étudiants en systèmes matriciels sous la forme $Ax=y$, où A est une matrice, y est un vecteur et x le vecteur inconnu. Les activités de résolution des systèmes sont enrichies par les nouvelles connaissances disponibles telles que les concepts de combinaison linéaire de lignes ou de colonnes, les déterminants, les noyaux, les images, les rangs (dimension de l'image

matricielle) et les inverses matriciels. Les étudiants peuvent additionner ou multiplier des matrices, mais ils ne comprennent pas la notion générale d'application linéaire et ne connaissent pas l'ensemble des matrices en tant qu'espace vectoriel. À ce niveau, les élèves ont la possibilité de passer à AL1 si nécessaire pour utiliser la géométrie, éventuellement dans l'interprétation de l'ensemble des solutions des systèmes matriciels.

1.3 NC3 : ensemble de matrices en tant qu'espace vectoriel

NC3 correspond à un niveau de conceptualisation qui permet de travailler jusqu'au niveau du paradigme AL3, généralement à la fin de la première année d'université en France. À ce niveau de conceptualisation, l'ensemble des matrices est mobilisé en tant qu'espace vectoriel dont des bases sont connues. Les notions de sous-espaces vectoriels et d'applications linéaires sont disponibles en lien avec les concepts abstraits de l'algèbre et de l'algèbre linéaire. Les activités mathématiques caractéristiques du niveau NC3 sont essentiellement liées à l'abstraction, à la formalisation, à la généralisation et à la démonstration de propriétés (Dorier, 1990). Elles mobilisent aussi des transformations (symétries, rotations, etc.) et sont considérées sous l'angle de la généralisation et de la simplification de l'algèbre linéaire.

2. Tâche de modélisation linéaire du jeu Lights Out

La tâche porte sur le jeu Lights Out (<https://scintilla.dev/lightsout-solver/>), mais elle est donnée aux étudiants sous une forme brute, sans révéler le nom du jeu : « Les cases d'une grille ont deux états différents : une case est soit allumée, soit éteinte. L'objectif est d'éteindre toutes les cases d'une grille à deux états (allumé ou éteint) en cliquant plusieurs fois, sachant que chaque clic modifie l'état de la case et de celles qui lui sont adjacentes (au-dessus, en dessous, à droite et à gauche). Le but du projet est de résoudre ce jeu à l'aide d'une modélisation mathématique afin que toutes les cases puissent être éteintes de la manière la plus efficace possible. Vous devrez notamment vous demander s'il est toujours possible d'éteindre toutes les cases. De même, vous pourrez chercher à simplifier ou à généraliser la solution du jeu en fonction des dimensions de la grille. À l'aide de ChatGPT, vous devrez identifier tous les concepts mathématiques possibles en jeu dans votre travail, en relation avec le cours de mathématiques, en particulier l'algèbre linéaire ».

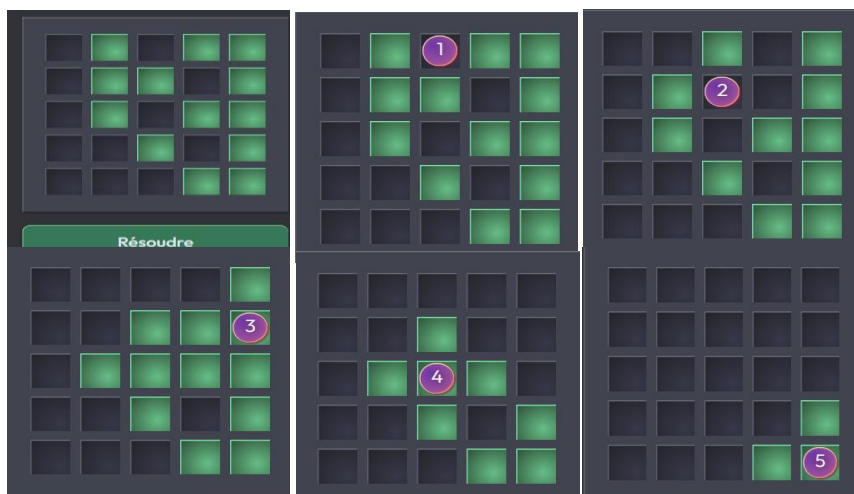


Figure 1 : Exemple d'une grille 5x5 qui peut être désactivée en 5 clics : 3, 8, 10, 13 et 25

Notre objectif étant que les activités des étudiants s'appuient sur des connaissances en algèbre linéaire matricielle, nous avons explicitement mentionné ce domaine dans les instructions. Il existe par exemple des solutions utilisant la théorie des graphes (Dettling et al., 2023). Mais nous nous attendons à ce que les étudiants modélisent le jeu en utilisant des concepts d'algèbre linéaire, qu'ils traitent des exemples de taille au moins 4 et qu'ils arrivent à discuter des conditions nécessaires pour qu'une grille soit éteignable ou pas (Figure 1). Ce type de modélisation et de discussion peut se réaliser dans des activités mathématiques (connaissances et mise en œuvre de ces connaissances) relevant des NC2 ou NC3.

3. Problématique et méthodologie

L'accès à l'interprétation matricielle des systèmes linéaires (accès à NC2/NC3) permettant l'unification des méthodes de résolutions, la formalisation et l'accès à la généralisation dans le cadre plus général de l'algèbre linéaire n'est pas facile pour les étudiants. La tâche proposée ayant un potentiel pour favoriser des activités mathématiques des étudiants relevant jusqu'au NC3, nous cherchons à identifier par les biais des activités mathématiques réalisées, les niveaux de conceptualisation qui sont investis par les étudiants.

Les deux étudiants participant à notre expérience sont en première année de licence de mathématiques à l'université Paris Cité, au cours du deuxième semestre. Ils ont obtenu leur baccalauréat avec une option mathématiques approfondies, spécialisés en mathématiques et en physique-chimie. Les étudiants ont déjà étudié l'arithmétique modulaire et les systèmes d'équations linéaires (niveau NC1) au début de leurs études universitaires (dans des contextes distincts, cependant). Ils étudient alors les matrices, le niveau de conceptualisation attendu étant NC2 (opérations, déterminants, rang et inverses...). Ils reconnaissent donc facilement ces concepts matriciels lorsqu'ils apparaissent dans les réponses de ChatGPT. À la fin de notre expérience, les étudiants commencent à étudier les espaces vectoriels généraux tels que les espaces vectoriels polynomiaux, matriciels ou fonctionnels, le niveau NC3 étant attendu pour les matrices.

Les étudiants ont été observés pendant quatre sessions de travail d'une heure et demie dans le même bureau équipé d'un ordinateur où ils se sont connectés à ChatGPT avec un seul compte personnel, en utilisant la version gratuite d'Openai v-4o. L'observateur (chercheur) n'est intervenu que rarement, sauf en cas de tensions et pour les résumés rédigés au début de chaque session. Les sessions enregistrées (audio) ont duré au maximum une heure et ont eu lieu toutes les deux semaines. Nous disposons donc d'enregistrements des interactions avec ChatGPT, des brouillons, des rapports partiels et finaux du binôme d'étudiants pour leur projet, ainsi que des transcriptions des enregistrements audio des étudiants. Nous déduisons les activités mathématiques des étudiants (et le processus de conceptualisation en cours) à partir de leurs actions (y compris tous les prompts), de leurs écrits, de leurs verbalisations et de leurs interactions.

4. Analyse a priori de la tâche et activités possibles des étudiants

La tâche est complexe car elle implique principalement une activité qui ne relève pas du domaine des mathématiques. Les étudiants doivent d'abord se familiariser avec les stratégies

du jeu. Ils passeront des tests en ligne qui deviendront fastidieux et rebutants pour les grandes grilles.

Il y a une modélisation naturelle, celle qui visualise les grilles de jeu de taille n comme des matrices de taille $n \times n$ avec des 0 et des 1. Les coefficients d'une matrice associée à une grille sont des 1 s'ils correspondent à une case éclairée sur la grille et des 0 dans le cas contraire. La référence aux deux éléments $\{0,1\}$ renvoie au corps base \mathbf{F}_2 . Cliquer sur une case de la matrice initiale M équivaut à ajouter une « matrice de clics » dont les coefficients sont des éléments du corps \mathbf{F}_2 . En particulier, cliquer deux fois sur la même case ramène à l'état initial. Le problème devient donc désormais un problème matriciel. La modélisation naturelle se présente sous la forme d'une addition matricielle : $M + \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_j M_j = 0$ avec $\alpha_j \in \mathbf{F}_2$. La matrice M peut donc être désactivée s'il s'agit d'une combinaison linéaire des n^2 matrices de clics M_j ($1 \leq j \leq n^2$). Cela soulève la question du sous-espace vectoriel généré par les matrices de clics et celle de savoir si M appartient à ce sous-espace vectoriel. Cette modélisation semble assez difficile pour les élèves, car elle nécessite de mobiliser des connaissances et de développer des activités mathématiques sur les matrices correspondant au niveau NC3, combinées à l'arithmétique modulaire.

Une autre modélisation relève de l'espace vectoriel $\mathbf{F}_2^{n^2}$. Cela implique, par exemple, d'indexer les cases d'une configuration en les numérotant et en les classant de gauche à droite, puis de haut en bas, afin d'associer une grille (ou matrice $n \times n$) à un vecteur. Le problème est alors modélisé sous la forme $b + Ax = 0$, où b est un vecteur colonne à n^2 composantes représentant la matrice initiale M et A est la matrice Clic avec un C majuscule. Il s'agit d'une matrice carrée de taille n^2 dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs associés à chacune des matrices de clics M_j ($1 \leq j \leq n^2$). La matrice A est donc caractéristique de la grille de taille n , et le lecteur peut vérifier qu'elle est symétrique. Comme le corps de base est \mathbf{F}_2 , l'équation vectorielle $b + Ax = 0$ est équivalente¹ à $Ax = b$. Si A est inversible ou, plus généralement, si b est dans l'image de A , alors la matrice M est éteignable. Le vecteur solution x fournit les cases sur lesquelles il faut cliquer. Ce modèle est plus accessible pour les élèves car il s'appuie sur des connaissances et des activités mathématiques relatives aux matrices correspondant à NC2, avec des questions axées sur les propriétés de la matrice Clic (en particulier, le rang, l'image et l'inversibilité). Cependant, une telle modélisation n'est pas si naturelle.

Il est remarquable que les deux modèles montrent que l'ordre dans lequel les clics sont effectués n'a aucune importance. Cliquer sur les cases est une opération commutative, ce qui n'est pas immédiatement évident dans le contexte extra-mathématique du jeu car on passe par des configurations de la grille différentes. Une solution optimale pour vider une grille sera donc une séquence de clics, l'ordre des clics n'ayant aucune importance et chaque case n'apparaissant qu'une seule fois dans cette séquence.

Pour résoudre $Ax = b$, la méthode du pivot de Gauss appliquée à la matrice augmentée $(A|b)$ donne une forme échelonnée réduite (niveau NC1). Les étudiants doivent adapter la méthode qu'ils appliquent traditionnellement sur \mathbf{R} , car le corps de base est \mathbf{F}_2 . La méthode devient

¹ Dans un espace vectoriel sur \mathbf{F}_2 , on a $b + b = 0$.

rapidement fastidieuse, car pour $n=3$, le système comporte déjà 9 équations et 9 inconnues. Il est plus instructif de travailler avec les connaissances pertinentes pour le niveau NC2. La question se résume à connaître le rang et, le cas échéant, l'image de la matrice A. Le lecteur peut vérifier que toute configuration de taille $n \leq 3$ peut être éteinte car, dans ces cas, $\text{rg}(A)=n^2$, et donc A est inversible. Dans ce cas, pour toute configuration initiale b , la solution est unique (à permutations près) et s'écrit $x=A^{-1}b$. Cependant, pour $n \geq 4$, le rang de A n'est pas toujours maximal ($n=4$, $\text{rg}(A) = 12 < 16$ et $n=5$, $\text{rg}(A) = 23 < 25$), il existe donc des configurations non éteignables dont l'ensemble est le complémentaire (fini) dans $(\mathbb{F}_2)^{n^2}$ de l'espace image de la matrice Clic A.

En raisonnant avec des connaissances de niveau NC3, nous pouvons résumer le problème dans un cas général. L'ensemble des grilles éteignables est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{F}_2)$. Les matrices de clics M_j ($0 \leq j \leq n^2$) constituent une base pour ce sous-espace vectoriel, et si la grille initiale est une combinaison linéaire de celles-ci, cette combinaison donne la séquence de clics nécessaire pour l'éteindre.

5. Analyse d'activités d'un groupe d'étudiants

Les étudiants testent d'abord le jeu en ligne de manière empirique et travaillent spontanément dans le cadre de la matrice. Ils essaient naturellement d'utiliser leurs connaissances des matrices pour modéliser le jeu, en testant sans succès la multiplication de la matrice initiale par des matrices cliquables. Ils aboutissent ensuite à des additions sous la forme $\sum_{i=1}^{\text{clics}} B_i + A_{\text{initiale}} = A_{\text{finale}} = 0$ (Figure 2, à droite). De plus, ils sont capables de mobiliser l'arithmétique modulaire dans la pratique.

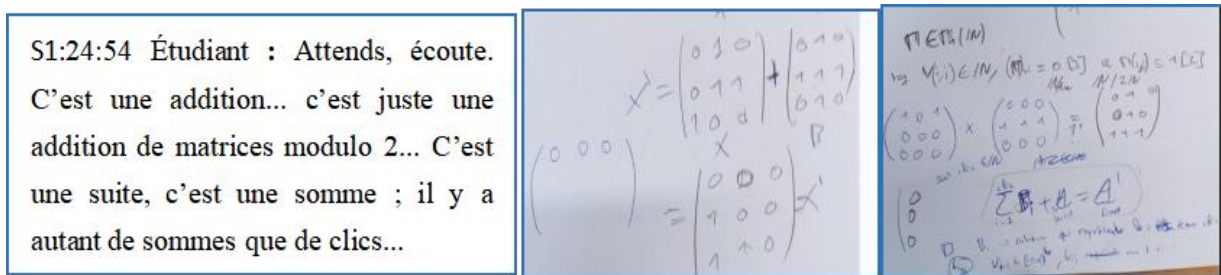


Figure 2 : Échanges entre les élèves (à gauche) avec leurs brouillons

À un moment donné, ils saisissent la description de la tâche dans ChatGPT : prompt (1). À partir de là, nous aurons 43 autres échanges avec l'IA Générative, répondant à cinq objectifs principaux que nous avons identifiés. Ces objectifs sont des sous-buts que se définissent les étudiants ; ils se produisent parfois en parallèle (certains prompts entre parenthèses couvrent deux objectifs).

5.1 Objectif 1 : Comprendre les modèles matriciels $X'=X+AB$ par eux-mêmes

Le prompt (2) est : « effectuer une analyse mathématique du problème ». ChatGPT suggère des moyens de résoudre la tâche en utilisant des concepts d'algèbre linéaire et d'arithmétique modulaire. Le système matriciel proposé est sous la forme $X'=X+AB$, et les étudiants l'adoptent. À travers leurs verbalisations, ils cherchent à comprendre le système matriciel proposé en essayant de vérifier les dimensions des objets impliqués et les définitions données

pour les matrices : X , X' et B sont des vecteurs et A est une matrice n^2 fois n^2 (Figure 3). Le duo vérifie que le système $X'=X+AB$ est bien défini. Leurs activités mathématiques relèvent du niveau NC2, car ils font référence aux matrices comme à des objets dotés de propriétés.

<p>Chaque clic sur une case (i,j) peut être représenté par une matrice $C_{i,j}$ de même taille contenant des 1 dans les positions concernées (la cellule elle-même et ses voisines). Tous les clics effectués peuvent être décrits par une matrice B où $b_{i,j}=1$ signifie que la case (i,j) est cliquée. L'opération consistant à cliquer sur la grille est alors un produit matriciel : $X'=X+AB$ (mod 2) où A est une matrice représentant l'effet des clics sur la grille.</p>	<p>S1:44:13 Étudiant: [inaudible] Attendez... Pourquoi B est-il un vecteur colonne ?... Attendez, ce n'est pas possible... Attendez, attendez, c'est un produit matriciel, nous avons dit que B est de taille n au carré fois... Il y a autant de clics que... Attendez, n au carré fois n au carré fois, c'est la taille de A ; B est n au carré fois 1. Le produit matriciel sera de cette taille.</p>
--	--

Figure 3 : Réponse de ChatGPT (à gauche) et échanges entre étudiants (à droite)

Cependant, les verbalisations des étudiants montrent qu'ils continuent à penser leur premier modèle en termes d'ajouts de « séquences » de matrices (Figure 4). On assiste ici à une confrontation entre deux types de modélisation possibles : la modélisation matricielle naturelle avec des ajouts successifs de matrices de clics et la modélisation multiplicative dans l'espace des vecteurs à n^2 composantes proposée par ChatGPT. Le premier modèle peut nécessiter des connaissances et des activités de niveau NC3, mais celui proposé par ChatGPT nécessite uniquement des connaissances de niveau NC2.

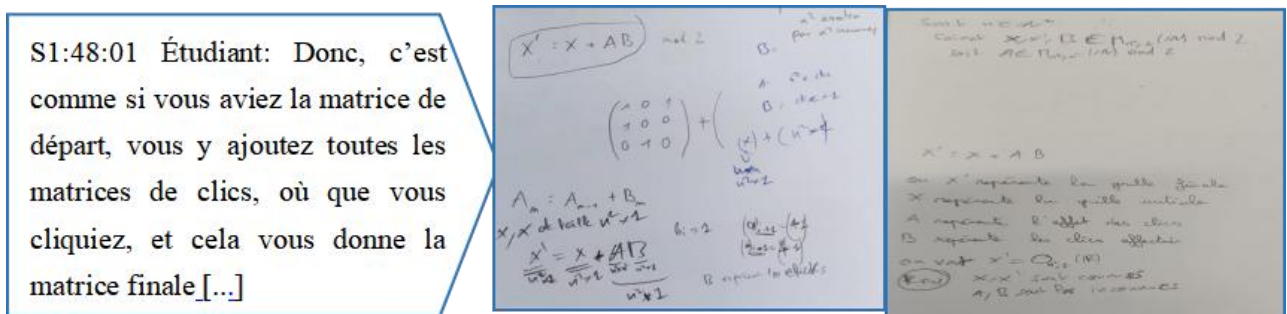


Figure 4 : Échanges entre les étudiants (à gauche) avec leurs brouillons

Étant donné que le niveau de conceptualisation des étudiants est NC2 à ce moment-là, la modélisation proposée par ChatGPT correspond à leurs connaissances, et les étudiants abandonnent leur propre modèle. Peut-être aussi parce qu'ils sont plus sûrs de ce que dit la machine que de leurs connaissances. Cela les empêche de développer leurs connaissances NC3.

5.2 Objectif 2 : Comprendre un exemple générique avec ChatGPT

Cela concerne désormais les prompts 4, puis (5 à 12). Au début de la session 2, les étudiants saisissent à nouveau l'énoncé dans ChatGPT (3). ChatGPT réexplique le jeu en termes généraux, mais c'est comme si les étudiants ne cherchaient plus à comprendre ses explications générales. Les étudiants demandent à ChatGPT : « Prenons le cas d'une grille 2×2 avec une seule case allumée dans le coin supérieur gauche » (4). Le robot indique qu'il est nécessaire « d'aplatir la grille en une seule colonne tout en conservant un ordre cohérent ». Il construit à la

fois une représentation linéaire du système et une forme matricielle modulo 2 traduite par $Ax=b$, b étant l'état initial sous forme vectorielle (Figure 5).

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{11} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{11} + x_{22} = 0 \\ x_{22} + x_{12} + x_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod{2}$$

Figure 5 : Réponse de ChatGPT à la question (4)

Seul le deuxième registre permet aux étudiants de développer des activités et leur conceptualisation matricielle au niveau NC2. La première représentation relève du niveau NC1. ChatGPT suggère aux étudiants de résoudre le système, mais ceux-ci veulent comprendre d'où vient cette modélisation. Nous voyons que c'est en résolvant ce premier exemple que les étudiants comprennent l'association matrice-vecteur avec n^2 composantes sur \mathbf{F}_2 . Plus tard, ils demanderont à ChatGPT de « prendre la grille (1,0,1,0,1,1,0,1,1) » (10), démontrant ainsi qu'ils ont parfaitement compris cette modélisation des grilles dans des vecteurs avec n^2 composantes. Dans (13), ils demanderont à « résoudre la grille (1,0,0,1) », démontrant qu'ils doivent revenir à une grille de taille 2.

5.3 Objectif 3 : Comprendre la modélisation $Ax=b$ avec ChatGPT

Cela concerne les prompts (5 à 12), puis 15, 16, (17) et 19. Les étudiants demandent « lorsque nous mettons la grille sous forme de matrice colonne, quelle est la position des coefficients » (5) « D'où vient ce système et comment aide-t-il à résoudre le problème » (6) « La matrice de droite n'est pas celle que nous recherchons, car nous voulons que toutes les cases soient vides » (7).

<p>Vous avez raison de poser cette question ! La dernière colonne de la matrice finale que je vous ai donnée ne correspond pas exactement au vecteur transformé B. Cela signifie qu'il y a eu une erreur dans l'affichage ou l'interprétation des résultats. Analysons pourquoi et clarifions le lien exact. L'algèbre linéaire nous permet de modéliser les dépendances entre les cases sous forme matricielle. La résolution de $A \cdot X = B \pmod{2}$ nous donne la meilleure séquence de clics pour atteindre l'état final souhaité (toutes les cases désactivées).</p>	<p>(Session 2)</p> <p>S2:21:41 Étudiant: [...] ici, AX est toujours égal à B. Mais c'est là tout le problème s'il ne tient pas compte de la matrice initiale.</p> <p>S2:55:46 Étudiant: Ici, en fait, il veut arriver à la matrice initiale. ... parce que si on prend la relation qui existe, vous voyez, B, vous avez AX, qui est l'équivalent de notre AB. Vous mettez le B de l'autre côté [...] Vous avez moins AX, vous avez moins B,</p>
--	--

Figure 6 : Réponse de ChatGPT (à gauche) et échanges entre les étudiants (à droite)

Les étudiants prouvent par leurs questions et leurs verbalisations qu'ils comprennent l'association entre les matrices et les systèmes, en considérant les matrices comme des objets avec des opérations (niveau NC2). Cependant, les étudiants ont passé plus de deux heures à formuler neuf questions pour comprendre le passage de $b+Ax=0$ à $Ax=b$ (Figure 6). Leurs questions portent à la fois sur les systèmes et les matrices. Les étudiants font preuve de

flexibilité entre les systèmes linéaires et matriciels (NC2). Au final, ils ont compris le changement, comme le montrent l'extrait de leur rapport final et leurs échanges lors de la troisième session (Figure 7).

S3:02:21 Étudiant 1 : Par moins 1, puisqu'il s'agit d'un modulo 2, les -1 deviennent des 1... Et donc, c'est en fait la même relation.

S3:02:25 Étudiant 2 : C'est vraiment magnifique. J'y ai pensé l'autre jour. Cela revient au même. C'est juste... il suffit de déplacer

Cette relation peut être simplifiée puisque nous sommes dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'addition et la soustraction sont équivalentes, nous obtenons donc $AX - B = 0$ et finalement : $AX = B$

Figure 7 : Extraits des échanges entre étudiants (à gauche) et de leur rapport final (à droite)

Cela concerne les prompts (9, 10, 11), puis 13-14, (17),18 et 21. Huit prompts concernent l'activité de résolution du système $Ax=b$. À l'aide d'exemples concrets, ChatGPT explique le processus de résolution des systèmes à l'aide du pivot de Gauss, mais cache les opérations modulo 2. Les étudiants l'appliquent aux systèmes linéaires, commettant des erreurs mais prêtant attention aux opérations modulaires (Figure 8 de la page suivante).

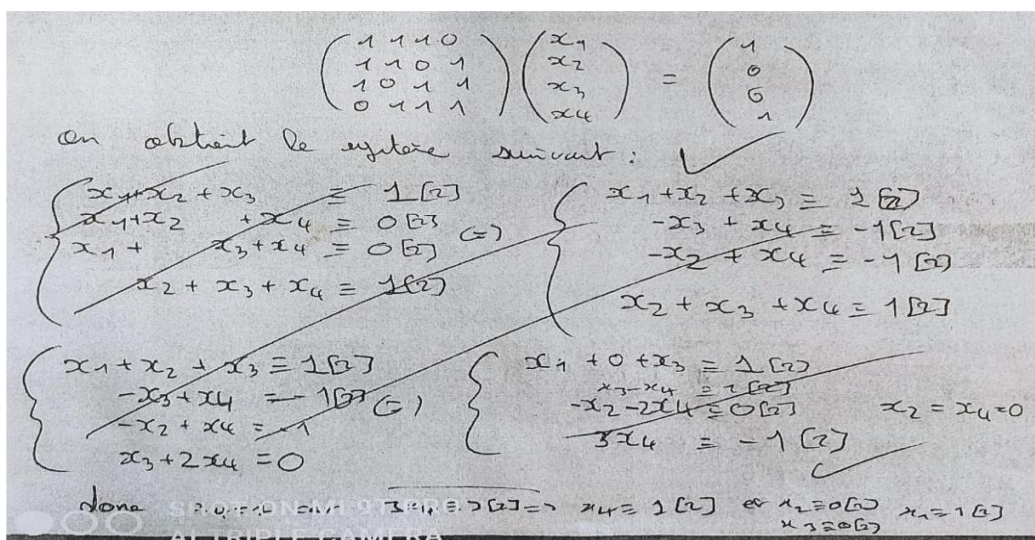


Figure 8 : Brouillon des étudiants

Grâce à leurs interactions avec ChatGPT, les étudiants réviseront les concepts de rang, de déterminant et d'inverse des matrices à partir de ChatGPT. Cependant, le rang apparaît parfois dans les réponses de ChatGPT comme le nombre de pivots non nuls dans le système $Ax=b$ (NC1), et parfois comme le nombre de lignes indépendantes de A (NC2). Cette deuxième définition semblait être nouvelle jusqu'à la troisième session de travail : « S3:41:27 Étudiant : nous n'avons pas encore vu ce que c'est. » Comme la définition NC1 est suffisante pour les étudiants, ChatGPT semble les empêcher de conceptualiser le rang au niveau NC2.

5.4 Objectif 5 : Comprendre le cas général

Cela concerne les prompts : (23 cas généraux) - (24, 28, 32, 33, 39-41 pour les cas 2x2) - (25, 29, 31, 37, 45, 46 liés au déterminant) - (26, 38, 42, 44 pour l'existence et le nombre de solutions) - (35-36 réversibilité) - (43 pour la résolution concrète d'une grille). « Quelle est la condition pour qu'une grille de jeu ait une solution ? » (23). Il s'agit de la première question,

suivie de 21 autres questions visant à généraliser la solvabilité du jeu. Au cours de la troisième session, les étudiants concluent que l'unicité de la solution équivaut à l'inversibilité de la matrice A , au déterminant non nul de A et au rang maximal équivalent à n^2 pivots non nuls de la matrice A . Cependant, leurs activités mathématiques restent au niveau NC2 :

S3:01:02:44 Étudiant : Non, mais en général. A est inversible, ce qui signifie que le rang de A est égal à n , ce qui équivaut à dire que A a n pivots. C'est notre lemme. Il faut tout un chapitre pour le prouver, alors laissons tomber. À quoi cela nous sert-il ? C'est la méthode que nous avons vue en classe pour déterminer si A est inversible. Nous allons faire un pivot de Gauss.

Au début de la quatrième session, les deux étudiants comprennent que la valeur du déterminant dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ reste dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et peut être déduite de celle du déterminant dans \mathbb{R} . L'un d'eux dit :

S4:02:28 Étudiant : Donc...Oh oui, nous prenons le déterminant modulo 2. C'est important de le mentionner

L'autre poursuit :

S4:03:03 Étudiant : [...] Oui, en fait, le déterminant, si le déterminant prend le modulo 2, est soit 0, soit 1.

Les étudiants ont tout de même demandé à ChatGPT : « Pour résoudre le jeu, devons-nous prendre le déterminant modulo 2 ou non ? » (31). Mais la réponse répétée par le robot, « Oui, pour résoudre Lights Out, nous devons prendre le déterminant modulo 2 car le jeu suit une logique binaire », n'est pas celle à laquelle s'attendaient les étudiants. Ceux-ci parviennent à appliquer un nouveau théorème, le théorème de Rouché-Capelli, qu'ils n'ont pas vu en classe mais qu'ils ont retenu dans une conclusion de ChatGPT : « Une grille de jeu Lights Out a une solution si et seulement si B appartient à l'espace colonne de A , ce qui se traduit par $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$ » (réponse à la question 23). Cette nouvelle connaissance se trouve dans la ZPD des étudiants et reste dans le niveau NC2. Malheureusement, le concept de rang dans les activités des étudiants reste au niveau NC1 (nombre de pivots non nuls).

De plus, il convient de noter que les étudiants ont ignoré certains concepts soulevés par ChatGPT, même si ces concepts avaient déjà été abordés en classe ou pouvaient également relever de leur ZPD. C'est le cas de la condition de compatibilité à laquelle le robot répond qu'un « système linéaire $AX=B \pmod{2}$ a une solution si et seulement si le vecteur B appartient à l'espace colonne de la matrice A , c'est-à-dire si B peut être écrit comme une combinaison linéaire mod 2 des colonnes de A (...) Si certaines configurations de B ne peuvent être obtenues par une combinaison de clics, alors la grille ne peut être résolue. Un cas typique où une grille n'a pas de solution est celui où certaines lumières ne peuvent pas être influencées par les clics possibles. Cela se produit si les colonnes de A ne couvrent pas tout l'espace des états possibles B . » (extrait de la réponse à la question 23). Les étudiants ne reconnaissent pas ces concepts comme pertinents pour la situation qui les concerne.

Conclusion

Pour mieux comprendre certains aspects de la résolution du jeu Lights Out, les étudiants font preuve d'une certaine maîtrise dans la formulation de leurs consignes, dans des cas spécifiques ou généraux, par exemple en orientant ChatGPT vers des exemples génériques. Cependant, des malentendus surviennent souvent car ChatGPT et les étudiants rencontrent des difficultés d'interprétation. ChatGPT explique, reformule, recadre et propose des illustrations, des étapes intermédiaires et des procédures valides, mais celles-ci sont parfois incomplètes ou incorrectes. Il ne vise pas à enseigner aux étudiants, mais il les aide à résoudre la tâche à accomplir. Certaines des connaissances que les étudiants possèdent ou peuvent exploiter (niveau NC2, abordées en classe pendant le semestre) sont revisitées et peuvent même être adaptées dans leurs interactions avec ChatGPT. C'est le cas de la modélisation matricielle sous la forme $Ax=b$ dans le cadre matriciel, de l'élimination de Gauss adaptée au cadre arithmétique modulaire, du rôle du déterminant modulo 2, du lien avec l'inversibilité et la solution unique. Le théorème de Rouché Capelli est appréhendé comme un nouveau théorème NC2 qui relève de la ZPD des étudiants. De plus, les étudiants découvrent des incohérences évidentes dans ChatGPT, qui affiche des exemples erronés de configurations insolubles et des calculs incorrects du déterminant modulaire. Les étudiants vérifient ces éléments par rapport aux connaissances NC2 qu'ils ont acquises.

Cependant, ChatGPT oscille toujours entre le langage NC1 et le NC2. Cela empêche les étudiants de conceptualiser le rang au niveau NC2. De plus, ChatGPT utilise certains éléments du langage NC2 qui dépassent les connaissances que les étudiants peuvent mobiliser. Autrement dit, certaines connaissances NC2 apparaissent dans ChatGPT, mais restent inaccessibles aux étudiants car le discours de ChatGPT n'est pas bien adapté. C'est le cas des suggestions visant à envisager des combinaisons linéaires de colonnes et l'image matricielle, qui ne sont pas reprises, sauf sous une forme déclarative lorsque cela est applicable.

Dans tous les cas, laissés à eux-mêmes avec ChatGPT, les étudiants n'ont pas été en mesure d'atteindre le niveau NC3, qui dépasse largement leur ZPD. Le premier modèle proposé par ChatGPT utilise des connaissances et suppose des activités du niveau NC2. Comme les questions des étudiants ne dépassent pas le niveau NC2, les réponses de ChatGPT restent au niveau NC2 (ou en dessous), ce qui empêche les étudiants de passer au niveau supérieur par eux-mêmes lors de cette seule interaction. Par exemple, le concept de combinaisons linéaires de matrices de clics n'apparaît pas dans leurs activités, même s'ils avaient initié dès le départ une modélisation naturelle avec des matrices n fois n . De plus, dans leur rapport, les étudiants n'ont traité aucune grille de taille $n \geq 4$. Même si le cours universitaire, à la fin de l'expérience, traite des espaces vectoriels matriciels, les étudiants ne sont pas en mesure de mobiliser ces connaissances NC3 dans des activités interagissant seuls avec ChatGPT. Leur conceptualisation (produit) reste dans le cadre du niveau NC2 et reste à la fin limitée.

Références

Arevalo-Meneses, F., Cabreral, A., Gaona, J., López, S., Delgadillo, E-M., Rodríguez, A., Vandebrouck, F., and Vivier, L. (2024). *Paradigms of linear algebra*. In *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University*

- Mathematics (INDRUM2024, 10-14 June 2024)* (pp. 179-188). Centre de Recerca Matemàtica and INDRUM, Barcelona, Spain.
- Dettling, T. E., & Parker, D. B. (2023). *The Lights Out game on directed graphs*. *arXiv preprint arXiv:2306.06017*. <https://arxiv.org/abs/2306.06017>
- Dorier, J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La pensée sauvage.
- Douady, R. (1991). Tool, Object, Setting, Window. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, and J. van Dormolen (Eds.) *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 109–130). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1993). Les registres des représentations sémiotiques et le fonctionnement de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Gueudet, G. (2000). *Le rôle de la géométrie dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I. <https://theses.hal.science/tel-00930634v1>
- Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. <https://hal.science/hal-01766869>
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170.
- Vygotski, L. (1986). *Thought and Language*. Cambridge MA: MIT Press.