

# Intégration des outils d'intelligence artificielle générative dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire : Effets sur l'espace de travail mathématique personnel

Yasna Solar Muñoz

Université Paris Cité, France ; [yasna.solar@etu.u-paris.fr](mailto:yasna.solar@etu.u-paris.fr)

*L'émergence des outils d'intelligence artificielle générative (IAG) introduit un nouvel artefact numérique dans le travail mathématique, soulevant des questionnements sur les genèses sémiotique, instrumentale et discursive mobilisées par les étudiants. Cette recherche analyse l'usage de l'IAG dans la résolution de tâches liées aux transformations linéaires (TL) par des étudiants en formation d'enseignants de mathématiques, en s'appuyant sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique et les paradigmes de l'algèbre linéaire. L'analyse révèle que l'impact de l'IAG sur l'espace de travail mathématique personnel dépend du type d'usage de l'artefact. Trois typologies d'usage sont identifiées selon la nature de la tâche (algorithmique ou abstraite) : dépendant-déléгатif, critique-stratégique, et déléгатif-acritique. Les résultats suggèrent que la prohibition de l'IAG ne constitue pas une stratégie viable ; il convient plutôt de promouvoir un usage critique de ces outils.*

*Mots-clés : Intelligence artificielle générative, espaces de travail mathématique, algèbre linéaire, paradigmes de l'algèbre linéaire, enseignement universitaire.*

## 1. Introduction

L'émergence de l'Intelligence Artificielle Générative (IAG) dans le domaine éducatif, particulièrement à partir de la massification de ChatGPT à la suite de son lancement public fin 2022, a rapidement transformé les méthodes d'étude des étudiants, devenant un phénomène qui mérite une attention détaillée (Tashtoush et al., 2024). Ce phénomène, bien qu'observable dans le comportement académique des étudiants, compte encore peu de recherches didactiques permettant de comprendre en profondeur comment ceux-ci mobilisent ces outils dans leur travail mathématique, particulièrement dans les contextes latino-américains (Panqueban et Huincahue, 2024).

Dans le contexte spécifique de l'algèbre linéaire, discipline reconnue pour les difficultés conceptuelles associées à son haut degré d'abstraction (Dorier, 2000), il est particulièrement pertinent d'interroger l'impact de l'IAG sur l'activation des genèses de l'espace de travail mathématique personnel (ETM-p) des étudiants, en considérant notamment que ces outils constituent un nouvel artefact numérique (Richard, 2024). Cette problématique acquiert une plus grande pertinence dans la formation initiale des professeurs de mathématiques, où l'algèbre linéaire constitue une matière centrale dans leur cursus académique, et où les difficultés traditionnellement identifiées — comme l'obstacle du formalisme (Dorier, 2000) — pourraient être modifiées, masquées ou même renforcées par l'usage de ces nouvelles technologies. Dans ce contexte émerge la question de savoir comment l'IAG, en tant qu'artefact technologique, modifie ou influence le travail mathématique des étudiants lorsqu'ils effectuent des tâches liées aux TL.

Dans ce cadre, la présente recherche se situe dans un champ encore peu exploré de la didactique des mathématiques. À partir d'un cadre théorique qui articule la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2022) avec les paradigmes de l'algèbre linéaire (Vandebrouck et al., 2024), l'étude apporte des preuves empiriques situées sur l'interaction d'étudiants en formation d'enseignants de mathématiques avec des outils d'IAG dans des activités liées aux TL. Au moyen de l'analyse qualitative de productions collectives, ainsi que d'entretiens semi-directifs, sont caractérisés les composantes de l'ETM-p mobilisées et les typologies d'usage de l'IAG, en distinguant les tâches à caractère algorithmique (centrées sur les procédures de calcul) et les tâches à caractère abstrait (orientées vers la conceptualisation et la justification théorique).

## 2. Cadres théoriques

### 2.1 Théorie des Espaces de Travail Mathématique

La théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) constitue un cadre d'analyse permettant d'étudier le travail mathématique dans des situations éducatives (Kuzniak et al., 2022). Cette théorie articule deux plans : le plan épistémologique (référentiel théorique, artefacts, représentamen) et le plan cognitif (preuve, construction, visualisation), interconnectés par trois genèses.

Le référentiel théorique correspond à la base logique et déductive guidant l'argumentation mathématique. Les artefacts sont des objets matériels ou symboliques médiatisant l'activité (Rabardel, 1995), incluant les outils d'IAG comme nouvel artefact numérique (Richard, 2024). Le représentamen englobe les signes médiatisant le travail mathématique au moyen des représentations sémiotiques (Duval, 1995).

Les trois genèses médiatisent l'évolution entre connaissance mathématique et mobilisation effective. La genèse sémiotique active divers registres de représentation (Duval, 2006). La genèse instrumentale transforme l'artefact en instrument via le développement de schèmes d'usage (Lagrange & Richard, 2022). La genèse discursive valide les actions via le référentiel théorique, activant raisonnement et démonstration (García-Martínez et al., 2024). L'activation simultanée de deux genèses configure trois plans verticaux : [Sem-Ins], [Ins-Dis], et [Sem-Dis] (Kuzniak & Richard, 2014), qui permettent d'analyser la circulation entre les genèses et de caractériser le travail mathématique effectif dans l'ETM personnel de l'étudiant.

Cette recherche se focalise sur l'ETM personnel (ETM-p), correspondant au travail mathématique effectif de l'étudiant face à une tâche, caractérisé par les genèses activées, les représentations mobilisées et l'usage d'artefacts.

### 2.2 Paradigmes de l'algèbre linéaire

Les paradigmes constituent des formes spécifiques de concevoir et travailler les objets mathématiques (Kuzniak et al., 2022). Gaona Paredes et al. (à paraître) identifient trois paradigmes en algèbre linéaire.

- **AL1** : propose un travail algorithmique sur les systèmes linéaires ainsi qu'un travail sur la géométrie du plan et de l'espace (dimensions 2 et 3). Les matrices y apparaissent comme une réécriture sémiotique des systèmes linéaires, sans statut d'objets mathématiques à proprement parler, servant essentiellement de support au pivot de Gauss.

- **AL2** : s'appuie sur un travail dans  $\mathbb{R}^n$ , avec une reinterprétation matricielle  $AX = B$  des systèmes linéaires. Les matrices sont considérées à la fois comme vecteurs et comme applications linéaires relativement à des bases.
- **AL3** : propose un travail fondé sur la structure algébriques d'espace vectoriel, en dimension finie ou non, où les arguments mobilisés sont souvent de nature différente du travail dans  $\mathbb{R}^n$ .

La flexibilité entre paradigmes constitue un aspect crucial de l'apprentissage (Vandebrouck et al., 2024).

### 2.3 Articulation des cadres

La théorie des ETM s'applique au domaine de l'algèbre linéaire en considérant les difficultés identifiées par Dorier (2000), notamment l'obstacle du formalisme, et les trois paradigmes proposés par Vandebrouck et al. (2024). L'intégration permet de caractériser épistémologiquement les contenus selon les paradigmes et d'analyser la manière dont les étudiants développent leur travail mathématique à travers des genèses. L'analyse distingue également trois domaines de travail mathématique : géométrique (représentations graphiques, interprétations géométriques), algébrique (manipulations symboliques, systèmes d'équations), et algébrique-linéaire (concepts structurels : noyau, image, rang, TL). L'analyse de la genèse instrumentale intègre l'IAG comme nouvel artefact, permettant d'examiner son incorporation dans l'ETM-p et d'évaluer son potentiel pour appuyer la manipulation de concepts algébriques abstraits.

### 2.4 IAG en algèbre linéaire

L'intégration de l'intelligence artificielle générative dans l'enseignement des mathématiques demeure un champ émergent. Panqueban et Huincahue (2024) signalent la rareté d'études sur l'IAG en éducation mathématique, particulièrement en langue non anglaise et en contexte latino-américain. Bagno et al. (2024) avertissent que, spécifiquement en algèbre linéaire, ces outils présentent des imprécisions conceptuelles les empêchant d'assumer le rôle de professeur ou d'assistant. Néanmoins, Vandebrouck et al. (2024) proposent que l'IAG peut faciliter l'exploration de différents chemins de résolution et l'interaction avec multiples représentations mathématiques, ce qui constitue un aspect critique pour l'apprentissage des TL. Emprin et Richard (2023) soulignent que l'enjeu réside dans la capacité des étudiants à questionner les démarches proposées et valider les résultats, développant ainsi une pensée critique particulièrement pertinente en algèbre linéaire.

## 3. Méthodologie

Une approche qualitative par étude de cas multiples prospective (Stake, 2020 ; Stebbins, 2001), de nature interprétative et descriptive, est adoptée afin d'explorer un phénomène émergent — l'usage de l'IAG en algèbre linéaire — et d'identifier des régularités susceptibles de générer des hypothèses (Hernández-Sampieri et al., 2014). La triangulation méthodologique a été assurée par le croisement des productions collectives et des entretiens.

### 3.1 Participants et contexte

L'échantillon a été sélectionné selon deux critères : (a) être inscrit au cours d'enseignement et d'apprentissage de l'algèbre et des fonctions (programme de pédagogie en mathématiques, UdeC, Chili) ; (b) avoir suivi au moins un cours d'algèbre linéaire universitaire. Les participants ont réalisé une séquence en deux temps : une tâche individuelle sans IAG (21 étudiants), puis une tâche groupale avec IAG (19 étudiants (8 groupes), dont 18 ayant participé à la phase initiale). Cette étude analyse exclusivement la phase groupale avec IAG et les entretiens. La participation a été volontaire avec consentement informé.

Pour les entretiens, ont été sélectionnés les cas présentant : (a) une ambiguïté concernant les genèses activées ou le paradigme mobilisé ; (b) une approche différente de l'analyse a priori ; (c) un usage singulier de l'IAG.

### 3.2 Instruments de collecte

Les instruments de collecte des données comprennent une tâche écrite et des entretiens semi-structurés. La tâche a été adaptée du projet ECOS-ANID (C22H03) et se compose de deux problèmes sur les TL, redessinés en suivant le cadre des ETM (Kuzniak et al., 2022) afin de mobiliser les trois genèses : sémiotique (représentations graphiques et algébriques), instrumentale (GeoGebra, IAG) et discursive (justifications théoriques). Le problème 2.1 demandait de trouver une matrice  $T$  transformant le triangle  $ABC$  en triangle  $PQR$  à partir de leurs sommets. Le problème 2.2 demandait de déterminer si une telle TL est toujours possible pour deux triangles arbitraires. Les entretiens semi-structurés ont été adaptés aux productions des étudiants nécessitant un approfondissement après l'analyse a posteriori. Les données analysées comprennent les réponses écrites des groupes, les captures d'écran des interactions avec les outils d'IAG, ainsi que les enregistrements vidéo des entretiens.

### 3.3 Procédure de collecte de données

La collecte s'est déroulée en deux phases (octobre 2024 - janvier 2025) :

- Phase groupale (90 min, présentiel) : Après signature du consentement, les 19 étudiants ont formé librement 8 groupes. Ils ont résolu la tâche en utilisant les outils jugés pertinents, incluant l'IAG, documentant leurs interactions par captures d'écran.
- Six étudiants ont été contactés par courriel pour les entretiens. Pour des raisons de calendrier académique, seuls deux ont été disponibles. Les entretiens (20-30 min) ont été réalisés à distance via Microsoft Teams, avec enregistrement sous consentement.

### 3.4 Analyse de données

**Codification** des réponses groupales (G01-G08) :

- Les genèses ont été identifiées via des indicateurs : sémiotique (représentations graphiques/algébriques/tabulaires), instrumentale (manipulation GeoGebra/IAG), discursive (justifications/argumentations).
- Les plans verticaux ont été notés selon l'articulation entre genèses.
- La classification avec les paradigmes s'est basée sur les objets mathématiques mobilisés, les techniques utilisées et le niveau de formalisation.

L'analyse a priori a été conduite pour les deux problèmes proposés :

- Le problème 2.1, de nature algorithmique, demandait de trouver la matrice T transformant le triangle ABC (sommets A(1,5), B(4,2), C(5,16)) en triangle PQR (sommets P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16)). La résolution implique la construction d'un système de six équations à quatre inconnues via les propriétés des TL. Le plan [Ins-Dis] était attendu comme prédominant, l'IAG jouant le rôle d'artefact et la validation s'appuyant sur le référentiel théorique. Le paradigme AL1 était attendu, avec une possible circulation vers AL2 lors de la vérification matricielle.
- Le problème 2.2, de nature abstraite, demandait de déterminer si une telle TL est toujours possible pour deux triangles arbitraires. Ce problème mobilise des concepts structurels d'AL2 : bases, combinaisons linéaires et propriétés de linéarité. Les plans [Ins-Dis] et [Sem-Dis] étaient attendus, nécessitant la mobilisation du référentiel théorique pour justifier ou réfuter la généralisation.

## 4. Résultats

L'analyse des productions de la phase groupale (avec IAG) révèle trois typologies d'usage selon la nature de la tâche et le rapport de l'étudiant à l'artefact.

Dans le problème 2.1 (nature algorithmique : TL appliquée à un triangle spécifique), deux typologies émergent. **Type A (dépendant-déléгатif)** : les groupes retranscrivent directement les réponses de l'IAG sans validation, la résolution dépendant entièrement de l'artefact. **Type B (critique-stratégique)** : les groupes adoptent une posture active, reformulant la solution dans un registre mathématique familier avant vérification, ou évaluant la pertinence de la réponse par rapport au problème posé.

Dans le problème 2.2 (nature abstraite : généralisation aux triangles arbitraires), une troisième typologie apparaît. **Type C (déléгатif-acritique)** : les groupes procèdent à une reformulation superficielle maintenant les affirmations de l'IAG sans questionnement critique. En raison du caractère abstrait de la question, la majorité des groupes (6/8) ont délégué la quasi-totalité de la résolution à l'IAG sans exercer de validation ; deux groupes n'ont pas répondu.

La section 4.1 présente quatre exemples illustrant ces typologies. Aussi analyse ces productions selon les genèses activées (sémiotique, instrumentale, discursive), les plans verticaux ([Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis]), les paradigmes AL mobilisés (AL1, AL2), et les domaines mathématiques (géométrie, algébrique, algébrique-linéaire).

### 4.1 Typologies d'usage de l'IAG

#### 4.1.1 Type A : Dépendant-déléгатif

Parmi les 8 groupes ayant répondu à la première partie de l'activité 2 de la tâche, deux groupes s'inscrivent dans cette typologie. Ces groupes ne développent aucun travail mathématique propre, se bornant à retranscrire la réponse fournie par l'IAG.

Ce groupe a réalisé une représentation graphique du problème posé (Figure 1) mais, par la suite, a transcrit directement la réponse fournie par ChatGPT (Figure 2) sans développer le processus de résolution algébrique.

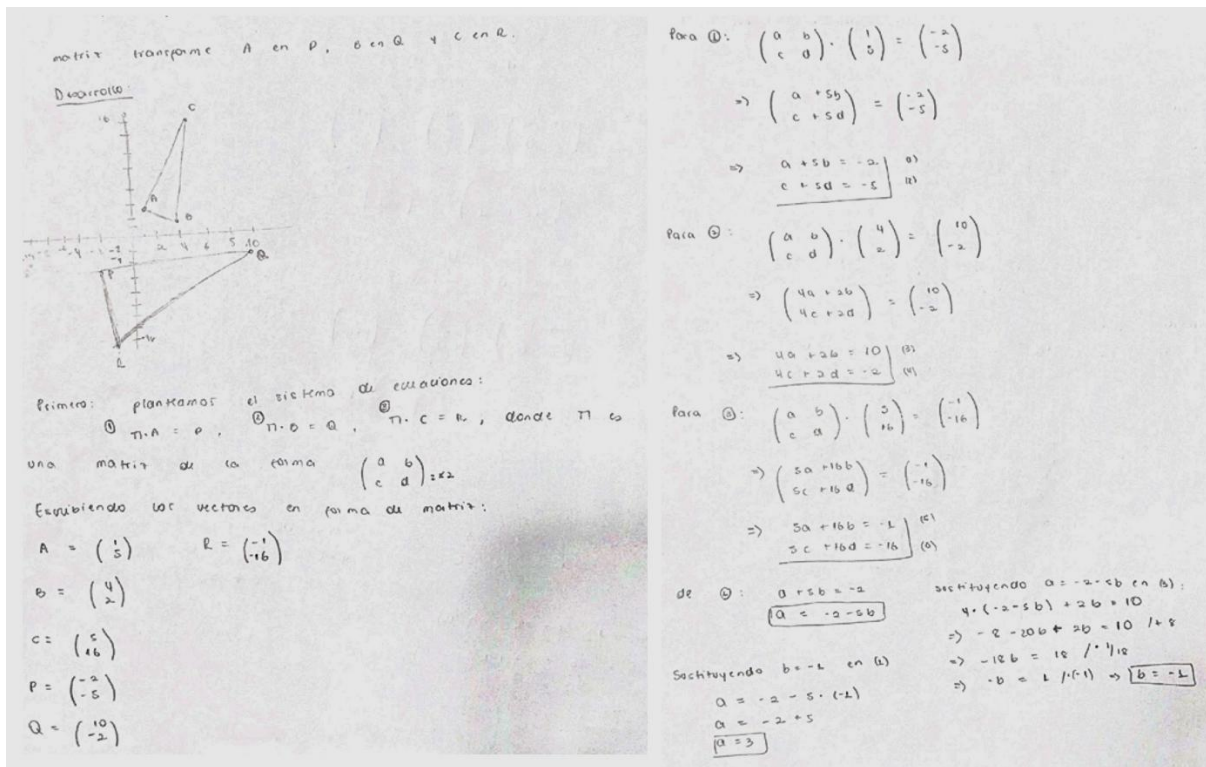


Figure 1 : Production de G03 pour la tâche 2.1

En comparant la Figure 1 avec la Figure 2, on constate que le seul apport mathématique du groupe G03 a été la représentation graphique initiale. Le développement algébrique ultérieur a été transcrit directement de ChatGPT sans validation.

Il convient de noter que l'artefact inclut une vérification finale dans sa réponse à G03, ce qui pourrait expliquer pourquoi le groupe a considéré qu'une validation propre n'était pas nécessaire. Dans ce type d'usage, l'IAG fournit non seulement la solution mais également sa vérification, ce qui laisse peu d'espace pour l'activation des genèses de l'ETM chez l'étudiant.

Le domaine géométrique est mobilisé à travers des représentations graphiques du problème. Du côté des paradigmes de l'algèbre linéaire, un écart est observable : si la réponse de ChatGPT relève d'AL2 — posant explicitement la transformation linéaire et mobilisant ses propriétés structurelles —, les groupes relevant de cette typologie se limitent à reproduire cette réponse, ce qui ne permet pas de déterminer dans quel paradigme ils opèrent effectivement. Cette absence de travail mathématique propre se reflète dans la configuration des genèses : la genèse sémiotique se réduit à une copie directe, la genèse instrumentale témoigne d'une dépendance à l'artefact, et la genèse discursive est absente, ce qui ne permet pas l'activation de plans verticaux.

Encuentra una matriz que transforme al triángulo ABC de vértices A(1,3), B(4,2), C(5,16) a un triángulo PQR de vértices P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16) sin vector de traslación

Para encontrar la matriz que transforma el triángulo ABC con vértices A(1,3), B(4,2), C(5,16) en el triángulo PQR con vértices P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16) sin vector de traslación, seguimos estos pasos:

- Planteamos el sistema de ecuaciones.** Queremos encontrar una matriz  $M$  tal que:
 
$$M \cdot A = P, \quad M \cdot B = Q, \quad M \cdot C = R$$
 Donde  $A, B, C$  y  $P, Q, R$  son los vectores de los vértices.
- Escribimos los vectores:**
  - $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}$
  - $P = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
  - $Q = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$
  - $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$
- Escribimos las transformaciones en forma de matriz.** La matriz  $M$  se puede expresar como:
 
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
 Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para cada vértice:
 

Para A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$
 Lo que resulta en las ecuaciones:
 
$$a + 3b = -2 \quad (1)$$

$$c + 3d = -5 \quad (2)$$

Para B:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+2b \\ 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$
 Lo que resulta en las ecuaciones:
 
$$4a + 2b = 10 \quad (3)$$

$$4c + 2d = -2 \quad (4)$$

Para C:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+16b \\ 5c+16d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$
 Lo que resulta en las ecuaciones:
 
$$5a + 16b = -1 \quad (5)$$

$$5c + 16d = -16 \quad (6)$$
- Resolvemos el sistema:** Para resolver este sistema, comenzamos con las ecuaciones (1) y (3) para  $a$  y  $b$ .
 De (1):
 
$$a = -2 - 3b$$
 Sustituyendo en (3):
 
$$4(-2 - 3b) + 2b = 10$$

$$-8 - 12b + 2b = 10 \Rightarrow -10b = 18 \Rightarrow b = -1.8$$
 Sustituyendo  $b$  en (1):
 
$$a + 3(-1.8) = -2 \Rightarrow a - 5.4 = -2 \Rightarrow a = 3.4$$
 Ahora resolvemos para  $c$  y  $d$  usando (2) y (4):
 De (2):
 
$$c = -5 - 3d$$
 Sustituyendo en (4):
 
$$4(-5 - 3d) + 2d = -2$$

$$-20 - 12d + 2d = -2 \Rightarrow -10d = 18 \Rightarrow d = -1.8$$
 Sustituyendo  $d$  en (2):
 
$$c + 3(-1.8) = -5 \Rightarrow c - 5.4 = -5 \Rightarrow c = 0.4$$
- La matriz resultante:** Con  $a = 3.4, b = -1.8, c = 0.4, d = -1.8$ , la matriz  $M$  es:
 
$$M = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix}$$

**Verificación:**

- $M \cdot A = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 - 5.4 \\ 0.4 - 5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$  (Correcto)
- $M \cdot B = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.6 - 3.6 \\ 1.6 - 3.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$  (Correcto)
- $M \cdot C = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - 28.8 \\ 2 - 28.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.8 \\ -26.8 \end{pmatrix}$  (Incorrecto)

Por lo tanto, la matriz que transforma el triángulo ABC en el triángulo PQR es:

$$\begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix}$$

ChatGPT

3a + 16b = -1 (5)  
5c + 16d = -16 (6)

4. **Resolvemos el sistema:** Para resolver este sistema, comenzamos con las ecuaciones (1) y (3) para  $a$  y  $b$ .

De (1):

$$a = -2 - 5b$$

Sustituyendo en (3):

$$4(-2 - 5b) + 2b = 10$$

$$-8 - 20b + 2b = 10 \Rightarrow -18b = 18 \Rightarrow b = -1$$

Sustituyendo  $b$  en (1):

$$a + 5(-1) = -2 \Rightarrow a - 5 = -2 \Rightarrow a = 3$$

Ahora resolvemos para  $c$  y  $d$  usando (2) y (4):

De (2):

$$c = -5 - 5d$$

Sustituyendo en (4):

$$4(-5 - 5d) + 2d = -2$$

$$-20 - 20d + 2d = -2 \Rightarrow -18d = 18 \Rightarrow d = -1$$

Sustituyendo  $d$  en (2):

$$c + 5(-1) = -5 \Rightarrow c - 5 = -5 \Rightarrow c = 0$$

5. **La matriz resultante:** Con  $a = 3, b = -1, c = 0, d = -1$ , la matriz  $M$  es:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Verificación:**

- $M \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  (Incorrecto)
- $M \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 2 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$  (Correcto)
- $M \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 16 \\ 0 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$  (Correcto)

Por lo tanto, la matriz que transforma el triángulo ABC en el triángulo PQR es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Figure 2 : Production de l'IAG aux questions posées par G03 pour la question 2.1

#### 4.1.2 Type B : Critique-stratégique

Une des stratégies identifiées dans l'usage critique-stratégique consiste à utiliser les outils d'IAG comme moyen stratégique pour élaborer une réponse et la reformuler dans un registre plus personnel. La Figure 3 montre que le groupe G08 a mobilisé les informations fournies par l'outil d'IAG pour rédiger sa propre solution au problème 2.1, en reformulant le processus dans un registre mathématique plus accessible.

La comparaison entre les Figures 3 et 4 montre que le groupe G08 a complètement reformulé la réponse de ChatGPT. Le processus de reformulation s'est déroulé en trois étapes : d'abord, le groupe a représenté le problème géométriquement ; ensuite, il a traduit les équations symboliques de ChatGPT en un système d'équations linéaires explicite ; enfin, il a résolu ce système algébriquement pour obtenir la matrice de transformation  $T$  que l'artefact avait fournie comme résultat.

1. En primer lugar, realizamos un bosquejo del triángulo en el plano:

$A(1,5)$   
 $B(4,2)$   
 $C(5,16)$   
 $P(-2,-5)$   
 $Q(10,-2)$   
 $R(-1,-16)$

Así, generamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 5B = -2 & (1) \\ C + 5B = -5 & (2) \\ 4A + 2B = 10 & (3) \\ 4C + 2B = -2 & (4) \\ 5A + 16B = -1 & (5) \\ 5C + 16B = -16 & (6) \end{cases}$$

De (1) sabemos que  $A = -2 - 5B$ , luego reemplazamos en (3)

$$\begin{aligned} -3 - 20B + 2B &= 10 \\ \Leftrightarrow -18B &= 13 \\ \Leftrightarrow B &= -1 \\ \Rightarrow A &= 3 \end{aligned}$$

De (2) sabemos que  $C = -5 - 5B$ , luego reemplazamos en (4)

$$\begin{aligned} -20 - 20B + 2B &= -2 \\ \Leftrightarrow -18B &= 18 \\ \Leftrightarrow B &= -1 \\ \Rightarrow C &= 0 \end{aligned}$$

Así, la matriz  $T$  que buscamos, es:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Según lo consultado a la IA (ChatGPT), debemos encontrar una T.L.  $T$  igual a una matriz de  $2 \times 2$ , tal que:

- $T \cdot A = P$
- $T \cdot B = Q$
- $T \cdot C = R$

Así, buscaremos dicha matriz como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} A + 5B = -2 \\ C + 5B = -5 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 10 \\ 4C + 2B = -2 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} 5A + 16B = -1 \\ 5C + 16B = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

Figure 3 : Production du G08 à la tâche 2.1

Resuelve estas preguntas

Para resolver las preguntas que aparecen en la imagen:

### 1. Consideración del triángulo ABC y su transformación

Dado el triángulo  $\Delta ABC$ , con los vértices  $A(1, 5)$ ,  $B(4, 2)$ , y  $C(5, 16)$ , se requiere determinar si existe una matriz de transformación lineal  $T$  que lo transforme en el triángulo  $\Delta PQR$ , cuyos vértices son  $P(-2, -5)$ ,  $Q(10, -2)$ , y  $R(-1, -16)$ .

Una transformación lineal que transforma un triángulo en otro puede representarse por una matriz de la forma  $T$ , donde se cumplen las ecuaciones:

$$T \cdot A = P, \quad T \cdot B = Q, \quad T \cdot C = R$$

Primero, construimos la matriz con las coordenadas de  $A, B, C$  en el sistema original, y lo mismo para  $P, Q, R$  en el sistema transformado. De ahí, resolvemos el sistema para encontrar la matriz de transformación.

Cuál sería la matriz  $T$  en la primera pregunta?


La matriz de transformación  $T$  que transforma el triángulo  $\Delta ABC$  en el triángulo  $\Delta PQR$  es:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple con las condiciones del sistema y realiza la transformación lineal entre los dos triángulos. (-)

Figure 4 : Production de l'IAG en réponse aux questions posées par le G08 pour la question 2.1

La stratégie suivante identifiée dans l'usage critique-stratégique consiste à confronter les réponses fournies par différents artefacts IAG. La Figure 5 montre la réponse initiale de ChatGPT lorsque le groupe G07 a soumis le problème 2.1 via une image.



Resolver el ejercicio 1

El ejercicio 1 pide que se considere el triángulo  $\triangle ABC$  con vértices  $A(1,5)$ ,  $B(4,2)$  y  $C(5,16)$ . Luego, pregunta si es posible encontrar una matriz que transforme este triángulo en otro  $\triangle PQR$ , cuyas coordenadas de los vértices sean  $P(2,5)$ ,  $Q(10,2)$  y  $R(1,-16)$ .

Para resolver este problema, necesitamos encontrar una matriz de transformación que convierta las coordenadas del triángulo  $\triangle ABC$  en las coordenadas del triángulo  $\triangle PQR$ .

Esto implica que debemos encontrar una matriz  $T$  tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Esto se puede representar como un sistema de ecuaciones lineales, que al resolverlo nos dará la matriz de transformación. ¿Te gustaría que te ayude con el desarrollo de este sistema y encontrar la matriz?

Si por favor

La matriz de transformación  $T$  que transforma el triángulo  $\triangle ABC$  en el triángulo  $\triangle PQR$  es:

$$T = \begin{pmatrix} 1.89 & -0.78 & 4.00 \\ -2.13 & -1.13 & 12.80 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz lleva las coordenadas de los vértices del triángulo  $\triangle ABC$  a las del triángulo  $\triangle PQR$ . (-)

Resolver el ejercicio 2

El ejercicio 2 pregunta si es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo  $\triangle ABC$  arbitrario en otro triángulo  $\triangle PQR$  cualquiera, y se solicita justificar la respuesta.

La respuesta general a esta pregunta es sí, es posible transformar un triángulo arbitrario en otro utilizando una matriz de transformación afín (2x3) o una transformación lineal (2x2) con traslación. Esta matriz puede realizar combinaciones de escalado, rotación, traslación y reflexión, lo que permite ajustar las coordenadas de un triángulo a otro.

De (1), despejamos  $a$  :

$$a = -2 - 5b \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2):

$$\begin{aligned} 4(-2 - 5b) + 2b &= 10 \\ -8 - 20b + 2b &= 10 \\ -18b &= 18 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $b = -1$  en (4):

$$a = -2 - 5(-1) = 3$$

Ahora sustituimos  $a$  y  $b$  en (3):

$$\begin{aligned} 5(3) + 16(-1) &= -1 \\ 15 - 16 &= -1 \quad (\text{verdadero}) \end{aligned}$$

Ahora, necesitamos encontrar  $c$  y  $d$ . Sin embargo, no hemos utilizado las coordenadas de  $P$ ,  $Q$  y  $R$  para  $c$  y  $d$ . Esto implica que no hay una única solución para  $c$  y  $d$ .

6. "Conclusión":

Por lo tanto, "si es posible encontrar una matriz que transforme  $A$  en  $P$ ,  $B$  en  $Q$  y  $C$  en  $R$ ", pero no es única.

### Problema 2

Para el segundo problema, queremos saber si es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo  $\triangle ABC$  arbitrario en otro triángulo  $\triangle PQR$  cualquiera.

- "Transformación lineal": Una transformación lineal puede ser representada por una matriz  $M$  que actúa sobre los vectores de coordenadas.
- "Condiciones de transformación": Para que una matriz  $M$  transforme un triángulo en otro, debe cumplir con las condiciones de que los vértices del triángulo original se transformen en los vértices del triángulo destino.
- "Determinante de la matriz": La matriz de transformación debe tener un determinante diferente de cero para asegurar que la transformación es invertible y que no colapsa el triángulo a un punto.
- "Conclusión": "Si, es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo  $\triangle ABC$  arbitrario en otro triángulo  $\triangle PQR$  cualquiera", siempre que la matriz sea invertible (determinante diferente de cero). Esto se debe a que cualquier transformación lineal puede ser representada por una matriz, y siempre podemos encontrar una matriz que cumpla con las condiciones necesarias para la transformación de los vértices.

### Resumen

- "Problema 1": Si, es posible encontrar una matriz de transformación, pero no es única.
- "Problema 2": Si, es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo arbitrario en otro, siempre que la matriz sea invertible.

**Figure 5 : Production de l'IAG (ChatGPT) en réponse aux questions posées par le G07 à la question 2.1**

Le groupe a ensuite consulté un autre artefact IAG, MathosAI, qui a fourni une réponse alternative (Figure 6).

Hola, necesito el desarrollo y la solución de estos ejercicios.

**Parte 2: Trabajo grupal – 3p máximo**  
 Responde de manera justificada cada uno de los siguientes problemas y preguntas utilizando alguna herramienta de inteligencia artificial. Completa el formulario\* y adjunta las capturas de pantalla que muestren tanto las indicaciones dadas a la IA como las respuestas proporcionadas por esta.

1. Considera el triángulo  $\triangle ABC$  de vértices  $A(1,5)$ ,  $B(4,2)$  y  $C(5,16)$ . Al aplicar una transformación lineal  $T$ , el triángulo  $\triangle ABC$  se transforma en el triángulo  $\triangle PQR$ , cuyos vértices son  $P(-2,-5)$ ,  $Q(10,-2)$  y  $R(-1,-16)$ . ¿Es posible encontrar una matriz que transforme  $A$  en  $P$ ,  $B$  en  $Q$  y  $C$  en  $R$ ?
2. ¿Es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo  $\triangle ABC$  arbitrario, en otro triángulo  $\triangle PQR$  cualquiera? Justifícalo detalladamente la respuesta.

Para resolver los problemas planteados, vamos a analizar cada uno de ellos paso a paso.

**### Problema 1**

Dado el triángulo  $\triangle ABC$  con vértices  $A(1,5)$ ,  $B(4,2)$  y  $C(5,16)$ , y el triángulo  $\triangle PQR$  con vértices  $P(-2,-5)$ ,  $Q(10,-2)$  y  $R(-1,-16)$ , queremos determinar si existe una matriz de transformación lineal  $T$  que transforme  $A$  en  $P$ ,  $B$  en  $Q$  y  $C$  en  $R$ .

1. **Formulación de la transformación lineal**:  
 La transformación lineal se puede expresar como:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x}$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de transformación y  $\mathbf{x}$  es un vector de coordenadas.

2. **Sistema de ecuaciones**:  
 Para cada vértice, podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} T(A) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ T(B) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \\ T(C) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. **Expresión de la matriz**:  
 Supongamos que la matriz  $\mathbf{M}$  tiene la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4. **Sustitución en el sistema**:  
 Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 5b &= -2 & (1) \\ 4a + 2b &= 10 & (2) \\ 5a + 16b &= -1 & (3) \end{aligned}$$

5. **Resolviendo el sistema**:  
 De (1), despejamos  $a$ :

$$a = -2 - 5b \quad (4)$$

VC Encuentra c y d del ejercicio anterior

Para encontrar los valores de  $c$  y  $d$  en la matriz de transformación  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , utilizaremos las ecuaciones que ya hemos establecido en el problema anterior.

Ya hemos encontrado que:

$$\begin{aligned} -a &= 3 \\ -b &= -1 \end{aligned}$$

Ahora, necesitamos encontrar  $c$  y  $d$  utilizando las transformaciones de los vértices  $B$  y  $C$ .

### Usando el vértice  $B(4,2)$  y su transformación  $Q(10,-2)$   
 La transformación para  $B$  se expresa como:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación de matrices, obtenemos:

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

1.  $12 - 2 = 10$  (que es correcto)
2.  $4c + 2d = -2$  (ecuación 1)

### Usando el vértice  $C(5,16)$  y su transformación  $R(-1,-16)$   
 La transformación para  $C$  se expresa como:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 16 \\ c \cdot 5 + d \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

1.  $15 - 16 = -1$  (que es correcto)
2.  $5c + 16d = -16$  (ecuación 2)

### Resolviendo el sistema de ecuaciones  
 Ahora tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

1.  $4c + 2d = -2$  (ecuación 1)

Figure 6 : Production de l'IAG (MathosAI) pour les questions posées par G07 à la question 2.1

Les deux outils d'IAG présentent des réponses contrastées : ChatGPT fournit une matrice avec valeurs décimales inexactes en raison d'une mauvaise interprétation de l'image du problème, tandis que MathosAI propose un développement algébrique complet aboutissant à des valeurs exactes. Le groupe G07 a privilégié l'approche de MathosAI et l'a reproduite (Figure 7), bien que les raisons exactes de ce choix ne puissent être déterminées avec certitude. Cette confrontation entre artefacts témoigne d'une attitude critique envers l'IAG.

Plusieurs domaines mathématiques sont articulés : le domaine géométrique intervient comme point de départ ou comme instrument symbolique, tandis que le domaine algébrique et celui de l'algèbre linéaire sont mobilisés pour valider critiquement les informations fournies par l'IAG. Du côté des paradigmes, les deux cas relevant de cette typologie présentent une configuration similaire : bien que la réponse de l'IAG relève d'AL2, les groupes opèrent dans un AL1 avancé — G08 reformule mathématiquement la réponse fournie en posant et résolvant algébriquement un système d'équations linéaires, sans mobiliser les propriétés structurelles caractéristiques

d'AL2 ; G07, quant à lui, valide critiqueusement la procédure proposée, sélectionne celle qui s'adapte à son ETM-p et la vérifie, amorçant ainsi une transition vers AL2. Dans les deux cas, les groupes s'approprient des résultats relevant d'AL2 en les reformulant dans leur propre paradigme, ce qui témoigne d'un usage actif de l'artefact. Cette appropriation se reflète dans la configuration des genèses : la genèse sémiotique donne lieu à une production propre, la genèse instrumentale traduit une instrumentalisation de l'IAG comme outil d'appui, et la genèse discursive, bien qu'émergente, manifeste l'amorce d'un discours mathématique autonome.

① notemos que debemos encontrar una matriz  $T$  tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix},$$

Sea  $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  entonces:

$$\begin{pmatrix} a+5b \\ c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4a+2b \\ 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25+16b \\ 25+16d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{l|l|l} 2+5b = -2 & / \cdot 4 & 4a+2b = 10 \\ c+5d = -5 & / \cdot 4 & 4c+2d = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 25+16b = -1 \\ 25+16d = -16 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l|l} -4a-20b = 8 \\ 4a+2b = 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -18b = 18 \\ b = -1 \end{array} \quad \text{entonces } a = 3$$

Luego

$$\begin{array}{l|l} -4c-20d = 20 \\ 4c+2d = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -18d = 18 \\ d = -1 \end{array} \quad \text{entonces } c = 0$$

$\therefore T\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  es la matriz que necesitamos

Figure 7 : Production de G07 pour la tâche 2.1

#### 4.1.3 Type C : Délégatif-acritique

La Figure 8 montre la réponse du groupe G01 à la tâche 2.2, qui consiste en une reformulation de la réponse fournie par ChatGPT (Figure 9).

En comparant le développement de G01 (Figure 8) avec la production de ChatGPT (Figure 9), on observe que le groupe ne copie pas textuellement la réponse, mais réalise un développement algébrique autonome : généralisation à des variables abstraites, construction de diagrammes et systèmes d'équations explicites. Cependant, ce travail est guidé par l'affirmation incorrecte de ChatGPT selon laquelle il est toujours possible de trouver une telle matrice. Le groupe investit du temps à démontrer algébriquement cette affirmation fautive sans questionner sa validité, aboutissant à une conclusion erronée. Cela témoigne d'un usage délégatif-acritique sophistiqué : délégation de la compréhension à l'IAG avec exécution autonome des procédures, mais absence de validation critique.

Il est pertinent de noter que la réponse fournie par ChatGPT au groupe G01 présente des imprécisions. Bien que ChatGPT affirme que « l'on peut toujours trouver une matrice » si les triangles ont la "même orientation", cette condition est insuffisante ni du point de vue de l'algèbre linéaire, ni du point de vue géométrique. La condition réelle, comme établi dans l'analyse a priori, requiert que les combinaisons linéaires  $C = \alpha A + \beta B$  et  $R = \alpha P + \beta Q$  maintiennent les mêmes coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui constitue une restriction plus forte que la «

même orientation » au sens de ChatGPT, condition nécessaire mais non suffisante pour garantir l'existence de la matrice T.

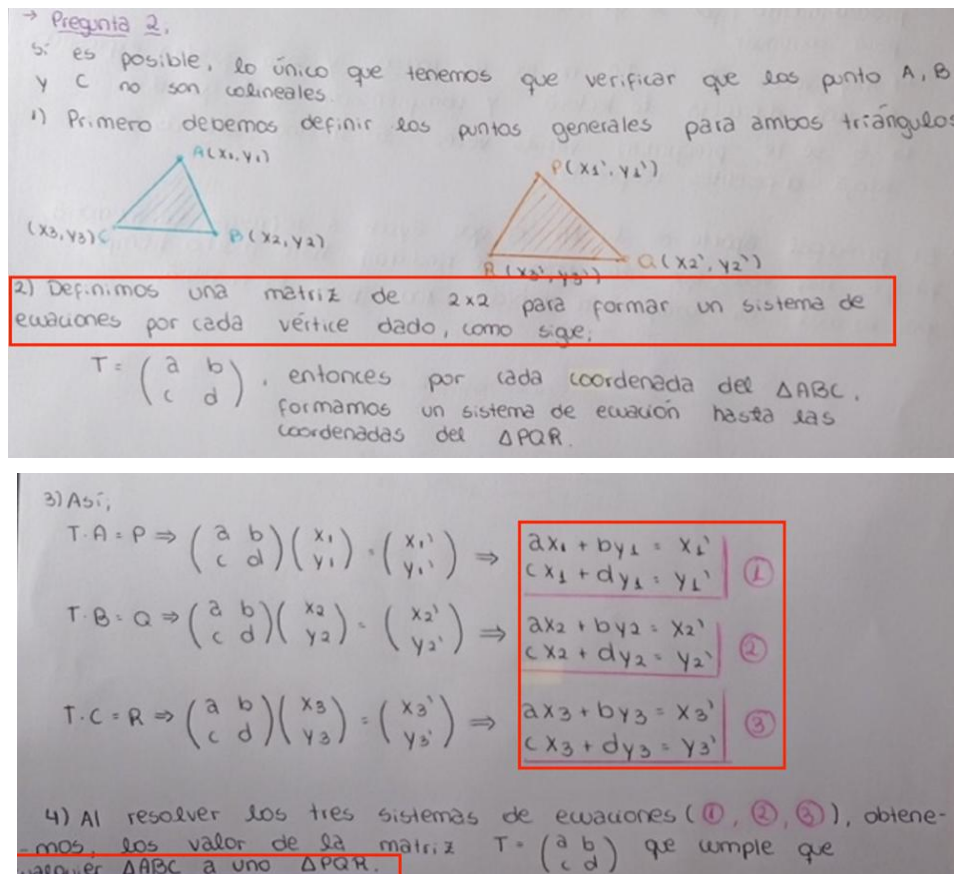


Figure 8 : Production de G01 pour la tâche 2.2

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Y es posible generalizar esto para cualquier <math>\Delta ABC</math> y pasar a un <math>\Delta PQR</math>?</p> <p>Si, es posible generalizar la transformación lineal que lleva un triángulo <math>\Delta ABC</math> a otro triángulo <math>\Delta PQR</math>, pero la transformación no será necesariamente única. Esto se puede hacer siempre que los puntos A, B, y C no sean colineales (es decir, no estén alineados), porque en ese caso, los triángulos definen planos distintos en el espacio.</p> <p><b>Proceso General</b></p> <p>Dado un triángulo <math>\Delta ABC</math> con vértices <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math>, y <math>C(x_3, y_3)</math>, y un triángulo <math>\Delta PQR</math> con vértices <math>P(x_1', y_1')</math>, <math>Q(x_2', y_2')</math>, y <math>R(x_3', y_3')</math>, que encontramos una transformación lineal T que lleve los</p> | <p><b>Proceso General</b></p> <p>Dado un triángulo <math>\Delta ABC</math> con vértices <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math>, y <math>C(x_3, y_3)</math>, y un triángulo <math>\Delta PQR</math> con vértices <math>P(x_1', y_1')</math>, <math>Q(x_2', y_2')</math>, y <math>R(x_3', y_3')</math>, queremos encontrar una transformación lineal T que lleve los puntos de <math>\Delta ABC</math> a <math>\Delta PQR</math>.</p> <p>1. Definir la matriz de transformación T: Se representa como una matriz <math>2 \times 2</math>, que actúa sobre los vectores de coordenadas.</p> $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ <p>1. Establecer el sistema de ecuaciones: Como hicimos anteriormente, formamos un sistema de ecuaciones al aplicar la transformación lineal T a los puntos A, B, y C, y equiparar los resultados con los puntos P, Q, y R:</p> $T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix}$ <p>Esto genera un sistema de seis ecuaciones lineales (dos por cada vértice), que se puede resolver para las incógnitas a, b, c, y d.</p> <p>1. Resolver el sistema: Al resolver el sistema de ecuaciones, obtenes los valores de a, b, c, y d, que definen la matriz de la transformación.</p> <p><b>Generalización</b></p> <p>Este proceso se puede aplicar a cualquier conjunto de tres puntos no colineales A, B, C y P, Q, R, y siempre se puede encontrar una matriz que realice la transformación lineal si los triángulos tienen la misma orientación (no están reflejados). Si los triángulos están reflejados, se puede agregar una reflexión, lo cual es otra transformación lineal.</p> <p>Si te gustaría, puedo mostrar un ejemplo con coordenadas arbitrarias.</p> | <p>1. Establecer el sistema de ecuaciones: Como hicimos anteriormente, formamos un sistema de ecuaciones al aplicar la transformación lineal T a los puntos A, B, y C, y equiparar los resultados con los puntos P, Q, y R:</p> $T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix}$ <p>Esto genera un sistema de seis ecuaciones lineales (dos por cada vértice), que se puede resolver para las incógnitas a, b, c, y d.</p> <p>1. Resolver el sistema: Al resolver el sistema de ecuaciones, obtenes los valores de a, b, c, y d, que definen la matriz de la transformación.</p> <p><b>Generalización</b></p> <p>Este proceso se puede aplicar a cualquier conjunto de tres puntos no colineales A, B, C y P, Q, R, y siempre se puede encontrar una matriz que realice la transformación lineal si los triángulos tienen la misma orientación (no están reflejados). Si los triángulos están reflejados, se puede agregar una reflexión, lo cual es otra transformación lineal.</p> <p>Si te gustaría, puedo mostrar un ejemplo con coordenadas arbitrarias.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figure 9 : Production de l'IAG aux questions posées par G01 pour la tâche 2.2

Il convient d'identifier ici les opportunités de recul critique qui auraient pu être activées. Le groupe G01 pose un système de 6 équations à 4 inconnues. Or, un tel système n'admet en général pas de solution (référence au référentiel théorique d'algèbre linéaire) : il existe des conditions pour qu'il y ait des solutions, notamment liées au rang du système. Cette observation mathématique aurait dû susciter un questionnement chez les étudiants, en appui sur leurs

connaissances mathématiques : pourquoi ChatGPT affirme-t-il que c'est "toujours possible" alors que le système posé est en général incompatible ?

Le groupe G01, ne possédant pas un référentiel théorique mobilisable en AL2 ou n'activant pas ce référentiel de manière critique, n'a pas détecté cette incohérence. Il a pris la réponse de ChatGPT et l'a reformulée sans la questionner. Cela révèle non seulement une délégation acritique, mais aussi la vulnérabilité des étudiants face à des réponses incorrectes de ces outils d'IAG lorsqu'ils ne mobilisent pas leur référentiel théorique pour valider les informations fournies.

Le domaine géométrie-algèbre est articulé, mais reste circonscrit au paradigme AL1. Du côté des paradigmes, bien que la réponse de l'IAG mobilise des éléments d'AL2 — conditions d'existence, rang, combinaisons linéaires des transformations linéaires —, les groupes relevant de cette typologie ne se positionnent pas dans ce paradigme : ils manipulent des outils algébriques et tentent une généralisation, sans s'appuyer sur les propriétés structurelles caractéristiques d'AL2. L'absence de ce référentiel théorique se manifeste de manière particulièrement visible lorsque le groupe tente de démontrer par papier-crayon une affirmation fournie par ChatGPT qui s'avère mathématiquement incorrecte — l'incapacité à reconnaître qu'un système de 6 équations à 4 inconnues peut être incompatible révèle que le développement algébrique produit ne s'appuie pas sur un référentiel théorique relevant d'AL2, conduisant à une acceptation acritique de la réponse de l'artefact. Cette configuration se reflète dans les genèses : la genèse sémiotique est partielle, les signes étant mobilisés sans appropriation des signifiés ; la genèse instrumentale reste faible, l'IAG étant convoquée comme simple artefact sans exploitation critique ; et la genèse discursive, bien qu'apparemment active, est pseudo-active — le raisonnement produit repose sur une affirmation de l'IAG acceptée sans validation critique.

#### **4.2 Synthèse transversale : domaines, genèses et paradigmes.**

Les résultats permettent d'identifier plusieurs tendances transversales dans le cadre de cette étude de cas. Dans les domaines mathématiques, les groupes mobilisent des représentations dans le domaine géométrique, mais celles-ci demeurent insuffisamment articulées au référentiel théorique d'AL2, ce qui tend à limiter le développement de la genèse discursive dans l'ETM-p — une difficulté qui semble davantage liée aux limitations préexistantes du référentiel théorique personnel qu'aux effets propres de la médiation technologique.

Au sein des genèses, le type d'usage de l'IAG apparaît comme le facteur structurant : dans la typologie A, les trois genèses sont absentes ou passives, ce qui ne favorise pas un travail mathématique personnel ; dans la typologie C, leur activation est partielle et déconnectée — la genèse discursive, bien qu'apparemment présente, est orientée par une affirmation de l'IAG acceptée sans validation critique —, ce qui semble limiter l'émergence de plans verticaux dans l'ETM-p ; dans la typologie B en revanche, les genèses sont activées et en circulation, ce qui peut être interprété comme le résultat d'un processus d'instrumentalisation de l'artefact favorisant la configuration des plans verticaux.

En ce qui concerne les paradigmes associés à chaque typologie, les réponses de l'IAG mobilisent systématiquement des éléments d'AL2, tandis que les groupes opèrent dans AL1 —

avec des degrés variables d'avancement — ou dans un paradigme indéterminable lorsque l'absence de travail propre ne permet pas d'identifier clairement leur positionnement effectif.

## **5. Conclusion**

### **5.1 Dialogue avec la théorie**

L'algèbre linéaire présente des difficultés largement documentées dans la littérature didactique, lesquelles sont principalement associées à son haut degré d'abstraction. Dorier (2007) souligne que ces difficultés se manifestent lorsque les étudiants manipulent des représentations formelles sans comprendre la structure mathématique sous-jacente. Ce phénomène s'observe clairement dans les résultats de cette recherche, où la majorité des étudiants développe son travail mathématique personnel dans le paradigme AL1, privilégiant les vérifications numériques, l'essai-erreur et les manipulations procédurales dans un domaine principalement géométrico-algébrique, mettant en évidence des difficultés à mobiliser les propriétés structurelles et la formalisation propres à AL2. L'articulation avec des approches géométriques apparaît de manière variable, selon l'étudiant et la solidité de son référentiel théorique personnel.

Dans ce cadre, l'obstacle du formalisme, identifié par Dorier (2007) et largement documenté dans des recherches antérieures (Dubinsky, 1997 ; Dorier, 2000 ; Sierpiska, 2000 ; Trigueros et Oktaç, 2005 ; Parraguez et Oktaç, 2010), se reflète dans les productions des étudiants face à des activités liées aux concepts de TL, tant dans des contextes sans outils d'IAG que dans des contextes médiatisés par ceux-ci. Les résultats montrent que l'introduction de l'IAG n'élimine pas les difficultés conceptuelles préexistantes. Dans certains cas, ces difficultés peuvent être masquées par des usages délégatifs de l'artefact (Types A et C), tandis que dans d'autres elles peuvent être révélées, particulièrement lorsque l'étudiant adopte un usage critique-stratégique (Type B) qui inclut des processus de vérification et de validation.

Parmi les principales préoccupations identifiées se trouve le phénomène de délégation du travail mathématique de la part de l'étudiant vers l'outil, phénomène observé de manière récurrente lorsque les réponses de l'IAG ne sont ni questionnées ni validées. Dans cette ligne, Richard (2024) caractérise l'IAG comme un nouvel artefact numérique, soulignant l'existence de limitations inhérentes à ces outils qui peuvent affecter les processus d'apprentissage en algèbre linéaire. Ces limitations se présentent dans cette recherche à travers les typologies d'usage A et C, où l'absence de réflexion critique empêche l'activation des genèses de l'ETM-p.

En même temps, Richard (2024) soulève des interrogations concernant les potentialités de l'IAG, lesquelles deviennent visibles lorsque les étudiants adoptent un usage critique-stratégique de l'artefact (Type B). Néanmoins, les résultats suggèrent que la conception de l'IAG comme possible « tuteur virtuel » s'avère peu plausible en l'absence d'une pensée critique suffisamment développée de la part de l'étudiant. Cette observation coïncide avec les propositions de Bagno et al. (2024), qui signalent que, particulièrement dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, ces outils ne peuvent assumer le rôle de professeur ou d'assistant en raison des imprécisions conceptuelles qu'ils présentent dans leurs réponses. Ces imprécisions ont été observées de manière explicite dans les réponses de l'IAG face à des tâches à caractère abstrait, où les étudiants ont eu davantage de difficultés à détecter les incohérences. Ce phénomène reflète une difficulté métacognitive plus large : la capacité limitée des étudiants à valider de

manière critique leur propre production mathématique, difficulté qui s'accroît lorsque la réponse provient d'un artefact technologique.

## **5.2 Synthèse interprétative et projections didactiques**

À partir des résultats obtenus, on observe que les outils d'IAG ne constituent pas en eux-mêmes un facteur déterminant de l'apprentissage mathématique. Leur impact sur l'ETM-p de l'étudiant dépend du type d'usage qu'il fait de l'artefact.

Lorsque l'IAG est utilisée de manière dépendante ou délégitime (Types A et C), on peut difficilement parler de travail mathématique de l'étudiant au sens strict, étant donné que l'activité est transférée intégralement à l'artefact sans activation des genèses de l'ETM-p. L'étudiant se limite à transcrire, sans mobiliser de connaissances mathématiques propres. En revanche, un usage critique-stratégique de l'IAG (Type B) favorise l'activation des genèses sémiotique, instrumentale et discursive, permettant que l'outil puisse se transformer progressivement en un instrument au service du travail mathématique de l'étudiant, particulièrement à travers des processus de vérification, validation et reformulation.

L'analyse met en évidence que le facteur déterminant dans cette transformation est la mobilisation du référentiel théorique personnel de l'étudiant. Sans un référentiel théorique suffisamment structuré, l'étudiant manque de critères pour évaluer la cohérence des réponses de l'IAG : par exemple, dans le cas du groupe G01, l'absence de mobilisation de propriétés structurelles des TL a empêché de détecter l'incompatibilité entre le système posé (6 équations, 4 inconnues) et l'affirmation erronée de l'IAG. En revanche, lorsque le référentiel théorique est mobilisé activement, l'étudiant peut contraster la réponse de l'IAG avec ses connaissances préalables, identifier des incohérences et reformuler ses stratégies, transformant l'artefact en un instrument au service de son travail mathématique.

D'un point de vue didactique, ces résultats s'inscrivent dans la perspective de Panqueban et Huincahue (2024), qui soulignent la nécessité d'une intégration adéquate de l'IAG dans l'enseignement des mathématiques. Les données issues des entretiens permettent d'affiner cette orientation : c'est uniquement confronté à un contre-exemple concret proposé par la chercheuse que l'étudiant E013 amorce une réflexion critique — « no será posible siempre... quizás tiene que cumplirse algunas condiciones » (entretien, 17 janvier 2025) —, ce qui révèle que la médiation humaine externe demeure un levier indispensable pour faire émerger une posture critique que l'interaction seule avec l'IAG n'avait pas suscitée. Ce même étudiant reconnaît explicitement la dépendance de l'outil à ses propres connaissances : « si no comprendo los conceptos, la IA no me ayuda » (entretien, 17 janvier 2025), confirmant ainsi que l'IAG ne saurait suppléer un référentiel théorique personnel insuffisamment structuré. En ce sens, les résultats obtenus suggèrent que la formation des étudiants à un usage critique de l'IAG, fondée sur la promotion de pratiques systématiques de vérification et de confrontation des réponses, ainsi que sur l'intégration de situations telles que le contre-exemple, constitue une orientation didactique pertinente pour favoriser le développement de l'ETM-p.

Pour que cette approche soit efficace, il est indispensable non seulement de renforcer le référentiel théorique associé au paradigme AL2, en insistant sur les propriétés structurelles des objets de l'algèbre linéaire (tels que les systèmes linéaires, le déterminant ou le rang) mais aussi

de former explicitement les étudiants à adopter une posture critique dans l'usage des artefacts de type IAG. De même, il devient nécessaire d'articuler le paradigme AL1 avec AL2, en favorisant l'analyse de cas particuliers comme moyen de comprendre et de justifier des résultats de caractère général. Ces orientations didactiques sont particulièrement pertinentes dans les premiers cours d'algèbre linéaire. Toutefois, dans la formation avancée, il serait également pertinent d'introduire des éléments du paradigme AL3 (approche axiomatique, généralisation de structures), qui renforcent la posture métacognitive nécessaire à un usage réflexif de l'IAG.

En ce sens, sont identifiées comme particulièrement pertinentes les tâches didactiques qui favorisent la pensée critique et articulent les paradigmes de l'algèbre linéaire. Dans des tâches ancrées dans AL1 (algorithmiques, numériques), l'IAG pourrait être utilisée pour obtenir des explications ou des reformulations de procédures, tandis que la vérification des calculs peut être réalisée de manière plus fiable avec des outils de calcul symbolique (Wolfram Alpha, Symbolab, GeoGebra, etc.). En revanche, dans des tâches qui mobilisent AL2 (propriétés structurelles, justification théorique), il devient crucial de développer la capacité d'analyse critique de l'étudiant pour évaluer la validité des réponses. Qui plus est, des tâches qui promeuvent la réflexion en AL3 (approche axiomatique, généralisation de structures) pourraient contribuer à renforcer la posture métacognitive nécessaire à un usage réflexif de l'IAG, bien que cette étude n'ait pas abordé ce paradigme de manière spécifique.

### 5.3 Limites de l'étude

Cette étude présente certaines limites. L'échantillon réduit (21 étudiants, une université chilienne) empêche une généralisation directe des résultats. De plus, le contexte spécifique (formation d'enseignants de mathématiques, algèbre linéaire, TL) implique des résultats fortement contextualisés. Enfin, le développement rapide des outils d'IAG (version 2024) suggère une évolution possible des typologies d'usage identifiées. Néanmoins, au-delà des caractéristiques techniques, les facteurs favorisant une interaction mathématiquement productive demeurent : solidité du référentiel théorique, posture critique et métacognitive, et conception de tâches exigeant validation explicite.

### Références

- Bagno, E., Dana-Picard, T., & Reches, S. (2024). ChatGPT in linear algebra: Strides forward, steps to go. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2403.15399>
- Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Springer. [https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4\\_1](https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1)
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. [https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/jsp/index\\_view\\_direct.jsp?record=bmr:UNIMARC:3388603](https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/jsp/index_view_direct.jsp?record=bmr:UNIMARC:3388603)
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z>

- Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 28, 131-181. <https://doi.org/10.4000/adsc.3286>
- Gaona Paredes, J., López Fernandez, S., Menares Espinoza, R., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (à paraître). *Paradigmes de l'algèbre linéaire* [Cahier de recherche]. ECOS-ANID C22H03.
- García-Martínez, I., Pinto-Rojas, I. E., Molina-Del Sol, M., & Rodríguez, M. A. (2024). Desempeño de estudiantes de pedagogía matemática en dos problemas sobre operaciones binarias: un estudio de caso. *Formación Universitaria*, 17(3), 139-152. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062024000300139>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.<sup>a</sup> ed.). McGraw-Hill Education.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical workspaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4I), 515. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Lagrange, J.-B., & Richard, P. R. (2022). Instrumental genesis in the theory of MWS: Insight from didactic research on digital artifacts. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 211-228). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9)
- Panqueban, D., & Huincahue, J. (2024). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic review. *Uniciencia*, 38(1), 1-17. <https://doi.org/10.15359/ru.38-1.20>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462>
- Richard, P. R. (2024). El nuevo trabajo matemático: Un desafío en constante renovación para la educación matemática. *UCMaule*, 67, 9-30. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.67.9>
- Stake, R. E. (2020). *Investigación con estudio de casos* [PDF]. Ediciones Morata. [https://edmorata.es/wp-content/uploads/2022/06/STAKE.InvestigacionEstudioCasos\\_prw-1.pdf](https://edmorata.es/wp-content/uploads/2022/06/STAKE.InvestigacionEstudioCasos_prw-1.pdf)
- Stebbins, R. A. (2001). What is exploration? In *Exploratory research in the social sciences* (pp. 2-18). SAGE Publications. <https://doi.org/10.4135/9781412984249.n1>
- Tashtoush, M. A., Wardat, Y., AlAli, R., & Saleh, S. (2024). Artificial intelligence in education: Mathematics teachers' perspectives, practices and challenges. *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, 5(1), Article 20. <https://doi.org/10.52866/ijcsm.2024.05.01.004>

Vandebrouck, F., Arévalo-Meneses, F., Cabrera, A. J., Gaona, J., López, S., Menares, R., Montoya-Delgadillo, E., Rodríguez, A., & Vivier, L. (2024, junio). Paradigms of linear algebra. *Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Barcelona, España. <https://hal.science/hal-04639843>