

# À propos d'AlphaGeometry

## Sur les interactions entre actants humains et logiciels d'intelligence artificielle dans un contexte scolaire

Alain Kuzniak<sup>1</sup>, Laurent Vivier<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université Paris Cité, LDAR, France ; [alain.kuzniak@u-paris.fr](mailto:alain.kuzniak@u-paris.fr), [laurent.vivier@u-paris.fr](mailto:laurent.vivier@u-paris.fr)

L'universalité surprenante des Méthodes, l'élégante brièveté des démonstrations, la finesse et la promptitude des solutions les plus difficiles, une nouveauté singulière et imprévue, tout attirait les esprits, et il se faisait dans le Monde Géomètre une révolution bien marquée.

### Fontenelle, Éloge de Rolle, 1718

L'IA favorise, a priori, l'activation de la genèse discursive (de preuve). Le travail mathématique développé par les élèves s'inscrit en premier lieu dans le plan [Ins-Dis] avant de se développer dans le plan [Dis-Sem]. Cela le distingue du travail dans des environnements informatiques classiques où la circulation du travail est inverse.

### Conjecture didactique TM-IA-2024

*Dans ce travail, nous proposons une étude approfondie de la manière dont fonctionne un logiciel spécifique pour résoudre des problèmes complexes de géométrie de type Olympiades. Cela permet des développements sur le travail mathématique en contexte IA et notamment la discussion sur la conjecture didactique TM-IA-2024.*

*Mots-clés : Olympiades, géométrie, conjecture didactique, travail mathématique, intelligence artificielle générative*

### Introduction : notre questionnement

Lors des journées JETM3 tenues en 2024, nous avons pu observer que les interactions entre les élèves et l'intelligence artificielle (IA), autour de problèmes de mathématiques, apparaissaient faibles et basées sur des productions de l'IA à la fois fausses et verbeuses<sup>1</sup>. De ce fait, le travail mathématique effectué par les élèves était d'une grande pauvreté. Cependant, Maryna Rafalska attira notre attention sur un biais commun à propos des réflexions sur les usages de l'IA : la centration quasi exclusive sur l'IA générative (IAg). Elle nous signala l'intérêt d'autres logiciels et algorithmes, mis en œuvre en mathématiques, qui s'inscrivent dans la continuité des systèmes formels et des logiciels de preuve.

---

<sup>1</sup> Ce terme, emprunté aux informaticiens, vient du mot anglais *verbose* et nous l'emploierons pour désigner ces longs discours, avec beaucoup de redondances et de détours inutiles, qui sont fréquents dans les réponses de l'intelligence artificielle générative IAg.

Cette remarque nous a conduit à étudier un logiciel spécifique consacré à la résolution de problèmes géométriques : AlphaGeometry. Ce logiciel, développé par la filiale DeepMind de Google, a fait l'objet d'une publicité importante début 2024 à la suite d'une publication dans la revue Nature (Trinh et al., 2024). Dans leur résumé, les auteurs affirment fièrement :

Proving mathematical theorems at the Olympiad level represents a notable milestone in human-level automated reasoning, owing to their reputed difficulty among the world's best talents in pre-university mathematics.

Sur le modèle de la concurrence, entre joueurs d'échecs et logiciels, développée dans les années 90, il s'agit de montrer la supériorité de la machine sur les humains dans un domaine réputé pour son exigence intellectuelle. Dans leur article, Trinh et al. (2024) comparent leurs résultats à ceux obtenus par les étudiants très brillants qui postulent aux Olympiades de mathématiques. Ils assument ce défi jusqu'à faire évaluer leurs solutions par des professeurs, membres des jurys de ce type de concours. Ils se décernent ainsi l'équivalent d'une médaille d'argent, en étant très près d'une médaille d'or.

Cela nous a conduit à demander aux participants, à notre atelier, d'étudier le travail mathématique produit par AlphaGeometry lors de la résolution d'un de ces problèmes de géométrie. Cette demande peut sembler étonnante car elle tend à identifier une machine à un être pensant. Nous assumons, dans un premier temps, cette démarche et nous clarifierons la différence entre le travail mathématique produit par un élève et les résultats donnés par un artefact.

Après une étude du fonctionnement du logiciel, nous reviendrons sur la question des interactions entre les différents actants du monde scolaire et les nouvelles formes d'IAg. Cela nous permettra d'avancer quelques hypothèses pour étudier la Conjecture didactique TM-IA-2024 dans un contexte en rapide évolution similaire à celui que décrit Fontenelle au moment de l'apparition de l'analyse infinitésimale.

### 1. La résolution du problème imo-p3 (2015) par alphageometry

Dans leur article, les auteurs indiquent que, d'après l'évaluation donnée par des professeurs, membres de jurys des Olympiades, leur logiciel a pu résoudre presque autant de problèmes de géométrie que les médaillés d'or à cette épreuve.

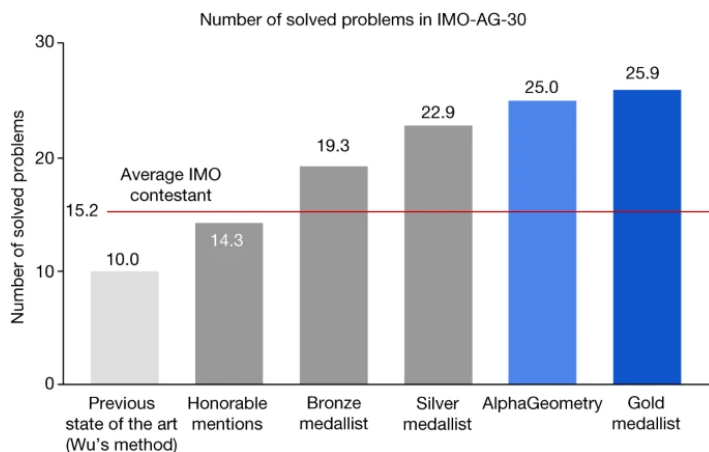


Figure 1. Performances d'AlphaGeometry et médailles aux Olympiades (Trinh et al. 2024)

Leur affirmation est légèrement biaisée par le fait que tous les candidats ne sont pas également préparés à ces épreuves : certaines délégations repartent sans avoir réussi à résoudre un seul des problèmes présentés. Dans le cas du problème IMO-P3 de 2015 que nous allons étudier, un seul candidat français avait obtenu la note maximale, un deuxième avait eu 1/7 et les quatre autres 0 alors que quatre candidats Etats-Uniens avaient obtenu le maximum et les deux autres 2 et 1. Dans la majorité des délégations, tous les candidats avaient 0 ou 1. Ces disparités indiquent bien que ce type de concours est très dépendant de la préparation reçue et que se comparer aux élèves n'a pas beaucoup de sens. Il n'en demeure pas moins que les résultats de la machine correspondent à ceux des candidats les mieux préparés.

### 1.1 Présentation du problème étudié : IMO-P3 (2015)

Parmi les 30 problèmes proposés dans l'article nous avons retenu le problème suivant :

Soit  $ABC$  un triangle aigu (acute triangle) avec  $AB > AC$ . Soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit,  $H$  son orthocentre et  $F$  le pied de la hauteur issue de  $A$ . Soit  $M$  le milieu de  $BC$ .  
 Soit  $Q$  le point sur  $\Gamma$  tel que  $\angle HQA = 90^\circ$  et soit  $K$  le point sur  $\Gamma$  tel que  $\angle HKQ = 90^\circ$ .  
 Supposons que les points  $A, B, C, K$  et  $Q$  soient tous différents et se trouvent sur  $\Gamma$  dans cet ordre.  
 Prouvez que les cercles circonscrits aux triangles  $KQH$  et  $FKM$  sont tangents l'un à l'autre.

A priori, l'introduction enthousiaste de l'article conduit à penser que, tout comme dans les logiciels d'IA générative les plus usuels, le problème a été donné sous sa forme originale puis traité par la machine. Celle-ci a dû fournir un résultat sous la forme standard attendue en géométrie.

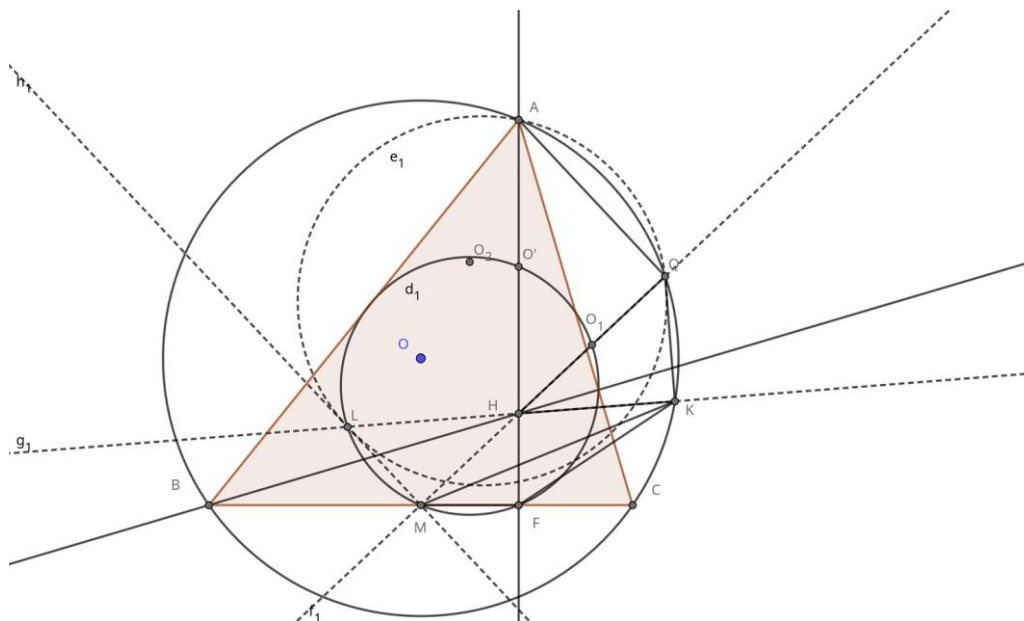
Soit  $ABC$  un triangle. Définissons le point  $H$  comme l'orthocentre du triangle  $CBA$ . Définissons le point  $F$  comme l'intersection des droites  $AH$  et  $BC$ . Définissons le point  $M$  comme le milieu de  $BC$ . Définissons le point  $O$  comme le centre de cercle circonscrit au triangle  $CBA$ .  
 Définissons le point  $Q$  sur le cercle  $(O, A)$  tel que  $AQ$  soit perpendiculaire à  $HQ$ . Définissons le point  $K$  sur le cercle  $(O, A)$  tel que  $HK$  soit perpendiculaire à  $KQ$ . Définissons le point  $O_1$  comme le centre de du cercle circonscrit au triangle  $KHQ$ . Définissez le point  $O_2$  comme le centre du cercle circonscrit au triangle  $FMK$ . Prouvez que  $K, O_1, O_2$  sont colinéaires.

Mais en fait, il n'en est rien et l'énoncé proposé à l'ordinateur a été réécrit par les auteurs sans doute pour respecter une syntaxe propre à la machine mais aussi plus profondément pour l'adapter aux connaissances et au mode de fonctionnement de la machine :

L'usage de termes géométriques, comme orthocentre ou pied des hauteurs, a été supprimé. Plus en relation avec les connaissances mathématiques nécessaires pour résoudre la tâche, on constate que la construction des points  $Q$  et  $K$  est donnée et que les centres des cercles circonscrits sont explicitement désignés. Enfin la tâche qui porte sur la tangence de deux cercles est interprétée et explicitée car il est demandé de prouver un alignement de trois points. Or comme nous le verrons, la machine a été entraînée à prouver des alignements de points grâce notamment à des techniques comme la chasse aux angles (*angle chasing*) ou la chasse aux distance (*distance chasing*). Cette transformation de la tâche n'est, à aucun moment, interrogée par les auteurs et les correcteurs.

La plupart des problèmes géométriques donnés aux Olympiades sont peu motivants, très techniques et basés sur des configurations complexes. Le choix de ce problème est lié à

l'intuition qu'une inversion pouvait ramener la question des deux cercles tangents à une configuration plus simple avec une droite tangente à un cercle. Cette intuition s'est confirmée après que le tracé la figure a fait apparaître le cercle circonscrit et le cercle d'Euler du triangle.



**Figure 2. Dessin faisant apparaître le cercle circonscrit et le cercle d'Euler**

L'importance du point H dans l'énoncé se trouve confirmée : H est le centre d'une homothétie entre ces deux cercles et donc le pôle d'une inversion (En annexe 1, la figure obtenue après inversion). Il est alors possible de trouver une solution et de la structurer en une vingtaine de pas<sup>2</sup>.

On trouve de nombreuses solutions sur les sites internet et notamment sur le site de Evan Chen (<https://web.evanchen.cc/>). La plupart reposent sur des propriétés (notamment la puissance d'un cercle) ou sur des solutions analytiques avec parfois l'usage des nombres complexes. Une des solutions officielles n'utilise aucune propriété et s'articule aussi sur des méthodes d'*angle chasing* ou de *ratio chasing*.

## 1.2 La solution donnée par l'ordinateur, dite *human-readable*

La solution trouvée et communiquée par la machine est bien différente. Elle comporte 110 pas (*steps*) de longueur et de complexité inégales. Il y a des pas accessibles par des sujets ayant des connaissances élémentaires de géométrie (parfois du collège) comme :

Step 29.  $BZ = FZ \Rightarrow \angle BFZ = \angle ZBF$  ou bien 85. A, B, C, K are cyclic  $\Rightarrow \angle ACB = \angle AKB$ .

Ou, à l'opposé, des pas qui demandent une plus grande concentration :

Step 23. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,  $\angle BAF = \angle HCF$ ,  $\angle HAC = \angle (CM, HZ)$ , BH is parallel to MX and CH is parallel to MZ  $\Rightarrow \angle (AB, MZ) = \angle (AC, MX)$ .

<sup>2</sup> Il faut noter que, semble-t-il et, contrairement à notre approche, les étudiants n'ont pas droit à des instruments de dessin et encore moins à des logiciels de géométrie dynamique.

Dans l'atelier, seuls les 40 premiers pas ont été proposés aux participants (voir l'annexe 2 pour la solution dans son intégralité pour les éventuels lecteurs très motivés). Les deux auteurs ont en effet craqué, tous deux et indépendamment, au pas 40 :

Step 40.  $AO = BO$  and  $BO = CO \Rightarrow O$  is the circumcenter of  $ABC$ .

Ce pas est typique d'une des nombreuses boucles que fait le logiciel puisque la conclusion de cette déduction est en fait une hypothèse de l'énoncé (Voir 3.2.3 pour une explication).

Dans son interface de communication, la machine ne distingue pas angles géométriques et angles de droite, ni l'ordre des points sur le cercle. Cela l'a conduit à trouver que deux angles sont égaux alors qu'ils sont supplémentaires :

Step 25.  $\angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$  and  $\angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X) \Rightarrow \angle XMZ = \angle XO_1Z$ .

Ce qui est faux car les points  $O_1$  et  $M$  sont de part et d'autre de la droite  $XZ$  mais sans conséquence car cette propriété est utilisée pour montrer la cocyclicité des points.

Step 26.  $\angle XMZ = \angle XO_1Z \Rightarrow M, O_1, X, Z$  are cyclic.

Il faut également remarquer l'absence totale de recours à des propriétés et à des théorèmes même élémentaires, comme celui de la droite des milieux. Cette volonté de partir de zéro est assumée par les auteurs et d'une certaine façon, elle est à la base de l'approche neuronale en IA.

Une autre volonté des auteurs a été de développer la capacité d'AlphaGeometry à introduire des points auxiliaires pour résoudre les problèmes de géométrie. C'est ainsi que trois points additionnels sont construits d'entrée. Leur usage n'apparaîtra parfois que très loin (le point  $Y$  ne sera utilisé la première fois qu'au pas 103) :

Construct point  $X$  as the midpoint of  $CH$

Construct point  $Y$  as the midpoint of  $KM$

Construct point  $Z$  as the midpoint of  $BH$ .

Dressons un petit bilan en nous interrogeant sur l'effroi qu'aurait dû normalement éprouver un correcteur face à cette solution si un des étudiants l'avait proposée ! Aurait-il donné la note maximale ? A-t-il été influencé par Google ?

Seul importe ici le fait que malgré *quelques* approximations dans la rédaction, la solution proposée est juste mathématiquement mais peu accessible à un lecteur humain.

## 2. Comment fait la machine pour produire ce résultat ?

### 2.1 De quelle machine parle-t-on ?

Le code du logiciel AlphaGeometry est open-source et les auteurs nous invitent à l'utiliser. Ils nous fournissent les références matérielles<sup>3</sup> : ils ont fait fonctionner leur logiciel sur un

---

<sup>3</sup> Le V100 est ancien (2017), les GPU actuels de Nvidia vont 10 fois plus vite avec 5 fois plus de mémoire. Ces GPU coûtent très cher (entre 30 000 et 40 000 dollars l'unité) mais on peut louer leur équivalent sur le cloud TPU-Google pour environ 4 dollars l'heure. *Central Processing Unit* est un processeur pour le calcul, il est associé à d'autres processeurs spécialisés comme les *Graphics Processing Unit* ou *Tensor Processing Unit*

ensemble de *16 V100-GPUs and 250 CPU workers*. Nous verrons que les GPU et TPU servent surtout dans la phase d'apprentissage dont nous parlerons plus tard.

Le problème choisi n'est pas le plus facile pour l'ordinateur (la difficulté est évaluée en fonction du nombre de pas utilisés dans la solution), il n'est pas non plus le plus difficile.

Les auteurs précisent qu'ils ont limité le temps de calcul de l'ordinateur pour s'approcher des conditions du concours. Chaque session du concours dure 4h30 et les candidats doivent résoudre trois problèmes. Ils ont alors considéré deux cas, soit le candidat consacre tout son temps à un seul problème, soit il répartit son temps entre les problèmes et consacre 1h30 au problème de géométrie.

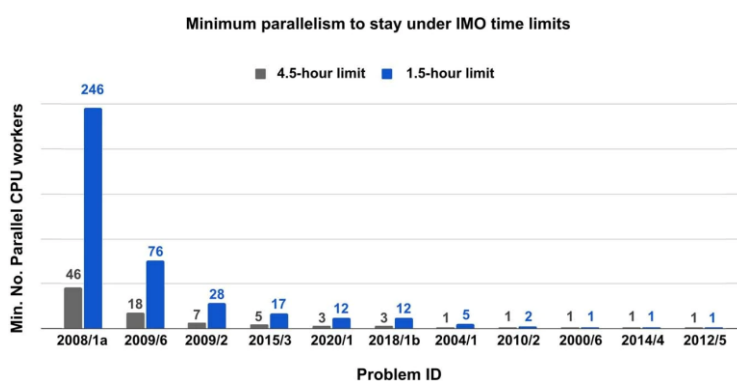


Figure 3. Nombre de CPU utilisés pour résoudre les différents problèmes (Trinh et al., 2024)

Pour résoudre le problème IMO-P3 (2015) en moins d'1h30, il faut mobiliser 17 CPU.

## 2.2 Description succincte, mais pas forcément brève, de la méthode développée dans AlphaGeometry.

Pour son développement, AlphaGeometry a utilisé une méthode mixte basée à la fois sur une approche logique et sur une approche neuronale utilisant un Modèle de Langage (ML). Leur méthode est différente des méthodes classiques de l'IA, d'avant la révolution neuronale comme celle utilisée par exemple dans GeoGebra. Dans ces logiciels, les méthodes sont essentiellement algébriques et basées sur la recherche d'idéaux maximaux dans des anneaux de polynômes. Elles ont l'avantage de produire des preuves intelligibles et aussi valides d'un point de vue mathématique. Mais, elles succombent dès que les données deviennent trop grandes face à une explosion combinatoire des calculs.

L'utilisation d'un Modèle de Langage (ML) peut étonner, mais de fait pour un ML produire une preuve c'est produire un texte dans un langage particulier. Pour compléter une phrase ou un texte, les ML choisissent à chaque fois les mots les plus probables en fonction des séquences de mots précédentes.

L'approche neuronale suppose un apprentissage qui s'appuie sur une grande base de théorèmes et le logiciel sera d'autant plus performant qu'il se sera entraîné sur une base importante. Pour cela, il faut disposer de dizaines de millions de théorèmes. De plus, du fait de son approche probabiliste, rien ne garantit que la preuve est juste. C'est le propre des ML d'avoir des hallucinations, autre façon de dire que leur preuve est fautive. Ces théorèmes doivent donc être prouvés sans l'usage d'un ML, avec des méthodes symboliques et non probabilistes.

### **2.2.1 Première phase : constitution de la base des problèmes à résoudre**

Quand on a besoin de disposer de millions de théorèmes, il est nécessaire de produire des dizaines de millions de problèmes puisque l'idée est de partir de zéro (*from scratch*) et de toute manière la littérature ne fournit pas cette quantité de théorèmes.

Pour générer ces problèmes, les auteurs construisent une base d'ensembles d'hypothèses (BH) à partir d'un ensemble de prémisses (BP). Ces prémisses (55) sont des règles de construction d'objets géométriques divers (construction de rectangles, de bissectrices de centre inscrits etc.) qui permettent d'obtenir des points, des alignements, des cocyclités, etc.

Les ensembles d'hypothèses, qui sont des sortes de problèmes ouverts, sont générés à partir de choix aléatoires, mais avec une bonne répartition, d'éléments de la base de prémisses. Cette première phase permet d'obtenir environ 1000 millions de problèmes.

### **2.2.2 Deuxième phase : constitution de la base d'entraînement.**

Cette phase est très complexe car il faut générer les théorèmes à partir de la base d'hypothèses et aussi s'assurer qu'ils sont vrais ! Les auteurs ont utilisé simultanément trois méthodes. Pour plus de clarté, nous les présentons séparément.

#### *Génération par Déduction Logique (DD) d'une base de données*

Les auteurs emploient différents moteurs de déduction logique (dont GeoLogic) qui utilisent des langages assez proches du langage humain. Pour chaque groupe d'hypothèses dans BH, le moteur symbolique (inspiré de GeoLogic) calcule la *clôture déductive* du problème : il déduit itérativement tous les théorèmes possibles à partir de règles de déduction de la géométrie euclidienne.

La validité de ces théorèmes est ensuite vérifiée par un procédé de *back tracing* ou *traceback* qui remonte du théorème obtenu aux hypothèses en supprimant les détours inutiles ou les fausses pistes. On obtient ainsi un triplet (**H**ypothèse, **C**onclusion, **P**reuve).

Cette méthode appelée DD peut fonctionner seule et les auteurs ont vérifié qu'elle permet de résoudre 7 des 30 des problèmes issus des Olympiades.

#### *Injecter des règles algébriques (AR)*

La base d'hypothèses (BH) a été enrichie avec des données algébriques qui permettent d'organiser la chasse aux angles/rapports/distance. Cette fois les objets sont donnés sous forme algébrique :

Construire le point X tel que  $\angle ABX = \alpha$ .

La génération des nouveaux théorèmes se fait en alternant DD et AR. Par exemple, le moteur logique DD déduit une interrogation sur l'égalité de deux distances. Il lance alors le moteur AR qui valide (ou non) cette égalité en faisant des calculs algébriques puis renvoie cette propriété au DD si la preuve n'est pas encore obtenue.

Ce nouvel ensemble de théorèmes est vérifié de la même façon que précédemment. Cet usage simultané d'un moteur déductif et d'un moteur algébrique est une nouveauté revendiquée par les auteurs. Il l'appelle (DD+AR) et il permet de résoudre 14 problèmes IMO.

### Interagir avec un réseau neuronal (Gpt4)

Cette interaction apporte des aides heuristiques. Généralement, les aides heuristiques sont des règles humaines. Ici, les auteurs souhaitent que leurs solutions soient uniquement données par la machine. Les règles heuristiques en question sont alors essentiellement des règles automatiques d'ajout de points par constructions comme :

Ajoute un point X tel que ABCX soit un parallélogramme.

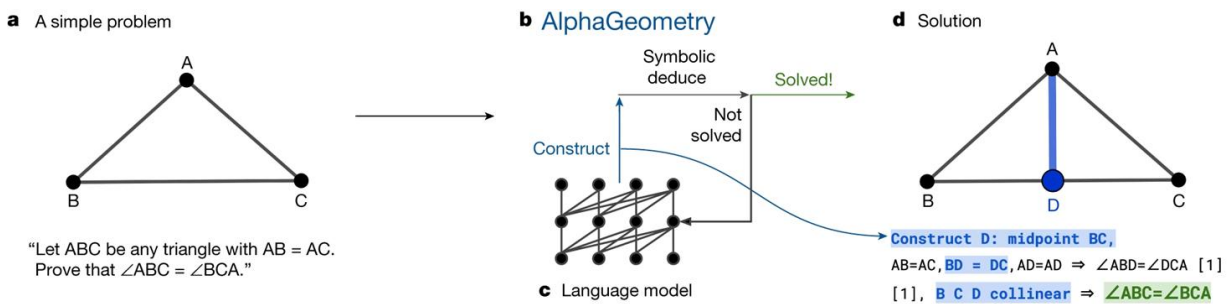
Les trois constructions auxiliaires données au début de la solution de notre problème IMO-P3 sont un exemple de ces constructions auxiliaires automatiques. Pour communiquer avec le moteur symbolique, le système neuronal est lancé par un prompt :

You are GPT-4, an Artificial General Intelligence, and Olympiad Solver,

Your task is to provide auxiliary constructions in a formal language, such that a symbolic engine can parse your output and perform symbolic deductions to attempt to solve the IMO problem. You will be provided with the output of the symbolic engine to start constructing the first auxiliary point. If the symbolic engine failed to solve the problem, you will be asked to construct the next auxiliary point. This process will repeat multiple times until you can solve the problem.

Il faut, comme précédemment, vérifier la validité du théorème obtenu avec les règles algébriques (AR).

Les trois systèmes : DD, AR et RN fonctionnent ensemble comme on peut le voir sur le diagramme suivant :



**Figure 4 : Fonctionnement combiné du moteur symbolique et du modèle de langage (Trinh et al., 2024)**

### Conclusion de la phase 2

En combinant les trois approches, les auteurs ont finalement obtenu 500 millions de théorèmes qui, après un élagage (*pruning*) destiné à supprimer les théorèmes faux et les doublons, leur a donné une base de 100 millions de théorèmes allant du très simple (quelques pas) au très complexe (plus de 200 pas). Parmi ces 100 millions de théorèmes, il y en a 9 millions dont la preuve a nécessité des constructions auxiliaires de points supplémentaires. Techniquement, cette phase a nécessité 100 000 CPU workers qui ont fonctionné pendant 72 heures.

L'ajout du réseau neuronal permet de résoudre 15 problèmes au lieu de 14. A l'époque, ChatGpt4 ne résolvait seul aucun des problèmes.

### 2.2.3 Troisième et dernière phase : entraînement d'un ML avec des transformers

Nous en arrivons à la phase la plus déconcertante pour un mathématicien, l'usage d'un modèle de langage neuronal s'appuyant sur des *transformers*. Ces modèles de langage sont les plus performants à ce jour<sup>4</sup>. Il s'agit de réseaux neuronaux très complexes qui traitent les vecteurs associés aux mots d'un langage donné (en général humain). Ils ont été introduits dans un article fondateur (Vaswani, 2017) publié en 2017 par des chercheurs de Google et ont permis les avancées récentes et spectaculaires de l'IAg.

L'entraînement suppose trois étapes :

1. Transformation de chaque théorème (Hypothèse, Conclusion, Preuve) en une chaîne de mots. Chaque mot est vectorialisé pour constituer un *embedding word*. Cet ensemble de mot de chaînes formeront les entrées (*Input*).
2. Entraînement du transformeur sur les 100 millions de théorèmes.
3. Affinage (*Fine-Tuning*), en privilégiant les 9 millions de théorèmes démontrés grâce à des constructions auxiliaires.

Cette fois, on change de catégorie matérielle et il faut louer de gros ordinateurs car l'entraînement fonctionne sur un réseau de (4x4) TPUv3 (1968 Teraflops) de Google<sup>5</sup>. Il n'est pas évident de connaître le nombre de paramètres ajustés par cet entraînement, mais il semble être de l'ordre de 200 millions.

A l'issue de tout ce processus, le logiciel AlphaGeometry est enfin prêt ! Il comporte trois ingrédients, les moteurs de déduction logique (DD) et algébrique (AR) avec leur base de connaissance, et le modèle ML obtenu à l'issue de l'entraînement. Ajoutons que pour faire fonctionner le logiciel, il faut aussi utiliser la base Mermaid qui transforme les chaînes (Hypothèse, Conclusion, Preuve) en vecteurs qui servent de données pour l'entraînement.

Les auteurs précisent qu'ils ont alors pu résoudre 25 problèmes, l'affinage des données leur a permis de passer de 23 problèmes résolus à 25.

En conclusion, on peut considérer AlphaGeometry comme un Modèle de Langage spécialisé dans la résolution de problèmes de géométrie. Il s'agit d'un produit développé par Google et il est probable qu'il soit (ou qu'il sera) intégré dans les nouvelles IAg développées par cette entreprise.

### 3. Une approche didactique basée sur la Th-ETM

Au début de cet article, nous avons indiqué que les participants étaient invités à évaluer le travail mathématique de la machine. Cette humanisation de la machine est actuellement courante et favorisée par les Chatbot qui semblent converser avec les utilisateurs en faisant preuve d'empathie. De nombreuses dérives, parfois cruelles, de cette identification sont régulièrement rapportées.

---

<sup>4</sup> Voir par exemple le livre de Norvig et Russel, chapitre 25, ou l'excellent cours de Benoit Sagot au Collège de France en 2025.

<sup>5</sup> On peut les louer chez Google pour 2500 euros l'heure par unité.

Notre expérience montre clairement, s'il en était besoin, qu'AlphaGeometry est un artefact. En effet, si on l'assimilait à un élève qui résout un problème de géométrie, cet élève aurait d'énormes qualités logiques et calculatoire mais très peu de connaissances : la solution se résume à des transformations complexes et itératives d'écritures formulées dans un langage très symbolique.

De fait, on doit vraiment considérer l'IAg pour ce qu'elle est à savoir un logiciel qui génère du discours, un discours qui se donne à voir comme une preuve mathématique. Il y a cependant une différence entre AlphaGeometry et l'IAg généraliste utilisée par les élèves. La preuve donnée par AlphaGeometry est validée par le système DD+AR, par contre rien ne garantit la preuve d'une IA générative.

### 3.1 Retour sur la Conjecture didactique TM-IA-2024

Les conjectures didactiques ne sont pas des conjectures mathématiques, elles ne pourront jamais être complètement vérifiées. Elles aident à penser et à fixer les conditions qui assurent leur validité. En particulier, leur énoncé peut favoriser l'identification de tâches mathématiques et la construction des situations didactiques susceptible de former le travail mathématique attendu.

Le rôle de ces conjectures est d'ouvrir des voies de recherches basées sur des théories issues de la didactique des mathématiques et partagées par des communautés de chercheurs, en l'occurrence ici la Th-ETM. Il est ainsi possible de les formuler de manière techniques et précises comme dans le cas que nous étudions.

L'IA favorise, a priori, l'activation de la genèse discursive (de preuve). Le travail mathématique développé par les élèves s'inscrit en premier lieu dans le plan [Ins-Dis] avant de se développer dans le plan [Dis-Sem]. Cela le distingue du travail dans des environnements informatiques classiques où la circulation du travail est inverse.

Cette conjecture attire notre attention sur le fait qu'*a priori*, l'élève qui utilise l'IA est confronté à un discours de preuve et que cela devrait le conduire à développer ses capacités de compréhension et de déduction de preuve.

Cette entrée est différente de celle qui a pu être observée lors de l'usage des logiciels de géométrie dynamique ou des calculatrices. Contrairement aux attentes des concepteurs de ces logiciels, leur usage a le plus souvent court-circuité le travail de preuve déductive et favorisé les preuves mécaniques basées sur la visualisation. Il a fallu développer des méthodes spécifiques, comme les constructions molles<sup>6</sup>, pour tenter de remobiliser les propriétés et les preuves discursives.

Dans le travail de l'élève en interaction avec l'IAg, celui-ci se trouve confronté à une production différente de celle de GeoGebra ou d'un tableur, il s'agit d'une preuve associée à un discours. On peut donc dire que les enjeux du travail se place d'entrée dans le plan [Ins-Dis].

Face à la complexité sémiotique du résultat fourni par l'IA, le travail de l'élève risque de s'orienter vers la genèse sémiotique (Sem), tant il est difficile de comprendre la signification

---

<sup>6</sup> Voir l'article de Lagrange dans cet ouvrage.

de tous ces signes, de savoir comment les organiser et les traduire en propriétés mathématiques (référentiel théorique). Le travail réel apparaît alors plutôt comme un travail du type suivant :

**[Ins - Dis] → [Ins - Sem] → (réfth)**

Il y a un fort risque à la fois de confinement et de blocage dans le demi-plan **[Sem-réfth]**.

C'est ce qui s'est produit lors de l'atelier où, comme nous, les participants ont vite abandonné leur étude de la preuve après avoir repéré quelques propriétés et sans voir la perspective globale. L'analyse de cette situation montre que, sans étayage, le travail mathématique risque de s'enfermer dans un blocage sémiotique. La genèse discursive (de preuve) n'apparaît pas spontanément et il faut envisager les conditions didactiques et l'étayage qui permettent de la mettre en œuvre et finalement de la faire fonctionner.

En d'autres termes, cela pose la question de savoir dans quelles conditions Conjecture didactique TM-IA-2024 (l'IA favorise la genèse discursive) est vérifiée ?

### **3.2 Interactions avec un ML associé à une IA générative**

Comme nous le suggère la citation de Fontenelle, mise en exergue au début de cet article, il semble que nous vivons actuellement une révolution dans les méthodes de preuves utilisées en mathématiques scolaires. Chaque jour fait apparaître une avancée majeure et les IA d'aujourd'hui surpassent largement celles de l'an passé. Par exemple, elles produisent aujourd'hui plusieurs preuves des problèmes IMO sur lesquelles elles balbutiaient l'an passé. Cela est largement dû au phénomène dit de *contamination*. L'IA utilise les solutions disponibles sur Internet, et il n'est pas évident de savoir ce qui relève de son pouvoir de déduction ou bien de l'exploitation des connaissances issues d'Internet. Benoît Sigot, dans son cours, présente une étude qui montre une chute drastique des performances de l'IA sur la résolution de problèmes d'informatique en fonction de leur ancienneté. Les résultats obtenus sont quasiment nuls sur les problèmes difficiles et très difficiles récents. Mais, on peut aussi penser que l'usage internalisé de ML spécialisés, tels que ceux développés par DeepMind, puisse aussi contribuer à une amélioration.

#### ***3.2.1 Un résumé de la preuve générée par l'IA***

Pour comprendre, enfin, la solution donnée par AlphaGeometry au problème IMO-P3, nous avons demandé à Gemini3 de résumer<sup>7</sup> cette solution (soit 110 pas en quatre pages). La tâche est à la fois stupide et impossible pour un être humain normal, elle ne l'est pas pour la machine qui prend cette production comme un texte dans une langue particulière.

À notre grande surprise, Gemini3 a généré un discours intelligible et parfaitement structuré. Cela nous a conduit à poursuivre nos interactions et pour finir nous avons demandé une synthèse de la démonstration dont voici les grandes lignes :

---

<sup>7</sup> Cette idée nous est venue de l'assistant IA de Word qui nous a proposé de faire le résumé du texte de la solution alors que nous étions en train de le mettre en forme. Contrairement à celle de Gemini, la réponse obtenue a été indigente.

---

## Synthèse de l'Analyse : Problème IMO-P3 2015

### 1. Nature du Problème

Il s'agit de prouver la colinéarité des points  $K$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  dans une configuration impliquant l'orthocentre  $H$ , le milieu  $M$  de  $[BC]$ , et plusieurs cercles circonscrits.

### 2. Structure de la Preuve (110 étapes)

**Phase 1** (Étapes 1-32) : Établissement de la cocyclicité des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $Q$  et  $M$ ,  $O_1$ ,  $X$ ,  $Z$ .

**Phase 2** (Étapes 33-66) : Preuve de l'alignement des points  $H$ ,  $M$ ,  $O_1$  par l'utilisation de parallélismes ( $MX \parallel BH$ ,  $MZ \parallel CH$ ).

**Phase 3** (Étapes 67-100) : Utilisation de similitudes de triangles pour établir le rapport de longueurs.

**Phase 4** (Étapes 101-110) : Conclusion sur la colinéarité de  $K$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  via l'égalité  $\angle FKO_1 = \angle FKO_2$ .

### 3. Critiques et limites Identifiées

**Redondances** : La preuve redémontre des faits acquis dans l'énoncé, comme le fait que  $M$  est le milieu de  $BC$  ou que  $O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ .

**Ambiguïté des Angles** : Le texte utilise des égalités d'angles sans distinguer les angles géométriques des angles orientés, ce qui peut poser des problèmes de configuration (angles supplémentaires non traités).

**Approche par Force Brute** : La démonstration suit un cheminement "machine" (IA symbolique) qui privilégie la vérification de chaque propriété possible plutôt qu'une stratégie élégante (comme l'inversion ou l'homothétie).

---

Cette structuration permet d'établir un lien entre la démonstration de la machine et notre propre vision du problème. Ainsi, la phase 1 est liée au cercle d'Euler dont la machine va utiliser méthodiquement presque tous les points ( $X$  et  $Z$  sont deux points de ce cercle).

La phase 2 montre l'usage des points  $X$  et  $Z$ , elle est liée à l'utilisation de la droite des milieux dans les triangles  $BHC$ . Il s'agit là d'une configuration qui fait l'objet d'un apprentissage dans notre pays. L'alignement des points  $H$ ,  $M$  et  $O_1$  est immédiat dans une approche par transformations.

#### 3.2.2 Angle chasing et configuration latente

La phase 3 s'appuie sur une similitude et la phase 4 sur une égalité d'angle. Ces deux propriétés sont loin d'être évidentes. Cela vient du fait que leurs preuves s'appuient à la fois sur des méthodes de chasse aux angles et aux rapports, et sur des configurations familières mais qui ne sont pas directement associées à une propriété comme l'est celle de la droite des milieux.

Illustrons notre propos sur le pas 104 :

Peux-tu m'expliquer ces deux lignes :

Step 104.  $O_2$  is the circumcenter of FKM and Y is the midpoint of KM  $\Rightarrow \angle KFM = \angle KO_2Y$ .

La réponse de Gemini3 est la suivante :

Étape 104 : La relation Angle Inscrit / Angle au Centre

C'est l'étape la plus technique de la phase 4. Elle repose sur une propriété classique du cercle circonscrit :

1.  $O_2$  étant le centre du cercle passant par F, K et M, l'angle  $\angle KFM$  est un angle inscrit qui intercepte l'arc KM.
2. L'angle au centre correspondant est  $\angle KO_2M$ . Selon le théorème de l'angle inscrit, on a :  $\angle KO_2M = 2 \times \angle KFM$
3. Utilisation du milieu Y : Dans le triangle isocèle  $KO_2M$  (où  $O_2K = O_2M$  sont des rayons), la droite  $(O_2Y)$  passant par le milieu Y de la base [KM] est la bissectrice de l'angle au centre  $\angle KO_2M$ .
4. Conclusion de l'étape : Puisque  $(O_2Y)$  coupe l'angle au centre en deux parts égales, on a :  $\angle KO_2Y = \angle KO_2M$
5. En combinant cela avec le théorème de l'angle inscrit, on obtient l'égalité directe :  $\angle KO_2Y = \angle KFM$ .

La solution pourrait être plus rapide mais une fois encore elle est juste. On constate qu'il s'agit d'une propriété obtenue par *angle chasing* comme toutes les autres qui portent sur les angles. Mais, ici l'entraînement d'AlphaGeometry lui a permis de reconnaître une configuration standard pour un système neuronal. C'est ce qu'on appelle une configuration latente dans ce type d'approches.

La méthode d'*angle chasing* est à la base de certaines formations liées aux olympiades<sup>8</sup>. Cela provient du fait que lors de ces Olympiades, les concurrents viennent de pays très variés avec des programmes scolaires très différents. Il faut donc proposer des solutions « simples » (sans utiliser des propriétés, comme celle des transformations) à des problèmes suffisamment complexes du fait des configurations mises en jeu. Trouver une telle solution nécessite alors des méthodes de chasse et reconnaissance par visualisation de nombreuses configurations standards.

Cette façon de faire de la géométrie était celle en place lors de la fameuse « géométrie du triangle » tant honnie par Dieudonné et les réformateurs des mathématiques modernes, plus attentifs aux propriétés générales et aux transformations. Au début des années 2000, cette forme d'enseignement a été brièvement réintroduite avec des démonstrations basées sur les cas d'égalité des triangles et sur les décompositions d'aires. Méthodes efficaces mais dont les promoteurs avaient oublié le coût exorbitant en termes de visualisation et d'entraînement. Par

---

<sup>8</sup> Voir le livre en ligne de Evan Chen : Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad.

contre, elles ne sont pas si éloignées de celles mises en œuvre dans des formations états-uniennes aux Olympiades.

### 3.2.3 Une rhétorique de preuve particulière

Des différences portent aussi sur des éléments clés de la rhétorique déductive comme nous avons pu le constater (1.2) avec cette manière si particulière de fonctionner du logiciel, où il semble redémontrer une hypothèse de l'énoncé. Le point Y est construit comme milieu de KM au début de sa solution mais au pas 103, il est démontré cette propriété :

Step 103. K, M, Y are collinear and  $KY = MY \Rightarrow Y$  is the midpoint of KM.

Nous avons posé la question suivante à Gemini :

Peux-tu me dire à quel moment AlphaGeometry, dans sa preuve, a-t-il pu savoir que KY et MY étaient égaux ?

La réponse de Gemini vient éclairer cette question qui nous avait tant irritée. Il le fait d'une façon verbeuse et longue, mais instructive, que je résume ici :

L'ordinateur ne « découvre » pas cette égalité par une observation visuelle, mais la déduit de la manière dont les points ont été construits dans sa mémoire logique.

Pour un logiciel de géométrie automatique, définir Y comme le milieu de [KM] revient à enregistrer trois informations liées entre elles : K, Y et M sont colinéaires, La distance KY est égale à la distance MY ( $KY=MY$ ), Y se situe entre K et M.

À l'étape 103, le logiciel semble "redécouvrir" cette égalité, mais il s'agit en réalité d'une étape de rappel logique pour valider la suite de la preuve. Même s'il a créé Y comme milieu au début, il doit "ré-énoncer" que  $KY=MY$  à l'endroit précis où il veut prouver que la droite ( $O_2Y$ ) est une médiatrice. Sans cette étape intermédiaire, il ne pourrait pas justifier rigoureusement le passage à l'étape 104 sur l'angle au centre.

Cette explication aide à comprendre le fonctionnement du logiciel, il n'en demeure pas moins que la formulation logique utilisée (par réciproque) est perturbante.

Cet ensemble de remarques attirent l'attention sur le fait que le travail mathématique favorisé par la machine n'est pas nécessairement en concordance avec celui qu'essayent de porter les enseignants dans un contexte scolaire donnée.

Il semble donc nécessaire de s'assurer de la nature du travail mathématique développé par la machine. Le sujet doit piloter et contrôler le travail qu'il délègue à la machine. Il peut le faire en s'appuyant sur un ensemble d'amorces (prompt).

## 4. Vers un programme de recherches<sup>9</sup> : deux constats et trois hypothèses

Dans cette conclusion, nous avançons différentes hypothèses de travail qui peuvent servir à baliser un programme de recherches sur des usages de l'IAg basées sur les interactions entre des élèves et l'artefact IAg. Ce programme est dirigé, en arrière-plan, par l'exploration des conditions qui assurent la validité de la Conjecture didactique TM-IA-2024. Ou plus

---

<sup>9</sup> Pour une approche plus détaillée de ce programme voir (Kuzniak, 2026).

brièvement, et de façon moins théorique, comment penser l'étayage et le développement de preuves mathématiques chez les élèves face à la puissance du discours de l'IA générative.

Notre étude du fonctionnement d'AlphaGeometry, complétée par des remarques faites par les professeurs<sup>10</sup> et des observations de classes sur l'usage de l'IAg, nous conduit à formuler les trois constats suivants :

**Constat 1.** Certains élèves demandent à l'IA de résoudre le problème et restituent sans modifications la solution de l'IA aux professeurs.

**Constat 2.** Dans le cas des élèves les plus motivés, ceux-ci se trouvent englués et submergés par le discours de l'IA et renoncent à le critiquer.

Cela nous a conduit à formuler les hypothèses suivantes nécessaires pour un enseignement interactif entre IA et élèves.

**H1 : Une recherche initiale sans la machine.** L'élève doit avoir cherché, voire trouvé, une première solution du problème avant de solliciter l'IA.

En géométrie, par exemple, il est nécessaire d'avoir au minimum construit la figure et d'avoir envisagé quelques pistes de solution. Cette phase permet à l'élève de s'impliquer ensuite pleinement dans sa confrontation avec la machine et de ne pas être le réceptacle passif du discours de l'IA.

**H2 : La mise en place d'un jeu d'interactions critiques entre la machine et l'élève.** Ce jeu d'échanges doit pouvoir s'amorcer à partir de H1.

Il peut être fondé sur la critique par la machine de la preuve donnée par l'élève, ou, au contraire sur une discussion sur la preuve générée par la machine avec des demandes d'explications précises sur des étapes spécifiques.

**H3 : Une appropriation et une restitution de la preuve (Narration de recherche).** Le résultat final ne doit pas être la simple restitution de la solution de l'IA.

L'élève doit rendre compte de sa recherche et de sa compréhension du problème en produisant sa propre solution. La solution donnée par l'élève peut être accompagnée d'une narration de recherche du problème montrant l'avancée de sa recherche.

Il s'agit d'un vaste plan de recherches dont chacune des hypothèses de travail doit être soigneusement étudiée et développée grâce, notamment, au développement de tâches mathématiques ou informatiques adaptées. Le problème IMO que nous avons étudié est naturellement trop complexe mais cela n'exclut pas *a priori* des challenges ambitieux à la manière de ceux développés par MathAData<sup>11</sup>.

Ce programme de recherche est loin d'être évident à mettre en place tant le fonctionnement de l'IA est opaque et peut comme nous l'avons vu, embarquer élèves et professeurs dans des voies non voulues. Ces mêmes difficultés étaient apparues au début de l'importation de logiciels dans

---

<sup>10</sup> Notamment dans le groupe IREMS de Paris-Cité.

<sup>11</sup> Programme du Collège de France piloté par Stéphane Mallat dont, par ailleurs, les cours sur l'IA sont particulièrement remarquables.

l'enseignement. Elles avaient conduit à créer des micro-mondes ou des environnements spécifiquement dédiés à l'enseignement, comme GeoGebra ou Casyopée.

Sa mise en œuvre suppose aussi un réel investissement des élèves dans la recherche de solutions et une certaine maîtrise par les enseignants du fonctionnement de l'IA.

## Références

Chen, E. (2016). *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad*. <https://web.evanchen.cc › geombook.html>

Kuzniak, A. (A paraître). Sur la consistance du travail mathématique au temps de l'Intelligence Artificielle. *Symposium ÉTM9*, 1-5 juin 2026. Mexico.

Trinh, T.H., Wu, Y., Le, Q.V. et al. (2024). *Solving Olympiad geometry without human demonstrations*. *Nature* 625, 476–482. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06747-5>

Vaswani, A. et al. Attention is all you need. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 30 (2017).



## Annexe 2 : Solution AlphaGeometry

Construct point X as the midpoint of CH.

Construct point Y as the midpoint of KM.

Construct point Z as the midpoint of BH.

Step 1. B, C, M are collinear and AH is perpendicular to BC  $\Rightarrow$  AH is perpendicular to CM.

Step 2. B, H, Z are collinear and AC is perpendicular to BH  $\Rightarrow$  AC is perpendicular to HZ.

Step 3. AC is perpendicular to HZ and AH is perpendicular to CM  $\Rightarrow \angle HAC = \angle(\text{CM}, \text{HZ})$  and  $\angle AHZ = \angle MCA$ .

Step 4. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear and  $\angle HAC = \angle(\text{CM}, \text{HZ}) \Rightarrow \angle CAF = \angle HBF$ .

Step 5. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC  $\Rightarrow \angle AFC = \angle BFH$ .

Step 6.  $\angle CAF = \angle HBF$  and  $\angle AFC = \angle BFH \Rightarrow FA/FB = FC/FH$

Step 7. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC  $\Rightarrow \angle AFB = \angle CFH$ .

Step 8.  $\angle AFB = \angle CFH$  and  $FA/FB = FC/FH \Rightarrow \angle BAF = \angle HCF$  and  $\angle ABF = \angle CHF$ .

Step 9.  $BM = CM$  and  $BO = CO \Rightarrow BC$  is perpendicular to MO.

Step 10. B, C, M are collinear and  $BM = CM \Rightarrow M$  is the midpoint of BC.

Step 11. C, H, X are collinear and  $CX = HX \Rightarrow X$  is the midpoint of CH.

Step 12. M is the midpoint of BC and X is the midpoint of CH  $\Rightarrow BH$  is parallel to MX.

Step 13. B, H, Z are collinear and  $BZ = HZ \Rightarrow Z$  is the midpoint of BH.

Step 14. M is the midpoint of BC and Z is the midpoint of BH  $\Rightarrow CH$  is parallel to MZ.

Step 15.  $HO_1 = O_1Q$  and  $KO_1 = O_1Q \Rightarrow O_1$  is the circumcenter of HKQ.

Step 16. AQ is perpendicular to HQ and HK is perpendicular to KQ  $\Rightarrow \angle AQH = \angle QKH$ .

Step 17.  $O_1$  is the circumcenter of HKQ and  $\angle AQH = \angle QKH \Rightarrow AQ$  is perpendicular to  $O_1Q$ .

Step 18.  $HO_1 = O_1Q$ , AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to  $O_1Q \Rightarrow O_1$  is the midpoint of HQ.

Step 19.  $O_1$  is the midpoint of HQ and X is the midpoint of CH  $\Rightarrow CQ$  is parallel to  $O_1X$ .

Step 20.  $O_1$  is the midpoint of HQ and Z is the midpoint of BH  $\Rightarrow BQ$  is parallel to  $O_1Z$ .

Step 21.  $AO = BO$ ,  $AO = OQ$  and  $BO = CO \Rightarrow A, B, C, Q$  are cyclic.

Step 22. A, B, C, Q are cyclic  $\Rightarrow \angle ABQ = \angle ACQ$  and  $\angle ACB = \angle AQB$ .

Step 23. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,

$\angle BAF = \angle HCF$ ,  $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$ , BH is parallel to MX and CH is parallel to MZ  $\Rightarrow \angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$ .

Step 24.  $\angle ABQ = \angle ACQ$ , BQ is parallel to  $O_1Z$  and CQ is parallel to  $O_1X \Rightarrow \angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X)$ .

Step 25.  $\angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$  and  $\angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X) \Rightarrow \angle XMZ = \angle XO_1Z$ .

Step 26.  $\angle XMZ = \angle XO_1Z \Rightarrow M, O_1, X, Z$  are cyclic.

Step 27. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC  $\Rightarrow$  BF is perpendicular to FH.

Step 28. Z is the midpoint of BH and BF is perpendicular to FH  $\Rightarrow BZ = FZ$ .

Step 29.  $BZ = FZ \Rightarrow \angle BFZ = \angle ZBF$ .

Step 30. X is the midpoint of CH and Z is the midpoint of BH  $\Rightarrow$  BC is parallel to XZ.

Step 31. B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,  $\angle BFZ = \angle ZBF$ , BC is parallel to XZ and BH is parallel to MX  $\Rightarrow \angle MFZ = \angle MXZ$ .

Step 32.  $\angle MFZ = \angle MXZ \Rightarrow F, M, X, Z$  are cyclic.

Step 33. F, M, X, Z are cyclic and M,  $O_1, X, Z$  are cyclic  $\Rightarrow F, M, O_1, X$  are cyclic.

Step 34. F, M,  $O_1, X$  are cyclic and F, M, X, Z are cyclic  $\Rightarrow F, O_1, X, Z$  are cyclic.

Step 35. F,  $O_1, X, Z$  are cyclic  $\Rightarrow \angle O_1FX = \angle O_1ZX$ .

Step 36. AC is perpendicular to HZ and AQ is perpendicular to HQ  $\Rightarrow \angle CAQ = \angle ZHQ$  and  $\angle(AC, HQ) = \angle(HZ, AQ)$ .

Step 37. B, H, Z are collinear,  $\angle CAQ = \angle ZHQ$ , BH is parallel to MX, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to  $O_1Q \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(AQ, HO_1)$ .

Step 38. B, C, M are collinear and  $\angle ACB = \angle AQB \Rightarrow \angle ACM = \angle AQB$ .

Step 39.  $\angle(AC, MX) = \angle(AQ, HO_1)$  and  $\angle ACM = \angle AQB \Rightarrow \angle(BQ, HO_1) = \angle CMX$ .

Step 40.  $AO = BO$  and  $BO = CO \Rightarrow O$  is the circumcenter of ABC.

Step 41. O is the circumcenter of ABC and M is the midpoint of BC  $\Rightarrow \angle(AB, MO) = \angle ACO$  and  $\angle BAC = \angle MOC$ .

Step 42.  $AO = BO$  and  $BO = CO \Rightarrow AO = CO$ .

Step 43.  $AO = CO \Rightarrow \angle ACO = \angle OAC$ .

Step 44. B, H, Z are collinear,  $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$  and BH is parallel to MX  $\Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(AH, CM)$ .

Step 45.  $\angle(AB, MO) = \angle ACO$ ,  $\angle ACO = \angle OAC$ , AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle BAH = \angle OAC$ .

Step 46.  $\angle BAH = \angle OAC$  and  $\angle(AC, MX) = \angle(AH, CM) \Rightarrow \angle(AB, CM) = \angle(AO, MX)$ .

Step 47. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC  $\Rightarrow$  CF is perpendicular to FH.

Step 48. X is the midpoint of CH and CF is perpendicular to FH  $\Rightarrow$  FX = HX.

Step 49. FX = HX  $\Rightarrow$   $\angle FHX = \angle XFH$ .

Step 50. B, C, M are collinear,  $\angle(BQ, HO_1) = \angle CMX$ ,  $\angle O_1FX = \angle O_1ZX$ , BC is parallel to XZ and BQ is parallel to  $O_1Z \Rightarrow \angle O_1FX = \angle(HO_1, MX)$ .

Step 51. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, C, H, X are collinear,  $\angle(AB, CM) = \angle(AO, MX)$ ,  $\angle ABF = \angle CHF$  and  $\angle FHX = \angle XFH \Rightarrow \angle(AH, FX) = \angle(AO, MX)$ .

Step 52.  $\angle(AH, FX) = \angle(AO, MX)$  and  $\angle O_1FX = \angle(HO_1, MX) \Rightarrow \angle(AH, FO_1) = \angle(AO, HO_1)$ .

Step 53. B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,  $\angle ACB = \angle AQB$ ,  $\angle AHZ = \angle MCA$  and BH is parallel to MX  $\Rightarrow \angle(AH, MX) = \angle BQA$ .

Step 54. B, H, Z are collinear,  $\angle(AC, HQ) = \angle(HZ, AQ)$ , BH is parallel to MX, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to  $O_1Q \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(HO_1, AQ)$ .

Step 55.  $\angle(AC, MX) = \angle(HO_1, AQ)$  and  $\angle(AH, MX) = \angle BQA \Rightarrow \angle HAC = \angle(BQ, HO_1)$ .

Step 56. AO = BO, AO = OQ and BO = CO  $\Rightarrow$  O is the circumcenter of BCQ.

Step 57. O is the circumcenter of BCQ and M is the midpoint of BC  $\Rightarrow \angle(BQ, MO) = \angle QCO$ .

Step 58.  $\angle HAC = \angle(BQ, HO_1)$ ,  $\angle(BQ, MO) = \angle QCO$ , CQ is parallel to  $O_1X$ , AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle(AC, HO_1) = \angle(CO, O_1X)$ .

Step 59.  $\angle BAC = \angle MOC$ , AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle BAC = \angle(AH, CO)$ .

Step 60.  $\angle BAC = \angle(AH, CO)$  and  $\angle(AC, HO_1) = \angle(CO, O_1X) \Rightarrow \angle(AB, HO_1) = \angle(AH, O_1X)$ .

Step 61. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear,  $\angle BAF = \angle HCF$  and CH is parallel to MZ  $\Rightarrow \angle(AB, MZ) = \angle(AH, CM)$ .

Step 62.  $\angle(AB, HO_1) = \angle(AH, O_1X)$  and  $\angle(AB, MZ) = \angle(AH, CM) \Rightarrow \angle(CM, O_1X) = \angle(MZ, HO_1)$ .

Step 63. M,  $O_1$ , X, Z are cyclic  $\Rightarrow \angle O_1MZ = \angle O_1XZ$ .

Step 64. B, C, M are collinear,  $\angle(CM, O_1X) = \angle(MZ, HO_1)$ ,  $\angle O_1MZ = \angle O_1XZ$  and BC is parallel to XZ  $\Rightarrow \angle(HO_1, MZ) = \angle O_1MZ$ .

Step 65.  $\angle(HO_1, MZ) = \angle O_1MZ \Rightarrow HO_1$  is parallel to  $MO_1$ .

Step 66.  $HO_1$  is parallel to  $MO_1 \Rightarrow$  H, M,  $O_1$  are collinear.

Step 67. AH is perpendicular to CM and AQ is perpendicular to HQ  $\Rightarrow \angle HAQ = \angle(CM, HQ)$ .

Step 68. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, H, M, O<sub>1</sub> are collinear,  $\angle HAQ = \angle(CM, HQ)$ , AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to O<sub>1</sub>Q  $\Rightarrow \angle AFM = \angle AQM$ .

Step 69.  $\angle AFM = \angle AQM \Rightarrow A, F, M, Q$  are cyclic.

Step 70. A, F, M, Q are cyclic  $\Rightarrow \angle AFQ = \angle AMQ$ .

Step 71.  $\angle(AH, FO_1) = \angle(AO, HO_1)$ , AH is perpendicular to BC, AQ is perpendicular to HQ, AQ is perpendicular to O<sub>1</sub>Q and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle AOM = \angle QO_1F$ .

Step 72. A, F, H are collinear, H, M, O<sub>1</sub> are collinear,  $\angle AFQ = \angle AMQ$ , AH is perpendicular to BC, AQ is perpendicular to HQ, AQ is perpendicular to O<sub>1</sub>Q and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle AMO = \angle O_1QF$ .

Step 73.  $\angle AMO = \angle O_1QF$  and  $\angle AOM = \angle QO_1F \Rightarrow OA/OM = O_1F/O_1Q$

Step 74. F, M, O<sub>1</sub>, X are cyclic  $\Rightarrow \angle MFO_1 = \angle MXO_1$ .

Step 75.  $AO = KO$  and  $AO = OQ \Rightarrow KO = OQ$ .

Step 76.  $KO = OQ$  and  $KO_1 = O_1Q \Rightarrow O_1O$  is the bisector of  $\angle KO_1Q$ .

Step 77.  $KO = OQ$  and  $KO_1 = O_1Q \Rightarrow KQOM$  is perpendicular to  $OO_1$ .

Step 78.  $AO = BO$ ,  $AO = KO$  and  $BO = CO \Rightarrow A, B, C, K$  are cyclic.

Step 79. A, B, C, K are cyclic and A, B, C, Q are cyclic  $\Rightarrow A, C, K, Q$  are cyclic.

Step 80. A, C, K, Q are cyclic  $\Rightarrow \angle ACK = \angle AQK$  and  $\angle CAK = \angle CQK$ .

Step 81. AC is perpendicular to HZ and HK is perpendicular to KQ  $\Rightarrow \angle(AC, HK) = \angle(HZ, KQ)$ .

Step 82.  $\angle ACK = \angle AQK$ , O<sub>1</sub>O is the bisector of  $\angle KO_1Q$ , AQ is perpendicular to O<sub>1</sub>Q and KQ is perpendicular to  $OO_1 \Rightarrow \angle ACK = \angle OO_1K$ .

Step 83. B, H, Z are collinear,  $\angle(AC, HK) = \angle(HZ, KQ)$ , BH is parallel to MX, HK is perpendicular to KQ and KQ is perpendicular to  $OO_1 \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(OO_1, KQ)$ .

Step 84.  $\angle(AC, MX) = \angle(OO_1, KQ)$  and  $\angle ACK = \angle OO_1K \Rightarrow \angle(CK, MX) = \angle O_1KQ$ .

Step 85. A, B, C, K are cyclic  $\Rightarrow \angle ACB = \angle AKB$ .

Step 86.  $AO = BO$ ,  $AO = KO$  and  $BO = CO \Rightarrow O$  is the circumcenter of BCK.

Step 87. O is the circumcenter of BCK and M is the midpoint of BC  $\Rightarrow \angle KBO = \angle(CK, MO)$ .

Step 88.  $AO = BO$  and  $AO = KO \Rightarrow BO = KO$ .

Step 89.  $BO = KO \Rightarrow \angle BKO = \angle OBK$ .

Step 90. B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,  $\angle ACB = \angle AKB$ ,  $\angle AHZ = \angle MCA$  and BH is parallel to MX  $\Rightarrow \angle(AH, MX) = \angle BKA$ .

Step 91.  $\angle KBO = \angle(CK, MO)$ ,  $\angle BKO = \angle OBK$ , AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO  $\Rightarrow \angle(AH, CK) = \angle BKO$ .

Step 92.  $\angle(AH, CK) = \angle BKO$  and  $\angle(AH, MX) = \angle BKA \Rightarrow \angle AKO = \angle(MX, CK)$ .

Step 93.  $\angle(CK, MX) = \angle O_1 KQ$  and  $\angle AKO = \angle(MX, CK) \Rightarrow \angle AKO = \angle QKO_1$ .

Step 94.  $\angle CAK = \angle CQK$  and  $CQ$  is parallel to  $O_1X \Rightarrow \angle CAK = \angle(O_1X, KQ)$ .

Step 95.  $\angle CAK = \angle(O_1X, KQ)$  and  $\angle AKO = \angle QKO_1 \Rightarrow \angle(AC, KO) = \angle XO_1K$ .

Step 96.  $B, C, F$  are collinear,  $B, C, M$  are collinear,  $B, H, Z$  are collinear,  $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$ ,  $\angle MFO_1 = \angle MXO_1$  and  $BH$  is parallel to  $MX \Rightarrow \angle CAH = \angle XO_1F$ .

Step 97.  $\angle CAH = \angle XO_1F$  and  $\angle(AC, KO) = \angle XO_1K \Rightarrow \angle(AH, KO) = \angle FO_1K$ .

Step 98.  $AO = KO$ ,  $KO_1 = O_1Q$  and  $OA/OM = O_1F/O_1Q \Rightarrow O_1F/O_1K = OK/OM$

Step 99.  $\angle(AH, KO) = \angle FO_1K$ ,  $AH$  is perpendicular to  $BC$  and  $BC$  is perpendicular to  $MO \Rightarrow \angle FO_1K = \angle MOK$

Step 100.  $\angle FO_1K = \angle MOK$  and  $O_1F/O_1K = OK/OM \Rightarrow \angle FKO_1 = \angle OMK$ .

Step 101.  $KO_2 = MO_2$  and  $KY = MY \Rightarrow KM$  is perpendicular to  $O_2 Y$ .

Step 102.  $FO_2 = KO_2$  and  $KO_2 = MO_2 \Rightarrow O_2$  is the circumcenter of  $FKM$ .

Step 103.  $K, M, Y$  are collinear and  $KY = MY \Rightarrow Y$  is the midpoint of  $KM$ .

Step 104.  $O_2$  is the circumcenter of  $FKM$  and  $Y$  is the midpoint of  $KM \Rightarrow \angle KFM = \angle KO_2Y$ .

Step 105.  $B, C, M$  are collinear,  $K, M, Y$  are collinear,  $AH$  is perpendicular to  $BC$  and  $KM$  is perpendicular to  $O_2Y \Rightarrow \angle(AH, CM) = \angle KYO_2$ .

Step 106.  $B, C, F$  are collinear,  $B, C, M$  are collinear and  $\angle KFM = \angle KO_2Y \Rightarrow \angle(CM, FK) = \angle YO_2K$ .

Step 107.  $\angle(AH, CM) = \angle KYO_2$  and  $\angle(CM, FK) = \angle YO_2K \Rightarrow \angle(AH, FK) = \angle YKO_2$ .

Step 108.  $K, M, Y$  are collinear,  $\angle(AH, FK) = \angle YKO_2$ ,  $\angle FKO_1 = \angle OMK$ ,  $AH$  is perpendicular to  $BC$  and  $BC$  is perpendicular to  $MO \Rightarrow \angle FKO_1 = \angle FKO_2$ .

Step 109.  $\angle FKO_1 = \angle FKO_2 \Rightarrow KO_1$  is parallel to  $KO_2$ .

Step 110.  $KO_1$  is parallel to  $KO_2 \Rightarrow K, O_1, O_2$  are collinear.