



LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ



**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°26**

Juin 2026

Intelligence artificielle et travail mathématique

*Actes des quatrièmes journées d'étude du travail mathématique
JETM4*

Edité par Laurent Vivier

ISBN : 978-2-86612-412-0

ISSN : 2105-5203

Coordonnées de l'IREMS

Pour venir à l'IREMS

8 place Aurélie Nemours, Paris 13^e, bâtiment Sophie Germain, huitième étage,
(Métro 14 - Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a - Avenue de France)

Pour téléphoner : 01 57 27 93 48

Pour écrire à l'IREMS concernant les publications :

Par voie postale :

Balloud Carole
IREMS de Paris - Case 7018
Université de Paris Cité
75205 Paris cedex 13

Par voie électronique :

carole.balloud@u-paris.fr

Pour télécharger ce document : <https://irems.u-paris.fr/publications/>

Toutes nos publications sont téléchargeables sur notre site

Pour rester informé :

Inscription à la liste de diffusion de l'IREMS de Paris en envoyant ce mail vide
<mailto:sympa@listes.u-paris.fr?subject=subscribe%20info.irems>

Intelligence Artificielle et Travail Mathématique
Actes des Quatrièmes Journées d'Étude du Travail Mathématique – JETM 4

Editeur : Laurent Vivier

Auteurs :

Jorge Gaona Paredes

Alain Kuzniak

Jean-baptiste Lagrange

Dominique Laval

Elizabeth Montoya Delgadillo

Philippe R. Richard

Yasna Solar

Fabrice Vandebrouck

Laurent Vivier

Gaston Yerbanga

Introduction aux Actes des JETM4

Laurent Vivier¹

¹Université Paris Cité, LDAR, France ; laurent.vivier@u-paris.fr

Objectifs et contextes

Les Journées d'étude JETM sont régulièrement organisées par le groupe de recherche ETM du LDAR. Elles s'intéressent à l'étude didactique du travail mathématique, en particulier avec la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ThETM).

Cette quatrième édition (JETM4) se propose de discuter des potentialités de l'intelligence artificielle, et notamment générative, dans le développement du travail mathématique. Outre l'importance de prendre en compte ce thème, vu l'importance grandissante de l'influence de l'IA dans l'éducation, notre proposition de journées d'étude s'appuie sur plusieurs réflexions préalables dont nous souhaitons une convergence dans la perspective d'un projet de recherche : des études expérimentales préliminaires dans le projet ECOS-ANID C22H03 ; une réponse à un appel du programme France-Québec Samuel de Champlain (LDAR-UQÀM-UdeM) ; un projet France-Québec (UPCité-UdeM) ; une conférence dédiée à l'ÉT8 (<https://etm8.unican.es>). Ces actes constitueront notamment une base pour le thème transversal de l'ÉT9 (<https://uacm.edu.mx/etm9>).

Ces journées d'études ont pour but d'initier des recherches en didactique des mathématiques sur le thème de la prise en compte de l'Intelligence Artificielle (IA) pour le travail mathématique (TM) en réunissant des chercheurs autour de ce thème de recherche d'intérêt commun. L'objectif principal est de comprendre les enjeux didactiques afin d'accompagner les différents acteurs dans le développement d'un travail mathématique intégrant l'IA.

Cette quatrième édition des JETM s'est déroulée sur trois jours (5-7 novembre 2025) à l'Université Paris Cité. Préalablement initié par une équipe internationale UQÀM-LDAR, le comité scientifique et d'organisation est composé de quatre membres du LDAR : Philippe Hoppenot, Assia Nechache, Norma Virginia Segura Corella et Laurent Vivier.

Thème scientifique des JETM4

La ThETM, avec ses trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive présente un intérêt pour l'étude didactique de l'IA dans le travail mathématique. Plusieurs questions, ou défis, peuvent être formulées. Elles sont approfondies dans les différents textes des communications des JETM4.

L'introduction d'un nouvel artefact dans le milieu change les équilibres des différents ETM. Outre la genèse instrumentale qui prend en compte la constitution d'un instrument pour un individu afin d'effectuer un travail mathématique, la ThETM permet également des analyses dans les deux autres dimensions, notamment pour le pilotage de l'artefact.

De manière générale, l'usage d'un artefact traditionnel (y compris numérique) permet de soutenir la construction du sens. La preuve reste la responsabilité de l'actant et s'appuie sur un référentiel théorique connu, partagé par la communauté scientifique. L'intégration d'outils intelligents vient bouleverser cet équilibre dans la mesure où l'IA, interprété comme un

artefact, prend en charge une partie de la dimension discursive et s'appuie sur un référentiel opaque, dépendant de la base de données utilisée pour l'entraînement du modèle. Kuzniak et Vivier (page 18) le formule avec la conjecture suivante :

L'IA favorise, a priori, l'activation de la genèse discursive (de preuve). Le travail mathématique développé par les élèves s'inscrit en premier lieu dans le plan [Ins-Dis] avant de se développer dans le plan [Dis-Sem]. Cela le distingue du travail dans des environnements informatiques classiques où la circulation du travail est inverse.

On peut également, en se tournant vers l'actant humain, se poser la question de sa place dans un travail mathématique en contexte IA. Il y a d'abord un choix de l'artefact qui relève de cet actant : choix de l'IA et de son type, symbolique (IAS) ou générative (IAG), et notamment en ayant conscience de délaissier d'autres artefacts plus classiques comme des logiciels ou la calculatrice. Le risque d'un choix par défaut, voire subi ou imposé, est bien réel parce qu'une IAG semble pouvoir *tout faire*. D'une part il peut obérer un choix mathématique conscient, le choix des artefacts, et d'autre part on peut douter qu'un actant qui se contente uniquement d'une réponse issue d'une IAG effectue un TM (voir Solar page 37) ? Peut-on dire qu'une IAG effectue un travail mathématique ? (Richard, page 103, parle de simulation de certaines formes discursives.) Plus généralement, peut-on dire qu'un artefact effectue un travail mathématique ?

Bien entendu, un actant peut déléguer une partie du travail mathématique à une machine, mais il est important qu'il en garde le contrôle à l'intérieur du travail mathématique que l'actant effectue – et non pas la machine. L'intégration d'outils intelligents requiert de la part de l'actant un travail exigeant, intégrant des aspects sémiotique, instrumental et discursif, dans un ajustement permanent (Richard, pages 109-110, développe la notion d'idonéité).

La réponse d'une IAG présente la plupart des aspects d'un travail mathématique ce qui peut amener à une confusion. Mais ce n'est qu'un pseudo-TM, qui doit s'intégrer dans le TM d'un actant. Ce pseudo-TM peut évidemment être analysé avec la ThETM, mais l'intérêt est plutôt d'analyser et d'identifier comment un actant effectue un TM avec un artefact qui donne à voir un pseudo-TM. Alors qu'avec un artefact numérique plus classique (calculatrice, logiciels, IA symbolique) seule la genèse instrumentale devait être contrôlée et insérée dans le TM de l'actant, avec notamment la maîtrise de la routine mathématique automatisée, avec une IAG, l'actant doit contrôler l'ensemble de la production de l'IAG qui recouvre les trois dimensions de l'ETM.

Du point de vue de l'expérimentation didactique, il se pose la question des situations élaborées par le chercheur pour caractériser et comprendre le TM d'un actant en contexte IAG. Il est important que ces situations, ou plutôt les énoncés décrivant ces situations ne soient pas standards, ou classiques. En effet, l'IAG, avec sa puissance de calcul, est capable de retrouver un énoncé standard en quelques secondes, pouvant priver l'actant d'un travail mathématique, puisque la solution est déjà là avant même qu'il se pose des questions. Les textes de Solar ainsi que celui de Vandebrouck et Yerbanga proposent de telles situations.

Mais il ne faut pas se contenter de situation mettant en échec les IAG. En effet, avec un développement technologique impressionnant, les IAG sont de plus en plus puissantes et une

réponse incorrecte un jour peut être réduite le lendemain. Il nous semble bien plus fructueux de s'intéresser aux interactions actant-IAg dans la construction d'un TM, avec une étude des trois genèses de l'ETM. Quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour qu'un individu puisse comprendre, reformuler, contrôler et développer les réponses de son IAg ?

L'étude didactique se trouve alors largement complexifiée, avec deux niveaux de TM à analyser, le TM de l'actant et le pseudo TM de l'IAg, dont on ne voit de ce dernier que la réponse finale qui repose sur un référentiel opaque et des prises de décisions invisibles.

Enfin, une autre question se pose, peu discutée dans les JETM4, qui concerne notamment une utilisation de l'IAg par les enseignants. Dans les lignes précédentes, il a surtout été question de son usage par un actant effectuant un TM, essentiellement un étudiant. Dans les ETM, cela correspond à l'IAg vu comme un artefact, dont la réponse dépasse la simple dimension instrumentale. Mais un enseignant peut aussi utiliser l'IAg pour son enseignement, pour élaborer son ETM idoine. Dans ce cas, il y a bien un TM comme objectif, mais l'usage de l'artefact ne peut uniquement être modélisé dans le diagramme des ETM car l'enseignant doit également se référer à d'autres connaissances (didactiques, pédagogiques, de ses élèves,...)... que l'IAg peut aussi générer.

Présentation des articles

Les différentes communications des JETM4, sous forme de conférence, atelier ou poster, portent sur des réflexions ou des expérimentations intégrant différents outils d'IA à différents niveaux d'enseignement, au Chili, en France et au Québec. Nous les présentons ci-dessous dans l'ordre de présentation.

Kuzniak et Vivier s'intéressent à l'étude d'une tâche complexe de géométrie, proposée aux Olympiades de mathématiques, et notamment d'une résolution par Alphageometry, une IA spécifiquement conçue pour résoudre de telles tâches. Ces tâches, pourtant énoncées avec des notions élémentaires de géométrie, mettent en échec de nombreuses IA. Cela permet aux auteurs de discuter du fonctionnement des IA, des différences avec le fonctionnement humain, ainsi que la question du travail fourni par une IA en se référant aux trois dimensions de la ThETM.

Solar, propose l'étude d'une tâche non standard d'algèbre linéaire à des étudiants de troisième année d'université au Chili avec usage d'une IAg. Elle en tire notamment une première typologie de l'usage de l'IAg qu'elle croise avec la ThETM et les paradigmes de l'algèbre linéaire. Elle pointe notamment l'importance d'une posture critique des réponses de l'IAg qui doit reposer sur des connaissances mathématiques des actants en interaction.

De même, Vandebrouck et Yerbanga s'intéressent à un jeu qui peut se modéliser dans le contexte de l'algèbre linéaire. Elle est proposée à des étudiants de première année d'université en France qui peuvent utiliser l'IAg ChatGPT. Ils proposent une analyse en termes d'activités mathématiques à l'aide de la TADM pour identifier les connaissances nécessaires afin de contrôler et de reformuler les réponses de l'IAg, ainsi que les connaissances atteignables dans une interaction avec une IAg, pour identifier une plus-value d'apprentissage.

Laval présente le projet PRISME, un projet ambitieux s'intéressant à la reconfiguration du contrôle épistémique du travail mathématique lorsque des IA_g interviennent dans la production, l'explicitation ou la validation des procédures. Ce projet PRISME est multidimensionnel et s'appuie sur divers points de vue théorique, notamment didactique.

Gaona développe des réflexions personnelles avec une mise en perspective historique et épistémologique de l'émergence d'une nouvelle technologie, comme ici l'IA_g. Puis, il s'intéresse à la question de la vérité et de différentes formes d'inférence en contexte IA_g en mathématique. Il pose la question (page 90) : « si les systèmes actuels d'intelligence artificielle fonctionnent fondamentalement par induction, peuvent-ils réellement produire de nouvelles connaissances ? » Enfin, il déplace son questionnement vers la formation des enseignants et pose le problème de l'intégration didactique de l'IA_g par les enseignants de mathématique.

Richard avance que l'utilisation des IA, en distinguant IAs et IA_g, a pour conséquence un *nouveau travail mathématique* où la question de l'idonéité est centrale, avec une focalisation sur une triangulation entre actant, situation et technologie. Il développe ensuite la notion de *contrepoint technologique*, en mettant au cœur du dispositif l'humain qui délègue une partie du travail mathématique à une IA tout en garantissant une compatibilité avec les mathématiques et pouvoir soutenir la construction du sens. Après une présentation théorique (voir Richard 2026 pour plus de détail), Richard propose trois exemples pour illustrer son propos.

Lagrange prend comme fil directeur un parallèle avec l'introduction dans l'enseignement des mathématiques du calcul formel dans les années 1990 avec une focalisation sur les genèses instrumentales. Il revient en particulier sur l'exemple de la factorisation des polynômes et propose une expérimentation avec différentes IA_g. Il conclut avec une situation permettant de comprendre le fonctionnement des réseaux de neurones avec l'ajustement de poids.

Montoya Delgadillo propose une exploration du travail mathématique avec une IA, IA_g et IAs, sur une tâche de construction d'une spirale d'or proposée à des enseignants en formations initiale.

Remerciements

Les JETM4 ont bénéficié du soutien financier de la Faculté des Sciences, de l'UFR de mathématique de l'Université Paris Cité ainsi que du LDAR.



Table des matières

Laurent Vivier

Introduction..... 2

Alain Kuzniak et Laurent Vivier

A propos d'AlphaGeometry – Sur les interactions entre actants humains et logiciels d'intelligence artificielle dans un contexte scolaire 9

Yasna Solar Muñoz

Intégration des outils d'intelligence artificielle générative dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire : Effets sur l'espace de travail mathématique personnel 31

Fabrice Vandebrouck et Gaston Yerbanga

Activité d'étudiants d'université sur une tâche complexe avec ChatGPT 49

Dominique Laval

PRISME : penser et relier les espaces de travail à l'ère de l'intelligence artificielle. Vers une modélisation intégrée du travail mathématique entre didactique, cognition et éthique 61

Jorge Gaona

L'intelligence artificielle en éducation mathématique : entre histoire, vérité et pratiques 83

Philippe R. Richard

Résoudre, modéliser, concevoir avec les grands modèles de langage : situations et formes d'engagement dans le travail mathématique 99

Jean-baptiste Lagrange

Les techniques instrumentées, du calcul formel à l'IA générative 141

Elizabeth Montoya Delgadillo

Exploration du travail mathématique : quels enjeux entre l'intelligence artificielle générative et l'intelligence artificielle symbolique ? 173

À propos d'AlphaGeometry

Sur les interactions entre actants humains et logiciels d'intelligence artificielle dans un contexte scolaire

Alain Kuzniak¹, Laurent Vivier¹

¹Université Paris Cité, LDAR, France ; alain.kuzniak@u-paris.fr, laurent.vivier@u-paris.fr

L'universalité surprenante des Méthodes, l'élégante brièveté des démonstrations, la finesse et la promptitude des solutions les plus difficiles, une nouveauté singulière et imprévue, tout attirait les esprits, et il se faisait dans le Monde Géomètre une révolution bien marquée.

Fontenelle, Éloge de Rolle, 1718

L'IA favorise, a priori, l'activation de la genèse discursive (de preuve). Le travail mathématique développé par les élèves s'inscrit en premier lieu dans le plan [Ins-Dis] avant de se développer dans le plan [Dis-Sem]. Cela le distingue du travail dans des environnements informatiques classiques où la circulation du travail est inverse.

Conjecture didactique TM-IA-2024

Dans ce travail, nous proposons une étude approfondie de la manière dont fonctionne un logiciel spécifique pour résoudre des problèmes complexes de géométrie de type Olympiades. Cela permet des développements sur le travail mathématique en contexte IA et notamment la discussion sur la conjecture didactique TM-IA-2024.

Mots-clés : Olympiades, géométrie, conjecture didactique, travail mathématique, intelligence artificielle générative

Introduction : notre questionnement

Lors des journées JETM3 tenues en 2024, nous avons pu observer que les interactions entre les élèves et l'intelligence artificielle (IA), autour de problèmes de mathématiques, apparaissaient faibles et basées sur des productions de l'IA à la fois fausses et verbeuses¹. De ce fait, le travail mathématique effectué par les élèves était d'une grande pauvreté. Cependant, Maryna Rafalska attira notre attention sur un biais commun à propos des réflexions sur les usages de l'IA : la centration quasi exclusive sur l'IA générative (IAg). Elle nous signala l'intérêt d'autres logiciels et algorithmes, mis en œuvre en mathématiques, qui s'inscrivent dans la continuité des systèmes formels et des logiciels de preuve.

¹ Ce terme, emprunté aux informaticiens, vient du mot anglais *verbose* et nous l'emploierons pour désigner ces longs discours, avec beaucoup de redondances et de détours inutiles, qui sont fréquents dans les réponses de l'intelligence artificielle générative IAg.

Cette remarque nous a conduit à étudier un logiciel spécifique consacré à la résolution de problèmes géométriques : AlphaGeometry. Ce logiciel, développé par la filiale DeepMind de Google, a fait l'objet d'une publicité importante début 2024 à la suite d'une publication dans la revue Nature (Trinh et al., 2024). Dans leur résumé, les auteurs affirment fièrement :

Proving mathematical theorems at the Olympiad level represents a notable milestone in human-level automated reasoning, owing to their reputed difficulty among the world's best talents in pre-university mathematics.

Sur le modèle de la concurrence, entre joueurs d'échecs et logiciels, développée dans les années 90, il s'agit de montrer la supériorité de la machine sur les humains dans un domaine réputé pour son exigence intellectuelle. Dans leur article, Trinh et al. (2024) comparent leurs résultats à ceux obtenus par les étudiants très brillants qui postulent aux Olympiades de mathématiques. Ils assument ce défi jusqu'à faire évaluer leurs solutions par des professeurs, membres des jurys de ce type de concours. Ils se décernent ainsi l'équivalent d'une médaille d'argent, en étant très près d'une médaille d'or.

Cela nous a conduit à demander aux participants, à notre atelier, d'étudier le travail mathématique produit par AlphaGeometry lors de la résolution d'un de ces problèmes de géométrie. Cette demande peut sembler étonnante car elle tend à identifier une machine à un être pensant. Nous assumons, dans un premier temps, cette démarche et nous clarifierons la différence entre le travail mathématique produit par un élève et les résultats donnés par un artefact.

Après une étude du fonctionnement du logiciel, nous reviendrons sur la question des interactions entre les différents actants du monde scolaire et les nouvelles formes d'IAg. Cela nous permettra d'avancer quelques hypothèses pour étudier la Conjecture didactique TM-IA-2024 dans un contexte en rapide évolution similaire à celui que décrit Fontenelle au moment de l'apparition de l'analyse infinitésimale.

1. La résolution du problème imo-p3 (2015) par alphageometry

Dans leur article, les auteurs indiquent que, d'après l'évaluation donnée par des professeurs, membres de jurys des Olympiades, leur logiciel a pu résoudre presque autant de problèmes de géométrie que les médaillés d'or à cette épreuve.

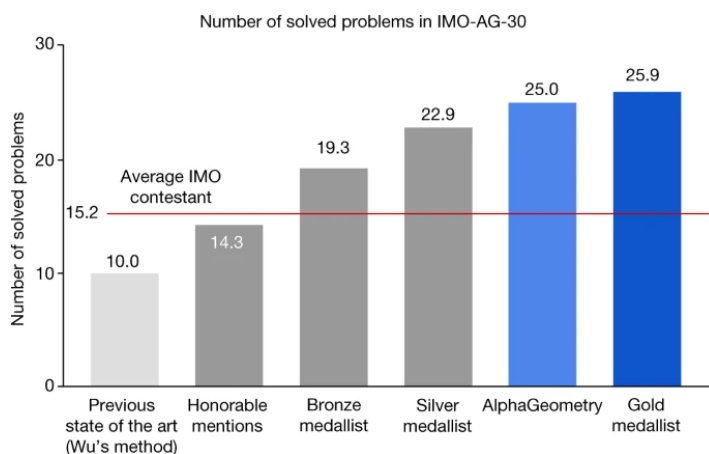


Figure 1. Performances d'AlphaGeometry et médailles aux Olympiades (Trinh et al. 2024)

Leur affirmation est légèrement biaisée par le fait que tous les candidats ne sont pas également préparés à ces épreuves : certaines délégations repartent sans avoir réussi à résoudre un seul des problèmes présentés. Dans le cas du problème IMO-P3 de 2015 que nous allons étudier, un seul candidat français avait obtenu la note maximale, un deuxième avait eu 1/7 et les quatre autres 0 alors que quatre candidats Etats-Uniens avaient obtenu le maximum et les deux autres 2 et 1. Dans la majorité des délégations, tous les candidats avaient 0 ou 1. Ces disparités indiquent bien que ce type de concours est très dépendant de la préparation reçue et que se comparer aux élèves n'a pas beaucoup de sens. Il n'en demeure pas moins que les résultats de la machine correspondent à ceux des candidats les mieux préparés.

1.1 Présentation du problème étudié : IMO-P3 (2015)

Parmi les 30 problèmes proposés dans l'article nous avons retenu le problème suivant :

Soit ABC un triangle aigu (acute triangle) avec $AB > AC$. Soit Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et F le pied de la hauteur issue de A . Soit M le milieu de BC .
 Soit Q le point sur Γ tel que $\angle HQA = 90^\circ$ et soit K le point sur Γ tel que $\angle HKQ = 90^\circ$.
 Supposons que les points A, B, C, K et Q soient tous différents et se trouvent sur Γ dans cet ordre.
 Prouvez que les cercles circonscrits aux triangles KQH et FKM sont tangents l'un à l'autre.

A priori, l'introduction enthousiaste de l'article conduit à penser que, tout comme dans les logiciels d'IA générative les plus usuels, le problème a été donné sous sa forme originale puis traité par la machine. Celle-ci a dû fournir un résultat sous la forme standard attendue en géométrie.

Soit ABC un triangle. Définissons le point H comme l'orthocentre du triangle CBA . Définissons le point F comme l'intersection des droites AH et BC . Définissons le point M comme le milieu de BC . Définissons le point O comme le centre de cercle circonscrit au triangle CBA .
 Définissons le point Q sur le cercle (O, A) tel que AQ soit perpendiculaire à HQ . Définissons le point K sur le cercle (O, A) tel que HK soit perpendiculaire à KQ . Définissons le point O_1 comme le centre de du cercle circonscrit au triangle KHQ . Définissez le point O_2 comme le centre du cercle circonscrit au triangle FMK . Prouvez que K, O_1, O_2 sont colinéaires.

Mais en fait, il n'en est rien et l'énoncé proposé à l'ordinateur a été réécrit par les auteurs sans doute pour respecter une syntaxe propre à la machine mais aussi plus profondément pour l'adapter aux connaissances et au mode de fonctionnement de la machine :

L'usage de termes géométriques, comme orthocentre ou pied des hauteurs, a été supprimé. Plus en relation avec les connaissances mathématiques nécessaires pour résoudre la tâche, on constate que la construction des points Q et K est donnée et que les centres des cercles circonscrits sont explicitement désignés. Enfin la tâche qui porte sur la tangence de deux cercles est interprétée et explicitée car il est demandé de prouver un alignement de trois points. Or comme nous le verrons, la machine a été entraînée à prouver des alignements de points grâce notamment à des techniques comme la chasse aux angles (*angle chasing*) ou la chasse aux distance (*distance chasing*). Cette transformation de la tâche n'est, à aucun moment, interrogée par les auteurs et les correcteurs.

La plupart des problèmes géométriques donnés aux Olympiades sont peu motivants, très techniques et basés sur des configurations complexes. Le choix de ce problème est lié à

l'intuition qu'une inversion pouvait ramener la question des deux cercles tangents à une configuration plus simple avec une droite tangente à un cercle. Cette intuition s'est confirmée après que le tracé la figure a fait apparaître le cercle circonscrit et le cercle d'Euler du triangle.

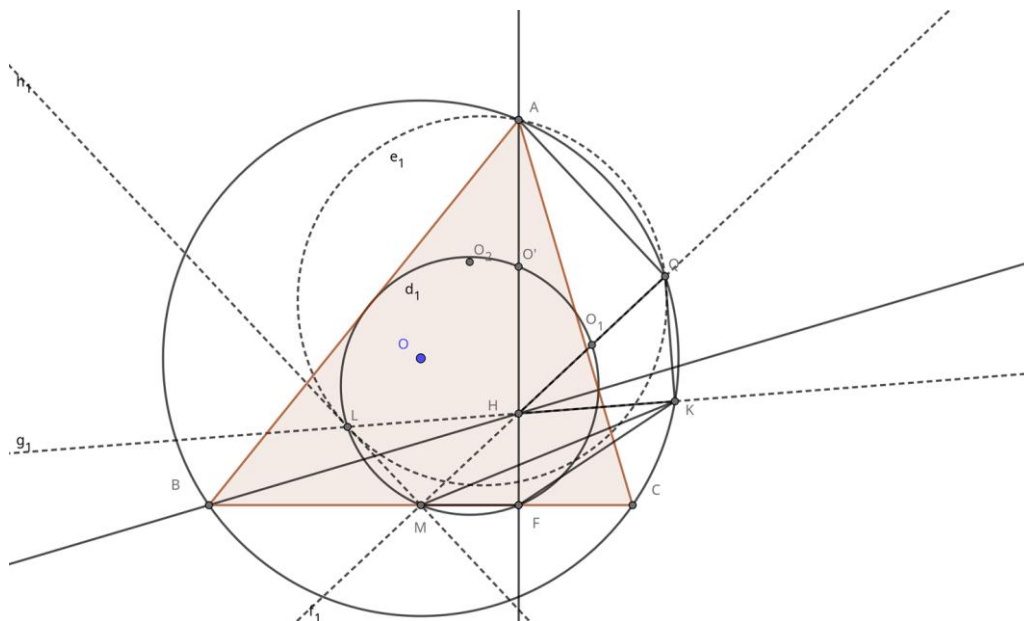


Figure 2. Dessin faisant apparaître le cercle circonscrit et le cercle d'Euler

L'importance du point H dans l'énoncé se trouve confirmée : H est le centre d'une homothétie entre ces deux cercles et donc le pôle d'une inversion (En annexe 1, la figure obtenue après inversion). Il est alors possible de trouver une solution et de la structurer en une vingtaine de pas².

On trouve de nombreuses solutions sur les sites internet et notamment sur le site de Evan Chen (<https://web.evanchen.cc/>). La plupart reposent sur des propriétés (notamment la puissance d'un cercle) ou sur des solutions analytiques avec parfois l'usage des nombres complexes. Une des solutions officielles n'utilise aucune propriété et s'articule aussi sur des méthodes d'*angle chasing* ou de *ratio chasing*.

1.2 La solution donnée par l'ordinateur, dite *human-readable*

La solution trouvée et communiquée par la machine est bien différente. Elle comporte 110 pas (*steps*) de longueur et de complexité inégales. Il y a des pas accessibles par des sujets ayant des connaissances élémentaires de géométrie (parfois du collège) comme :

Step 29. $BZ = FZ \Rightarrow \angle BFZ = \angle ZBF$ ou bien 85. A, B, C, K are cyclic $\Rightarrow \angle ACB = \angle AKB$.

Ou, à l'opposé, des pas qui demandent une plus grande concentration :

Step 23. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear, $\angle BAF = \angle HCF$, $\angle HAC = \angle (CM, HZ)$, BH is parallel to MX and CH is parallel to $MZ \Rightarrow \angle (AB, MZ) = \angle (AC, MX)$.

² Il faut noter que, semble-t-il et, contrairement à notre approche, les étudiants n'ont pas droit à des instruments de dessin et encore moins à des logiciels de géométrie dynamique.

Dans l'atelier, seuls les 40 premiers pas ont été proposés aux participants (voir l'annexe 2 pour la solution dans son intégralité pour les éventuels lecteurs très motivés). Les deux auteurs ont en effet craqué, tous deux et indépendamment, au pas 40 :

Step 40. $AO = BO$ and $BO = CO \Rightarrow O$ is the circumcenter of ABC .

Ce pas est typique d'une des nombreuses boucles que fait le logiciel puisque la conclusion de cette déduction est en fait une hypothèse de l'énoncé (Voir 3.2.3 pour une explication).

Dans son interface de communication, la machine ne distingue pas angles géométriques et angles de droite, ni l'ordre des points sur le cercle. Cela l'a conduit à trouver que deux angles sont égaux alors qu'ils sont supplémentaires :

Step 25. $\angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$ and $\angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X) \Rightarrow \angle XMZ = \angle XO_1Z$.

Ce qui est faux car les points O_1 et M sont de part et d'autre de la droite XZ mais sans conséquence car cette propriété est utilisée pour montrer la cocyclicité des points.

Step 26. $\angle XMZ = \angle XO_1Z \Rightarrow M, O_1, X, Z$ are cyclic.

Il faut également remarquer l'absence totale de recours à des propriétés et à des théorèmes même élémentaires, comme celui de la droite des milieux. Cette volonté de partir de zéro est assumée par les auteurs et d'une certaine façon, elle est à la base de l'approche neuronale en IA.

Une autre volonté des auteurs a été de développer la capacité d'AlphaGeometry à introduire des points auxiliaires pour résoudre les problèmes de géométrie. C'est ainsi que trois points additionnels sont construits d'entrée. Leur usage n'apparaîtra parfois que très loin (le point Y ne sera utilisé la première fois qu'au pas 103) :

Construct point X as the midpoint of CH

Construct point Y as the midpoint of KM

Construct point Z as the midpoint of BH .

Dressons un petit bilan en nous interrogeant sur l'effroi qu'aurait dû normalement éprouver un correcteur face à cette solution si un des étudiants l'avait proposée ! Aurait-il donné la note maximale ? A-t-il été influencé par Google ?

Seul importe ici le fait que malgré *quelques* approximations dans la rédaction, la solution proposée est juste mathématiquement mais peu accessible à un lecteur humain.

2. Comment fait la machine pour produire ce résultat ?

2.1 De quelle machine parle-t-on ?

Le code du logiciel AlphaGeometry est open-source et les auteurs nous invitent à l'utiliser. Ils nous fournissent les références matérielles³ : ils ont fait fonctionner leur logiciel sur un

³ Le V100 est ancien (2017), les GPU actuels de Nvidia vont 10 fois plus vite avec 5 fois plus de mémoire. Ces GPU coûtent très cher (entre 30 000 et 40 000 dollars l'unité) mais on peut louer leur équivalent sur le cloud TPU-Google pour environ 4 dollars l'heure. *Central Processing Unit* est un processeur pour le calcul, il est associé à d'autres processeurs spécialisés comme les *Graphics Processing Unit* ou *Tensor Processing Unit*

ensemble de *16 V100-GPUs and 250 CPU workers*. Nous verrons que les GPU et TPU servent surtout dans la phase d'apprentissage dont nous parlerons plus tard.

Le problème choisi n'est pas le plus facile pour l'ordinateur (la difficulté est évaluée en fonction du nombre de pas utilisés dans la solution), il n'est pas non plus le plus difficile.

Les auteurs précisent qu'ils ont limité le temps de calcul de l'ordinateur pour s'approcher des conditions du concours. Chaque session du concours dure 4h30 et les candidats doivent résoudre trois problèmes. Ils ont alors considéré deux cas, soit le candidat consacre tout son temps à un seul problème, soit il répartit son temps entre les problèmes et consacre 1h30 au problème de géométrie.

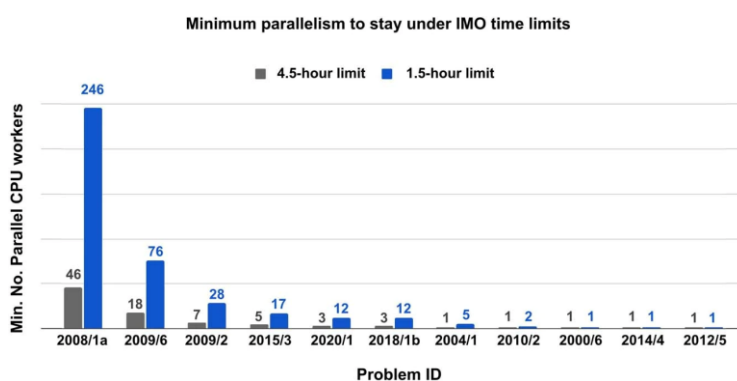


Figure 3. Nombre de CPU utilisés pour résoudre les différents problèmes (Trinh et al., 2024)

Pour résoudre le problème IMO-P3 (2015) en moins d'1h30, il faut mobiliser 17 CPU.

2.2 Description succincte, mais pas forcément brève, de la méthode développée dans AlphaGeometry.

Pour son développement, AlphaGeometry a utilisé une méthode mixte basée à la fois sur une approche logique et sur une approche neuronale utilisant un Modèle de Langage (ML). Leur méthode est différente des méthodes classiques de l'IA, d'avant la révolution neuronale comme celle utilisée par exemple dans GeoGebra. Dans ces logiciels, les méthodes sont essentiellement algébriques et basées sur la recherche d'idéaux maximaux dans des anneaux de polynômes. Elles ont l'avantage de produire des preuves intelligibles et aussi valides d'un point de vue mathématique. Mais, elles succombent dès que les données deviennent trop grandes face à une explosion combinatoire des calculs.

L'utilisation d'un Modèle de Langage (ML) peut étonner, mais de fait pour un ML produire une preuve c'est produire un texte dans un langage particulier. Pour compléter une phrase ou un texte, les ML choisissent à chaque fois les mots les plus probables en fonction des séquences de mots précédentes.

L'approche neuronale suppose un apprentissage qui s'appuie sur une grande base de théorèmes et le logiciel sera d'autant plus performant qu'il se sera entraîné sur une base importante. Pour cela, il faut disposer de dizaines de millions de théorèmes. De plus, du fait de son approche probabiliste, rien ne garantit que la preuve est juste. C'est le propre des ML d'avoir des hallucinations, autre façon de dire que leur preuve est fautive. Ces théorèmes doivent donc être prouvés sans l'usage d'un ML, avec des méthodes symboliques et non probabilistes.

2.2.1 Première phase : constitution de la base des problèmes à résoudre

Quand on a besoin de disposer de millions de théorèmes, il est nécessaire de produire des dizaines de millions de problèmes puisque l'idée est de partir de zéro (*from scratch*) et de toute manière la littérature ne fournit pas cette quantité de théorèmes.

Pour générer ces problèmes, les auteurs construisent une base d'ensembles d'hypothèses (BH) à partir d'un ensemble de prémisses (BP). Ces prémisses (55) sont des règles de construction d'objets géométriques divers (construction de rectangles, de bissectrices de centre inscrits etc.) qui permettent d'obtenir des points, des alignements, des cocyclités, etc.

Les ensembles d'hypothèses, qui sont des sortes de problèmes ouverts, sont générés à partir de choix aléatoires, mais avec une bonne répartition, d'éléments de la base de prémisses. Cette première phase permet d'obtenir environ 1000 millions de problèmes.

2.2.2 Deuxième phase : constitution de la base d'entraînement.

Cette phase est très complexe car il faut générer les théorèmes à partir de la base d'hypothèses et aussi s'assurer qu'ils sont vrais ! Les auteurs ont utilisé simultanément trois méthodes. Pour plus de clarté, nous les présentons séparément.

Génération par Déduction Logique (DD) d'une base de données

Les auteurs emploient différents moteurs de déduction logique (dont GeoLogic) qui utilisent des langages assez proches du langage humain. Pour chaque groupe d'hypothèses dans BH, le moteur symbolique (inspiré de GeoLogic) calcule la *clôture déductive* du problème : il déduit itérativement tous les théorèmes possibles à partir de règles de déduction de la géométrie euclidienne.

La validité de ces théorèmes est ensuite vérifiée par un procédé de *back tracing* ou *traceback* qui remonte du théorème obtenu aux hypothèses en supprimant les détours inutiles ou les fausses pistes. On obtient ainsi un triplet (**H**ypothèse, **C**onclusion, **P**reuve).

Cette méthode appelée DD peut fonctionner seule et les auteurs ont vérifié qu'elle permet de résoudre 7 des 30 des problèmes issus des Olympiades.

Injecter des règles algébriques (AR)

La base d'hypothèses (BH) a été enrichie avec des données algébriques qui permettent d'organiser la chasse aux angles/rapports/distance. Cette fois les objets sont donnés sous forme algébrique :

Construire le point X tel que $\angle ABX = \alpha$.

La génération des nouveaux théorèmes se fait en alternant DD et AR. Par exemple, le moteur logique DD déduit une interrogation sur l'égalité de deux distances. Il lance alors le moteur AR qui valide (ou non) cette égalité en faisant des calculs algébriques puis renvoie cette propriété au DD si la preuve n'est pas encore obtenue.

Ce nouvel ensemble de théorèmes est vérifié de la même façon que précédemment. Cet usage simultané d'un moteur déductif et d'un moteur algébrique est une nouveauté revendiquée par les auteurs. Il l'appelle (DD+AR) et il permet de résoudre 14 problèmes IMO.

Interagir avec un réseau neuronal (Gpt4)

Cette interaction apporte des aides heuristiques. Généralement, les aides heuristiques sont des règles humaines. Ici, les auteurs souhaitent que leurs solutions soient uniquement données par la machine. Les règles heuristiques en question sont alors essentiellement des règles automatiques d'ajout de points par constructions comme :

Ajoute un point X tel que ABCX soit un parallélogramme.

Les trois constructions auxiliaires données au début de la solution de notre problème IMO-P3 sont un exemple de ces constructions auxiliaires automatiques. Pour communiquer avec le moteur symbolique, le système neuronal est lancé par un prompt :

You are GPT-4, an Artificial General Intelligence, and Olympiad Solver,

Your task is to provide auxiliary constructions in a formal language, such that a symbolic engine can parse your output and perform symbolic deductions to attempt to solve the IMO problem. You will be provided with the output of the symbolic engine to start constructing the first auxiliary point. If the symbolic engine failed to solve the problem, you will be asked to construct the next auxiliary point. This process will repeat multiple times until you can solve the problem.

Il faut, comme précédemment, vérifier la validité du théorème obtenu avec les règles algébriques (AR).

Les trois systèmes : DD, AR et RN fonctionnent ensemble comme on peut le voir sur le diagramme suivant :

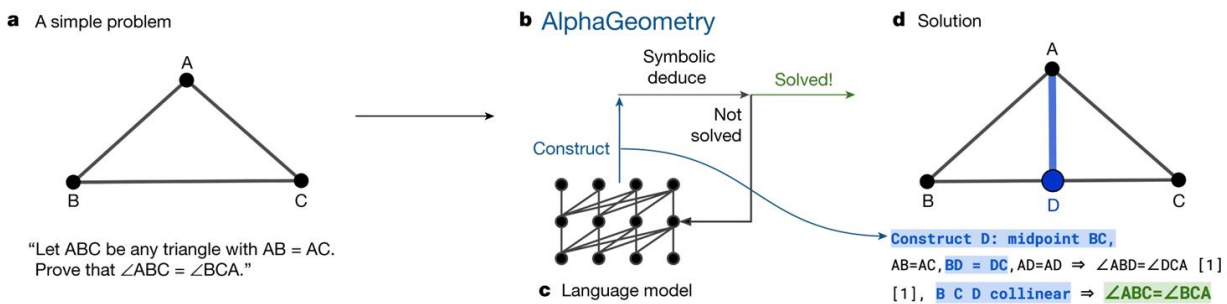


Figure 4 : Fonctionnement combiné du moteur symbolique et du modèle de langage (Trinh et al., 2024)

Conclusion de la phase 2

En combinant les trois approches, les auteurs ont finalement obtenu 500 millions de théorèmes qui, après un élagage (*pruning*) destiné à supprimer les théorèmes faux et les doublons, leur a donné une base de 100 millions de théorèmes allant du très simple (quelques pas) au très complexe (plus de 200 pas). Parmi ces 100 millions de théorèmes, il y en a 9 millions dont la preuve a nécessité des constructions auxiliaires de points supplémentaires. Techniquement, cette phase a nécessité 100 000 CPU workers qui ont fonctionné pendant 72 heures.

L'ajout du réseau neuronal permet de résoudre 15 problèmes au lieu de 14. A l'époque, ChatGpt4 ne résolvait seul aucun des problèmes.

2.2.3 Troisième et dernière phase : entraînement d'un ML avec des transformers

Nous en arrivons à la phase la plus déconcertante pour un mathématicien, l'usage d'un modèle de langage neuronal s'appuyant sur des *transformers*. Ces modèles de langage sont les plus performants à ce jour⁴. Il s'agit de réseaux neuronaux très complexes qui traitent les vecteurs associés aux mots d'un langage donné (en général humain). Ils ont été introduits dans un article fondateur (Vaswani, 2017) publié en 2017 par des chercheurs de Google et ont permis les avancées récentes et spectaculaires de l'IAg.

L'entraînement suppose trois étapes :

1. Transformation de chaque théorème (Hypothèse, Conclusion, Preuve) en une chaîne de mots. Chaque mot est vectorialisé pour constituer un *embedding word*. Cet ensemble de mot de chaînes formeront les entrées (*Input*).
2. Entraînement du transformeur sur les 100 millions de théorèmes.
3. Affinage (*Fine-Tuning*), en privilégiant les 9 millions de théorèmes démontrés grâce à des constructions auxiliaires.

Cette fois, on change de catégorie matérielle et il faut louer de gros ordinateurs car l'entraînement fonctionne sur un réseau de (4x4) TPUv3 (1968 Teraflops) de Google⁵. Il n'est pas évident de connaître le nombre de paramètres ajustés par cet entraînement, mais il semble être de l'ordre de 200 millions.

A l'issue de tout ce processus, le logiciel AlphaGeometry est enfin prêt ! Il comporte trois ingrédients, les moteurs de déduction logique (DD) et algébrique (AR) avec leur base de connaissance, et le modèle ML obtenu à l'issue de l'entraînement. Ajoutons que pour faire fonctionner le logiciel, il faut aussi utiliser la base Mermaid qui transforme les chaînes (Hypothèse, Conclusion, Preuve) en vecteurs qui servent de données pour l'entraînement.

Les auteurs précisent qu'ils ont alors pu résoudre 25 problèmes, l'affinage des données leur a permis de passer de 23 problèmes résolus à 25.

En conclusion, on peut considérer AlphaGeometry comme un Modèle de Langage spécialisé dans la résolution de problèmes de géométrie. Il s'agit d'un produit développé par Google et il est probable qu'il soit (ou qu'il sera) intégré dans les nouvelles IAg développées par cette entreprise.

3. Une approche didactique basée sur la Th-ETM

Au début de cet article, nous avons indiqué que les participants étaient invités à évaluer le travail mathématique de la machine. Cette humanisation de la machine est actuellement courante et favorisée par les Chatbot qui semblent converser avec les utilisateurs en faisant preuve d'empathie. De nombreuses dérives, parfois cruelles, de cette identification sont régulièrement rapportées.

⁴ Voir par exemple le livre de Norvig et Russel, chapitre 25, ou l'excellent cours de Benoit Sagot au Collège de France en 2025.

⁵ On peut les louer chez Google pour 2500 euros l'heure par unité.

Notre expérience montre clairement, s'il en était besoin, qu'AlphaGeometry est un artefact. En effet, si on l'assimilait à un élève qui résout un problème de géométrie, cet élève aurait d'énormes qualités logiques et calculatoire mais très peu de connaissances : la solution se résume à des transformations complexes et itératives d'écritures formulées dans un langage très symbolique.

De fait, on doit vraiment considérer l'IAg pour ce qu'elle est à savoir un logiciel qui génère du discours, un discours qui se donne à voir comme une preuve mathématique. Il y a cependant une différence entre AlphaGeometry et l'IAg généraliste utilisée par les élèves. La preuve donnée par AlphaGeometry est validée par le système DD+AR, par contre rien ne garantit la preuve d'une IA générative.

3.1 Retour sur la Conjecture didactique TM-IA-2024

Les conjectures didactiques ne sont pas des conjectures mathématiques, elles ne pourront jamais être complètement vérifiées. Elles aident à penser et à fixer les conditions qui assurent leur validité. En particulier, leur énoncé peut favoriser l'identification de tâches mathématiques et la construction des situations didactiques susceptible de former le travail mathématique attendu.

Le rôle de ces conjectures est d'ouvrir des voies de recherches basées sur des théories issues de la didactique des mathématiques et partagées par des communautés de chercheurs, en l'occurrence ici la Th-ETM. Il est ainsi possible de les formuler de manière techniques et précises comme dans le cas que nous étudions.

L'IA favorise, a priori, l'activation de la genèse discursive (de preuve). Le travail mathématique développé par les élèves s'inscrit en premier lieu dans le plan [Ins-Dis] avant de se développer dans le plan [Dis-Sem]. Cela le distingue du travail dans des environnements informatiques classiques où la circulation du travail est inverse.

Cette conjecture attire notre attention sur le fait qu'*a priori*, l'élève qui utilise l'IA est confronté à un discours de preuve et que cela devrait le conduire à développer ses capacités de compréhension et de déduction de preuve.

Cette entrée est différente de celle qui a pu être observée lors de l'usage des logiciels de géométrie dynamique ou des calculatrices. Contrairement aux attentes des concepteurs de ces logiciels, leur usage a le plus souvent court-circuité le travail de preuve déductive et favorisé les preuves mécaniques basées sur la visualisation. Il a fallu développer des méthodes spécifiques, comme les constructions molles⁶, pour tenter de remobiliser les propriétés et les preuves discursives.

Dans le travail de l'élève en interaction avec l'IAg, celui-ci se trouve confronté à une production différente de celle de GeoGebra ou d'un tableur, il s'agit d'une preuve associée à un discours. On peut donc dire que les enjeux du travail se place d'entrée dans le plan [Ins-Dis].

Face à la complexité sémiotique du résultat fourni par l'IA, le travail de l'élève risque de s'orienter vers la genèse sémiotique (Sem), tant il est difficile de comprendre la signification

⁶ Voir l'article de Lagrange dans cet ouvrage.

de tous ces signes, de savoir comment les organiser et les traduire en propriétés mathématiques (référentiel théorique). Le travail réel apparaît alors plutôt comme un travail du type suivant :

[Ins - Dis] → [Ins - Sem] → (réfth)

Il y a un fort risque à la fois de confinement et de blocage dans le demi-plan **[Sem-réfth]**.

C'est ce qui s'est produit lors de l'atelier où, comme nous, les participants ont vite abandonné leur étude de la preuve après avoir repéré quelques propriétés et sans voir la perspective globale. L'analyse de cette situation montre que, sans étayage, le travail mathématique risque de s'enfermer dans un blocage sémiotique. La genèse discursive (de preuve) n'apparaît pas spontanément et il faut envisager les conditions didactiques et l'étayage qui permettent de la mettre en œuvre et finalement de la faire fonctionner.

En d'autres termes, cela pose la question de savoir dans quelles conditions Conjecture didactique TM-IA-2024 (l'IA favorise la genèse discursive) est vérifiée ?

3.2 Interactions avec un ML associé à une IA générative

Comme nous le suggère la citation de Fontenelle, mise en exergue au début de cet article, il semble que nous vivons actuellement une révolution dans les méthodes de preuves utilisées en mathématiques scolaires. Chaque jour fait apparaître une avancée majeure et les IA d'aujourd'hui surpassent largement celles de l'an passé. Par exemple, elles produisent aujourd'hui plusieurs preuves des problèmes IMO sur lesquelles elles balbutiaient l'an passé. Cela est largement dû au phénomène dit de *contamination*. L'IA utilise les solutions disponibles sur Internet, et il n'est pas évident de savoir ce qui relève de son pouvoir de déduction ou bien de l'exploitation des connaissances issues d'Internet. Benoît Sigot, dans son cours, présente une étude qui montre une chute drastique des performances de l'IA sur la résolution de problèmes d'informatique en fonction de leur ancienneté. Les résultats obtenus sont quasiment nuls sur les problèmes difficiles et très difficiles récents. Mais, on peut aussi penser que l'usage internalisé de ML spécialisés, tels que ceux développés par DeepMind, puisse aussi contribuer à une amélioration.

3.2.1 Un résumé de la preuve générée par l'IA

Pour comprendre, enfin, la solution donnée par AlphaGeometry au problème IMO-P3, nous avons demandé à Gemini3 de résumer⁷ cette solution (soit 110 pas en quatre pages). La tâche est à la fois stupide et impossible pour un être humain normal, elle ne l'est pas pour la machine qui prend cette production comme un texte dans une langue particulière.

À notre grande surprise, Gemini3 a généré un discours intelligible et parfaitement structuré. Cela nous a conduit à poursuivre nos interactions et pour finir nous avons demandé une synthèse de la démonstration dont voici les grandes lignes :

⁷ Cette idée nous est venue de l'assistant IA de Word qui nous a proposé de faire le résumé du texte de la solution alors que nous étions en train de le mettre en forme. Contrairement à celle de Gemini, la réponse obtenue a été indigente.

Synthèse de l'Analyse : Problème IMO-P3 2015

1. Nature du Problème

Il s'agit de prouver la colinéarité des points K , O_1 , O_2 dans une configuration impliquant l'orthocentre H , le milieu M de $[BC]$, et plusieurs cercles circonscrits.

2. Structure de la Preuve (110 étapes)

Phase 1 (Étapes 1-32) : Établissement de la cocyclicité des points A , B , C , Q et M , O_1 , X , Z .

Phase 2 (Étapes 33-66) : Preuve de l'alignement des points H , M , O_1 par l'utilisation de parallélismes ($MX \parallel BH$, $MZ \parallel CH$).

Phase 3 (Étapes 67-100) : Utilisation de similitudes de triangles pour établir le rapport de longueurs.

Phase 4 (Étapes 101-110) : Conclusion sur la colinéarité de K , O_1 , O_2 via l'égalité $\angle FKO_1 = \angle FKO_2$.

3. Critiques et limites Identifiées

Redondances : La preuve redémontre des faits acquis dans l'énoncé, comme le fait que M est le milieu de BC ou que O est le centre du cercle circonscrit à ABC .

Ambiguïté des Angles : Le texte utilise des égalités d'angles sans distinguer les angles géométriques des angles orientés, ce qui peut poser des problèmes de configuration (angles supplémentaires non traités).

Approche par Force Brute : La démonstration suit un cheminement "machine" (IA symbolique) qui privilégie la vérification de chaque propriété possible plutôt qu'une stratégie élégante (comme l'inversion ou l'homothétie).

Cette structuration permet d'établir un lien entre la démonstration de la machine et notre propre vision du problème. Ainsi, la phase 1 est liée au cercle d'Euler dont la machine va utiliser méthodiquement presque tous les points (X et Z sont deux points de ce cercle).

La phase 2 montre l'usage des points X et Z , elle est liée à l'utilisation de la droite des milieux dans les triangles BHC . Il s'agit là d'une configuration qui fait l'objet d'un apprentissage dans notre pays. L'alignement des points H , M et O_1 est immédiat dans une approche par transformations.

3.2.2 Angle chasing et configuration latente

La phase 3 s'appuie sur une similitude et la phase 4 sur une égalité d'angle. Ces deux propriétés sont loin d'être évidentes. Cela vient du fait que leurs preuves s'appuient à la fois sur des méthodes de chasse aux angles et aux rapports, et sur des configurations familières mais qui ne sont pas directement associées à une propriété comme l'est celle de la droite des milieux.

Illustrons notre propos sur le pas 104 :

Peux-tu m'expliquer ces deux lignes :

Step 104. O_2 is the circumcenter of FKM and Y is the midpoint of KM $\Rightarrow \angle KFM = \angle KO_2Y$.

La réponse de Gemini3 est la suivante :

Étape 104 : La relation Angle Inscrit / Angle au Centre

C'est l'étape la plus technique de la phase 4. Elle repose sur une propriété classique du cercle circonscrit :

1. O_2 étant le centre du cercle passant par F, K et M, l'angle $\angle KFM$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc KM.
2. L'angle au centre correspondant est $\angle KO_2M$. Selon le théorème de l'angle inscrit, on a : $\angle KO_2M = 2 \times \angle KFM$
3. Utilisation du milieu Y : Dans le triangle isocèle KO_2M (où $O_2K = O_2M$ sont des rayons), la droite (O_2Y) passant par le milieu Y de la base [KM] est la bissectrice de l'angle au centre $\angle KO_2M$.
4. Conclusion de l'étape : Puisque (O_2Y) coupe l'angle au centre en deux parts égales, on a : $\angle KO_2Y = \angle KO_2M$
5. En combinant cela avec le théorème de l'angle inscrit, on obtient l'égalité directe : $\angle KO_2Y = \angle KFM$.

La solution pourrait être plus rapide mais une fois encore elle est juste. On constate qu'il s'agit d'une propriété obtenue par *angle chasing* comme toutes les autres qui portent sur les angles. Mais, ici l'entraînement d'AlphaGeometry lui a permis de reconnaître une configuration standard pour un système neuronal. C'est ce qu'on appelle une configuration latente dans ce type d'approches.

La méthode d'*angle chasing* est à la base de certaines formations liées aux olympiades⁸. Cela provient du fait que lors de ces Olympiades, les concurrents viennent de pays très variés avec des programmes scolaires très différents. Il faut donc proposer des solutions « simples » (sans utiliser des propriétés, comme celle des transformations) à des problèmes suffisamment complexes du fait des configurations mises en jeu. Trouver une telle solution nécessite alors des méthodes de chasse et reconnaissance par visualisation de nombreuses configurations standards.

Cette façon de faire de la géométrie était celle en place lors de la fameuse « géométrie du triangle » tant honnie par Dieudonné et les réformateurs des mathématiques modernes, plus attentifs aux propriétés générales et aux transformations. Au début des années 2000, cette forme d'enseignement a été brièvement réintroduite avec des démonstrations basées sur les cas d'égalité des triangles et sur les décompositions d'aires. Méthodes efficaces mais dont les promoteurs avaient oublié le coût exorbitant en termes de visualisation et d'entraînement. Par

⁸ Voir le livre en ligne de Evan Chen : Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad.

contre, elles ne sont pas si éloignées de celles mises en œuvre dans des formations états-uniennes aux Olympiades.

3.2.3 Une rhétorique de preuve particulière

Des différences portent aussi sur des éléments clés de la rhétorique déductive comme nous avons pu le constater (1.2) avec cette manière si particulière de fonctionner du logiciel, où il semble redémontrer une hypothèse de l'énoncé. Le point Y est construit comme milieu de KM au début de sa solution mais au pas 103, il est démontré cette propriété :

Step 103. K, M, Y are collinear and $KY = MY \Rightarrow Y$ is the midpoint of KM.

Nous avons posé la question suivante à Gemini :

Peux-tu me dire à quel moment AlphaGeometry, dans sa preuve, a-t-il pu savoir que KY et MY étaient égaux ?

La réponse de Gemini vient éclairer cette question qui nous avait tant irritée. Il le fait d'une façon verbeuse et longue, mais instructive, que je résume ici :

L'ordinateur ne « découvre » pas cette égalité par une observation visuelle, mais la déduit de la manière dont les points ont été construits dans sa mémoire logique.

Pour un logiciel de géométrie automatique, définir Y comme le milieu de [KM] revient à enregistrer trois informations liées entre elles : K, Y et M sont colinéaires, La distance KY est égale à la distance MY ($KY=MY$), Y se situe entre K et M.

À l'étape 103, le logiciel semble "redécouvrir" cette égalité, mais il s'agit en réalité d'une étape de rappel logique pour valider la suite de la preuve. Même s'il a créé Y comme milieu au début, il doit "ré-énoncer" que $KY=MY$ à l'endroit précis où il veut prouver que la droite (O_2Y) est une médiatrice. Sans cette étape intermédiaire, il ne pourrait pas justifier rigoureusement le passage à l'étape 104 sur l'angle au centre.

Cette explication aide à comprendre le fonctionnement du logiciel, il n'en demeure pas moins que la formulation logique utilisée (par réciproque) est perturbante.

Cet ensemble de remarques attirent l'attention sur le fait que le travail mathématique favorisé par la machine n'est pas nécessairement en concordance avec celui qu'essayent de porter les enseignants dans un contexte scolaire donnée.

Il semble donc nécessaire de s'assurer de la nature du travail mathématique développé par la machine. Le sujet doit piloter et contrôler le travail qu'il délègue à la machine. Il peut le faire en s'appuyant sur un ensemble d'amorces (prompt).

4. Vers un programme de recherches⁹ : deux constats et trois hypothèses

Dans cette conclusion, nous avançons différentes hypothèses de travail qui peuvent servir à baliser un programme de recherches sur des usages de l'IAg basées sur les interactions entre des élèves et l'artefact IAg. Ce programme est dirigé, en arrière-plan, par l'exploration des conditions qui assurent la validité de la Conjecture didactique TM-IA-2024. Ou plus

⁹ Pour une approche plus détaillée de ce programme voir (Kuzniak, 2026).

brièvement, et de façon moins théorique, comment penser l'étayage et le développement de preuves mathématiques chez les élèves face à la puissance du discours de l'IA générative.

Notre étude du fonctionnement d'AlphaGeometry, complétée par des remarques faites par les professeurs¹⁰ et des observations de classes sur l'usage de l'IAg, nous conduit à formuler les trois constats suivants :

Constat 1. Certains élèves demandent à l'IA de résoudre le problème et restituent sans modifications la solution de l'IA aux professeurs.

Constat 2. Dans le cas des élèves les plus motivés, ceux-ci se trouvent englués et submergés par le discours de l'IA et renoncent à le critiquer.

Cela nous a conduit à formuler les hypothèses suivantes nécessaires pour un enseignement interactif entre IA et élèves.

H1 : Une recherche initiale sans la machine. L'élève doit avoir cherché, voire trouvé, une première solution du problème avant de solliciter l'IA.

En géométrie, par exemple, il est nécessaire d'avoir au minimum construit la figure et d'avoir envisagé quelques pistes de solution. Cette phase permet à l'élève de s'impliquer ensuite pleinement dans sa confrontation avec la machine et de ne pas être le réceptacle passif du discours de l'IA.

H2 : La mise en place d'un jeu d'interactions critiques entre la machine et l'élève. Ce jeu d'échanges doit pouvoir s'amorcer à partir de H1.

Il peut être fondé sur la critique par la machine de la preuve donnée par l'élève, ou, au contraire sur une discussion sur la preuve générée par la machine avec des demandes d'explications précises sur des étapes spécifiques.

H3 : Une appropriation et une restitution de la preuve (Narration de recherche). Le résultat final ne doit pas être la simple restitution de la solution de l'IA.

L'élève doit rendre compte de sa recherche et de sa compréhension du problème en produisant sa propre solution. La solution donnée par l'élève peut être accompagnée d'une narration de recherche du problème montrant l'avancée de sa recherche.

Il s'agit d'un vaste plan de recherches dont chacune des hypothèses de travail doit être soigneusement étudiée et développée grâce, notamment, au développement de tâches mathématiques ou informatiques adaptées. Le problème IMO que nous avons étudié est naturellement trop complexe mais cela n'exclut pas *a priori* des challenges ambitieux à la manière de ceux développés par MathAData¹¹.

Ce programme de recherche est loin d'être évident à mettre en place tant le fonctionnement de l'IA est opaque et peut comme nous l'avons vu, embarquer élèves et professeurs dans des voies non voulues. Ces mêmes difficultés étaient apparues au début de l'importation de logiciels dans

¹⁰ Notamment dans le groupe IREMS de Paris-Cité.

¹¹ Programme du Collège de France piloté par Stéphane Mallat dont, par ailleurs, les cours sur l'IA sont particulièrement remarquables.

l'enseignement. Elles avaient conduit à créer des micro-mondes ou des environnements spécifiquement dédiés à l'enseignement, comme GeoGebra ou Casyopée.

Sa mise en œuvre suppose aussi un réel investissement des élèves dans la recherche de solutions et une certaine maîtrise par les enseignants du fonctionnement de l'IA.

Références

Chen, E. (2016). *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad*. <https://web.evanchen.cc › geombook.html>

Kuzniak, A. (A paraître). Sur la consistance du travail mathématique au temps de l'Intelligence Artificielle. *Symposium ÉTM9*, 1-5 juin 2026. Mexico.

Trinh, T.H., Wu, Y., Le, Q.V. et al. (2024). *Solving Olympiad geometry without human demonstrations*. *Nature* 625, 476–482. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06747-5>

Vaswani, A. et al. Attention is all you need. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 30 (2017).

Annexe 2 : Solution AlphaGeometry

Construct point X as the midpoint of CH.

Construct point Y as the midpoint of KM.

Construct point Z as the midpoint of BH.

Step 1. B, C, M are collinear and AH is perpendicular to BC \Rightarrow AH is perpendicular to CM.

Step 2. B, H, Z are collinear and AC is perpendicular to BH \Rightarrow AC is perpendicular to HZ.

Step 3. AC is perpendicular to HZ and AH is perpendicular to CM $\Rightarrow \angle HAC = \angle(\text{CM}, \text{HZ})$ and $\angle AHZ = \angle MCA$.

Step 4. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear and $\angle HAC = \angle(\text{CM}, \text{HZ}) \Rightarrow \angle CAF = \angle HBF$.

Step 5. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC $\Rightarrow \angle AFC = \angle BFH$.

Step 6. $\angle CAF = \angle HBF$ and $\angle AFC = \angle BFH \Rightarrow FA/FB = FC/FH$

Step 7. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC $\Rightarrow \angle AFB = \angle CFH$.

Step 8. $\angle AFB = \angle CFH$ and $FA/FB = FC/FH \Rightarrow \angle BAF = \angle HCF$ and $\angle ABF = \angle CHF$.

Step 9. $BM = CM$ and $BO = CO \Rightarrow BC$ is perpendicular to MO.

Step 10. B, C, M are collinear and $BM = CM \Rightarrow M$ is the midpoint of BC.

Step 11. C, H, X are collinear and $CX = HX \Rightarrow X$ is the midpoint of CH.

Step 12. M is the midpoint of BC and X is the midpoint of CH $\Rightarrow BH$ is parallel to MX.

Step 13. B, H, Z are collinear and $BZ = HZ \Rightarrow Z$ is the midpoint of BH.

Step 14. M is the midpoint of BC and Z is the midpoint of BH $\Rightarrow CH$ is parallel to MZ.

Step 15. $HO_1 = O_1Q$ and $KO_1 = O_1Q \Rightarrow O_1$ is the circumcenter of HKQ.

Step 16. AQ is perpendicular to HQ and HK is perpendicular to KQ $\Rightarrow \angle AQH = \angle QKH$.

Step 17. O_1 is the circumcenter of HKQ and $\angle AQH = \angle QKH \Rightarrow AQ$ is perpendicular to O_1Q .

Step 18. $HO_1 = O_1Q$, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to $O_1Q \Rightarrow O_1$ is the midpoint of HQ.

Step 19. O_1 is the midpoint of HQ and X is the midpoint of CH $\Rightarrow CQ$ is parallel to O_1X .

Step 20. O_1 is the midpoint of HQ and Z is the midpoint of BH $\Rightarrow BQ$ is parallel to O_1Z .

Step 21. $AO = BO$, $AO = OQ$ and $BO = CO \Rightarrow A, B, C, Q$ are cyclic.

Step 22. A, B, C, Q are cyclic $\Rightarrow \angle ABQ = \angle ACQ$ and $\angle ACB = \angle AQB$.

Step 23. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear,

$\angle BAF = \angle HCF$, $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$, BH is parallel to MX and CH is parallel to MZ $\Rightarrow \angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$.

Step 24. $\angle ABQ = \angle ACQ$, BQ is parallel to O_1Z and CQ is parallel to $O_1X \Rightarrow \angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X)$.

Step 25. $\angle(AB, MZ) = \angle(AC, MX)$ and $\angle(AB, O_1Z) = \angle(AC, O_1X) \Rightarrow \angle XMZ = \angle XO_1Z$.

Step 26. $\angle XMZ = \angle XO_1Z \Rightarrow M, O_1, X, Z$ are cyclic.

Step 27. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC \Rightarrow BF is perpendicular to FH.

Step 28. Z is the midpoint of BH and BF is perpendicular to FH $\Rightarrow BZ = FZ$.

Step 29. $BZ = FZ \Rightarrow \angle BFZ = \angle ZBF$.

Step 30. X is the midpoint of CH and Z is the midpoint of BH \Rightarrow BC is parallel to XZ.

Step 31. B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear, $\angle BFZ = \angle ZBF$, BC is parallel to XZ and BH is parallel to MX $\Rightarrow \angle MFZ = \angle MXZ$.

Step 32. $\angle MFZ = \angle MXZ \Rightarrow F, M, X, Z$ are cyclic.

Step 33. F, M, X, Z are cyclic and M, O_1, X, Z are cyclic $\Rightarrow F, M, O_1, X$ are cyclic.

Step 34. F, M, O_1, X are cyclic and F, M, X, Z are cyclic $\Rightarrow F, O_1, X, Z$ are cyclic.

Step 35. F, O_1, X, Z are cyclic $\Rightarrow \angle O_1FX = \angle O_1ZX$.

Step 36. AC is perpendicular to HZ and AQ is perpendicular to HQ $\Rightarrow \angle CAQ = \angle ZHQ$ and $\angle(AC, HQ) = \angle(HZ, AQ)$.

Step 37. B, H, Z are collinear, $\angle CAQ = \angle ZHQ$, BH is parallel to MX, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to $O_1Q \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(AQ, HO_1)$.

Step 38. B, C, M are collinear and $\angle ACB = \angle AQB \Rightarrow \angle ACM = \angle AQB$.

Step 39. $\angle(AC, MX) = \angle(AQ, HO_1)$ and $\angle ACM = \angle AQB \Rightarrow \angle(BQ, HO_1) = \angle CMX$.

Step 40. $AO = BO$ and $BO = CO \Rightarrow O$ is the circumcenter of ABC.

Step 41. O is the circumcenter of ABC and M is the midpoint of BC $\Rightarrow \angle(AB, MO) = \angle ACO$ and $\angle BAC = \angle MOC$.

Step 42. $AO = BO$ and $BO = CO \Rightarrow AO = CO$.

Step 43. $AO = CO \Rightarrow \angle ACO = \angle OAC$.

Step 44. B, H, Z are collinear, $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$ and BH is parallel to MX $\Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(AH, CM)$.

Step 45. $\angle(AB, MO) = \angle ACO$, $\angle ACO = \angle OAC$, AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle BAH = \angle OAC$.

Step 46. $\angle BAH = \angle OAC$ and $\angle(AC, MX) = \angle(AH, CM) \Rightarrow \angle(AB, CM) = \angle(AO, MX)$.

Step 47. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear and AH is perpendicular to BC \Rightarrow CF is perpendicular to FH.

Step 48. X is the midpoint of CH and CF is perpendicular to FH \Rightarrow FX = HX.

Step 49. FX = HX \Rightarrow $\angle FHX = \angle XFH$.

Step 50. B, C, M are collinear, $\angle(BQ, HO_1) = \angle CMX$, $\angle O_1FX = \angle O_1ZX$, BC is parallel to XZ and BQ is parallel to $O_1Z \Rightarrow \angle O_1FX = \angle(HO_1, MX)$.

Step 51. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, C, H, X are collinear, $\angle(AB, CM) = \angle(AO, MX)$, $\angle ABF = \angle CHF$ and $\angle FHX = \angle XFH \Rightarrow \angle(AH, FX) = \angle(AO, MX)$.

Step 52. $\angle(AH, FX) = \angle(AO, MX)$ and $\angle O_1FX = \angle(HO_1, MX) \Rightarrow \angle(AH, FO_1) = \angle(AO, HO_1)$.

Step 53. B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear, $\angle ACB = \angle AQB$, $\angle AHZ = \angle MCA$ and BH is parallel to MX $\Rightarrow \angle(AH, MX) = \angle BQA$.

Step 54. B, H, Z are collinear, $\angle(AC, HQ) = \angle(HZ, AQ)$, BH is parallel to MX, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to $O_1Q \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(HO_1, AQ)$.

Step 55. $\angle(AC, MX) = \angle(HO_1, AQ)$ and $\angle(AH, MX) = \angle BQA \Rightarrow \angle HAC = \angle(BQ, HO_1)$.

Step 56. AO = BO, AO = OQ and BO = CO \Rightarrow O is the circumcenter of BCQ.

Step 57. O is the circumcenter of BCQ and M is the midpoint of BC $\Rightarrow \angle(BQ, MO) = \angle QCO$.

Step 58. $\angle HAC = \angle(BQ, HO_1)$, $\angle(BQ, MO) = \angle QCO$, CQ is parallel to O_1X , AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle(AC, HO_1) = \angle(CO, O_1X)$.

Step 59. $\angle BAC = \angle MOC$, AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle BAC = \angle(AH, CO)$.

Step 60. $\angle BAC = \angle(AH, CO)$ and $\angle(AC, HO_1) = \angle(CO, O_1X) \Rightarrow \angle(AB, HO_1) = \angle(AH, O_1X)$.

Step 61. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, $\angle BAF = \angle HCF$ and CH is parallel to MZ $\Rightarrow \angle(AB, MZ) = \angle(AH, CM)$.

Step 62. $\angle(AB, HO_1) = \angle(AH, O_1X)$ and $\angle(AB, MZ) = \angle(AH, CM) \Rightarrow \angle(CM, O_1X) = \angle(MZ, HO_1)$.

Step 63. M, O_1 , X, Z are cyclic $\Rightarrow \angle O_1MZ = \angle O_1XZ$.

Step 64. B, C, M are collinear, $\angle(CM, O_1X) = \angle(MZ, HO_1)$, $\angle O_1MZ = \angle O_1XZ$ and BC is parallel to XZ $\Rightarrow \angle(HO_1, MZ) = \angle O_1MZ$.

Step 65. $\angle(HO_1, MZ) = \angle O_1MZ \Rightarrow HO_1$ is parallel to MO_1 .

Step 66. HO_1 is parallel to $MO_1 \Rightarrow$ H, M, O_1 are collinear.

Step 67. AH is perpendicular to CM and AQ is perpendicular to HQ $\Rightarrow \angle HAQ = \angle(CM, HQ)$.

Step 68. A, F, H are collinear, B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, H, M, O₁ are collinear, $\angle HAQ = \angle(CM, HQ)$, AQ is perpendicular to HQ and AQ is perpendicular to O₁Q $\Rightarrow \angle AFM = \angle AQM$.

Step 69. $\angle AFM = \angle AQM \Rightarrow A, F, M, Q$ are cyclic.

Step 70. A, F, M, Q are cyclic $\Rightarrow \angle AFQ = \angle AMQ$.

Step 71. $\angle(AH, FO_1) = \angle(AO, HO_1)$, AH is perpendicular to BC, AQ is perpendicular to HQ, AQ is perpendicular to O₁Q and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle AOM = \angle QO_1F$.

Step 72. A, F, H are collinear, H, M, O₁ are collinear, $\angle AFQ = \angle AMQ$, AH is perpendicular to BC, AQ is perpendicular to HQ, AQ is perpendicular to O₁Q and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle AMO = \angle O_1QF$.

Step 73. $\angle AMO = \angle O_1QF$ and $\angle AOM = \angle QO_1F \Rightarrow OA/OM = O_1F/O_1Q$

Step 74. F, M, O₁, X are cyclic $\Rightarrow \angle MFO_1 = \angle MXO_1$.

Step 75. $AO = KO$ and $AO = OQ \Rightarrow KO = OQ$.

Step 76. $KO = OQ$ and $KO_1 = O_1Q \Rightarrow O_1O$ is the bisector of $\angle KO_1Q$.

Step 77. $KO = OQ$ and $KO_1 = O_1Q \Rightarrow KQOM$ is perpendicular to OO_1 .

Step 78. $AO = BO$, $AO = KO$ and $BO = CO \Rightarrow A, B, C, K$ are cyclic.

Step 79. A, B, C, K are cyclic and A, B, C, Q are cyclic $\Rightarrow A, C, K, Q$ are cyclic.

Step 80. A, C, K, Q are cyclic $\Rightarrow \angle ACK = \angle AQK$ and $\angle CAK = \angle CQK$.

Step 81. AC is perpendicular to HZ and HK is perpendicular to KQ $\Rightarrow \angle(AC, HK) = \angle(HZ, KQ)$.

Step 82. $\angle ACK = \angle AQK$, O₁O is the bisector of $\angle KO_1Q$, AQ is perpendicular to O₁Q and KQ is perpendicular to $OO_1 \Rightarrow \angle ACK = \angle OO_1K$.

Step 83. B, H, Z are collinear, $\angle(AC, HK) = \angle(HZ, KQ)$, BH is parallel to MX, HK is perpendicular to KQ and KQ is perpendicular to $OO_1 \Rightarrow \angle(AC, MX) = \angle(OO_1, KQ)$.

Step 84. $\angle(AC, MX) = \angle(OO_1, KQ)$ and $\angle ACK = \angle OO_1K \Rightarrow \angle(CK, MX) = \angle O_1KQ$.

Step 85. A, B, C, K are cyclic $\Rightarrow \angle ACB = \angle AKB$.

Step 86. $AO = BO$, $AO = KO$ and $BO = CO \Rightarrow O$ is the circumcenter of BCK.

Step 87. O is the circumcenter of BCK and M is the midpoint of BC $\Rightarrow \angle KBO = \angle(CK, MO)$.

Step 88. $AO = BO$ and $AO = KO \Rightarrow BO = KO$.

Step 89. $BO = KO \Rightarrow \angle BKO = \angle OBK$.

Step 90. B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear, $\angle ACB = \angle AKB$, $\angle AHZ = \angle MCA$ and BH is parallel to MX $\Rightarrow \angle(AH, MX) = \angle BKA$.

Step 91. $\angle KBO = \angle(CK, MO)$, $\angle BKO = \angle OBK$, AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to MO $\Rightarrow \angle(AH, CK) = \angle BKO$.

Step 92. $\angle(AH, CK) = \angle BKO$ and $\angle(AH, MX) = \angle BKA \Rightarrow \angle AKO = \angle(MX, CK)$.

Step 93. $\angle(CK, MX) = \angle O_1 KQ$ and $\angle AKO = \angle(MX, CK) \Rightarrow \angle AKO = \angle QKO_1$.

Step 94. $\angle CAK = \angle CQK$ and CQ is parallel to $O_1X \Rightarrow \angle CAK = \angle(O_1X, KQ)$.

Step 95. $\angle CAK = \angle(O_1X, KQ)$ and $\angle AKO = \angle QKO_1 \Rightarrow \angle(AC, KO) = \angle XO_1K$.

Step 96. B, C, F are collinear, B, C, M are collinear, B, H, Z are collinear, $\angle HAC = \angle(CM, HZ)$, $\angle MFO_1 = \angle MXO_1$ and BH is parallel to $MX \Rightarrow \angle CAH = \angle XO_1F$.

Step 97. $\angle CAH = \angle XO_1F$ and $\angle(AC, KO) = \angle XO_1K \Rightarrow \angle(AH, KO) = \angle FO_1K$.

Step 98. $AO = KO$, $KO_1 = O_1Q$ and $OA/OM = O_1F/O_1Q \Rightarrow O_1F/O_1K = OK/OM$

Step 99. $\angle(AH, KO) = \angle FO_1K$, AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to $MO \Rightarrow \angle FO_1K = \angle MOK$

Step 100. $\angle FO_1K = \angle MOK$ and $O_1F/O_1K = OK/OM \Rightarrow \angle FKO_1 = \angle OMK$.

Step 101. $KO_2 = MO_2$ and $KY = MY \Rightarrow KM$ is perpendicular to $O_2 Y$.

Step 102. $FO_2 = KO_2$ and $KO_2 = MO_2 \Rightarrow O_2$ is the circumcenter of FKM .

Step 103. K, M, Y are collinear and $KY = MY \Rightarrow Y$ is the midpoint of KM .

Step 104. O_2 is the circumcenter of FKM and Y is the midpoint of $KM \Rightarrow \angle KFM = \angle KO_2Y$.

Step 105. B, C, M are collinear, K, M, Y are collinear, AH is perpendicular to BC and KM is perpendicular to $O_2Y \Rightarrow \angle(AH, CM) = \angle KYO_2$.

Step 106. B, C, F are collinear, B, C, M are collinear and $\angle KFM = \angle KO_2Y \Rightarrow \angle(CM, FK) = \angle YO_2K$.

Step 107. $\angle(AH, CM) = \angle KYO_2$ and $\angle(CM, FK) = \angle YO_2K \Rightarrow \angle(AH, FK) = \angle YKO_2$.

Step 108. K, M, Y are collinear, $\angle(AH, FK) = \angle YKO_2$, $\angle FKO_1 = \angle OMK$, AH is perpendicular to BC and BC is perpendicular to $MO \Rightarrow \angle FKO_1 = \angle FKO_2$.

Step 109. $\angle FKO_1 = \angle FKO_2 \Rightarrow KO_1$ is parallel to KO_2 .

Step 110. KO_1 is parallel to $KO_2 \Rightarrow K, O_1, O_2$ are collinear.

Intégration des outils d'intelligence artificielle générative dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire : Effets sur l'espace de travail mathématique personnel

Yasna Solar Muñoz

Université Paris Cité, France ; yasna.solar@etu.u-paris.fr

L'émergence des outils d'intelligence artificielle générative (IAG) introduit un nouvel artefact numérique dans le travail mathématique, soulevant des questionnements sur les genèses sémiotique, instrumentale et discursive mobilisées par les étudiants. Cette recherche analyse l'usage de l'IAG dans la résolution de tâches liées aux transformations linéaires (TL) par des étudiants en formation d'enseignants de mathématiques, en s'appuyant sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique et les paradigmes de l'algèbre linéaire. L'analyse révèle que l'impact de l'IAG sur l'espace de travail mathématique personnel dépend du type d'usage de l'artefact. Trois typologies d'usage sont identifiées selon la nature de la tâche (algorithmique ou abstraite) : dépendant-déléгатif, critique-stratégique, et déléгатif-acritique. Les résultats suggèrent que la prohibition de l'IAG ne constitue pas une stratégie viable ; il convient plutôt de promouvoir un usage critique de ces outils.

Mots-clés : Intelligence artificielle générative, espaces de travail mathématique, algèbre linéaire, paradigmes de l'algèbre linéaire, enseignement universitaire.

1. Introduction

L'émergence de l'Intelligence Artificielle Générative (IAG) dans le domaine éducatif, particulièrement à partir de la massification de ChatGPT à la suite de son lancement public fin 2022, a rapidement transformé les méthodes d'étude des étudiants, devenant un phénomène qui mérite une attention détaillée (Tashtoush et al., 2024). Ce phénomène, bien qu'observable dans le comportement académique des étudiants, compte encore peu de recherches didactiques permettant de comprendre en profondeur comment ceux-ci mobilisent ces outils dans leur travail mathématique, particulièrement dans les contextes latino-américains (Panqueban et Huincahue, 2024).

Dans le contexte spécifique de l'algèbre linéaire, discipline reconnue pour les difficultés conceptuelles associées à son haut degré d'abstraction (Dorier, 2000), il est particulièrement pertinent d'interroger l'impact de l'IAG sur l'activation des genèses de l'espace de travail mathématique personnel (ETM-p) des étudiants, en considérant notamment que ces outils constituent un nouvel artefact numérique (Richard, 2024). Cette problématique acquiert une plus grande pertinence dans la formation initiale des professeurs de mathématiques, où l'algèbre linéaire constitue une matière centrale dans leur cursus académique, et où les difficultés traditionnellement identifiées — comme l'obstacle du formalisme (Dorier, 2000) — pourraient être modifiées, masquées ou même renforcées par l'usage de ces nouvelles technologies. Dans ce contexte émerge la question de savoir comment l'IAG, en tant qu'artefact technologique, modifie ou influence le travail mathématique des étudiants lorsqu'ils effectuent des tâches liées aux TL.

Dans ce cadre, la présente recherche se situe dans un champ encore peu exploré de la didactique des mathématiques. À partir d'un cadre théorique qui articule la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2022) avec les paradigmes de l'algèbre linéaire (Vandebrouck et al., 2024), l'étude apporte des preuves empiriques situées sur l'interaction d'étudiants en formation d'enseignants de mathématiques avec des outils d'IAG dans des activités liées aux TL. Au moyen de l'analyse qualitative de productions collectives, ainsi que d'entretiens semi-directifs, sont caractérisés les composantes de l'ETM-p mobilisées et les typologies d'usage de l'IAG, en distinguant les tâches à caractère algorithmique (centrées sur les procédures de calcul) et les tâches à caractère abstrait (orientées vers la conceptualisation et la justification théorique).

2. Cadres théoriques

2.1 Théorie des Espaces de Travail Mathématique

La théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) constitue un cadre d'analyse permettant d'étudier le travail mathématique dans des situations éducatives (Kuzniak et al., 2022). Cette théorie articule deux plans : le plan épistémologique (référentiel théorique, artefacts, représentamen) et le plan cognitif (preuve, construction, visualisation), interconnectés par trois genèses.

Le référentiel théorique correspond à la base logique et déductive guidant l'argumentation mathématique. Les artefacts sont des objets matériels ou symboliques médiatisant l'activité (Rabardel, 1995), incluant les outils d'IAG comme nouvel artefact numérique (Richard, 2024). Le représentamen englobe les signes médiatisant le travail mathématique au moyen des représentations sémiotiques (Duval, 1995).

Les trois genèses médiatisent l'évolution entre connaissance mathématique et mobilisation effective. La genèse sémiotique active divers registres de représentation (Duval, 2006). La genèse instrumentale transforme l'artefact en instrument via le développement de schèmes d'usage (Lagrange & Richard, 2022). La genèse discursive valide les actions via le référentiel théorique, activant raisonnement et démonstration (García-Martínez et al., 2024). L'activation simultanée de deux genèses configure trois plans verticaux : [Sem-Ins], [Ins-Dis], et [Sem-Dis] (Kuzniak & Richard, 2014), qui permettent d'analyser la circulation entre les genèses et de caractériser le travail mathématique effectif dans l'ETM personnel de l'étudiant.

Cette recherche se focalise sur l'ETM personnel (ETM-p), correspondant au travail mathématique effectif de l'étudiant face à une tâche, caractérisé par les genèses activées, les représentations mobilisées et l'usage d'artefacts.

2.2 Paradigmes de l'algèbre linéaire

Les paradigmes constituent des formes spécifiques de concevoir et travailler les objets mathématiques (Kuzniak et al., 2022). Gaona Paredes et al. (à paraître) identifient trois paradigmes en algèbre linéaire.

- **AL1** : propose un travail algorithmique sur les systèmes linéaires ainsi qu'un travail sur la géométrie du plan et de l'espace (dimensions 2 et 3). Les matrices y apparaissent comme une réécriture sémiotique des systèmes linéaires, sans statut d'objets mathématiques à proprement parler, servant essentiellement de support au pivot de Gauss.

- **AL2** : s'appuie sur un travail dans \mathbb{R}^n , avec une reinterprétation matricielle $AX = B$ des systèmes linéaires. Les matrices sont considérées à la fois comme vecteurs et comme applications linéaires relativement à des bases.
- **AL3** : propose un travail fondé sur la structure algébriques d'espace vectoriel, en dimension finie ou non, où les arguments mobilisés sont souvent de nature différente du travail dans \mathbb{R}^n .

La flexibilité entre paradigmes constitue un aspect crucial de l'apprentissage (Vandebrouck et al., 2024).

2.3 Articulation des cadres

La théorie des ETM s'applique au domaine de l'algèbre linéaire en considérant les difficultés identifiées par Dorier (2000), notamment l'obstacle du formalisme, et les trois paradigmes proposés par Vandebrouck et al. (2024). L'intégration permet de caractériser épistémologiquement les contenus selon les paradigmes et d'analyser la manière dont les étudiants développent leur travail mathématique à travers des genèses. L'analyse distingue également trois domaines de travail mathématique : géométrique (représentations graphiques, interprétations géométriques), algébrique (manipulations symboliques, systèmes d'équations), et algébrique-linéaire (concepts structurels : noyau, image, rang, TL). L'analyse de la genèse instrumentale intègre l'IAG comme nouvel artefact, permettant d'examiner son incorporation dans l'ETM-p et d'évaluer son potentiel pour appuyer la manipulation de concepts algébriques abstraits.

2.4 IAG en algèbre linéaire

L'intégration de l'intelligence artificielle générative dans l'enseignement des mathématiques demeure un champ émergent. Panqueban et Huincahue (2024) signalent la rareté d'études sur l'IAG en éducation mathématique, particulièrement en langue non anglaise et en contexte latino-américain. Bagno et al. (2024) avertissent que, spécifiquement en algèbre linéaire, ces outils présentent des imprécisions conceptuelles les empêchant d'assumer le rôle de professeur ou d'assistant. Néanmoins, Vandebrouck et al. (2024) proposent que l'IAG peut faciliter l'exploration de différents chemins de résolution et l'interaction avec multiples représentations mathématiques, ce qui constitue un aspect critique pour l'apprentissage des TL. Emprin et Richard (2023) soulignent que l'enjeu réside dans la capacité des étudiants à questionner les démarches proposées et valider les résultats, développant ainsi une pensée critique particulièrement pertinente en algèbre linéaire.

3. Méthodologie

Une approche qualitative par étude de cas multiples prospective (Stake, 2020 ; Stebbins, 2001), de nature interprétative et descriptive, est adoptée afin d'explorer un phénomène émergent — l'usage de l'IAG en algèbre linéaire — et d'identifier des régularités susceptibles de générer des hypothèses (Hernández-Sampieri et al., 2014). La triangulation méthodologique a été assurée par le croisement des productions collectives et des entretiens.

3.1 Participants et contexte

L'échantillon a été sélectionné selon deux critères : (a) être inscrit au cours d'enseignement et d'apprentissage de l'algèbre et des fonctions (programme de pédagogie en mathématiques, UdeC, Chili) ; (b) avoir suivi au moins un cours d'algèbre linéaire universitaire. Les participants ont réalisé une séquence en deux temps : une tâche individuelle sans IAG (21 étudiants), puis une tâche groupale avec IAG (19 étudiants (8 groupes), dont 18 ayant participé à la phase initiale). Cette étude analyse exclusivement la phase groupale avec IAG et les entretiens. La participation a été volontaire avec consentement informé.

Pour les entretiens, ont été sélectionnés les cas présentant : (a) une ambiguïté concernant les genèses activées ou le paradigme mobilisé ; (b) une approche différente de l'analyse a priori ; (c) un usage singulier de l'IAG.

3.2 Instruments de collecte

Les instruments de collecte des données comprennent une tâche écrite et des entretiens semi-structurés. La tâche a été adaptée du projet ECOS-ANID (C22H03) et se compose de deux problèmes sur les TL, redessinés en suivant le cadre des ETM (Kuzniak et al., 2022) afin de mobiliser les trois genèses : sémiotique (représentations graphiques et algébriques), instrumentale (GeoGebra, IAG) et discursive (justifications théoriques). Le problème 2.1 demandait de trouver une matrice T transformant le triangle ABC en triangle PQR à partir de leurs sommets. Le problème 2.2 demandait de déterminer si une telle TL est toujours possible pour deux triangles arbitraires. Les entretiens semi-structurés ont été adaptés aux productions des étudiants nécessitant un approfondissement après l'analyse a posteriori. Les données analysées comprennent les réponses écrites des groupes, les captures d'écran des interactions avec les outils d'IAG, ainsi que les enregistrements vidéo des entretiens.

3.3 Procédure de collecte de données

La collecte s'est déroulée en deux phases (octobre 2024 - janvier 2025) :

- Phase groupale (90 min, présentiel) : Après signature du consentement, les 19 étudiants ont formé librement 8 groupes. Ils ont résolu la tâche en utilisant les outils jugés pertinents, incluant l'IAG, documentant leurs interactions par captures d'écran.
- Six étudiants ont été contactés par courriel pour les entretiens. Pour des raisons de calendrier académique, seuls deux ont été disponibles. Les entretiens (20-30 min) ont été réalisés à distance via Microsoft Teams, avec enregistrement sous consentement.

3.4 Analyse de données

Codification des réponses groupales (G01-G08) :

- Les genèses ont été identifiées via des indicateurs : sémiotique (représentations graphiques/algébriques/tabulaires), instrumentale (manipulation GeoGebra/IAG), discursive (justifications/argumentations).
- Les plans verticaux ont été notés selon l'articulation entre genèses.
- La classification avec les paradigmes s'est basée sur les objets mathématiques mobilisés, les techniques utilisées et le niveau de formalisation.

L'analyse a priori a été conduite pour les deux problèmes proposés :

- Le problème 2.1, de nature algorithmique, demandait de trouver la matrice T transformant le triangle ABC (sommets A(1,5), B(4,2), C(5,16)) en triangle PQR (sommets P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16)). La résolution implique la construction d'un système de six équations à quatre inconnues via les propriétés des TL. Le plan [Ins-Dis] était attendu comme prédominant, l'IAG jouant le rôle d'artefact et la validation s'appuyant sur le référentiel théorique. Le paradigme AL1 était attendu, avec une possible circulation vers AL2 lors de la vérification matricielle.
- Le problème 2.2, de nature abstraite, demandait de déterminer si une telle TL est toujours possible pour deux triangles arbitraires. Ce problème mobilise des concepts structurels d'AL2 : bases, combinaisons linéaires et propriétés de linéarité. Les plans [Ins-Dis] et [Sem-Dis] étaient attendus, nécessitant la mobilisation du référentiel théorique pour justifier ou réfuter la généralisation.

4. Résultats

L'analyse des productions de la phase groupale (avec IAG) révèle trois typologies d'usage selon la nature de la tâche et le rapport de l'étudiant à l'artefact.

Dans le problème 2.1 (nature algorithmique : TL appliquée à un triangle spécifique), deux typologies émergent. **Type A (dépendant-déléгатif)** : les groupes retranscrivent directement les réponses de l'IAG sans validation, la résolution dépendant entièrement de l'artefact. **Type B (critique-stratégique)** : les groupes adoptent une posture active, reformulant la solution dans un registre mathématique familier avant vérification, ou évaluant la pertinence de la réponse par rapport au problème posé.

Dans le problème 2.2 (nature abstraite : généralisation aux triangles arbitraires), une troisième typologie apparaît. **Type C (déléгатif-acritique)** : les groupes procèdent à une reformulation superficielle maintenant les affirmations de l'IAG sans questionnement critique. En raison du caractère abstrait de la question, la majorité des groupes (6/8) ont délégué la quasi-totalité de la résolution à l'IAG sans exercer de validation ; deux groupes n'ont pas répondu.

La section 4.1 présente quatre exemples illustrant ces typologies. Aussi analyse ces productions selon les genèses activées (sémiotique, instrumentale, discursive), les plans verticaux ([Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis]), les paradigmes AL mobilisés (AL1, AL2), et les domaines mathématiques (géométrie, algébrique, algébrique-linéaire).

4.1 Typologies d'usage de l'IAG

4.1.1 Type A : Dépendant-déléгатif

Parmi les 8 groupes ayant répondu à la première partie de l'activité 2 de la tâche, deux groupes s'inscrivent dans cette typologie. Ces groupes ne développent aucun travail mathématique propre, se bornant à retranscrire la réponse fournie par l'IAG.

Ce groupe a réalisé une représentation graphique du problème posé (Figure 1) mais, par la suite, a transcrit directement la réponse fournie par ChatGPT (Figure 2) sans développer le processus de résolution algébrique.

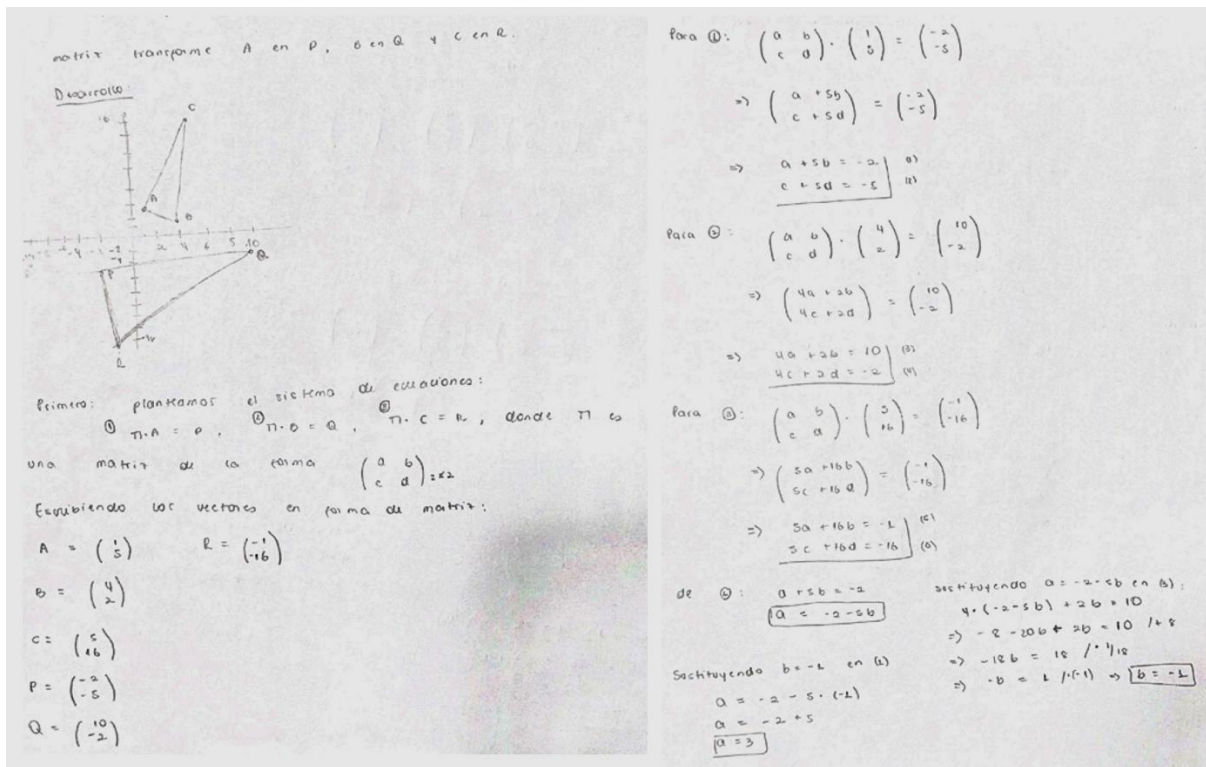


Figure 1 : Production de G03 pour la tâche 2.1

En comparant la Figure 1 avec la Figure 2, on constate que le seul apport mathématique du groupe G03 a été la représentation graphique initiale. Le développement algébrique ultérieur a été transcrit directement de ChatGPT sans validation.

Il convient de noter que l'artefact inclut une vérification finale dans sa réponse à G03, ce qui pourrait expliquer pourquoi le groupe a considéré qu'une validation propre n'était pas nécessaire. Dans ce type d'usage, l'IAG fournit non seulement la solution mais également sa vérification, ce qui laisse peu d'espace pour l'activation des genèses de l'ETM chez l'étudiant.

Le domaine géométrique est mobilisé à travers des représentations graphiques du problème. Du côté des paradigmes de l'algèbre linéaire, un écart est observable : si la réponse de ChatGPT relève d'AL2 — posant explicitement la transformation linéaire et mobilisant ses propriétés structurelles —, les groupes relevant de cette typologie se limitent à reproduire cette réponse, ce qui ne permet pas de déterminer dans quel paradigme ils opèrent effectivement. Cette absence de travail mathématique propre se reflète dans la configuration des genèses : la genèse sémiotique se réduit à une copie directe, la genèse instrumentale témoigne d'une dépendance à l'artefact, et la genèse discursive est absente, ce qui ne permet pas l'activation de plans verticaux.

Encuentra una matriz que transforme al triángulo ABC de vértices A(1,3), B(4,2), C(5,16) a un triángulo PQR de vértices P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16) sin vector de traslación

Para encontrar la matriz que transforma el triángulo ABC con vértices A(1,3), B(4,2), C(5,16) en el triángulo PQR con vértices P(-2,-5), Q(10,-2), R(-1,-16) sin vector de traslación, seguimos estos pasos:

1. **Planteamos el sistema de ecuaciones.** Queremos encontrar una matriz M tal que:
$$M \cdot A = P, \quad M \cdot B = Q, \quad M \cdot C = R$$

Donde A, B, C y P, Q, R son los vectores de los vértices.
2. **Escribimos los vectores:**
 - $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}$
 - $P = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
 - $Q = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$
 - $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$
3. **Escribimos las transformaciones en forma de matriz.** La matriz M se puede expresar como:
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para cada vértice:

Para A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lo que resulta en las ecuaciones:

$$a + 3b = -2 \quad (1)$$

$$c + 3d = -5 \quad (2)$$

Para B:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+2b \\ 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lo que resulta en las ecuaciones:

$$4a + 2b = 10 \quad (3)$$

$$4c + 2d = -2 \quad (4)$$

Para C:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+16b \\ 5c+16d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Lo que resulta en las ecuaciones:

3a + 10b = -1 (3)

5c + 16d = -16 (6)

4. **Resolvemos el sistema:** Para resolver este sistema, comenzamos con las ecuaciones (1) y (3) para a y b .

De (1):

$$a = -2 - 3b$$

Sustituyendo en (3):

$$4(-2 - 3b) + 2b = 10$$

$$-8 - 12b + 2b = 10 \Rightarrow -10b = 18 \Rightarrow b = -1.8$$

Sustituyendo b en (1):

$$a + 3(-1.8) = -2 \Rightarrow a - 5.4 = -2 \Rightarrow a = 3.4$$

Ahora resolvemos para c y d usando (2) y (4):

De (2):

$$c + 3d = -5$$

Sustituyendo en (4):

$$4(-5 - 3d) + 2d = -2$$

$$-20 - 12d + 2d = -2 \Rightarrow -10d = 18 \Rightarrow d = -1.8$$

Sustituyendo d en (2):

$$c + 3(-1.8) = -5 \Rightarrow c - 5.4 = -5 \Rightarrow c = 0.4$$

5. **La matriz resultante.** Con $a = 3.4, b = -1.8, c = 0.4, d = -1.8$, la matriz M es:

$$M = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix}$$

Verificación:

- $M \cdot A = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 - 5.4 \\ 0.4 - 5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ (Correcto)
- $M \cdot B = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.6 - 3.6 \\ 1.6 - 3.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Correcto)
- $M \cdot C = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.8 \\ 0.4 & -1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - 28.8 \\ 2 - 28.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.8 \\ -26.8 \end{pmatrix}$ (Incorrecto)

Por lo tanto, la matriz que transforma el triángulo ABC en el triángulo PQR es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Figure 2 : Production de l'IAG aux questions posées par G03 pour la question 2.1

4.1.2 Type B : Critique-stratégique

Une des stratégies identifiées dans l'usage critique-stratégique consiste à utiliser les outils d'IAG comme moyen stratégique pour élaborer une réponse et la reformuler dans un registre plus personnel. La Figure 3 montre que le groupe G08 a mobilisé les informations fournies par l'outil d'IAG pour rédiger sa propre solution au problème 2.1, en reformulant le processus dans un registre mathématique plus accessible.

La comparaison entre les Figures 3 et 4 montre que le groupe G08 a complètement reformulé la réponse de ChatGPT. Le processus de reformulation s'est déroulé en trois étapes : d'abord, le groupe a représenté le problème géométriquement ; ensuite, il a traduit les équations symboliques de ChatGPT en un système d'équations linéaires explicite ; enfin, il a résolu ce système algébriquement pour obtenir la matrice de transformation T que l'artefact avait fournie comme résultat.

1. En primer lugar, realizamos un bosquejo del triángulo en el plano:

$A(1,5)$
 $B(4,2)$
 $C(5,16)$
 $P(-2,-5)$
 $Q(10,-2)$
 $R(-1,-16)$

Así, generamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 5B = -2 & (1) \\ C + 5B = -5 & (2) \\ 4A + 2B = 10 & (3) \\ 4C + 2B = -2 & (4) \\ 5A + 16B = -1 & (5) \\ 5C + 16B = -16 & (6) \end{cases}$$

De (1) sabemos que $A = -2 - 5B$, luego reemplazamos en (3)

$$\begin{aligned} -8 - 20B + 2B &= 10 \\ \Leftrightarrow -18B &= 18 \\ \Leftrightarrow B &= -1 \\ \Rightarrow A &= 3 \end{aligned}$$

De (2) sabemos que $C = -5 - 5B$, luego reemplazamos en (4)

$$\begin{aligned} -20 - 20B + 2B &= -2 \\ \Leftrightarrow -18B &= 18 \\ \Leftrightarrow B &= -1 \\ \Rightarrow C &= 0 \end{aligned}$$

Así, la matriz T que buscamos, es:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Según lo consultado a la IA (ChatGPT), debemos encontrar una T.L. T igual a una matriz de 2×2 , tal que:

- $T \cdot A = P$
- $T \cdot B = Q$
- $T \cdot C = R$

Así, buscaremos dicha matriz como sigue:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A + 5B = -2 \\ C + 5B = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 10 \\ 4C + 2B = -2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5A + 16B = -1 \\ 5C + 16B = -16 \end{cases}$$

Figure 3 : Production du G08 à la tâche 2.1

Para resolver las preguntas que aparecen en la imagen:

1. Consideración del triángulo ABC y su transformación

Dado el triángulo ΔABC , con los vértices $A(1, 5)$, $B(4, 2)$, y $C(5, 16)$, se requiere determinar si existe una matriz de transformación lineal T que lo transforme en el triángulo ΔPQR , cuyos vértices son $P(-2, -5)$, $Q(10, -2)$, y $R(-1, -16)$.

Una transformación lineal que transforma un triángulo en otro puede representarse por una matriz de la forma T , donde se cumplen las ecuaciones:

$$T \cdot A = P, \quad T \cdot B = Q, \quad T \cdot C = R$$

Primero, construimos la matriz con las coordenadas de A, B, C en el sistema original, y lo mismo para P, Q, R en el sistema transformado. De ahí, resolvemos el sistema para encontrar la matriz de transformación.

Cuál sería la matriz T en la primera pregunta?


La matriz de transformación T que transforma el triángulo ΔABC en el triángulo ΔPQR es:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple con las condiciones del sistema y realiza la transformación lineal entre los dos triángulos. (-)

Figure 4 : Production de l'IAG en réponse aux questions posées par le G08 pour la question 2.1

La stratégie suivante identifiée dans l'usage critique-stratégique consiste à confronter les réponses fournies par différents artefacts IAG. La Figure 5 montre la réponse initiale de ChatGPT lorsque le groupe G07 a soumis le problème 2.1 via une image.



Resolver el ejercicio 1

El ejercicio 1 pide que se considere el triángulo $\triangle ABC$ con vértices $A(1,5)$, $B(4,2)$ y $C(5,16)$. Luego, pregunta si es posible encontrar una matriz que transforme este triángulo en otro $\triangle PQR$, cuyas coordenadas de los vértices sean $P(2,5)$, $Q(10,2)$ y $R(1,-16)$.

Para resolver este problema, necesitamos encontrar una matriz de transformación que convierta las coordenadas del triángulo $\triangle ABC$ en las coordenadas del triángulo $\triangle PQR$.

Esto implica que debemos encontrar una matriz T tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Esto se puede representar como un sistema de ecuaciones lineales, que al resolverlo nos dará la matriz de transformación. ¿Te gustaría que te ayude con el desarrollo de este sistema y encontrar la matriz?

Si por favor

La matriz de transformación T que transforma el triángulo $\triangle ABC$ en el triángulo $\triangle PQR$ es:

$$T = \begin{pmatrix} 1.89 & -0.78 & 4.00 \\ -2.13 & -1.13 & 12.80 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz lleva las coordenadas de los vértices del triángulo $\triangle ABC$ a las del triángulo $\triangle PQR$. (-)

Resolver el ejercicio 2

El ejercicio 2 pregunta si es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo $\triangle ABC$ arbitrario en otro triángulo $\triangle PQR$ cualquiera, y se solicita justificar la respuesta.

La respuesta general a esta pregunta es sí, es posible transformar un triángulo arbitrario en otro utilizando una matriz de transformación afín (2x3) o una transformación lineal (2x2) con traslación. Esta matriz puede realizar combinaciones de escalado, rotación, traslación y reflexión, lo que permite ajustar las coordenadas de un triángulo a otro.

De (1), despejamos a :

$$a = -2 - 5b \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2):

$$\begin{aligned} 4(-2 - 5b) + 2b &= 10 \\ -8 - 20b + 2b &= 10 \\ -18b &= 18 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo $b = -1$ en (4):

$$a = -2 - 5(-1) = 3$$

Ahora sustituimos a y b en (3):

$$\begin{aligned} 5(3) + 16(-1) &= -1 \\ 15 - 16 &= -1 \quad (\text{verdadero}) \end{aligned}$$

Ahora, necesitamos encontrar c y d . Sin embargo, no hemos utilizado las coordenadas de P , Q y R para c y d . Esto implica que no hay una única solución para c y d .

6. "Conclusión":

Por lo tanto, "si es posible encontrar una matriz que transforme A en P , B en Q y C en R ", pero no es única.

Problema 2

Para el segundo problema, queremos saber si es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo $\triangle ABC$ arbitrario en otro triángulo $\triangle PQR$ cualquiera.

- "Transformación lineal": Una transformación lineal puede ser representada por una matriz M que actúa sobre los vectores de coordenadas.
- "Condiciones de transformación": Para que una matriz M transforme un triángulo en otro, debe cumplir con las condiciones de que los vértices del triángulo original se transformen en los vértices del triángulo destino.
- "Determinante de la matriz": La matriz de transformación debe tener un determinante diferente de cero para asegurar que la transformación es invertible y que no colapsa el triángulo a un punto.
- "Conclusión": "Si, es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo $\triangle ABC$ arbitrario en otro triángulo $\triangle PQR$ cualquiera", siempre que la matriz sea invertible (determinante diferente de cero). Esto se debe a que cualquier transformación lineal puede ser representada por una matriz, y siempre podemos encontrar una matriz que cumpla con las condiciones necesarias para la transformación de los vértices.

Resumen

- "Problema 1": Si, es posible encontrar una matriz de transformación, pero no es única.
- "Problema 2": Si, es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo arbitrario en otro, siempre que la matriz sea invertible.

Figure 5 : Production de l'IAG (ChatGPT) en réponse aux questions posées par le G07 à la question 2.1

Le groupe a ensuite consulté un autre artefact IAG, MathosAI, qui a fourni une réponse alternative (Figure 6).

Hola, necesito el desarrollo y la solución de estos ejercicios.

Parte 2: Trabajo grupal – 3p máximo
 Responde de manera justificada cada uno de los siguientes problemas y preguntas utilizando alguna herramienta de inteligencia artificial. Completa el formulario* y adjunta las capturas de pantalla que muestren tanto las indicaciones dadas a la IA como las respuestas proporcionadas por esta.

1. Considera el triángulo $\triangle ABC$ de vértices $A(1,5)$, $B(4,2)$ y $C(5,16)$. Al aplicar una transformación lineal T , el triángulo $\triangle ABC$ se transforma en el triángulo $\triangle PQR$, cuyos vértices son $P(-2,-5)$, $Q(10,-2)$ y $R(-1,-16)$. ¿Es posible encontrar una matriz que transforme A en P , B en Q y C en R ?
2. ¿Es posible encontrar una matriz que transforme un triángulo $\triangle ABC$ arbitrario, en otro triángulo $\triangle PQR$ cualquiera? Justifícalo detalladamente la respuesta.

Para resolver los problemas planteados, vamos a analizar cada uno de ellos paso a paso.

Problema 1

Dado el triángulo $\triangle ABC$ con vértices $A(1,5)$, $B(4,2)$ y $C(5,16)$, y el triángulo $\triangle PQR$ con vértices $P(-2,-5)$, $Q(10,-2)$ y $R(-1,-16)$, queremos determinar si existe una matriz de transformación lineal T que transforme A en P , B en Q y C en R .

1. **Formulación de la transformación lineal**:
 La transformación lineal se puede expresar como:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de transformación y \mathbf{x} es un vector de coordenadas.

2. **Sistema de ecuaciones**:
 Para cada vértice, podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} T(A) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ T(B) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \\ T(C) : \mathbf{M} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. **Expresión de la matriz**:
 Supongamos que la matriz \mathbf{M} tiene la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4. **Sustitución en el sistema**:
 Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 5b &= -2 & (1) \\ 4a + 2b &= 10 & (2) \\ 5a + 16b &= -1 & (3) \end{aligned}$$

5. **Resolviendo el sistema**:
 De (1), despejamos a :

$$a = -2 - 5b \quad (4)$$

VC Encuentra c y d del ejercicio anterior

Para encontrar los valores de c y d en la matriz de transformación $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, utilizaremos las ecuaciones que ya hemos establecido en el problema anterior.

Ya hemos encontrado que:

$$\begin{aligned} -a &= 3 \\ -b &= -1 \end{aligned}$$

Ahora, necesitamos encontrar c y d utilizando las transformaciones de los vértices B y C .

Usando el vértice $B(4,2)$ y su transformación $Q(10,-2)$

La transformación para B se expresa como:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación de matrices, obtenemos:

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

1. $12 - 2 = 10$ (que es correcto)
2. $4c + 2d = -2$ (ecuación 1)

Usando el vértice $C(5,16)$ y su transformación $R(-1,-16)$

La transformación para C se expresa como:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 16 \\ c \cdot 5 + d \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

1. $15 - 16 = -1$ (que es correcto)
2. $5c + 16d = -16$ (ecuación 2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones

Ahora tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $4c + 2d = -2$ (ecuación 1)

Figure 6 : Production de l'IAG (MathosAI) pour les questions posées par G07 à la question 2.1

Les deux outils d'IAG présentent des réponses contrastées : ChatGPT fournit une matrice avec valeurs décimales inexactes en raison d'une mauvaise interprétation de l'image du problème, tandis que MathosAI propose un développement algébrique complet aboutissant à des valeurs exactes. Le groupe G07 a privilégié l'approche de MathosAI et l'a reproduite (Figure 7), bien que les raisons exactes de ce choix ne puissent être déterminées avec certitude. Cette confrontation entre artefacts témoigne d'une attitude critique envers l'IAG.

Plusieurs domaines mathématiques sont articulés : le domaine géométrique intervient comme point de départ ou comme instrument symbolique, tandis que le domaine algébrique et celui de l'algèbre linéaire sont mobilisés pour valider critiquement les informations fournies par l'IAG. Du côté des paradigmes, les deux cas relevant de cette typologie présentent une configuration similaire : bien que la réponse de l'IAG relève d'AL2, les groupes opèrent dans un AL1 avancé — G08 reformule mathématiquement la réponse fournie en posant et résolvant algébriquement un système d'équations linéaires, sans mobiliser les propriétés structurelles caractéristiques

d'AL2 ; G07, quant à lui, valide critiqueusement la procédure proposée, sélectionne celle qui s'adapte à son ETM-p et la vérifie, amorçant ainsi une transition vers AL2. Dans les deux cas, les groupes s'approprient des résultats relevant d'AL2 en les reformulant dans leur propre paradigme, ce qui témoigne d'un usage actif de l'artefact. Cette appropriation se reflète dans la configuration des genèses : la genèse sémiotique donne lieu à une production propre, la genèse instrumentale traduit une instrumentalisation de l'IAG comme outil d'appui, et la genèse discursive, bien qu'émergente, manifeste l'amorce d'un discours mathématique autonome.

① notemos que debemos encontrar una matriz T tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix},$$

Sea $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} a+5b \\ c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4a+2b \\ 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25+16b \\ 25+16d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{l|l|l} 2+5b = -2 & / \cdot 4 & 4a+2b = 10 \\ c+5d = -5 & / \cdot 4 & 4c+2d = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 25+16b = -1 \\ 25+16d = -16 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l|l} -4a-20b = 8 \\ 4a+2b = 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -18b = 18 \\ b = -1 \end{array} \quad \text{entonces } a = 3$$

Luego

$$\begin{array}{l|l} -4c-20d = 20 \\ 4c+2d = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -18d = 18 \\ d = -1 \end{array} \quad \text{entonces } c = 0$$

$\therefore T\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz que necesitamos

Figure 7 : Production de G07 pour la tâche 2.1

4.1.3 Type C : Délégatif-acritique

La Figure 8 montre la réponse du groupe G01 à la tâche 2.2, qui consiste en une reformulation de la réponse fournie par ChatGPT (Figure 9).

En comparant le développement de G01 (Figure 8) avec la production de ChatGPT (Figure 9), on observe que le groupe ne copie pas textuellement la réponse, mais réalise un développement algébrique autonome : généralisation à des variables abstraites, construction de diagrammes et systèmes d'équations explicites. Cependant, ce travail est guidé par l'affirmation incorrecte de ChatGPT selon laquelle il est toujours possible de trouver une telle matrice. Le groupe investit du temps à démontrer algébriquement cette affirmation fautive sans questionner sa validité, aboutissant à une conclusion erronée. Cela témoigne d'un usage délégatif-acritique sophistiqué : délégation de la compréhension à l'IAG avec exécution autonome des procédures, mais absence de validation critique.

Il est pertinent de noter que la réponse fournie par ChatGPT au groupe G01 présente des imprécisions. Bien que ChatGPT affirme que « l'on peut toujours trouver une matrice » si les triangles ont la "même orientation", cette condition est insuffisante ni du point de vue de l'algèbre linéaire, ni du point de vue géométrique. La condition réelle, comme établi dans l'analyse a priori, requiert que les combinaisons linéaires $C = \alpha A + \beta B$ et $R = \alpha P + \beta Q$ maintiennent les mêmes coefficients α et β , ce qui constitue une restriction plus forte que la «

même orientation » au sens de ChatGPT, condition nécessaire mais non suffisante pour garantir l'existence de la matrice T.

→ Pregunta 2.

Si es posible, lo único que tenemos que verificar que los puntos A, B y C no son colineales.

1) Primero debemos definir los puntos generales para ambos triángulos

2) Definimos una matriz de 2×2 para formar un sistema de ecuaciones por cada vértice dado, como sigue:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces por cada coordenada del ΔABC , formamos un sistema de ecuación hasta las coordenadas del ΔPQR .

3) Así:

$$T \cdot A = P \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 = x_1' \\ cx_1 + dy_1 = y_1' \end{cases} \text{ (1)}$$

$$T \cdot B = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_2 + by_2 = x_2' \\ cx_2 + dy_2 = y_2' \end{cases} \text{ (2)}$$

$$T \cdot C = R \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_3 + by_3 = x_3' \\ cx_3 + dy_3 = y_3' \end{cases} \text{ (3)}$$

4) Al resolver los tres sistemas de ecuaciones (1), (2), (3), obtenemos los valores de la matriz $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple que transformar ΔABC a uno ΔPQR .

Figure 8 : Production de G01 pour la tâche 2.2

Y es posible generalizar esto para cualquier ΔABC y pasar a un ΔPQR ?

Si, es posible generalizar la transformación lineal que lleva un triángulo ΔABC a otro triángulo ΔPQR , pero la transformación no será necesariamente única. Esto se puede hacer siempre que los puntos A, B, y C no sean colineales (es decir, no estén alineados), porque en ese caso, los triángulos definen planos distintos en el espacio.

Proceso General

Dado un triángulo ΔABC con vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, y $C(x_3, y_3)$, y un triángulo ΔPQR con vértices $P(x_1', y_1')$, $Q(x_2', y_2')$, y $R(x_3', y_3')$, queremos encontrar una transformación lineal T que lleve los puntos de ΔABC a ΔPQR .

1. Definir la matriz de transformación T : Se representa como una matriz 2×2 , que actúa sobre los vectores de coordenadas.

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Establecer el sistema de ecuaciones: Como hicimos anteriormente, formamos un sistema de ecuaciones al aplicar la transformación lineal T a los puntos A, B, y C, y equiparar los resultados con los puntos P, Q, y R:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

Esto genera un sistema de seis ecuaciones lineales (dos por cada vértice), que se puede resolver para las incógnitas $a, b, c, y d$.

1. Resolver el sistema: Al resolver el sistema de ecuaciones, obtienes los valores de $a, b, c, y d$, que definen la matriz de la transformación.

Generalización

Este proceso se puede aplicar a cualquier conjunto de tres puntos no colineales A, B, C y P, Q, R, y siempre se puede encontrar una matriz que realice la transformación lineal si los triángulos tienen la misma orientación (no están reflejados). Si los triángulos están reflejados, se puede agregar una reflexión, lo cual es otra transformación lineal.

Si te gustaría, puedo mostrar un ejemplo con coordenadas arbitrarias.

Figure 9 : Production de l'IAG aux questions posées par G01 pour la tâche 2.2

Il convient d'identifier ici les opportunités de recul critique qui auraient pu être activées. Le groupe G01 pose un système de 6 équations à 4 inconnues. Or, un tel système n'admet en général pas de solution (référence au référentiel théorique d'algèbre linéaire) : il existe des conditions pour qu'il y ait des solutions, notamment liées au rang du système. Cette observation mathématique aurait dû susciter un questionnement chez les étudiants, en appui sur leurs

connaissances mathématiques : pourquoi ChatGPT affirme-t-il que c'est "toujours possible" alors que le système posé est en général incompatible ?

Le groupe G01, ne possédant pas un référentiel théorique mobilisable en AL2 ou n'activant pas ce référentiel de manière critique, n'a pas détecté cette incohérence. Il a pris la réponse de ChatGPT et l'a reformulée sans la questionner. Cela révèle non seulement une délégation acritique, mais aussi la vulnérabilité des étudiants face à des réponses incorrectes de ces outils d'IAG lorsqu'ils ne mobilisent pas leur référentiel théorique pour valider les informations fournies.

Le domaine géométrie-algèbre est articulé, mais reste circonscrit au paradigme AL1. Du côté des paradigmes, bien que la réponse de l'IAG mobilise des éléments d'AL2 — conditions d'existence, rang, combinaisons linéaires des transformations linéaires —, les groupes relevant de cette typologie ne se positionnent pas dans ce paradigme : ils manipulent des outils algébriques et tentent une généralisation, sans s'appuyer sur les propriétés structurelles caractéristiques d'AL2. L'absence de ce référentiel théorique se manifeste de manière particulièrement visible lorsque le groupe tente de démontrer par papier-crayon une affirmation fournie par ChatGPT qui s'avère mathématiquement incorrecte — l'incapacité à reconnaître qu'un système de 6 équations à 4 inconnues peut être incompatible révèle que le développement algébrique produit ne s'appuie pas sur un référentiel théorique relevant d'AL2, conduisant à une acceptation acritique de la réponse de l'artefact. Cette configuration se reflète dans les genèses : la genèse sémiotique est partielle, les signes étant mobilisés sans appropriation des signifiés ; la genèse instrumentale reste faible, l'IAG étant convoquée comme simple artefact sans exploitation critique ; et la genèse discursive, bien qu'apparemment active, est pseudo-active — le raisonnement produit repose sur une affirmation de l'IAG acceptée sans validation critique.

4.2 Synthèse transversale : domaines, genèses et paradigmes.

Les résultats permettent d'identifier plusieurs tendances transversales dans le cadre de cette étude de cas. Dans les domaines mathématiques, les groupes mobilisent des représentations dans le domaine géométrique, mais celles-ci demeurent insuffisamment articulées au référentiel théorique d'AL2, ce qui tend à limiter le développement de la genèse discursive dans l'ETM-p — une difficulté qui semble davantage liée aux limitations préexistantes du référentiel théorique personnel qu'aux effets propres de la médiation technologique.

Au sein des genèses, le type d'usage de l'IAG apparaît comme le facteur structurant : dans la typologie A, les trois genèses sont absentes ou passives, ce qui ne favorise pas un travail mathématique personnel ; dans la typologie C, leur activation est partielle et déconnectée — la genèse discursive, bien qu'apparemment présente, est orientée par une affirmation de l'IAG acceptée sans validation critique —, ce qui semble limiter l'émergence de plans verticaux dans l'ETM-p ; dans la typologie B en revanche, les genèses sont activées et en circulation, ce qui peut être interprété comme le résultat d'un processus d'instrumentalisation de l'artefact favorisant la configuration des plans verticaux.

En ce qui concerne les paradigmes associés à chaque typologie, les réponses de l'IAG mobilisent systématiquement des éléments d'AL2, tandis que les groupes opèrent dans AL1 —

avec des degrés variables d'avancement — ou dans un paradigme indéterminable lorsque l'absence de travail propre ne permet pas d'identifier clairement leur positionnement effectif.

5. Conclusion

5.1 Dialogue avec la théorie

L'algèbre linéaire présente des difficultés largement documentées dans la littérature didactique, lesquelles sont principalement associées à son haut degré d'abstraction. Dorier (2007) souligne que ces difficultés se manifestent lorsque les étudiants manipulent des représentations formelles sans comprendre la structure mathématique sous-jacente. Ce phénomène s'observe clairement dans les résultats de cette recherche, où la majorité des étudiants développe son travail mathématique personnel dans le paradigme AL1, privilégiant les vérifications numériques, l'essai-erreur et les manipulations procédurales dans un domaine principalement géométrico-algébrique, mettant en évidence des difficultés à mobiliser les propriétés structurelles et la formalisation propres à AL2. L'articulation avec des approches géométriques apparaît de manière variable, selon l'étudiant et la solidité de son référentiel théorique personnel.

Dans ce cadre, l'obstacle du formalisme, identifié par Dorier (2007) et largement documenté dans des recherches antérieures (Dubinsky, 1997 ; Dorier, 2000 ; Sierpiska, 2000 ; Trigueros et Oktaç, 2005 ; Parraguez et Oktaç, 2010), se reflète dans les productions des étudiants face à des activités liées aux concepts de TL, tant dans des contextes sans outils d'IAG que dans des contextes médiatisés par ceux-ci. Les résultats montrent que l'introduction de l'IAG n'élimine pas les difficultés conceptuelles préexistantes. Dans certains cas, ces difficultés peuvent être masquées par des usages délégatifs de l'artefact (Types A et C), tandis que dans d'autres elles peuvent être révélées, particulièrement lorsque l'étudiant adopte un usage critique-stratégique (Type B) qui inclut des processus de vérification et de validation.

Parmi les principales préoccupations identifiées se trouve le phénomène de délégation du travail mathématique de la part de l'étudiant vers l'outil, phénomène observé de manière récurrente lorsque les réponses de l'IAG ne sont ni questionnées ni validées. Dans cette ligne, Richard (2024) caractérise l'IAG comme un nouvel artefact numérique, soulignant l'existence de limitations inhérentes à ces outils qui peuvent affecter les processus d'apprentissage en algèbre linéaire. Ces limitations se présentent dans cette recherche à travers les typologies d'usage A et C, où l'absence de réflexion critique empêche l'activation des genèses de l'ETM-p.

En même temps, Richard (2024) soulève des interrogations concernant les potentialités de l'IAG, lesquelles deviennent visibles lorsque les étudiants adoptent un usage critique-stratégique de l'artefact (Type B). Néanmoins, les résultats suggèrent que la conception de l'IAG comme possible « tuteur virtuel » s'avère peu plausible en l'absence d'une pensée critique suffisamment développée de la part de l'étudiant. Cette observation coïncide avec les propositions de Bagno et al. (2024), qui signalent que, particulièrement dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, ces outils ne peuvent assumer le rôle de professeur ou d'assistant en raison des imprécisions conceptuelles qu'ils présentent dans leurs réponses. Ces imprécisions ont été observées de manière explicite dans les réponses de l'IAG face à des tâches à caractère abstrait, où les étudiants ont eu davantage de difficultés à détecter les incohérences. Ce phénomène reflète une difficulté métacognitive plus large : la capacité limitée des étudiants à valider de

manière critique leur propre production mathématique, difficulté qui s'accroît lorsque la réponse provient d'un artefact technologique.

5.2 Synthèse interprétative et projections didactiques

À partir des résultats obtenus, on observe que les outils d'IAG ne constituent pas en eux-mêmes un facteur déterminant de l'apprentissage mathématique. Leur impact sur l'ETM-p de l'étudiant dépend du type d'usage qu'il fait de l'artefact.

Lorsque l'IAG est utilisée de manière dépendante ou délégitime (Types A et C), on peut difficilement parler de travail mathématique de l'étudiant au sens strict, étant donné que l'activité est transférée intégralement à l'artefact sans activation des genèses de l'ETM-p. L'étudiant se limite à transcrire, sans mobiliser de connaissances mathématiques propres. En revanche, un usage critique-stratégique de l'IAG (Type B) favorise l'activation des genèses sémiotique, instrumentale et discursive, permettant que l'outil puisse se transformer progressivement en un instrument au service du travail mathématique de l'étudiant, particulièrement à travers des processus de vérification, validation et reformulation.

L'analyse met en évidence que le facteur déterminant dans cette transformation est la mobilisation du référentiel théorique personnel de l'étudiant. Sans un référentiel théorique suffisamment structuré, l'étudiant manque de critères pour évaluer la cohérence des réponses de l'IAG : par exemple, dans le cas du groupe G01, l'absence de mobilisation de propriétés structurelles des TL a empêché de détecter l'incompatibilité entre le système posé (6 équations, 4 inconnues) et l'affirmation erronée de l'IAG. En revanche, lorsque le référentiel théorique est mobilisé activement, l'étudiant peut contraster la réponse de l'IAG avec ses connaissances préalables, identifier des incohérences et reformuler ses stratégies, transformant l'artefact en un instrument au service de son travail mathématique.

D'un point de vue didactique, ces résultats s'inscrivent dans la perspective de Panqueban et Huincahue (2024), qui soulignent la nécessité d'une intégration adéquate de l'IAG dans l'enseignement des mathématiques. Les données issues des entretiens permettent d'affiner cette orientation : c'est uniquement confronté à un contre-exemple concret proposé par la chercheuse que l'étudiant E013 amorce une réflexion critique — « no será posible siempre... quizás tiene que cumplirse algunas condiciones » (entretien, 17 janvier 2025) —, ce qui révèle que la médiation humaine externe demeure un levier indispensable pour faire émerger une posture critique que l'interaction seule avec l'IAG n'avait pas suscitée. Ce même étudiant reconnaît explicitement la dépendance de l'outil à ses propres connaissances : « si no comprendo los conceptos, la IA no me ayuda » (entretien, 17 janvier 2025), confirmant ainsi que l'IAG ne saurait suppléer un référentiel théorique personnel insuffisamment structuré. En ce sens, les résultats obtenus suggèrent que la formation des étudiants à un usage critique de l'IAG, fondée sur la promotion de pratiques systématiques de vérification et de confrontation des réponses, ainsi que sur l'intégration de situations telles que le contre-exemple, constitue une orientation didactique pertinente pour favoriser le développement de l'ETM-p.

Pour que cette approche soit efficace, il est indispensable non seulement de renforcer le référentiel théorique associé au paradigme AL2, en insistant sur les propriétés structurelles des objets de l'algèbre linéaire (tels que les systèmes linéaires, le déterminant ou le rang) mais aussi

de former explicitement les étudiants à adopter une posture critique dans l'usage des artefacts de type IAG. De même, il devient nécessaire d'articuler le paradigme AL1 avec AL2, en favorisant l'analyse de cas particuliers comme moyen de comprendre et de justifier des résultats de caractère général. Ces orientations didactiques sont particulièrement pertinentes dans les premiers cours d'algèbre linéaire. Toutefois, dans la formation avancée, il serait également pertinent d'introduire des éléments du paradigme AL3 (approche axiomatique, généralisation de structures), qui renforcent la posture métacognitive nécessaire à un usage réflexif de l'IAG.

En ce sens, sont identifiées comme particulièrement pertinentes les tâches didactiques qui favorisent la pensée critique et articulent les paradigmes de l'algèbre linéaire. Dans des tâches ancrées dans AL1 (algorithmiques, numériques), l'IAG pourrait être utilisée pour obtenir des explications ou des reformulations de procédures, tandis que la vérification des calculs peut être réalisée de manière plus fiable avec des outils de calcul symbolique (Wolfram Alpha, Symbolab, GeoGebra, etc.). En revanche, dans des tâches qui mobilisent AL2 (propriétés structurelles, justification théorique), il devient crucial de développer la capacité d'analyse critique de l'étudiant pour évaluer la validité des réponses. Qui plus est, des tâches qui promeuvent la réflexion en AL3 (approche axiomatique, généralisation de structures) pourraient contribuer à renforcer la posture métacognitive nécessaire à un usage réflexif de l'IAG, bien que cette étude n'ait pas abordé ce paradigme de manière spécifique.

5.3 Limites de l'étude

Cette étude présente certaines limites. L'échantillon réduit (21 étudiants, une université chilienne) empêche une généralisation directe des résultats. De plus, le contexte spécifique (formation d'enseignants de mathématiques, algèbre linéaire, TL) implique des résultats fortement contextualisés. Enfin, le développement rapide des outils d'IAG (version 2024) suggère une évolution possible des typologies d'usage identifiées. Néanmoins, au-delà des caractéristiques techniques, les facteurs favorisant une interaction mathématiquement productive demeurent : solidité du référentiel théorique, posture critique et métacognitive, et conception de tâches exigeant validation explicite.

Références

- Bagno, E., Dana-Picard, T., & Reches, S. (2024). ChatGPT in linear algebra: Strides forward, steps to go. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2403.15399>
- Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/jsp/index_view_direct.jsp?record=bmr:UNIMARC:3388603
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z>

- Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 28, 131-181. <https://doi.org/10.4000/adsc.3286>
- Gaona Paredes, J., López Fernandez, S., Menares Espinoza, R., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (à paraître). *Paradigmes de l'algèbre linéaire* [Cahier de recherche]. ECOS-ANID C22H03.
- García-Martínez, I., Pinto-Rojas, I. E., Molina-Del Sol, M., & Rodríguez, M. A. (2024). Desempeño de estudiantes de pedagogía matemática en dos problemas sobre operaciones binarias: un estudio de caso. *Formación Universitaria*, 17(3), 139-152. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062024000300139>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.^a ed.). McGraw-Hill Education.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical workspaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4I), 515. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Lagrange, J.-B., & Richard, P. R. (2022). Instrumental genesis in the theory of MWS: Insight from didactic research on digital artifacts. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 211-228). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9
- Panqueban, D., & Huincahue, J. (2024). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic review. *Uniciencia*, 38(1), 1-17. <https://doi.org/10.15359/ru.38-1.20>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462>
- Richard, P. R. (2024). El nuevo trabajo matemático: Un desafío en constante renovación para la educación matemática. *UCMaule*, 67, 9-30. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.67.9>
- Stake, R. E. (2020). *Investigación con estudio de casos* [PDF]. Ediciones Morata. https://edmorata.es/wp-content/uploads/2022/06/STAKE.InvestigacionEstudioCasos_prw-1.pdf
- Stebbins, R. A. (2001). What is exploration? In *Exploratory research in the social sciences* (pp. 2-18). SAGE Publications. <https://doi.org/10.4135/9781412984249.n1>
- Tashtoush, M. A., Wardat, Y., AlAli, R., & Saleh, S. (2024). Artificial intelligence in education: Mathematics teachers' perspectives, practices and challenges. *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, 5(1), Article 20. <https://doi.org/10.52866/ijcsm.2024.05.01.004>

Vandebrouck, F., Arévalo-Meneses, F., Cabrera, A. J., Gaona, J., López, S., Menares, R., Montoya-Delgadillo, E., Rodríguez, A., & Vivier, L. (2024, junio). Paradigms of linear algebra. *Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Barcelona, España. <https://hal.science/hal-04639843>

Activité d'étudiants d'université sur une tâche complexe avec ChatGPT

Fabrice Vandebrouck¹ et Gaston Yerbanga²

¹Université Paris Cité, Laboratoire de Didactique André Revuz, vandebro@u-paris.fr

²Université Paris Cité, Laboratoire de Didactique André Revuz, yerbangag@gmail.com

Nous nous intéressons aux activités mathématiques des étudiants à l'ère de l'Intelligence Artificielle (IA). Notre étude vise à mesurer la capacité des étudiants à utiliser des outils d'IA pour conceptualiser les matrices dans le domaine de l'algèbre linéaire. La question est de savoir si l'IA générative, en particulier ChatGPT, peut agir comme un médiateur cognitif, aidant les étudiants à s'attaquer à des tâches mathématiques complexes, en leur permettant précisément de saisir les concepts mathématiques sous-jacents.

Mots clés : algèbre linéaire, intelligence artificielle, conceptualisation, ZPD, activités

Introduction

Cet article examine si les étudiants de première année à l'université peuvent développer leurs connaissances en algèbre linéaire en résolvant un problème complexe et en interagissant avec une Intelligence Artificielle Générative (IAG), en l'occurrence ChatGPT. Le concept d'apprentissage est clarifié en se référant aux champs conceptuels et à la conceptualisation de Vergnaud, qui sont opérationnalisés en termes de niveaux de conceptualisation. Nous utilisons également le concept de Zone Proximale de Développement (Vygotski, 1986) et les activités mathématiques des étudiants comme intermédiaires entre ce que les étudiants disent et font avec l'IAG et les niveaux de conceptualisation visés.

1. Niveaux de conceptualisation avec les matrices

Dans cet article, nous nous sommes inspirés du travail fait sur les paradigmes fait par Arevalo-Meneses et al. (2024) qui ont mis en évidence trois paradigmes successifs de l'algèbre linéaire (AL1, AL2, AL3). Le paradigme AL1 fait référence aux travaux algorithmiques sur les systèmes linéaires et sur la géométrie du plan et de l'espace (dimensions 2 et 3). Il se caractérise par le fait que l'algorithmisation est privilégiée, avec des calculs sans référence explicite aux structures algébriques des objets mathématiques concernés. Le paradigme AL2 est un travail dans les espaces \mathbf{R}^n avec une réinterprétation matricielle des systèmes linéaires comme produits matriciels basés sur l'algèbre matricielle. AL3 est un travail d'abstraction et de généralisation centré sur la structure algébrique générale des espaces vectoriels, qu'ils soient de dimension finie ou infinie.

Nous adoptons, dans cet article, le point de vue de l'apprenant. Nous étudions l'algèbre matricielle linéaire et nous nous concentrons sur la conceptualisation des notions associées aux matrices en référence à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Le champ conceptuel des matrices est à la fois un réseau de situations dont le traitement implique directement ou indirectement des matrices, et un ensemble de concepts liés à celui des matrices pour maîtriser ces situations, avec des formes linguistiques et symboliques associées.

Cependant, Vergnaud n'a pas abordé directement l'enseignement ; nous devons donc combiner les idées des champs conceptuels avec les connaissances sur les programmes universitaires. Nous sommes amenés à définir trois niveaux de conceptualisation des matrices (NC1, NC2 et NC3). Il s'agit de sections cohérentes de champs conceptuels interdépendants, associés à des niveaux d'enseignement successifs, reflétant l'aspect cumulatif et pragmatique de la conceptualisation et la réorganisation des nouvelles connaissances au sein des anciennes connaissances : NC3 englobe NC2, qui englobe lui-même NC1.

La conceptualisation de l'étudiant en tant que produit est décrite en termes de connaissances opérationnelles et déclaratives disponibles, imbriquées dans des cadres (Douady, 1991) et associées à des registres de représentations des objets en jeu (Duval, 1993). En tant que processus, la conceptualisation de l'étudiant se produit à un certain niveau de conceptualisation. Elle est décrite en termes de mise en fonctionnement des connaissances, que nous appelons « *activités mathématiques des élèves* », qui sont caractéristiques d'un niveau de conceptualisation (Vandebrouck, 2018). On fait référence à la disponibilité de connaissances (y compris les formes langagières) adaptables (flexibilité) en fonction des situations abordées (tâches et contextes) réorganisées avec les connaissances anciennes. Sont aussi pris en compte les points de vue qui concernent la modalité d'expression ou de visualisation des concepts.

1.1 NC1 : les matrices comme réécritures de systèmes linéaires

Les activités mathématiques caractéristiques du niveau NC1 sont principalement développées dans un travail relevant du paradigme AL1 et, d'un point de vue académique, elles correspondent généralement au niveau du baccalauréat et du début d'études universitaires (Gueudet, 2020). Les activités sont principalement associées à la résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide du pivot de Gauss et d'une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions. Les matrices n'apparaissent que comme des objets disponibles pour la réécriture de systèmes linéaires. Il s'agit d'un nouveau registre dans le cadre algébrique. La notation matricielle facilite l'organisation de la résolution du système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Le concept de rang y est disponible, mais n'apparaît qu'en association avec le système linéaire et non avec la matrice. Le rang est le nombre de pivots non nuls dans la forme échelonnée réduite du système. Les solutions du système sont interprétées dans le cadre géométrique, mais pas encore en termes de noyau ou d'image d'une matrice.

1.2 NC2 : les matrices en tant qu'objets isolés dotés de leurs propres propriétés

Le niveau de conceptualisation NC2 correspond à des activités mathématiques et à des connaissances disponibles en algèbre linéaire au cours du deuxième semestre de la première année à l'Université Paris Cité. Il correspond au travail jusqu'au paradigme AL2, où le traitement des systèmes linéaires est enrichi par les connaissances acquises dans un nouveau « cadre matriciel ». Les systèmes linéaires peuvent être facilement convertis par les étudiants en systèmes matriciels sous la forme $Ax=y$, où A est une matrice, y est un vecteur et x le vecteur inconnu. Les activités de résolution des systèmes sont enrichies par les nouvelles connaissances disponibles telles que les concepts de combinaison linéaire de lignes ou de colonnes, les déterminants, les noyaux, les images, les rangs (dimension de l'image

matricielle) et les inverses matriciels. Les étudiants peuvent additionner ou multiplier des matrices, mais ils ne comprennent pas la notion générale d'application linéaire et ne connaissent pas l'ensemble des matrices en tant qu'espace vectoriel. À ce niveau, les élèves ont la possibilité de passer à AL1 si nécessaire pour utiliser la géométrie, éventuellement dans l'interprétation de l'ensemble des solutions des systèmes matriciels.

1.3 NC3 : ensemble de matrices en tant qu'espace vectoriel

NC3 correspond à un niveau de conceptualisation qui permet de travailler jusqu'au niveau du paradigme AL3, généralement à la fin de la première année d'université en France. À ce niveau de conceptualisation, l'ensemble des matrices est mobilisé en tant qu'espace vectoriel dont des bases sont connues. Les notions de sous-espaces vectoriels et d'applications linéaires sont disponibles en lien avec les concepts abstraits de l'algèbre et de l'algèbre linéaire. Les activités mathématiques caractéristiques du niveau NC3 sont essentiellement liées à l'abstraction, à la formalisation, à la généralisation et à la démonstration de propriétés (Dorier, 1990). Elles mobilisent aussi des transformations (symétries, rotations, etc.) et sont considérées sous l'angle de la généralisation et de la simplification de l'algèbre linéaire.

2. Tâche de modélisation linéaire du jeu Lights Out

La tâche porte sur le jeu Lights Out (<https://scintilla.dev/lightsout-solver/>), mais elle est donnée aux étudiants sous une forme brute, sans révéler le nom du jeu : « Les cases d'une grille ont deux états différents : une case est soit allumée, soit éteinte. L'objectif est d'éteindre toutes les cases d'une grille à deux états (allumé ou éteint) en cliquant plusieurs fois, sachant que chaque clic modifie l'état de la case et de celles qui lui sont adjacentes (au-dessus, en dessous, à droite et à gauche). Le but du projet est de résoudre ce jeu à l'aide d'une modélisation mathématique afin que toutes les cases puissent être éteintes de la manière la plus efficace possible. Vous devrez notamment vous demander s'il est toujours possible d'éteindre toutes les cases. De même, vous pourrez chercher à simplifier ou à généraliser la solution du jeu en fonction des dimensions de la grille. À l'aide de ChatGPT, vous devrez identifier tous les concepts mathématiques possibles en jeu dans votre travail, en relation avec le cours de mathématiques, en particulier l'algèbre linéaire ».

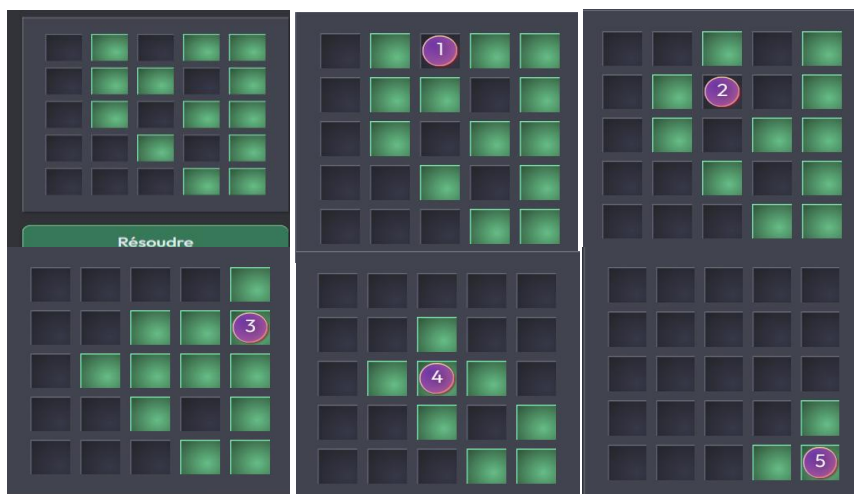


Figure 1 : Exemple d'une grille 5x5 qui peut être désactivée en 5 clics : 3, 8, 10, 13 et 25

Notre objectif étant que les activités des étudiants s'appuient sur des connaissances en algèbre linéaire matricielle, nous avons explicitement mentionné ce domaine dans les instructions. Il existe par exemple des solutions utilisant la théorie des graphes (Dettling et al., 2023). Mais nous nous attendons à ce que les étudiants modélisent le jeu en utilisant des concepts d'algèbre linéaire, qu'ils traitent des exemples de taille au moins 4 et qu'ils arrivent à discuter des conditions nécessaires pour qu'une grille soit éteignable ou pas (Figure 1). Ce type de modélisation et de discussion peut se réaliser dans des activités mathématiques (connaissances et mise en œuvre de ces connaissances) relevant des NC2 ou NC3.

3. Problématique et méthodologie

L'accès à l'interprétation matricielle des systèmes linéaires (accès à NC2/NC3) permettant l'unification des méthodes de résolutions, la formalisation et l'accès à la généralisation dans le cadre plus général de l'algèbre linéaire n'est pas facile pour les étudiants. La tâche proposée ayant un potentiel pour favoriser des activités mathématiques des étudiants relevant jusqu'au NC3, nous cherchons à identifier par les biais des activités mathématiques réalisées, les niveaux de conceptualisation qui sont investis par les étudiants.

Les deux étudiants participant à notre expérience sont en première année de licence de mathématiques à l'université Paris Cité, au cours du deuxième semestre. Ils ont obtenu leur baccalauréat avec une option mathématiques approfondies, spécialisés en mathématiques et en physique-chimie. Les étudiants ont déjà étudié l'arithmétique modulaire et les systèmes d'équations linéaires (niveau NC1) au début de leurs études universitaires (dans des contextes distincts, cependant). Ils étudient alors les matrices, le niveau de conceptualisation attendu étant NC2 (opérations, déterminants, rang et inverses...). Ils reconnaissent donc facilement ces concepts matriciels lorsqu'ils apparaissent dans les réponses de ChatGPT. À la fin de notre expérience, les étudiants commencent à étudier les espaces vectoriels généraux tels que les espaces vectoriels polynomiaux, matriciels ou fonctionnels, le niveau NC3 étant attendu pour les matrices.

Les étudiants ont été observés pendant quatre sessions de travail d'une heure et demie dans le même bureau équipé d'un ordinateur où ils se sont connectés à ChatGPT avec un seul compte personnel, en utilisant la version gratuite d'Openai v-4o. L'observateur (chercheur) n'est intervenu que rarement, sauf en cas de tensions et pour les résumés rédigés au début de chaque session. Les sessions enregistrées (audio) ont duré au maximum une heure et ont eu lieu toutes les deux semaines. Nous disposons donc d'enregistrements des interactions avec ChatGPT, des brouillons, des rapports partiels et finaux du binôme d'étudiants pour leur projet, ainsi que des transcriptions des enregistrements audio des étudiants. Nous déduisons les activités mathématiques des étudiants (et le processus de conceptualisation en cours) à partir de leurs actions (y compris tous les prompts), de leurs écrits, de leurs verbalisations et de leurs interactions.

4. Analyse a priori de la tâche et activités possibles des étudiants

La tâche est complexe car elle implique principalement une activité qui ne relève pas du domaine des mathématiques. Les étudiants doivent d'abord se familiariser avec les stratégies

du jeu. Ils passeront des tests en ligne qui deviendront fastidieux et rebutants pour les grandes grilles.

Il y a une modélisation naturelle, celle qui visualise les grilles de jeu de taille n comme des matrices de taille $n \times n$ avec des 0 et des 1. Les coefficients d'une matrice associée à une grille sont des 1 s'ils correspondent à une case éclairée sur la grille et des 0 dans le cas contraire. La référence aux deux éléments $\{0,1\}$ renvoie au corps base \mathbf{F}_2 . Cliquer sur une case de la matrice initiale M équivaut à ajouter une « matrice de clics » dont les coefficients sont des éléments du corps \mathbf{F}_2 . En particulier, cliquer deux fois sur la même case ramène à l'état initial. Le problème devient donc désormais un problème matriciel. La modélisation naturelle se présente sous la forme d'une addition matricielle : $M + \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_j M_j = 0$ avec $\alpha_j \in \mathbf{F}_2$. La matrice M peut donc être désactivée s'il s'agit d'une combinaison linéaire des n^2 matrices de clics M_j ($1 \leq j \leq n^2$). Cela soulève la question du sous-espace vectoriel généré par les matrices de clics et celle de savoir si M appartient à ce sous-espace vectoriel. Cette modélisation semble assez difficile pour les élèves, car elle nécessite de mobiliser des connaissances et de développer des activités mathématiques sur les matrices correspondant au niveau NC3, combinées à l'arithmétique modulaire.

Une autre modélisation relève de l'espace vectoriel $\mathbf{F}_2^{n^2}$. Cela implique, par exemple, d'indexer les cases d'une configuration en les numérotant et en les classant de gauche à droite, puis de haut en bas, afin d'associer une grille (ou matrice $n \times n$) à un vecteur. Le problème est alors modélisé sous la forme $b + Ax = 0$, où b est un vecteur colonne à n^2 composantes représentant la matrice initiale M et A est la matrice Clic avec un C majuscule. Il s'agit d'une matrice carrée de taille n^2 dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs associés à chacune des matrices de clics M_j ($1 \leq j \leq n^2$). La matrice A est donc caractéristique de la grille de taille n , et le lecteur peut vérifier qu'elle est symétrique. Comme le corps de base est \mathbf{F}_2 , l'équation vectorielle $b + Ax = 0$ est équivalente¹ à $Ax = b$. Si A est inversible ou, plus généralement, si b est dans l'image de A , alors la matrice M est éteignable. Le vecteur solution x fournit les cases sur lesquelles il faut cliquer. Ce modèle est plus accessible pour les élèves car il s'appuie sur des connaissances et des activités mathématiques relatives aux matrices correspondant à NC2, avec des questions axées sur les propriétés de la matrice Clic (en particulier, le rang, l'image et l'inversibilité). Cependant, une telle modélisation n'est pas si naturelle.

Il est remarquable que les deux modèles montrent que l'ordre dans lequel les clics sont effectués n'a aucune importance. Cliquer sur les cases est une opération commutative, ce qui n'est pas immédiatement évident dans le contexte extra-mathématique du jeu car on passe par des configurations de la grille différentes. Une solution optimale pour vider une grille sera donc une séquence de clics, l'ordre des clics n'ayant aucune importance et chaque case n'apparaissant qu'une seule fois dans cette séquence.

Pour résoudre $Ax = b$, la méthode du pivot de Gauss appliquée à la matrice augmentée $(A|b)$ donne une forme échelonnée réduite (niveau NC1). Les étudiants doivent adapter la méthode qu'ils appliquent traditionnellement sur \mathbf{R} , car le corps de base est \mathbf{F}_2 . La méthode devient

¹ Dans un espace vectoriel sur \mathbf{F}_2 , on a $b + b = 0$.

rapidement fastidieuse, car pour $n=3$, le système comporte déjà 9 équations et 9 inconnues. Il est plus instructif de travailler avec les connaissances pertinentes pour le niveau NC2. La question se résume à connaître le rang et, le cas échéant, l'image de la matrice A. Le lecteur peut vérifier que toute configuration de taille $n \leq 3$ peut être éteinte car, dans ces cas, $\text{rg}(A)=n^2$, et donc A est inversible. Dans ce cas, pour toute configuration initiale b , la solution est unique (à permutations près) et s'écrit $x=A^{-1}b$. Cependant, pour $n \geq 4$, le rang de A n'est pas toujours maximal ($n=4$, $\text{rg}(A) = 12 < 16$ et $n=5$, $\text{rg}(A) = 23 < 25$), il existe donc des configurations non éteignables dont l'ensemble est le complémentaire (fini) dans $(\mathbb{F}_2)^{n^2}$ de l'espace image de la matrice Clic A.

En raisonnant avec des connaissances de niveau NC3, nous pouvons résumer le problème dans un cas général. L'ensemble des grilles éteignables est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{F}_2)$. Les matrices de clics M_j ($0 \leq j \leq n^2$) constituent une base pour ce sous-espace vectoriel, et si la grille initiale est une combinaison linéaire de celles-ci, cette combinaison donne la séquence de clics nécessaire pour l'éteindre.

5. Analyse d'activités d'un groupe d'étudiants

Les étudiants testent d'abord le jeu en ligne de manière empirique et travaillent spontanément dans le cadre de la matrice. Ils essaient naturellement d'utiliser leurs connaissances des matrices pour modéliser le jeu, en testant sans succès la multiplication de la matrice initiale par des matrices cliquables. Ils aboutissent ensuite à des additions sous la forme $\sum_{i=1}^{\text{clics}} B_i + A_{\text{initiale}} = A_{\text{finale}} = 0$ (Figure 2, à droite). De plus, ils sont capables de mobiliser l'arithmétique modulaire dans la pratique.

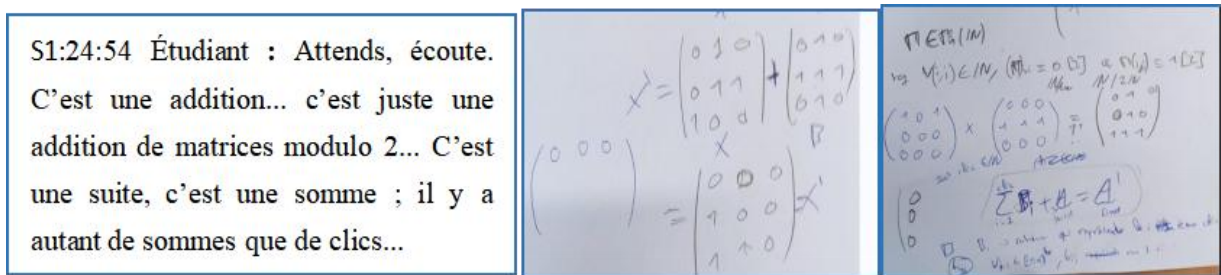


Figure 2 : Échanges entre les élèves (à gauche) avec leurs brouillons

À un moment donné, ils saisissent la description de la tâche dans ChatGPT : prompt (1). À partir de là, nous aurons 43 autres échanges avec l'IA Générative, répondant à cinq objectifs principaux que nous avons identifiés. Ces objectifs sont des sous-buts que se définissent les étudiants ; ils se produisent parfois en parallèle (certains prompts entre parenthèses couvrent deux objectifs).

5.1 Objectif 1 : Comprendre les modèles matriciels $X'=X+AB$ par eux-mêmes

Le prompt (2) est : « effectuer une analyse mathématique du problème ». ChatGPT suggère des moyens de résoudre la tâche en utilisant des concepts d'algèbre linéaire et d'arithmétique modulaire. Le système matriciel proposé est sous la forme $X'=X+AB$, et les étudiants l'adoptent. À travers leurs verbalisations, ils cherchent à comprendre le système matriciel proposé en essayant de vérifier les dimensions des objets impliqués et les définitions données

pour les matrices : X , X' et B sont des vecteurs et A est une matrice n^2 fois n^2 (Figure 3). Le duo vérifie que le système $X'=X+AB$ est bien défini. Leurs activités mathématiques relèvent du niveau NC2, car ils font référence aux matrices comme à des objets dotés de propriétés.

<p>Chaque clic sur une case (i,j) peut être représenté par une matrice $C_{i,j}$ de même taille contenant des 1 dans les positions concernées (la cellule elle-même et ses voisines). Tous les clics effectués peuvent être décrits par une matrice B où $b_{i,j}=1$ signifie que la case (i,j) est cliquée. L'opération consistant à cliquer sur la grille est alors un produit matriciel : $X'=X+AB \pmod 2$ où A est une matrice représentant l'effet des clics sur la grille.</p>	<p>S1:44:13 Étudiant: [inaudible] Attendez... Pourquoi B est-il un vecteur colonne ?... Attendez, ce n'est pas possible... Attendez, attendez, c'est un produit matriciel, nous avons dit que B est de taille n au carré fois... Il y a autant de clics que... Attendez, n au carré fois n au carré fois, c'est la taille de A ; B est n au carré fois 1. Le produit matriciel sera de cette taille.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figure 3 : Réponse de ChatGPT (à gauche) et échanges entre étudiants (à droite)

Cependant, les verbalisations des étudiants montrent qu'ils continuent à penser leur premier modèle en termes d'ajouts de « séquences » de matrices (Figure 4). On assiste ici à une confrontation entre deux types de modélisation possibles : la modélisation matricielle naturelle avec des ajouts successifs de matrices de clics et la modélisation multiplicative dans l'espace des vecteurs à n^2 composantes proposée par ChatGPT. Le premier modèle peut nécessiter des connaissances et des activités de niveau NC3, mais celui proposé par ChatGPT nécessite uniquement des connaissances de niveau NC2.

S1:48:01 Étudiant: Donc, c'est comme si vous aviez la matrice de départ, vous y ajoutez toutes les matrices de clics, où que vous cliquez, et cela vous donne la matrice finale [...]

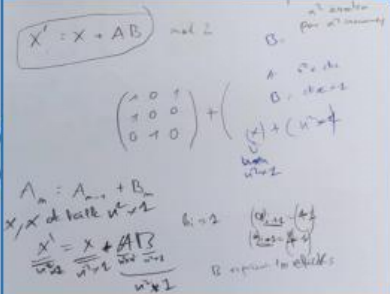
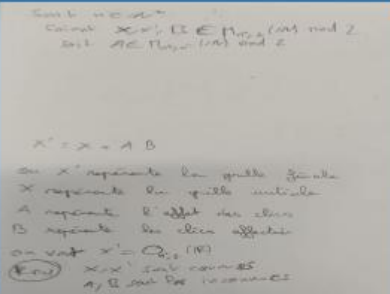



Figure 4 : Échanges entre les étudiants (à gauche) avec leurs brouillons

Étant donné que le niveau de conceptualisation des étudiants est NC2 à ce moment-là, la modélisation proposée par ChatGPT correspond à leurs connaissances, et les étudiants abandonnent leur propre modèle. Peut-être aussi parce qu'ils sont plus sûrs de ce que dit la machine que de leurs connaissances. Cela les empêche de développer leurs connaissances NC3.

5.2 Objectif 2 : Comprendre un exemple générique avec ChatGPT

Cela concerne désormais les prompts 4, puis (5 à 12). Au début de la session 2, les étudiants saisissent à nouveau l'énoncé dans ChatGPT (3). ChatGPT réexplique le jeu en termes généraux, mais c'est comme si les étudiants ne cherchaient plus à comprendre ses explications générales. Les étudiants demandent à ChatGPT : « Prenons le cas d'une grille 2×2 avec une seule case allumée dans le coin supérieur gauche » (4). Le robot indique qu'il est nécessaire « d'aplatir la grille en une seule colonne tout en conservant un ordre cohérent ». Il construit à la

fois une représentation linéaire du système et une forme matricielle modulo 2 traduite par $Ax=b$, b étant l'état initial sous forme vectorielle (Figure 5).

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{11} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{11} + x_{22} = 0 \\ x_{22} + x_{12} + x_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod{2}$$

Figure 5 : Réponse de ChatGPT à la question (4)

Seul le deuxième registre permet aux étudiants de développer des activités et leur conceptualisation matricielle au niveau NC2. La première représentation relève du niveau NC1. ChatGPT suggère aux étudiants de résoudre le système, mais ceux-ci veulent comprendre d'où vient cette modélisation. Nous voyons que c'est en résolvant ce premier exemple que les étudiants comprennent l'association matrice-vecteur avec n^2 composantes sur \mathbf{F}_2 . Plus tard, ils demanderont à ChatGPT de « prendre la grille (1,0,1,0,1,1,0,1,1) » (10), démontrant ainsi qu'ils ont parfaitement compris cette modélisation des grilles dans des vecteurs avec n^2 composantes. Dans (13), ils demanderont à « résoudre la grille (1,0,0,1) », démontrant qu'ils doivent revenir à une grille de taille 2.

5.3 Objectif 3 : Comprendre la modélisation $Ax=b$ avec ChatGPT

Cela concerne les prompts (5 à 12), puis 15, 16, (17) et 19. Les étudiants demandent « lorsque nous mettons la grille sous forme de matrice colonne, quelle est la position des coefficients » (5) « D'où vient ce système et comment aide-t-il à résoudre le problème » (6) « La matrice de droite n'est pas celle que nous recherchons, car nous voulons que toutes les cases soient vides » (7).

<p>Vous avez raison de poser cette question ! La dernière colonne de la matrice finale que je vous ai donnée ne correspond pas exactement au vecteur transformé B. Cela signifie qu'il y a eu une erreur dans l'affichage ou l'interprétation des résultats. Analysons pourquoi et clarifions le lien exact. L'algèbre linéaire nous permet de modéliser les dépendances entre les cases sous forme matricielle. La résolution de $A \cdot X = B \pmod{2}$ nous donne la meilleure séquence de clics pour atteindre l'état final souhaité (toutes les cases désactivées).</p>	<p>(Session 2)</p> <p>S2:21:41 Étudiant: [...] ici, AX est toujours égal à B. Mais c'est là tout le problème s'il ne tient pas compte de la matrice initiale.</p> <p>S2:55:46 Étudiant: Ici, en fait, il veut arriver à la matrice initiale. ... parce que si on prend la relation qui existe, vous voyez, B, vous avez AX, qui est l'équivalent de notre AB. Vous mettez le B de l'autre côté [...] Vous avez moins AX, vous avez moins B,</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figure 6 : Réponse de ChatGPT (à gauche) et échanges entre les étudiants (à droite)

Les étudiants prouvent par leurs questions et leurs verbalisations qu'ils comprennent l'association entre les matrices et les systèmes, en considérant les matrices comme des objets avec des opérations (niveau NC2). Cependant, les étudiants ont passé plus de deux heures à formuler neuf questions pour comprendre le passage de $b+Ax=0$ à $Ax=b$ (Figure 6). Leurs questions portent à la fois sur les systèmes et les matrices. Les étudiants font preuve de

flexibilité entre les systèmes linéaires et matriciels (NC2). Au final, ils ont compris le changement, comme le montrent l'extrait de leur rapport final et leurs échanges lors de la troisième session (Figure 7).

S3:02:21 Étudiant 1 : Par moins 1, puisqu'il s'agit d'un modulo 2, les -1 deviennent des 1... Et donc, c'est en fait la même relation.

S3:02:25 Étudiant 2 : C'est vraiment magnifique. J'y ai pensé l'autre jour. Cela revient au même. C'est juste... il suffit de déplacer

Cette relation peut être simplifiée puisque nous sommes dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'addition et la soustraction sont équivalentes, nous obtenons donc $AX - B = 0$ et finalement : $AX = B$

Figure 7 : Extraits des échanges entre étudiants (à gauche) et de leur rapport final (à droite)

Cela concerne les prompts (9, 10, 11), puis 13-14, (17),18 et 21. Huit prompts concernent l'activité de résolution du système $Ax=b$. À l'aide d'exemples concrets, ChatGPT explique le processus de résolution des systèmes à l'aide du pivot de Gauss, mais cache les opérations modulo 2. Les étudiants l'appliquent aux systèmes linéaires, commettant des erreurs mais prêtant attention aux opérations modulaires (Figure 8 de la page suivante).

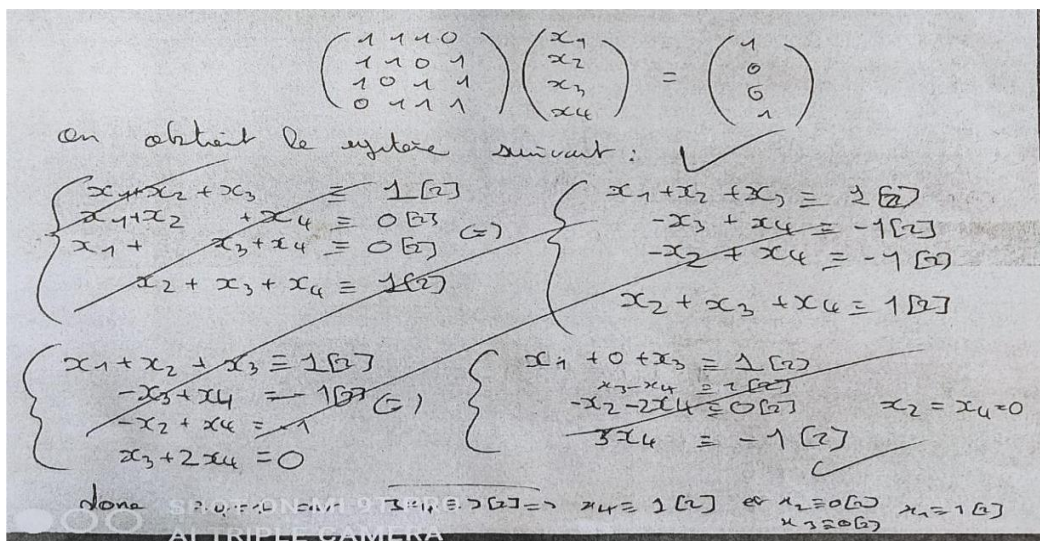


Figure 8 : Brouillon des étudiants

Grâce à leurs interactions avec ChatGPT, les étudiants réviseront les concepts de rang, de déterminant et d'inverse des matrices à partir de ChatGPT. Cependant, le rang apparaît parfois dans les réponses de ChatGPT comme le nombre de pivots non nuls dans le système $Ax=b$ (NC1), et parfois comme le nombre de lignes indépendantes de A (NC2). Cette deuxième définition semblait être nouvelle jusqu'à la troisième session de travail : « S3:41:27 Étudiant : nous n'avons pas encore vu ce que c'est. » Comme la définition NC1 est suffisante pour les étudiants, ChatGPT semble les empêcher de conceptualiser le rang au niveau NC2.

5.4 Objectif 5 : Comprendre le cas général

Cela concerne les prompts : (23 cas généraux) - (24, 28, 32, 33, 39-41 pour les cas 2×2) - (25, 29, 31, 37, 45, 46 liés au déterminant) - (26, 38, 42, 44 pour l'existence et le nombre de solutions) - (35-36 réversibilité) - (43 pour la résolution concrète d'une grille). « Quelle est la condition pour qu'une grille de jeu ait une solution ? » (23). Il s'agit de la première question,

suivie de 21 autres questions visant à généraliser la solvabilité du jeu. Au cours de la troisième session, les étudiants concluent que l'unicité de la solution équivaut à l'inversibilité de la matrice A , au déterminant non nul de A et au rang maximal équivalent à n^2 pivots non nuls de la matrice A . Cependant, leurs activités mathématiques restent au niveau NC2 :

S3:01:02:44 Étudiant : Non, mais en général. A est inversible, ce qui signifie que le rang de A est égal à n , ce qui équivaut à dire que A a n pivots. C'est notre lemme. Il faut tout un chapitre pour le prouver, alors laissons tomber. À quoi cela nous sert-il ? C'est la méthode que nous avons vue en classe pour déterminer si A est inversible. Nous allons faire un pivot de Gauss.

Au début de la quatrième session, les deux étudiants comprennent que la valeur du déterminant dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ reste dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et peut être déduite de celle du déterminant dans \mathbf{R} . L'un d'eux dit :

S4:02:28 Étudiant : Donc...Oh oui, nous prenons le déterminant modulo 2. C'est important de le mentionner

L'autre poursuit :

S4:03:03 Étudiant : [...] Oui, en fait, le déterminant, si le déterminant prend le modulo 2, est soit 0, soit 1.

Les étudiants ont tout de même demandé à ChatGPT : « Pour résoudre le jeu, devons-nous prendre le déterminant modulo 2 ou non ? » (31). Mais la réponse répétée par le robot, « Oui, pour résoudre Lights Out, nous devons prendre le déterminant modulo 2 car le jeu suit une logique binaire », n'est pas celle à laquelle s'attendaient les étudiants. Ceux-ci parviennent à appliquer un nouveau théorème, le théorème de Rouché-Capelli, qu'ils n'ont pas vu en classe mais qu'ils ont retenu dans une conclusion de ChatGPT : « Une grille de jeu Lights Out a une solution si et seulement si B appartient à l'espace colonne de A , ce qui se traduit par $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$ » (réponse à la question 23). Cette nouvelle connaissance se trouve dans la ZPD des étudiants et reste dans le niveau NC2. Malheureusement, le concept de rang dans les activités des étudiants reste au niveau NC1 (nombre de pivots non nuls).

De plus, il convient de noter que les étudiants ont ignoré certains concepts soulevés par ChatGPT, même si ces concepts avaient déjà été abordés en classe ou pouvaient également relever de leur ZPD. C'est le cas de la condition de compatibilité à laquelle le robot répond qu'un « système linéaire $AX=B \pmod{2}$ a une solution si et seulement si le vecteur B appartient à l'espace colonne de la matrice A , c'est-à-dire si B peut être écrit comme une combinaison linéaire mod 2 des colonnes de A (...) Si certaines configurations de B ne peuvent être obtenues par une combinaison de clics, alors la grille ne peut être résolue. Un cas typique où une grille n'a pas de solution est celui où certaines lumières ne peuvent pas être influencées par les clics possibles. Cela se produit si les colonnes de A ne couvrent pas tout l'espace des états possibles B . » (extrait de la réponse à la question 23). Les étudiants ne reconnaissent pas ces concepts comme pertinents pour la situation qui les concerne.

Conclusion

Pour mieux comprendre certains aspects de la résolution du jeu Lights Out, les étudiants font preuve d'une certaine maîtrise dans la formulation de leurs consignes, dans des cas spécifiques ou généraux, par exemple en orientant ChatGPT vers des exemples génériques. Cependant, des malentendus surviennent souvent car ChatGPT et les étudiants rencontrent des difficultés d'interprétation. ChatGPT explique, reformule, recadre et propose des illustrations, des étapes intermédiaires et des procédures valides, mais celles-ci sont parfois incomplètes ou incorrectes. Il ne vise pas à enseigner aux étudiants, mais il les aide à résoudre la tâche à accomplir. Certaines des connaissances que les étudiants possèdent ou peuvent exploiter (niveau NC2, abordées en classe pendant le semestre) sont revisitées et peuvent même être adaptées dans leurs interactions avec ChatGPT. C'est le cas de la modélisation matricielle sous la forme $Ax=b$ dans le cadre matriciel, de l'élimination de Gauss adaptée au cadre arithmétique modulaire, du rôle du déterminant modulo 2, du lien avec l'inversibilité et la solution unique. Le théorème de Rouché Capelli est appréhendé comme un nouveau théorème NC2 qui relève de la ZPD des étudiants. De plus, les étudiants découvrent des incohérences évidentes dans ChatGPT, qui affiche des exemples erronés de configurations insolubles et des calculs incorrects du déterminant modulaire. Les étudiants vérifient ces éléments par rapport aux connaissances NC2 qu'ils ont acquises.

Cependant, ChatGPT oscille toujours entre le langage NC1 et le NC2. Cela empêche les étudiants de conceptualiser le rang au niveau NC2. De plus, ChatGPT utilise certains éléments du langage NC2 qui dépassent les connaissances que les étudiants peuvent mobiliser. Autrement dit, certaines connaissances NC2 apparaissent dans ChatGPT, mais restent inaccessibles aux étudiants car le discours de ChatGPT n'est pas bien adapté. C'est le cas des suggestions visant à envisager des combinaisons linéaires de colonnes et l'image matricielle, qui ne sont pas reprises, sauf sous une forme déclarative lorsque cela est applicable.

Dans tous les cas, laissés à eux-mêmes avec ChatGPT, les étudiants n'ont pas été en mesure d'atteindre le niveau NC3, qui dépasse largement leur ZPD. Le premier modèle proposé par ChatGPT utilise des connaissances et suppose des activités du niveau NC2. Comme les questions des étudiants ne dépassent pas le niveau NC2, les réponses de ChatGPT restent au niveau NC2 (ou en dessous), ce qui empêche les étudiants de passer au niveau supérieur par eux-mêmes lors de cette seule interaction. Par exemple, le concept de combinaisons linéaires de matrices de clics n'apparaît pas dans leurs activités, même s'ils avaient initié dès le départ une modélisation naturelle avec des matrices n fois n . De plus, dans leur rapport, les étudiants n'ont traité aucune grille de taille $n \geq 4$. Même si le cours universitaire, à la fin de l'expérience, traite des espaces vectoriels matriciels, les étudiants ne sont pas en mesure de mobiliser ces connaissances NC3 dans des activités interagissant seuls avec ChatGPT. Leur conceptualisation (produit) reste dans le cadre du niveau NC2 et reste à la fin limitée.

Références

Arevalo-Meneses, F., Cabreral, A., Gaona, J., López, S., Delgadillo, E-M., Rodríguez, A., Vandebrouck, F., and Vivier, L. (2024). *Paradigms of linear algebra*. In *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University*

- Mathematics (INDRUM2024, 10-14 June 2024)* (pp. 179-188). Centre de Recerca Matemàtica and INDRUM, Barcelona, Spain.
- Dettling, T. E., & Parker, D. B. (2023). *The Lights Out game on directed graphs*. *arXiv preprint arXiv:2306.06017*. <https://arxiv.org/abs/2306.06017>
- Dorier, J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La pensée sauvage.
- Douady, R. (1991). Tool, Object, Setting, Window. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, and J. van Dormolen (Eds.) *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 109–130). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1993). Les registres des représentations sémiotiques et le fonctionnement de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Gueudet, G. (2000). *Le rôle de la géométrie dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I. <https://theses.hal.science/tel-00930634v1>
- Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. <https://hal.science/hal-01766869>
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170.
- Vygotski, L. (1986). *Thought and Language*. Cambridge MA: MIT Press.

PRISME : penser et relier les espaces de travail à l'ère de l'intelligence artificielle

Analyser la reconfiguration du travail mathématique médié par l'intelligence artificielle

Dominique Laval

ISFEC IDF & CY Cergy Paris Université, France ; dominique.laval@cyu.fr

L'essor des systèmes d'intelligence artificielle générative transforme les conditions dans lesquelles se déploie le travail mathématique en classe, en formation et plus largement dans les environnements éducatifs instrumentés. Cet article présente le protocole PRISME comme un dispositif de recherche-formation destiné à analyser ces transformations à partir d'un noyau théorique centré sur les Espaces de Travail Mathématique, Algorithmique et Connectés. L'hypothèse directrice est que l'introduction de systèmes algorithmiques ne modifie pas seulement la production de réponses, mais reconfigure le contrôle épistémique du travail mathématique en déplaçant l'activité vers la sélection, l'interprétation, la justification et la validation. L'article explicite le cadre analytique retenu, les types de données mobilisés et les unités d'analyse privilégiées, puis discute, à partir de situations contrastées, les déplacements observables entre production, médiation instrumentale et responsabilité intellectuelle. PRISME est ainsi présenté comme un cadre permettant de penser didactiquement les effets de l'IA sur le travail mathématique, sans réduire ces effets à une question d'efficacité technique.

Mots-clés : Travail mathématique ; intelligence artificielle ; contrôle épistémique ; didactique des mathématiques ; espaces de travail ; recherche-formation

1. Introduction

La présente contribution s'inscrit dans le prolongement des travaux présentés sous forme de poster lors des Quatrièmes Journées d'Étude du Travail Mathématique. Elle prend pour objet les transformations du travail mathématique dans des environnements désormais marqués par la diffusion de systèmes d'intelligence artificielle capables de calculer, de reformuler, d'expliquer ou de générer des procédures. Penser et relier les espaces de travail signifie ici analyser les circulations entre Espaces de Travail Mathématique, Algorithmique et Connectés lorsque des systèmes d'intelligence artificielle interviennent dans la production, l'explicitation ou la validation de procédures. L'enjeu n'est pas seulement technique. Il porte sur la manière dont ces systèmes modifient les rapports aux tâches, aux savoirs, aux formes de raisonnement et aux critères de validation mobilisés dans l'activité mathématique. Cette évolution ne peut donc être comprise ni comme un simple changement d'outillage, ni comme une amélioration instrumentale des performances. Elle appelle une analyse didactique, épistémique et institutionnelle du travail mathématique médié par l'IA.

Dans ce contexte, une question apparaît centrale : que devient le travail mathématique lorsque des systèmes algorithmiques interviennent dans la production, l'explicitation ou la validation de procédures ? Poser cette question revient à déplacer l'attention de l'outil vers l'activité. Ce qui importe n'est pas seulement ce que l'IA produit, mais ce qu'elle reconfigure dans le travail

du sujet, dans les gestes professionnels de l'enseignant et dans les formes de contrôle exercées sur les savoirs. L'hypothèse défendue ici est que l'intégration de tels systèmes tend à redistribuer le contrôle épistémique de l'activité mathématique. Le centre de gravité du travail se déplace alors de la seule production procédurale vers la sélection, l'interprétation, la justification et la validation.

Pour analyser cette redistribution, l'article s'appuie sur le protocole PRISME¹, conçu comme un dispositif de recherche-formation inscrit dans la durée. Il ne s'agit pas d'ajouter un cadre théorique supplémentaire, mais d'organiser l'articulation entre plusieurs outils d'analyse autour d'un objet commun : les reconfigurations du travail mathématique dans des environnements instrumentés. Dans cette perspective, les Espaces de Travail Mathématique, Algorithmique et Connectés constituent le noyau central du dispositif, tandis que la genèse instrumentale et le contrôle épistémique jouent un rôle de notions organisatrices. Le protocole vise ainsi à décrire les médiations instrumentées, les déplacements de statut des techniques, les circulations entre espaces de travail et les formes de responsabilité intellectuelle qui apparaissent lorsque des réponses ou des reformulations sont produites par un système artificiel.

L'article s'organise en plusieurs sections. Il précise d'abord le noyau théorique retenu pour penser le travail mathématique médié par l'IA. Il présente ensuite PRISME comme dispositif de recherche-formation et en explicite le cadre d'opérationnalisation empirique, en particulier les types de données recueillies et les unités d'analyse mobilisées. Il examine ensuite trois situations, de statuts distincts, afin de montrer comment l'introduction d'un système d'IA peut reconfigurer les rapports entre sujet, instrument et institution dans l'activité mathématique. Une discussion finale en dégage la portée et les limites, en montrant que l'intérêt didactique de l'IA ne réside pas d'abord dans l'automatisation des réponses, mais dans les formes de médiation et de contrôle qu'elle rend visibles.

2. Problématique et noyau théorique

Les transformations actuelles du travail mathématique sous l'effet des environnements numériques et des systèmes d'intelligence artificielle ne peuvent être réduites à l'apparition de nouveaux outils. Elles affectent plus profondément les formes de l'activité, les rapports aux techniques, les modalités de raisonnement et les critères de validation mobilisés dans les situations d'enseignement et de formation. Dans cette perspective, l'enjeu théorique n'est pas d'ajouter des cadres hétérogènes, mais d'organiser leur articulation autour d'un objet commun : la reconfiguration du travail mathématique dans des environnements instrumentés, connectés et partiellement automatisés.

Le choix retenu ici consiste donc à expliciter un noyau théorique resserré. Celui-ci repose d'abord sur les Espaces de Travail Mathématique, Algorithmique et Connectés, qui constituent le centre opératoire du dispositif analytique. Il mobilise ensuite, à titre complémentaire, la Théorie Anthropologique du Didactique et la Théorie des Situations Didactiques, non comme cadres concurrents, mais comme instruments d'analyse ciblés de certains phénomènes. Enfin,

¹ PRISME signifie « Pédagogie – Recherche – Innovation – Savoirs – Mathématiques – Éducation »

deux notions assurent la cohérence de l'ensemble : la genèse instrumentale et le contrôle épistémique. Ce sont elles qui permettent de penser ensemble les médiations techniques, les déplacements du travail mathématique et les conditions de validité des savoirs produits.

2.1 Les Espaces de Travail comme centre opératoire de l'analyse

Les Espaces de Travail Mathématique (ETM) offrent un premier ancrage pour penser le travail mathématique comme une activité articulant registres de représentation, instruments, discours et contrôles (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak & Richard, 2014). Ils permettent de décrire la manière dont un sujet coordonne différents éléments pour résoudre une tâche, en tenant compte à la fois des ressources mobilisées et des contraintes institutionnelles. Dans le cadre de cet article, les ETM ne sont pas mobilisés comme un simple arrière-plan théorique, mais comme un cadre permettant d'analyser les recompositions du travail mathématique lorsque des systèmes techniques interviennent dans la production, la reformulation ou l'examen des procédures.

Les Espaces de Travail Algorithmique (ETA) prolongent cette approche en intégrant explicitement les traitements formalisés, les procédures programmées, les simulations et, plus largement, les dimensions algorithmiques de l'activité mathématique (Laval, 2018). Ils permettent d'interroger ce qui se déplace lorsque certaines opérations, autrefois assumées par le sujet, sont prises en charge par un artefact computationnel. Dans un contexte d'IA générative, cette question devient particulièrement importante : les systèmes ne se limitent plus à exécuter des procédures prescrites, mais peuvent produire des formulations, proposer des chemins de résolution, voire générer des raisonnements rédigés. Les ETA permettent alors d'analyser non seulement l'externalisation de certaines opérations, mais aussi la redistribution des fonctions d'interprétation, de contrôle et de validation qui en résulte.

Les Espaces de Travail Connectés (ETC) complètent cet ensemble en rendant compte de l'inscription de l'activité mathématique dans des environnements numériques où circulent des productions d'élèves, des supports, des consignes, des traces et désormais des objets symboliques générés ou transformés par des systèmes techniques (Minh & Lagrange, 2016 ; Lagrange & Laval, 2019 ; Laval, 2021). Les ETC permettent ainsi de penser l'élargissement de l'espace didactique au-delà de l'interaction directe entre élève et enseignant. Ils sont particulièrement utiles pour décrire les circulations entre ressources, acteurs et médiations dans des situations où les réponses, reformulations ou suggestions ne proviennent plus exclusivement de l'institution scolaire au sens traditionnel, mais d'artefacts numériques intégrés à l'activité.

Ainsi articulés, ETM, ETA et ETC constituent le noyau théorique principal de l'article. Ils permettent de décrire les recompositions du travail mathématique liées à l'instrumentation numérique, algorithmique et connectée, sans dissoudre l'activité dans une approche purement technologique.

2.2 TAD et TSD comme cadres complémentaires d'analyse didactique

Dans cette architecture, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD) interviennent comme cadres complémentaires. Leur fonction n'est pas de doubler l'analyse proposée par les Espaces de Travail, mais d'éclairer plus

précisément certains phénomènes didactiques qui apparaissent dans les situations instrumentées.

La TAD permet en particulier d'interroger les déplacements de statut des techniques (Chevallard, 1999, 2007). Lorsque certaines procédures deviennent rapidement automatisables ou aisément reformulables par un système d'IA, la question n'est plus seulement celle de leur exécution, mais celle de leur statut dans l'activité mathématique et dans l'institution scolaire. Une technique peut ainsi passer d'un rôle de production à un rôle de contrôle, de vérification ou de discussion. La TAD est ici précieuse pour décrire ces déplacements et pour analyser leurs effets sur les rapports aux savoirs.

La TSD, de son côté, permet d'éclairer les transformations des rétroactions, des régulations et des formes d'institutionnalisation dans des situations où le milieu comprend des artefacts capables de produire des formulations, des aides ou des solutions partielles (Brousseau, 1998). Dans un tel contexte, les équilibres entre élève, enseignant et milieu se trouvent reconfigurés. L'intérêt de la TSD n'est donc pas ici de refonder l'ensemble du cadre, mais d'apporter des outils d'analyse pour penser les conditions de dévolution, les formes de régulation et les modalités selon lesquelles un savoir est ou non repris, discuté et reconnu dans l'institution.

La hiérarchie retenue est donc la suivante : les Espaces de Travail constituent le cadre principal de description des recompositions du travail mathématique ; la TAD et la TSD interviennent comme cadres d'appui pour analyser certains déplacements didactiques plus localisés.

2.3 Genèse instrumentale et contrôle épistémique comme notions de convergence

La cohérence de ce noyau théorique repose enfin sur deux notions de convergence : la genèse instrumentale et le contrôle épistémique. Leur rôle est central, car elles permettent de passer de la simple description des outils ou des cadres à l'analyse de ce qui se transforme effectivement dans le travail mathématique.

La première notion est celle de genèse instrumentale. Dans un environnement marqué par la diffusion de systèmes d'IA capables de produire calculs, reformulations ou raisonnements rédigés, la simple disponibilité d'un artefact ne suffit pas à en faire un instrument du travail mathématique. Encore faut-il que le sujet construise des schèmes d'utilisation lui permettant de l'intégrer à son activité, de l'interroger, de le détourner éventuellement, et d'en faire un appui pour son propre raisonnement (Rabardel, 1995).

La seconde notion est celle de contrôle épistémique. Elle désigne ici les modalités selon lesquelles les savoirs produits, reformulés ou mobilisés dans une situation sont examinés, justifiés, validés et reconnus comme pertinents. Lorsque des réponses ou des procédures sont générées par un système technique, la question décisive n'est pas seulement celle de leur exactitude immédiate, mais celle de leur statut : qui les contrôle, selon quels critères, et dans quelle relation à l'institution scolaire ?

Ces deux notions ne sont pas ajoutées de l'extérieur aux cadres précédents. Elles en assurent la cohérence. La genèse instrumentale permet de décrire les conditions d'appropriation des artefacts. Le contrôle épistémique permet d'analyser les conditions de validité, de justification et d'institutionnalisation des savoirs dans des environnements médiés. Ensemble, elles

permettent de penser ce que l'introduction a posé comme hypothèse centrale : l'intégration de systèmes d'IA déplace le centre de gravité du travail mathématique de la seule production procédurale vers des activités de sélection, d'interprétation, de justification et de validation.

2.4 Un éclairage cognitif complémentaire

Les apports des sciences cognitives peuvent être mobilisés à titre complémentaire pour préciser certains effets possibles de ces médiations sur l'activité des sujets. Les travaux de Diamond (2013) sur les fonctions exécutives, ceux de Houdé (2014) sur le contrôle inhibiteur et ceux de Fayol et Houdé (2014) sur les apprentissages permettent d'éclairer les exigences cognitives associées à la sélection, à la mise à distance critique et à la régulation des procédures. Toutefois, dans le cadre du présent article, cet éclairage reste secondaire. Il ne constitue pas un second noyau théorique autonome, mais un appui ponctuel pour interpréter certaines tensions observables dans les situations analysées.

En ce sens, le noyau théorique retenu ne vise ni l'exhaustivité ni la synthèse générale de tous les cadres disponibles. Il cherche plutôt à construire un espace d'analyse suffisamment structuré pour décrire les reconfigurations du travail mathématique dans des environnements instrumentés par l'IA. C'est à partir de ce noyau, et non d'une simple juxtaposition de références, que le protocole PRISME peut ensuite être présenté comme dispositif de recherche-formation et être mis à l'épreuve de situations effectives.

3. PRISME comme dispositif de recherche-formation

Après avoir précisé le noyau théorique retenu pour analyser les reconfigurations du travail mathématique dans des environnements instrumentés par l'intelligence artificielle, il convient désormais de présenter PRISME comme un dispositif effectif de recherche-formation. L'enjeu de cette section n'est plus seulement de situer le protocole dans un espace conceptuel, mais de montrer comment il organise concrètement la rencontre entre cadres théoriques, pratiques d'enseignement, formation des acteurs et production de connaissances. Dans cette perspective, PRISME ne se réduit ni à un programme d'innovation pédagogique, ni à une recherche menée en extériorité par rapport au terrain. Il se définit comme un dispositif dans lequel la recherche, la formation et l'expérimentation se structurent mutuellement autour d'un même objet : l'analyse du travail mathématique médié par l'IA.

3.1 Un protocole inscrit dans une temporalité longue

Le protocole PRISME est conçu sur une durée de trois années. Cela permet d'observer des évolutions de pratiques, de stabiliser progressivement certains dispositifs, d'ajuster les cadres d'intervention et de mettre à l'épreuve les hypothèses formulées dans des contextes variés. Dans un domaine marqué par l'évolution rapide des usages numériques et des systèmes d'IA, une telle durée est essentielle pour éviter les lectures immédiatistes ou strictement impressionnistes. Elle autorise des allers-retours itératifs entre expérimentation, observation, analyse et reformulation, qui donnent au protocole une cohérence progressive plutôt qu'un caractère ponctuel.

Cette inscription dans la durée implique également de considérer PRISME comme un protocole évolutif. Il ne s'agit pas d'appliquer un modèle figé à des terrains divers, mais de construire

progressivement un espace de recherche-formation capable d'intégrer les retours du terrain, les ajustements théoriques et les transformations des pratiques observées. La robustesse du protocole ne tient donc pas à la rigidité d'un schéma initial, mais à sa capacité à organiser des révisions successives sans perdre son noyau analytique. En ce sens, PRISME se distingue d'une expérimentation brève centrée sur l'évaluation d'un outil ou d'un usage isolé. Il cherche à décrire des recompositions durables du travail mathématique et des pratiques de formation dans des environnements instrumentés.

3.2 Des acteurs et des terrains articulés

Le protocole s'appuie sur un réseau d'écoles primaires et de collèges engagés volontairement dans la démarche. L'intérêt d'un tel réseau est double. D'une part, il permet de croiser des situations d'enseignement variées, tant du point de vue des niveaux scolaires que des contenus mathématiques travaillés. D'autre part, il donne au protocole une assise empirique qui ne repose pas sur un terrain unique ou sur une situation exemplaire isolée. Les établissements partenaires ne constituent pas seulement des lieux d'expérimentation. Ils forment également des espaces de réflexion collective sur les pratiques, les médiations techniques et les conditions d'intégration raisonnée des outils numériques et de l'intelligence artificielle dans l'enseignement des mathématiques.

Le pilotage institutionnel du protocole est assuré par ISFEC² Île-de-France, en articulation avec deux chercheurs universitaires, l'un en didactique des mathématiques et l'autre en sociologie. Une telle organisation permet d'inscrire PRISME dans un espace intermédiaire entre terrain, formation et recherche. Elle vise à garantir à la fois la rigueur scientifique du dispositif et son ancrage dans des logiques de formation initiale et continue. Les chercheurs assurent la cohérence théorique du protocole, contribuent à l'analyse des données et à la formalisation des résultats. Les formateurs jouent quant à eux un rôle central dans l'animation des temps de travail, la médiation entre cadres théoriques et situations vécues, ainsi que dans l'accompagnement des enseignants engagés dans le protocole.

L'un des intérêts majeurs de cette organisation tient à l'articulation entre plusieurs catégories d'acteurs : enseignants, formateurs, chercheurs et institutions. Chacun intervient depuis une position spécifique, avec des préoccupations distinctes, mais à l'intérieur d'un même cadre de travail. Cette pluralité n'est pas un simple contexte, elle constitue une dimension de l'objet même, puisque l'analyse du travail mathématique médié par l'IA suppose précisément de prendre en compte les médiations institutionnelles, professionnelles et didactiques dans lesquelles il s'inscrit. La structure du protocole permet ainsi de faire dialoguer des points de vue différents sur les mêmes situations, ce qui renforce la portée analytique des observations recueillies et évite une lecture strictement individuelle des phénomènes étudiés.

3.3 Une dynamique articulant expérimentation, analyse et formalisation

Le fonctionnement de PRISME repose sur une alternance structurée entre trois types de phases : expérimentation, analyse et formalisation. Les phases d'expérimentation correspondent à la

² ISFEC signifie « Institut Supérieur de Formation de l'Enseignement Catholique »

mise en œuvre, en classe ou en formation, de situations intégrant des outils numériques ou des dispositifs d'intelligence artificielle conçus à partir des cadres théoriques mobilisés. Leur objectif n'est pas de tester des outils de manière isolée, mais d'observer les transformations du travail mathématique qu'ils induisent, du point de vue des élèves comme de celui des enseignants. Cette précision est décisive, car elle distingue PRISME d'une logique d'évaluation techniciste centrée sur l'efficacité intrinsèque des dispositifs.

Les phases d'analyse visent à documenter finement les pratiques, les raisonnements et les déplacements observables dans les situations instrumentées. Elles s'appuient notamment sur des journaux de bord tenus par les enseignants et les formateurs, ainsi que sur des grilles d'observation construites à partir des cadres des Espaces de Travail. L'attention porte alors sur les médiations instrumentales, les formes de contrôle épistémique, les processus de genèse instrumentale et les reconfigurations des techniques. Cette phase d'analyse est essentielle, car elle permet de ne pas réduire les situations à leur résultat immédiat, mais de les lire comme traces d'une transformation plus profonde du travail mathématique.

Les phases de formalisation, enfin, transforment ces analyses en objets de savoir partageables. Elles donnent lieu à l'élaboration de capsules théoriques, de documents de synthèse et de ressources de formation. Cette formalisation ne constitue pas un simple moment terminal de restitution, elle participe de la dynamique même du protocole. Elle permet de stabiliser progressivement des concepts, de préciser les catégories d'analyse, et d'organiser la circulation des résultats entre recherche et formation. En ce sens, PRISME ne sépare pas production scientifique et développement professionnel. Il les articule dans un même mouvement, ce qui explique que la recherche n'y apparaisse pas en surplomb, mais comme une composante interne du dispositif.

L'un des principes structurants de PRISME réside précisément dans l'articulation étroite entre formation initiale, formation continue et recherche. Les enseignants en formation initiale sont impliqués à travers des dispositifs d'analyse de pratiques et des travaux réflexifs, tandis que les enseignants en formation continue participent aux expérimentations et aux temps de co-analyse. La recherche, dans ce cadre, n'intervient pas comme instance extérieure chargée de mesurer des effets préalablement définis. Elle s'inscrit dans une logique de co-construction des savoirs et des problématiques, à partir des situations effectivement rencontrées sur les terrains. Cette organisation est particulièrement importante dans le contexte de l'intelligence artificielle, où les usages éducatifs évoluent rapidement et ne peuvent être saisis de manière pertinente sans un dialogue étroit entre savoirs théoriques, contraintes institutionnelles, pratiques professionnelles et expériences de terrain.

Ainsi compris, PRISME apparaît comme un dispositif de recherche-formation fondé sur une temporalité longue, une pluralité d'acteurs, une structuration institutionnelle claire et une dynamique itérative entre expérimentation, analyse et formalisation. Cette organisation peut être synthétisée dans une représentation graphique simplifiée du protocole, inspirée d'un plan de métro (Figure 1).

4. Une représentation synthétique du protocole

Afin de rendre lisible l'organisation d'ensemble du protocole, PRISME peut être associé à une représentation graphique synthétique et simplifiée (Figure 1), issue du poster présenté aux Quatrièmes Journées d'Étude du Travail Mathématique. Cette figure n'a pas pour fonction de se substituer à la description du dispositif ni de constituer en elle-même un argument autonome. Elle vise plus modestement à proposer une vue d'ensemble des circulations entre cadres théoriques, acteurs, terrains et prolongements du protocole.

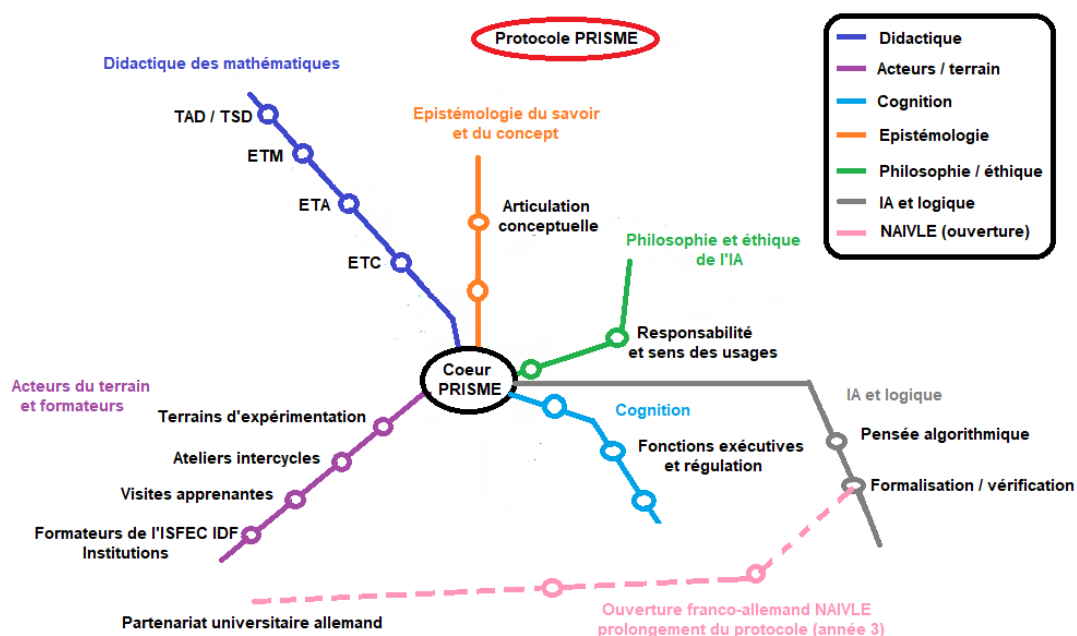


Figure 1. Représentation synthétique du protocole PRISME : cœur du dispositif et circulations entre cadres, acteurs et terrains

La figure fait apparaître un cœur PRISME central, qui ne doit pas être interprété comme un centre hiérarchique, mais comme un espace de convergence et de régulation. C'est en ce point que s'articulent le noyau théorique retenu, les exigences de formation, les contraintes institutionnelles et les observations issues du terrain. Autour de ce cœur s'organisent plusieurs lignes principales : la didactique des mathématiques, les acteurs du terrain et de la formation, la cognition, l'épistémologie, la philosophie et l'éthique de l'IA, ainsi qu'un prolongement vers les questions d'IA et de logique. À ce titre, la figure ne représente pas un parcours imposé, mais un ensemble de circulations possibles entre conceptualisation, expérimentation, analyse et formalisation. Elle donne ainsi une image resserrée de ce que le texte a établi dans les sections précédentes : PRISME fonctionne par articulations et passages, non par juxtaposition de cadres. Le cœur PRISME peut ainsi être compris comme le lieu de convergence entre cadres, acteurs et exigences de validation.

La version simplifiée retenue ici maintient, de façon discrète, l'ouverture franco-allemande vers NAIVLE³ comme prolongement possible du protocole, sans lui accorder un rôle structurant

³ NAIVLE (Naive Proof Verification) est un cadre de vérification automatisée de démonstrations mathématiques, conçu pour rester proche du langage et des pratiques ordinaires des mathématiciens. Contrairement à des assistants

dans la démonstration présente. La figure n'est donc pas conçue comme une preuve, mais comme une représentation d'ensemble. Sa fonction est de rendre visible le fait que PRISME articule des pôles distincts autour d'un centre analytique commun. Cette représentation prend pleinement sens lorsqu'elle est immédiatement relayée par l'explicitation du cadre d'opérationnalisation empirique, c'est-à-dire par les données retenues, les unités d'analyse choisies et la formulation précise de l'hypothèse directrice.

5. Opérationnalisation et cadre analytique

Le protocole PRISME, bien qu'inscrit dans une temporalité longue et encore en cours de déploiement, repose sur une structuration empirique explicitement définie. L'enjeu n'est pas seulement d'identifier des usages de l'intelligence artificielle dans l'enseignement des mathématiques, mais de construire un cadre permettant d'en analyser les effets sur le travail mathématique lui-même. Dans cette perspective, l'opérationnalisation du protocole ne se limite ni à un inventaire de situations ni à un recueil d'impressions de terrain. Elle vise à rendre observables, dans des traces diversifiées, les reconfigurations du travail mathématique induites par l'introduction d'artefacts numériques et de systèmes d'IA. Cette orientation prolonge directement la méthodologie exposée précédemment : PRISME ne cherche pas à tester des outils de manière isolée, mais à observer, documenter et interpréter les transformations qu'ils induisent dans l'activité des élèves et des enseignants.

5.1 Données retenues

Le corpus empirique retenu dans le cadre de PRISME repose sur une pluralité de matériaux, choisis en fonction de leur capacité à documenter le travail mathématique dans des situations instrumentées. Les données recueillies comprennent d'abord des productions écrites d'élèves, qu'il s'agisse de copies manuscrites ou de fichiers numériques. Ces productions donnent accès à des formes stabilisées de l'activité : résultats, procédures, justifications, reformulations, mais aussi hésitations et réorganisations visibles dans les traces.

À ces traces écrites s'ajoutent des captations vidéo de séances ciblées. Leur intérêt réside dans l'accès qu'elles offrent à la dimension située de l'activité : interactions entre élèves, interventions de l'enseignant, usages effectifs des outils, temporalité des hésitations, moments de reprise ou d'inflexion du raisonnement. Là où les productions écrites livrent un état relativement stabilisé du travail, les captations permettent de saisir les dynamiques d'élaboration, de régulation et de circulation des significations au sein de la classe ou du groupe de travail. Elles contribuent ainsi à rendre visibles les médiations effectives dans leur dimension temporelle et interactionnelle.

Le protocole intègre également des journaux de bord tenus par les enseignants engagés dans les ingénieries. Ces matériaux occupent une place importante, car ils permettent de documenter les choix opérés, les intentions didactiques, les écarts perçus entre ce qui était prévu et ce qui a effectivement eu lieu, ainsi que les difficultés rencontrées dans l'usage des outils. Ils donnent

de preuve comme Coq ou Lean, il vise une formalisation accessible, transparente et fidèle à la pratique mathématique usuelle.

accès à une réflexivité professionnelle située, indispensable pour analyser non seulement les effets observés chez les élèves, mais aussi les déplacements du travail enseignant dans des environnements médiés par l'IA.

Enfin, le corpus comprend des historiques d'interactions avec des systèmes d'IA générative, incluant prompts, réponses, reformulations et reprises éventuelles, ainsi que des entretiens courts d'explicitation réalisés à l'issue de certaines tâches. Les premiers permettent de reconstituer la matérialité même de la médiation algorithmique : ce qui a été demandé, ce qui a été produit, ce qui a été retenu, discuté ou écarté. Les seconds visent à accéder à la manière dont les sujets interprètent leur propre activité, identifient ou non les conditions de validité de ce qu'ils mobilisent, et situent le rôle de l'artefact dans leur raisonnement. Ces différents matériaux ne valent pas isolément. Leur intérêt réside dans leur mise en relation au sein d'un même cadre analytique. C'est cette pluralité croisée qui permet de passer d'une description superficielle des usages à une analyse plus fine des transformations du travail mathématique sous médiation instrumentée.

5.2 Unités d'analyse

L'analyse ne porte pas prioritairement sur les performances obtenues, mais sur les reconfigurations du travail mathématique observables dans les traces. Dans cette perspective, une première unité d'analyse concerne les déplacements de statut des techniques. Lorsque certaines procédures peuvent être produites, reformulées ou suggérées par un système d'IA, leur rôle dans l'activité ne reste pas identique. Une technique initialement mobilisée pour produire une solution peut devenir objet de contrôle, de vérification, de comparaison ou de discussion.

Une deuxième unité d'analyse porte sur les indices explicites de contrôle épistémique. Il s'agit ici d'identifier, dans les productions et dans les interactions, les moments où les sujets justifient une démarche, vérifient des conditions de validité, mettent à distance une réponse générée ou interrogent la pertinence d'une procédure. L'attention ne se porte donc pas seulement sur le résultat final, mais sur les gestes intellectuels par lesquels une proposition est examinée, reconnue, corrigée ou rejetée. Dans un environnement où certaines réponses peuvent être rapidement produites par un artefact, ces indices deviennent décisifs : ils permettent de distinguer entre simple réception d'une production et véritable prise en charge du savoir par le sujet ou par l'institution.

Une troisième unité d'analyse concerne les circulations entre Espaces de Travail Mathématique, Algorithmique et Connectés. L'hypothèse n'est pas que toute situation soit réductible à un espace unique, mais que l'activité se configure souvent par passages, chevauchements ou tensions entre plusieurs espaces. Une production peut, par exemple, naître dans une logique de traitement algorithmique, être reformulée dans un registre mathématique plus classique, puis circuler dans un environnement connecté où elle est discutée, partagée ou transformée. Repérer ces circulations permet de mieux comprendre comment se redistribuent les instruments, les registres, les contrôles et les responsabilités dans les situations étudiées.

Enfin, une quatrième unité d'analyse porte sur les moments de rupture ou de réorganisation du raisonnement consécutifs à l'introduction d'un artefact algorithmique. Il s'agit d'identifier les instants où une réponse générée, une reformulation proposée ou une aide partielle modifie la trajectoire de l'activité : changement de stratégie, abandon d'une piste, reprise d'une justification, déplacement vers une activité de comparaison ou de validation. Ces moments ne sont pas interprétés comme de simples incidents, mais comme des révélateurs de la manière dont l'artefact reconfigure la dynamique même du travail mathématique. L'interprétation de l'ensemble de ces unités s'appuie sur une analyse qualitative catégorielle, croisée avec les cadres théoriques mobilisés, dans une logique itérative entre observations de terrain, reprises conceptuelles et ajustements du protocole.

5.3 Question centrale et hypothèse directrice

Le dispositif analytique de PRISME repose sur trois articulations fondamentales : la modélisation du travail mathématique dans les Espaces de Travail, l'analyse des médiations instrumentées à partir des cadres didactiques, et la question du contrôle épistémique dans un environnement algorithmique. Les références complémentaires issues de la cognition, de la philosophie des techniques ou de la réflexion éthique jouent un rôle de mise en perspective et d'élargissement, mais elles ne constituent pas le noyau théorique central du dispositif analytique.

La question centrale qui structure le protocole peut alors être formulée ainsi : comment se reconfigure le contrôle épistémique du travail mathématique lorsque des systèmes algorithmiques interviennent dans la production, l'explicitation ou la validation des procédures ? Cette interrogation ne porte pas seulement sur l'efficacité des réponses générées. Elle engage plus largement la redistribution des fonctions cognitives, didactiques et institutionnelles impliquées par la médiation algorithmique. Lorsque certaines procédures sont externalisées, la responsabilité intellectuelle du sujet ne disparaît pas, elle se transforme. Ce déplacement affecte à la fois l'activité de l'élève, le rôle de l'enseignant et les normes de validation mobilisées dans l'institution scolaire.

L'hypothèse directrice de PRISME est que l'intégration de systèmes d'IA tend à déplacer le centre de gravité du travail mathématique de la production vers la sélection, l'interprétation, la justification et la validation. Une telle hypothèse n'implique pas que la production procédurale disparaisse, ni que l'IA se substitue purement et simplement à l'activité du sujet. Elle signifie plutôt que, dans certaines situations, la valeur didactique et épistémique du travail se reconfigure : ce qui devient décisif n'est plus seulement de produire une réponse, mais de déterminer ce qu'il convient d'en faire, sous quelles conditions elle peut être reconnue comme valide, et selon quelles normes elle peut être intégrée à un raisonnement mathématique. PRISME vise précisément à analyser empiriquement ces déplacements, afin d'identifier les conditions didactiques dans lesquelles ils peuvent devenir un levier d'apprentissage plutôt qu'un facteur de fragilisation du raisonnement.

Ainsi conçue, l'opérationnalisation de PRISME ne se réduit ni à une description des usages de l'IA, ni à une simple méthodologie de terrain. Elle constitue le lieu où le protocole devient effectivement analytique : par les données qu'il retient, par les unités d'analyse qu'il privilégie

et par la question centrale qui l'organise. C'est à partir de ce cadre que les situations étudiées peuvent ensuite être examinées non comme de simples illustrations, mais comme des cas permettant de mettre à l'épreuve les hypothèses du protocole et d'en apprécier la portée didactique.

6. Études de cas et vignettes didactiques : trois configurations de redistribution du contrôle épistémique

Les éléments d'opérationnalisation précédemment précisés permettent désormais d'examiner des situations dans lesquelles le cadre analytique de PRISME peut être mis à l'épreuve. Les trois cas retenus ici n'ont pas exactement le même statut. Le premier porte sur une situation de référence, centrée sur le problème du découpage d'un gâteau en huit parts égales à l'aide de trois coups de couteau. Les deux autres relèvent de vignettes didactiques construites, destinées non à présenter des résultats stabilisés, mais à montrer comment le protocole peut être mobilisé sur des contenus différents et à différents niveaux de la scolarité.

Dans les trois cas, l'objectif n'est pas d'évaluer l'intelligence artificielle comme outil performant ou non, mais d'observer ce qu'elle déplace dans le travail mathématique lui-même. L'analyse porte donc prioritairement sur quatre dimensions : le statut des techniques mobilisées, les formes de contrôle épistémique observables, les circulations entre Espaces de Travail, et les moments de rupture ou de réorganisation du raisonnement.

6.1 Première situation : le problème du découpage du gâteau

Le problème du découpage d'un gâteau en huit parts égales à l'aide de trois coups de couteau constitue une situation classique de recherche, intéressante dans le cadre de PRISME parce qu'elle met rapidement au jour un obstacle structurant : l'élève tend d'abord à raisonner dans le plan, alors que la résolution suppose un changement de point de vue vers une organisation tridimensionnelle. Dans les premières tentatives, les découpages successifs conduisent généralement à six parts au maximum. Le franchissement de l'obstacle suppose alors une réorganisation du raisonnement, fondée sur l'idée qu'une coupe horizontale peut venir partager simultanément des parts déjà obtenues.

Dans la situation expérimentale envisagée, l'IA intervient après une première phase de recherche autonome ou en petits groupes, au cours de laquelle les élèves produisent des essais de découpage et explicitent leurs premières stratégies. L'artefact conversationnel est alors sollicité non pour livrer immédiatement la solution, mais pour reformuler les contraintes du problème, interroger les essais produits et relancer l'attention sur ce qui reste à vérifier : le nombre de parts, leur égalité et l'effet global de chaque coupe. Les interactions avec l'IA peuvent prendre la forme de questions telles que : « Pourquoi obtient-on seulement six parts ? », « Que faudrait-il pour que le dernier geste partage plusieurs parts à la fois ? », ou encore « Comment vérifier que les huit parts obtenues sont bien égales ? ». Le rôle effectif de l'IA est donc celui d'un médiateur langagier et heuristique, intégré au milieu didactique sous le contrôle de l'enseignant, et non celui d'un solveur se substituant à l'activité mathématique des élèves. L'IA n'introduit pas de stratégie nouvelle, mais accompagne la mise en mots et la vérification des contraintes.

Du point de vue de la TSD, on peut y voir une situation dans laquelle le milieu résiste à une lecture immédiate de type planaire et oblige l'élève à modifier son cadre de pensée. L'enjeu n'est pas simplement de « trouver la bonne réponse », mais de construire un nouveau point de vue sur la situation. Du point de vue des ETM, la tâche engage un déplacement entre représentations intuitives, verbalisation des essais, anticipation des effets des coupes et contrôle du résultat obtenu. L'artefact conversationnel n'a alors pas pour fonction de fournir directement la solution, mais de soutenir une mise en mots du raisonnement, de relancer l'attention sur les contraintes de la tâche et d'accompagner le passage d'un espace de travail initialement planaire vers une configuration plus volumique.

Les unités d'analyse retenues permettent de préciser cette lecture. Le premier élément porte sur la réorganisation du raisonnement : le passage d'une stratégie inefficace à une stratégie pertinente constitue ici un moment de rupture particulièrement visible. Le second porte sur les indices de contrôle épistémique : l'élève ne se contente pas d'accepter une suggestion, il doit encore vérifier que le nombre de parts et leur égalité sont effectivement assurés. Le troisième porte sur les circulations entre espaces de travail : la tâche mobilise un ETM centré sur les représentations et les contrôles, mais l'intervention de l'IA introduit aussi une dimension d'ETA dans la mesure où l'activité devient partiellement organisée par séquences, essais, reformulations et ajustements successifs. Enfin, du point de vue du statut des techniques, la coupe n'est plus seulement un geste de production matérielle. Elle devient objet de planification et de validation.

Cette situation peut ainsi être analysée comme une première configuration de redistribution du contrôle épistémique. L'IA n'y agit pas comme producteur de savoir, mais comme médiateur de verbalisation et de restructuration. Le travail mathématique demeure bien l'œuvre du sujet, mais il se reconfigure autour d'activités de comparaison, d'anticipation et de validation.

6.2 Deuxième situation : une vignette didactique sur l'introduction de la proportionnalité en CM1

Considérons maintenant une vignette construite pour l'introduction de la proportionnalité en CM1 : « Pour préparer une boisson, on mélange 2 cuillères de sirop pour 5 verres d'eau. Combien faut-il de cuillères de sirop pour 10 verres d'eau ? Et pour 15 verres d'eau ? » Les élèves interrogent un système d'IA générative, qui leur fournit immédiatement une procédure de calcul correcte, par exemple en doublant puis en triplant les quantités, ou, dans une version moins adaptée au niveau visé, en introduisant une écriture plus abstraite de type multiplicatif généralisé.

L'intérêt de cette vignette tient au fait qu'elle rend très visible le déplacement du travail mathématique. Dans une introduction ordinaire de la proportionnalité au CM1, l'enjeu central est la construction progressive d'un rapport stable entre grandeurs, à partir de procédures adaptées au niveau des élèves : duplication, passage à l'unité dans certains cas simples, raisonnement par paquets, mise en tableau. Si l'IA produit trop vite une procédure correcte, la production technique peut être externalisée avant même que la signification du rapport de proportionnalité ne soit construite. Le risque n'est alors pas l'erreur immédiate, mais la

substitution d'une réussite procédurale apparente à un travail de conceptualisation encore fragile.

Du point de vue de la TAD, la situation permet d'interroger un déplacement de statut des techniques. Une procédure qui, dans l'enseignement ordinaire, devrait constituer un objet d'élaboration pour l'élève devient ici une production disponible presque immédiatement. Elle change donc de fonction : au lieu d'être seulement technique de résolution, elle devient objet d'examen, de reprise, de reformulation et de discussion. Le travail de l'élève ne porte plus d'abord sur l'invention de la procédure, mais sur sa compréhension, son adéquation au niveau visé et sa mise en relation avec la situation initiale.

Du point de vue du contrôle épistémique, plusieurs questions deviennent centrales. Les élèves reconnaissent-ils pourquoi le doublement de 5 à 10 entraîne celui de 2 à 4 ? Comprennent-ils que, pour 15 verres d'eau, une autre technique pertinente peut s'obtenir en combinant un doublement et un ajout d'une fois la situation initiale ? Sont-ils capables de distinguer une procédure adaptée au niveau CM1 d'une procédure mathématiquement correcte mais didactiquement prématurée ? Dans cette vignette, l'enseignant retrouve un rôle essentiel : il ne s'agit plus seulement de corriger un résultat, mais d'organiser les conditions de validité didactique de la technique mobilisée.

L'analyse en termes d'espaces de travail permet également de clarifier la situation. L'ETM est engagé par le rapport entre grandeurs, les écritures tabulaires éventuelles, les formulations verbales et le contrôle du sens. L'ETA apparaît lorsque la procédure proposée par l'IA est reprise comme séquence d'opérations à examiner, éventuellement à décomposer et à recontextualiser. L'ETC intervient si la procédure circule entre l'élève, l'artefact et la classe sous forme de capture, de reformulation ou de discussion collective. On voit alors apparaître très clairement l'hypothèse directrice de PRISME : le centre de gravité du travail se déplace vers la sélection, l'interprétation, la justification et la validation de procédures disponibles.

6.3 Troisième situation : une vignette didactique sur l'introduction des probabilités au cycle 3

La troisième situation, également construite, concerne l'introduction des probabilités du CM1 à la 6e. Les élèves ont à résoudre une tâche simple : « Dans un sac opaque, il y a 3 jetons rouges et 1 jeton bleu. Sans regarder, on tire un jeton. Quelle couleur a le plus de chances d'être obtenue ? Comment peut-on le justifier ? » Un élève de CM1 sollicite un système d'IA, qui répond correctement que le rouge est plus probable, et peut même produire une justification sous forme de rapport ou de fréquence attendue.

Cette vignette est particulièrement intéressante, car l'enseignement des probabilités au cycle 3 repose justement sur une tension forte entre intuition, langage ordinaire, expérimentation et premières formes de quantification. Dans un tel contexte, l'IA peut soutenir utilement la verbalisation, mais elle peut aussi court-circuiter l'élaboration d'un raisonnement probabiliste élémentaire si elle impose trop vite une formalisation. L'enjeu n'est pas seulement de dire que le rouge « a plus de chances » que le bleu, mais de construire les conditions de sens de cette

affirmation : comparaison des cas possibles, lien entre composition du sac et fréquence attendue, distinction entre résultat d'un tirage et tendance d'une série de tirages.

Du point de vue des unités d'analyse, le premier élément concerne ici les indices de contrôle épistémique. L'élève se contente-t-il de reprendre la formulation donnée par l'IA, ou la met-il en relation avec le dispositif concret ? Est-il capable de justifier en termes accessibles que trois cas favorables sur quatre rendent l'événement « rouge » plus probable ? Peut-il discuter une éventuelle confusion entre « sûr », « possible », « plus probable » et « équiprobable » ? Le deuxième élément porte sur les ruptures de raisonnement : l'IA peut faire passer trop rapidement d'un jugement intuitif à une formulation quasi formelle, sans que l'élève ait construit le lien entre expérimentation et modélisation.

Cette vignette est également féconde pour penser les circulations entre ETM, ETA et ETC. L'ETM apparaît dans le travail sur les registres verbaux, les schémas éventuels, les comparaisons quantitatives simples et les justifications. L'ETA intervient si l'IA propose, par exemple, une simulation répétée ou une structuration séquentielle du raisonnement. L'ETC devient visible dès lors que les réponses générées peuvent être reprises, comparées ou discutées collectivement. Surtout, le statut de la technique probabiliste se modifie : ce qui devrait constituer une première élaboration conceptuelle risque de devenir une formulation disponible, dont il faut alors reconstruire le sens. Là encore, PRISME permet de décrire non seulement ce que l'IA produit, mais ce qu'elle déplace dans l'économie intellectuelle de la tâche.

6.4 Mise en relation des trois cas

Pris ensemble, ces trois cas montrent que l'intérêt de PRISME n'est pas de fournir un discours général sur l'IA, mais d'offrir un cadre pour comparer des configurations distinctes de médiation. Dans le problème du gâteau, l'enjeu principal réside dans une rupture de point de vue et dans la restructuration d'un raisonnement spatial. Dans la vignette de proportionnalité, l'enjeu porte surtout sur le déplacement du statut des techniques et sur la validité didactique de procédures immédiatement disponibles. Dans la vignette probabiliste, c'est le rapport entre langage, intuition, quantification et justification qui devient central.

Dans les trois cas, toutefois, un même phénomène apparaît : l'artefact algorithmique ne supprime pas le travail mathématique, mais en redistribue les composantes. La production d'une réponse ou d'une procédure peut être partiellement externalisée. En revanche, le contrôle de sa pertinence, de son sens et de sa validité demeure une question centrale. C'est précisément en ce point que le protocole PRISME permet de faire dialoguer espaces de travail, cadres didactiques et analyse du contrôle épistémique. La section suivante pourra dès lors discuter ce que ces cas permettent de dire, non seulement sur les médiations par l'IA, mais aussi sur les conditions didactiques dans lesquelles elles peuvent devenir formatrices.

7. Discussion

Les trois situations analysées précédemment ne visent ni à constituer une typologie exhaustive des usages de l'intelligence artificielle en mathématiques, ni à produire des résultats déjà stabilisés au sens expérimental. Leur intérêt tient plutôt à ce qu'elles permettent de rendre visibles, sur des contenus différents et à des niveaux distincts de la scolarité, une même ligne

de transformation : l'introduction d'un système d'IA ne se réduit pas à l'ajout d'un outil supplémentaire dans l'environnement scolaire, mais reconfigure la distribution des tâches intellectuelles, les formes de validation et les responsabilités didactiques. En ce sens, ces cas permettent moins de conclure sur des usages que de préciser ce que PRISME autorise à observer et à décrire.

Un premier enseignement commun aux trois situations concerne la manière dont se recomposent les Espaces de Travail. Dans la perspective de Kuzniak et Richard (2014), l'activité mathématique ne peut être réduite ni à une suite de traitements ni à une simple confrontation à des contenus. Elle s'organise dans des espaces où se coordonnent représentations, instruments, discours et contrôles. Les cas du gâteau, de la proportionnalité et des probabilités montrent précisément que l'intervention de l'IA modifie ces coordinations. Dans le premier cas, le travail se déplace d'une représentation plane spontanée vers une réorganisation spatiale plus élaborée. Dans le deuxième, il passe d'une production procédurale attendue à une activité de compréhension et de reprise d'une procédure déjà disponible. Dans le troisième, il oblige à articuler langage ordinaire, comparaison de cas, intuition et premières formes de quantification. La force du cadre ETM est ici de permettre une lecture unifiée de situations très différentes, non pas en les ramenant à un schéma unique, mais en rendant visibles les passages entre registres, instruments et contrôles.

Cette lecture peut être prolongée, dans la perspective des ETA, par l'attention portée aux traitements séquencés, aux procédures disponibles et aux formes nouvelles de contrôle liées à la médiation algorithmique. Dans les travaux de Laval (2018, 2021), l'enjeu des Espaces de Travail Algorithmique n'est pas seulement d'ajouter l'algorithmique au travail mathématique, mais d'interroger ce qui se transforme lorsque certaines opérations sont formalisées, déléguées ou rendues disponibles par un artefact. Les trois situations l'illustrent de manière convergente. Dans le cas du gâteau, l'artefact conversationnel soutient une organisation progressive des essais et des reformulations. Dans la proportionnalité, il peut fournir d'emblée une procédure correcte, déplaçant ainsi le travail vers l'examen de sa pertinence didactique. Dans les probabilités, il peut proposer trop rapidement une formulation stabilisée, avant même que l'élève ait construit le sens des comparaisons en jeu. Ce qui devient alors central, dans la lignée des analyses de Laval, c'est le contrôle épistémique : non pas la seule exactitude d'une réponse, mais la capacité à en examiner les conditions de validité, la portée et le statut dans l'activité mathématique.

De ce point de vue, la discussion des trois cas conduit à préciser le statut des techniques, ce que la TAD de Chevallard (1999) permet d'éclairer avec netteté. Dans une organisation scolaire plus classique, certaines techniques ont pour fonction première d'être construites ou stabilisées par l'élève au fil du travail. Or, dans des environnements médiés par l'IA, ces mêmes techniques peuvent apparaître comme déjà disponibles, sous forme de réponse, de procédure ou de justification rédigée. Elles ne disparaissent pas pour autant, leur statut change. Une technique peut cesser d'être seulement un moyen de production pour devenir un objet de sélection, de reprise, de vérification ou de discussion. La situation de proportionnalité en offre l'exemple le plus net : la procédure correcte ne vaut pas automatiquement comme procédure pertinente au niveau CM1. Elle doit encore être replacée dans un horizon didactique, ce qui oblige à dissocier

validité mathématique, accessibilité scolaire et fonction institutionnelle de la technique. En ce sens, l'introduction de l'IA n'affaiblit pas l'analyse praxéologique. Elle la rend au contraire plus nécessaire.

La TSD de Brousseau (1998) permet d'ajouter un élément décisif à cette lecture, en particulier sur la question du milieu et des rétroactions. Dans les trois cas, le milieu ne se réduit plus à l'agencement matériel de la tâche ou aux seules interventions de l'enseignant. Il inclut également un artefact susceptible de produire des suggestions, des reformulations ou des procédures. Cette transformation modifie la nature même des rétroactions disponibles pour l'élève. Celles-ci ne proviennent plus exclusivement de la résistance de la situation ou de la régulation didactique ordinaire, mais aussi d'un système qui peut accélérer, déplacer ou brouiller les conditions d'accès au savoir. Dès lors, l'enjeu n'est pas seulement de savoir si une réponse est fournie, mais comment cette réponse s'insère dans le jeu didactique : favorise-t-elle un véritable travail d'appropriation, ou court-circuite-t-elle certaines médiations essentielles ? La question n'est donc pas extérieure au cadre de Brousseau. Elle en constitue une extension contemporaine particulièrement féconde.

L'ensemble de ces analyses conduit naturellement à la notion de genèse instrumentale au sens de Rabardel (1995). La présence d'un système d'IA dans une situation ne suffit pas à en faire un instrument du travail mathématique. Encore faut-il que les sujets construisent des schèmes d'usage leur permettant de l'intégrer à leur activité, de l'interroger, de le détourner parfois, et surtout d'en faire un appui pour leur propre raisonnement plutôt qu'un simple fournisseur de résultats. Les trois cas montrent que cette instrumentalisation n'a rien d'automatique. Elle dépend fortement des tâches proposées, des médiations de l'enseignant, du niveau des élèves et des formes de contrôle organisées dans la situation. Là où cette genèse ne s'opère pas, l'artefact demeure extérieur au travail mathématique proprement dit : il produit, mais n'instrumente pas. Là où elle commence à se construire, en revanche, l'IA peut devenir un support de verbalisation, de comparaison, de mise à distance critique et de réorganisation du raisonnement.

Ces différents points convergent vers une même conclusion intermédiaire : l'effet principal de l'IA, dans les situations ici discutées, ne réside pas dans l'automatisation de la réponse, mais dans la reconfiguration des conditions de validation. Produire ne suffit plus, il faut examiner ce qui est produit, en reconstruire le sens, en interroger la légitimité et en situer la portée. Autrement dit, le contrôle épistémique devient plus visible parce qu'il ne peut plus rester implicite dans l'acte même de production. Cette visibilité accrue a deux conséquences majeures. La première touche à la formation des élèves : il devient nécessaire de concevoir des situations où l'on apprend non seulement à chercher, mais aussi à évaluer, sélectionner, interpréter et justifier. La seconde concerne la formation des enseignants : leur rôle se déplace vers l'organisation de milieux dans lesquels ces formes de contrôle peuvent être travaillées explicitement, sans être dissoutes dans l'efficacité apparente des outils. Dans cette perspective, la responsabilité intellectuelle demeure portée par les sujets et par l'institution scolaire, mais ses conditions d'exercice sont reconfigurées par la présence d'un artefact capable de produire, reformuler ou suggérer des procédures.

Les trois cas étudiés montrent ainsi que le problème central n'est pas de savoir si l'IA « fait à la place de », mais de déterminer dans quelles conditions son intervention rend possible un travail plus exigeant sur les critères de validité, et dans quelles conditions elle risque au contraire d'affaiblir l'activité mathématique en la rabattant sur l'acceptation de réponses disponibles. En cela, PRISME n'apparaît pas seulement comme un protocole d'observation des usages, mais comme un cadre d'analyse des transformations du travail mathématique, des formes de validation qui lui sont associées et des exigences de formation qui en découlent.

8. Perspectives

Les analyses précédentes permettent de dégager plusieurs perspectives, qui prolongent PRISME sans en déplacer le centre. La première concerne l'élargissement empirique du protocole. Les trois situations discutées ont montré que l'intérêt de PRISME tient à sa capacité à décrire des reconfigurations du travail mathématique dans des contenus différents et à des niveaux de scolarité distincts. La poursuite du protocole suppose donc d'étendre le corpus, de diversifier les tâches étudiées et de stabiliser progressivement des comparaisons entre domaines mathématiques, niveaux scolaires et formes de médiation algorithmique. En effet, elle doit permettre de préciser dans quelles conditions l'externalisation partielle de certaines productions modifie effectivement les normes de validation, les statuts des techniques et les formes de responsabilité intellectuelle. En ce sens, PRISME ouvre un programme de recherche sur les médiations algorithmiques dans l'enseignement des mathématiques, plutôt qu'un ensemble clos de résultats déjà établis.

Une deuxième perspective touche plus directement à la formation des enseignants. Les situations analysées montrent que l'enjeu n'est pas seulement de familiariser les professeurs avec de nouveaux outils, mais de construire une culture professionnelle capable d'interroger les effets de ces outils sur les tâches, les techniques, les modes de contrôle et les formes d'institutionnalisation des savoirs. PRISME conduit ainsi à concevoir la formation non comme un simple accompagnement technique des usages, mais comme un espace de problématisation didactique des environnements médiés par l'IA. Cette orientation rejoint l'esprit même du protocole, pensé d'emblée comme dispositif de recherche-formation, articulant production de connaissances, développement professionnel et transformation raisonnée des pratiques. Ce n'est donc pas l'outil qui constitue ici l'objet principal de formation, mais la capacité à organiser des situations où l'usage de l'IA demeure subordonné à une exigence de compréhension, de justification et de validation.

Une troisième perspective appelle une réflexion plus explicite sur les finalités éducatives du travail mathématique en environnement médié. C'est en ce point que les ouvertures philosophiques et éthiques deviennent utiles, non pour surplomber l'analyse didactique, mais pour en prolonger les implications. Dans la lignée de Jonas (1990), l'usage de technologies capables de transformer en profondeur les conditions d'activité intellectuelle ne peut être pensé sans une interrogation sur la responsabilité qu'engagent ces transformations. La question n'est pas seulement celle de l'efficacité ou de l'innovation, mais celle des formes de subjectivation intellectuelle que l'école contribue à construire. Former avec des environnements d'IA ne revient pas uniquement à exploiter des ressources nouvelles, cela engage un choix sur ce que

l'on considère comme relevant encore du travail du sujet, sur ce qui doit rester sous contrôle, et sur la manière dont l'institution scolaire assume cette redistribution des responsabilités.

Dans une autre perspective, les travaux de Simondon (1958) permettent d'éviter une opposition trop simple entre l'humain et la technique. Les artefacts ne doivent pas être pensés seulement comme des instruments extérieurs, mais comme des objets qui reconfigurent les conditions de l'activité et les modes de relation entre sujets, techniques et milieu. Dans le cadre de PRISME, cette perspective invite à ne pas réduire l'IA soit à une menace de dépossession, soit à une promesse d'optimisation. Elle conduit plutôt à analyser les conditions sous lesquelles un artefact peut être intégré à une activité mathématique sans dissoudre l'exigence de compréhension et de contrôle. Quant à Misselhorn (2022), son apport est utile pour rappeler que la question éthique ne se limite pas à une dénonciation générale des technologies. Elle demande une analyse située des usages, des responsabilités distribuées et des formes de jugement mobilisées dans des environnements partiellement automatisés. Ces ouvertures n'ajoutent pas un nouveau cadre autonome à l'article. Elles élargissent la portée réflexive des résultats obtenus.

Enfin, PRISME ouvre, de manière encore exploratoire, vers une réflexion plus large sur ce que pourrait devenir une didactique des médiations par l'IA. Il ne s'agirait ni d'ériger l'intelligence artificielle en nouvelle discipline scolaire, ni de constituer un champ séparé de la didactique des mathématiques. L'enjeu serait plutôt de mieux caractériser les conditions dans lesquelles des systèmes algorithmiques capables de produire, reformuler ou guider des raisonnements transforment les objets, les tâches, les techniques, les contrôles et les formes d'étagage mobilisés dans l'enseignement. Mais PRISME, en mettant au centre la reconfiguration du contrôle épistémique et des médiations instrumentées, en fournit déjà plusieurs conditions de possibilité. De ce point de vue, le protocole ouvre moins vers une conclusion définitive que vers un programme de recherche structuré.

9. Conclusion

L'objectif de cet article était de proposer une lecture renouvelée du travail mathématique à l'ère de l'intelligence artificielle, non en partant des seules performances des outils, mais en interrogeant les reconfigurations qu'ils introduisent dans l'activité des sujets, dans les pratiques enseignantes et dans les formes de validation mobilisées par l'institution scolaire. À travers PRISME, il s'agissait de construire un cadre de recherche-formation capable d'articuler Espaces de Travail, médiations instrumentées et contrôle épistémique, afin de rendre lisibles des transformations souvent décrites de façon trop générale ou trop techniciste. Les sections précédentes ont montré que le point décisif ne réside pas dans la simple disponibilité de réponses produites par un système algorithmique, mais dans le déplacement du centre de gravité du travail mathématique vers des activités de sélection, d'interprétation, de justification et de validation.

Dans cette perspective, PRISME apparaît moins comme un modèle clos que comme un dispositif analytique et formatif. Sa portée tient à la possibilité de penser ensemble plusieurs dimensions que l'introduction de l'IA tend souvent à dissocier : les contenus mathématiques, les formes de travail intellectuel, les gestes professionnels, les médiations techniques et les

exigences de responsabilité. Le protocole ne vise ni à promouvoir sans réserve les usages de l'IA, ni à les disqualifier par principe. Il cherche à en décrire les conditions de pertinence didactique et à identifier les formes de vigilance qu'ils imposent.

L'une des conséquences majeures de ce travail est de rappeler que le devenir du travail mathématique en environnement médié n'est pas d'abord une question technique, mais une question de formation et de responsabilité. Ce qui se joue dans ces situations n'est pas seulement la délégation de certaines opérations, mais la manière dont l'école organise encore les conditions d'un rapport exigeant au savoir, à la preuve, à la justification et au jugement. En cela, PRISME s'inscrit dans une réflexion plus large sur les transformations contemporaines de l'activité intellectuelle en contexte scolaire, et sur les conditions dans lesquelles l'humain peut demeurer responsable dans des environnements de plus en plus assistés.

Dans cette dynamique, un prolongement peut être brièvement signalé vers NAIVLE, sans qu'il soit nécessaire de le développer ici. Si NAIVLE se situe à un autre niveau institutionnel, celui de la formalisation du raisonnement mathématique et de la preuve assistée, il partage avec PRISME une interrogation commune sur les effets de l'automatisation partielle des traitements symboliques, sur les formes de contrôle épistémique qui en résultent et sur la place du sujet humain dans des environnements computationnels. À ce titre, il peut être compris comme un prolongement possible, à l'échelle de la mathématique universitaire et de la recherche, des questions que PRISME travaille dans les contextes scolaires et formatifs. Cette ouverture marque ainsi la continuité du projet sans décentrer la conclusion du présent article.

Ainsi, PRISME ne constitue ni un aboutissement, ni une réponse définitive aux défis posés par l'intelligence artificielle dans l'enseignement des mathématiques. Il propose un cadre de recherche-formation destiné à être éprouvé, discuté et enrichi. En cela, il participe à une réflexion collective sur les conditions d'un travail mathématique humain rigoureux, compréhensible et responsable dans des environnements médiés par des systèmes algorithmiques.

Références

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Diamond, A. (2013). Executive functions. *Annual Review of Psychology*, 64, 135–168.
- Fayol, M., & Houdé, O. (2014). *Psychologie cognitive des apprentissages*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Houdé, O. (2014). *La psychologie du raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Jonas, H. (1990). *Le principe responsabilité*. Paris : Flammarion.

- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9–24.
- Kuzniak, A., & Richard P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1), 17–26.
- Lagrange, J.-B. & Laval, D. (2019). Connected Working Spaces: the case of computer programming in mathematics education. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02418181>
- Laval, D. (2018). L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques. [Thèse de Doctorat. Université Sorbonne Paris Cité].
- Laval, D. (2021). Les Espaces de Travail Mathématique et Algorithmique connectés. Étude d'une activité algorithmique comme objet d'apprentissage de savoirs spécifiques et d'usage : Cas d'une ingénierie « dichotomie continue ». In A. Chesnais, H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (p.88-114). IREM de Paris - Université de Paris. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03545511/>
- Minh, T. K., Lagrange, J.B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education*. 48: 793. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Misselhorn, C. (2022). *Grundfragen der Maschinenethik*. Stuttgart: Reclam, Universal-Bibliothek.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- Simondon, G. (1958). *Du mode d'existence des objets techniques*. Paris : Aubier.

L'intelligence artificielle en éducation mathématique : entre histoire, vérité et pratiques

¿Qué ves? ¿Qué ves cuando me ves?

Cuando la mentira es la verdad

Divididos

Jorge Gaona

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili ;

jorge.gaona@pucv.cl

Cet article propose une analyse critique de l'intelligence artificielle générative (IAg) dans le champ de l'éducation mathématique, en articulant trois perspectives complémentaires : historique, épistémologique et didactique. Dans un premier temps, nous situons les débats actuels sur l'intelligence artificielle (IA) dans une continuité historique plus large, en montrant que les tensions entre promesse et risque accompagnent depuis longtemps les innovations technologiques, de l'écriture à l'imprimerie, jusqu'aux premières formes d'intelligence artificielle. Cette mise en perspective permet de relativiser le caractère supposément disruptif de l'IA contemporaine. Dans un second temps, nous examinons la question de la vérité, en opposant le régime de « vérité » algorithmique, fondé sur des processus de classification et de prédiction probabiliste, à la vérité mathématique, construite par déduction au sein de systèmes axiomatiques. Cette distinction met en évidence les limites épistémologiques des systèmes d'IA générative, notamment leur incapacité à garantir la validité des énoncés produits. Nous analysons ensuite la nature du raisonnement mobilisé par ces systèmes, en nous appuyant sur la distinction proposée par Charles S. Peirce entre induction, déduction et abduction. Nous soutenons que les modèles actuels d'IA reposent principalement sur des formes d'inférence inductive, ce qui limite leur capacité à produire des connaissances nouvelles au sens fort. Enfin, à partir de données empiriques issues de projets de recherche menés au Chili, nous examinons les usages effectifs de l'IA dans des contextes scolaires et de formation des enseignants. Les résultats montrent un usage marginal et peu structurant de ces technologies dans le travail mathématique des étudiants, au profit d'artefacts jugés plus transparents et contrôlables. L'ensemble de ces éléments conduit à déplacer la question du potentiel de l'IA vers celle des conditions didactiques de son intégration.

Mots-clés : Intelligence artificielle générative, Éducation mathématique, Histoire des technologies éducatives, Raisonnement, Usages des artefacts numériques

Introduction : regarder le phénomène de l'IA dans une perspective historique

Aujourd'hui, l'intelligence artificielle générative, telle que ChatGPT, se présente comme une innovation disruptive qui pose une question apparemment nouvelle : s'agit-il d'une menace ou d'un allié pour l'éducation ? Cependant, si l'on adopte une perspective historique, on constate que cette inquiétude n'est pas inédite. Au fil du temps, diverses transformations

technologiques ont suscité des débats similaires, révélant des tensions persistantes entre promesse et risque.

Un premier exemple paradigmatique se trouve dans la réflexion de Socrate, rapportée par Platon dans le *Phèdre*. On y raconte le mythe du dieu Theuth, inventeur de l'écriture, qui la présente comme un remède pour la mémoire et la sagesse. Toutefois, le roi Thamous répond avec scepticisme : loin de renforcer la mémoire, l'écriture pourrait l'affaiblir, car les individus cesseraient de se souvenir par eux-mêmes et dépendraient de signes extérieurs. Plus encore, il avertit que cette technologie pourrait produire une apparence de sagesse sans véritable connaissance, formant des individus qui semblent savoir beaucoup de choses, alors qu'en réalité ils ne comprennent pas en profondeur (Platon, 1994).

Des siècles plus tard, l'invention de l'imprimerie a ravivé des préoccupations analogues. Au XV^e siècle, Niccolò Perotti exprima d'abord son enthousiasme face à la possibilité d'une large diffusion du savoir. Cependant, la désillusion apparut rapidement : la prolifération des textes ne garantissait pas leur qualité, mais pouvait au contraire faciliter la diffusion d'erreurs, de banalités, voire de faussetés. La démocratisation de l'écriture impliquait également une perte de contrôle sur les contenus, suscitant des inquiétudes quant à la valeur des connaissances en circulation (Darnton, 2023, p. 23).

Dans le domaine des mathématiques et de l'intelligence artificielle, dès les années 1960, des programmes capables de produire des démonstrations géométriques furent développés. Des chercheurs comme Herbert Gelernter parvinrent à faire en sorte qu'une machine découvre des démonstrations que son propre programmeur ne connaissait pas. Ce type de réalisation a soulevé des questions toujours actuelles : une machine peut-elle être considérée comme « intelligente » ? Où réside le mérite de la production mathématique ? S'agit-il d'une créativité authentique ou de l'exécution de processus préalablement codés ? (Hofstadter, 1979, p. 673).

Dans le champ éducatif, des penseurs comme Seymour Papert proposaient déjà, en 1980, que les élèves apprennent l'intelligence artificielle et la programmation, non seulement comme des outils techniques, mais aussi comme des moyens de réfléchir aux processus mentaux eux-mêmes. Sa position était claire : il vaut mieux que les enfants programment plutôt que d'être eux-mêmes « programmés » par les technologies (Papert, 1980, p. 189). Néanmoins, des recherches comme celles de Larry Cuban invitent à la prudence. Selon cet auteur, les innovations technologiques en éducation suivent généralement un cycle récurrent : d'abord une phase d'enthousiasme et d'illusion avec des promesses de transformation radicale ; puis une phase de désillusion et de résistance ; ensuite des changements plus lents et plus limités que prévu ; et enfin, le redémarrage du cycle avec une nouvelle technologie. C'est ce qui s'est passé avec la radio, la télévision, puis avec les ordinateurs et Internet (Cuban, 1986). Ce schéma a également été observé dans des rapports de l'OCDE, qui montrent que l'impact réel de la technologie en éducation tend à être plus progressif et plus complexe que ne le suggèrent les discours initiaux (OECD, 2015 ; 2019). Des réflexions récentes issues de la didactique des mathématiques confirment cette lecture : Richard et Vivier (2025) rappellent l'exemple du Tableau Numérique Interactif — déployé massivement dans les établissements scolaires au tournant des années 2000 — qui, malgré des investissements importants, n'a pas tenu ses

promesses pédagogiques, faute de formation adéquate et en raison d'un potentiel didactique limité. Les auteurs soulignent que ce schéma se reproduit aujourd'hui avec l'intelligence artificielle, et que la question décisive reste celle de l'intégration didactique, bien plus que celle de la performance technique (Richard & Vivier, 2025, p. 7).

Dans cette perspective, l'irruption actuelle de l'intelligence artificielle générative dans l'éducation peut être métaphorisée comme une « vague » qui, en surface, semble tout bouleverser, tandis que le fond reste relativement inchangé.

Par conséquent, plutôt que de se demander si l'intelligence artificielle est intrinsèquement bonne ou mauvaise pour l'éducation, il semble plus pertinent d'analyser comment elle s'inscrit dans ces cycles historiques, quelles pratiques elle transforme réellement, et quelles nouvelles façons de penser, d'apprendre et d'enseigner elle limite ou rend possibles.

Cet article s'organise en deux grandes parties. La première examine la question de la vérité et du raisonnement : nous analyserons d'abord le nouveau régime de « vérité » instauré par les systèmes algorithmiques, puis la nature de la vérité mathématique, avant de nous interroger sur les types de raisonnement mobilisés par l'intelligence artificielle et leurs limites épistémologiques. La seconde partie s'appuie sur des données empiriques issues de deux projets de recherche menés au Chili pour examiner les usages effectifs de l'IA dans des contextes scolaires et de formation des enseignants, et en discuter les implications didactiques.

Vérités et raisonnements

Nouveau régime de « vérité »

Dans une perspective critique, Eric Sadin (2020) analyse, entre autres aspects de l'IA, la construction du savoir à travers le concept de vérité que nous confions à un large éventail d'intelligences artificielles dans différents domaines de la vie personnelle, professionnelle et politique. En effet, pour Sadin (2020, p. 17), « le numérique s'érige en puissance aléthique. [...] au sens où l'entendait la philosophie grecque antique, comme dévoilement, comme manifestation de la réalité des phénomènes au-delà de leurs apparences. Le numérique s'érige en organe habilité à expertiser le réel de manière plus fiable que nous-mêmes ». Au niveau social, on observe de nombreux exemples cités par O'Neil (2018) qui, dans son livre, montre comment les systèmes alimentés par le big data prennent des décisions dans des domaines tels que la sélection des meilleurs candidats à un poste, les personnes qui obtiennent un prêt ou les évaluations attribuées aux enseignants à partir d'une série d'indicateurs. Ces décisions sont opaques, incontestables et ne sont pas non plus réglementées ; elles fonctionnent comme un oracle, car la machine rend un verdict qu'il est difficile de renverser. Ces oracles fonctionnent également au niveau individuel, par exemple dans le choix d'un itinéraire, en optimisant le temps de trajet ; dans le choix d'un restaurant ou d'un partenaire potentiel via une application de rencontre (Sadin, 2020, p. 187).

Ce nouveau régime de vérité, entre autres caractéristiques, s'inscrit dans une logique du temps réel, délégitimant ainsi le temps de l'analyse humaine. On lui attribue un statut d'autorité induit par une recherche incessante d'efficacité ; de plus, pour chaque domaine, il provient

d'une source unique, éliminant ainsi la pluralité des points de vue (Sadin, 2020, p. 96). Tous ces phénomènes s'inscrivent dans un contexte social où « chacun d'entre nous s'imagine placé au centre du monde et doté du pouvoir d'adapter les événements à sa vision des choses [...] ce qui témoigne de la désintégration croissante de nos bases communes et de l'atomisation extrême de la société en général » p. 95.

La vérité dont parle Sadin est une vérité subjective, même si elle est dissimulée sous des mesures qui lui confèrent une apparence scientifique et qu'on qualifie à tort de vérité mathématique. En effet, en fin de compte, les affirmations émises par n'importe quelle technologie, quel que soit le domaine analysé, résultent d'un processus de classification et d'un autre de mesure, deux processus qui ne sont pas uniques et qui comportent une part importante d'arbitraire. C'est une vérité artificielle, aussi artificielle que les technologies qui la produisent. La vérité mathématique n'a pas grand-chose à voir avec la vérité du monde réel, et encore moins avec la vérité imposée par les métriques de différents appareils. Cela est loin d'être une vérité mathématique ou scientifique, mais cela revêt néanmoins un halo de scientisme. Je vais maintenant, à titre de contrepoint, aborder la question de la vérité en mathématiques.

La vérité en mathématiques

Les mathématiques sont aujourd'hui comprises comme une science formelle et déductive : à partir de certains axiomes, on construit des propositions dont la vérité ou la fausseté est établie au moyen de chaînes de raisonnements logico-déductifs. Cette manière d'organiser le savoir possède une longue histoire, dont le jalon classique est l'œuvre d'Euclide, qui systématisa la géométrie à partir d'un petit ensemble de postulats et de notions communes. Ce faisant, il ne se contenta pas de rassembler des connaissances existantes, mais instaura un idéal : celui d'une discipline où les vérités sont rigoureusement déduites de principes fondamentaux.

Pendant des siècles, ce modèle fut interprété comme l'expression même de la vérité mathématique. Des philosophes comme Immanuel Kant considéraient que la géométrie euclidienne décrivait nécessairement la structure de l'espace, lui conférant un caractère presque absolu. Par exemple, Kant (2013, p. 46), dans son ouvrage *Critique de la raison pure*, affirmait :

La géométrie est une science qui détermine synthétiquement, et pourtant a priori, les propriétés de l'espace. Quelle doit donc être la représentation de l'espace pour qu'une telle connaissance en soit possible ? Elle doit être originellement une intuition, car d'un simple concept on ne peut tirer des propositions qui dépassent le concept, ce qui se produit pourtant en géométrie (voir Introduction V). Cette intuition doit se trouver en nous a priori, c'est-à-dire avant toute perception des objets, et doit par conséquent être une intuition pure, non empirique. En effet, les propositions de la géométrie sont toutes apodictiques, c'est-à-dire accompagnées de la conscience de leur nécessité, comme par exemple celle qui affirme que l'espace n'a que trois dimensions. De telles propositions ne peuvent être des jugements empiriques ou d'expérience, ni être déduites de ceux-ci.

Cependant, le développement ultérieur des mathématiques a montré que même les axiomes, ces principes considérés comme évidents, peuvent être remis en question.

Au XIXe siècle, des mathématiciens comme Nikolai Lobachevsky et János Bolyai ont construit des géométries non euclidiennes en niant le cinquième postulat d'Euclide. Loin de produire des contradictions, ces nouveaux systèmes se sont révélés cohérents et, de plus, utiles pour décrire des phénomènes réels. Ce fait a marqué un tournant profond : la vérité mathématique a cessé d'être conçue comme unique et évidente, pour dépendre désormais de la cohérence interne au sein d'un système axiomatique donné.

Dans cette perspective, travailler en mathématiques peut conduire à des résultats qui ne sont pas seulement non évidents, mais aussi contre-intuitifs. Par exemple, l'idée selon laquelle « le tout est plus grand que la partie », valable dans des contextes finis, cesse de l'être lorsque l'on considère des ensembles infinis : il existe des cas où une partie peut avoir la même « taille » que le tout. De manière analogue, certaines constructions géométriques montrent qu'il est possible de concevoir des figures ayant une aire finie et un périmètre infini, défiant ainsi nos intuitions les plus élémentaires.

Ces exemples illustrent que la vérité mathématique ne dépend pas de ce qui paraît évident, mais de ce qui peut être démontré. Bien que les processus de découverte puissent impliquer des intuitions, des analogies ou des généralisations, c'est le raisonnement déductif qui confère à une proposition son statut de vérité. De plus, cette vérité n'est pas purement individuelle : elle doit être examinée, comprise et acceptée par la communauté mathématique.

Cependant, même dans ce cadre rigoureux, il existe des limites. Les résultats de Kurt Gödel ont montré que, dans tout système suffisamment puissant, il existera des énoncés qui ne peuvent être décidés comme vrais ou faux à partir des axiomes donnés. De plus, un tel système ne peut pas démontrer sa propre cohérence depuis l'intérieur. Cela introduit une idée essentielle : les mathématiques, bien qu'extrêmement précises, ne constituent pas un système fermé, complet ni auto-fondé.

Dans l'ensemble, ces éléments invitent à nuancer la notion de vérité en mathématiques. Plutôt que des vérités absolues et immuables, on trouve des vérités situées dans des systèmes axiomatiques, construites par déduction, validées collectivement et, dans certains cas, limitées par la structure même des systèmes formels. De surcroît, la cohérence interne d'un système ne peut être garantie que depuis un système plus large, lequel est soumis aux mêmes contraintes — introduisant ainsi une forme de régression sans fondement ultime.

Types de raisonnement, intelligence artificielle et construction de nouvelles connaissances

Réfléchir à l'intelligence artificielle suppose, dans une large mesure, d'interroger la nature même du raisonnement. À la fin du XIXe siècle, Charles Sanders Peirce soutenait que raisonner n'équivaut pas à calculer mécaniquement, mais implique de formuler des conjectures : effectuer un « saut » qui permet de relier des éléments dispersés et de leur donner sens. Dans ce cadre, il a distingué trois formes fondamentales d'inférence :

l'induction, la déduction et l'abduction, comme autant de modes différents de production de connaissances.

De manière générale, inférer consiste à générer une idée nouvelle à partir de ce que nous savons déjà et de ce que nous observons. Il s'agit d'un processus de mise à jour des croyances qui n'est ni automatique ni univoque, mais dépend du contexte et des interprétations disponibles. Ainsi, tant dans des situations quotidiennes que dans des projections plus complexes, par exemple, lorsqu'on anticipe le comportement d'une variable économique, le raisonnement s'appuie sur des hypothèses, des données antérieures et des cadres de référence qui orientent les conclusions.

Dans le domaine des mathématiques, cette dimension non strictement mécanique du raisonnement a également été soulignée par Alan Turing (1939), qui proposait de le comprendre comme une combinaison d'intuition et d'ingéniosité. Selon ses termes :

Dans le domaine des mathématiques, cette dimension non strictement mécanique du raisonnement a également été soulignée par Alan Turing (1939, p. 214, notre traduction¹), qui proposait de le comprendre comme une combinaison d'intuition et d'ingéniosité. Selon ses termes :

On peut considérer, de manière assez schématique, le raisonnement mathématique comme l'exercice d'une combinaison de deux facultés, que l'on peut appeler intuition et ingéniosité. L'activité de l'intuition consiste à émettre des jugements spontanés qui ne résultent pas d'un enchaînement conscient de raisonnements. Ces jugements sont souvent, mais en aucun cas invariablement, corrects (sans entrer dans la question de savoir ce que l'on entend par « correct »). Il est souvent possible de trouver un autre moyen de vérifier la justesse d'un jugement intuitif. On peut, par exemple, juger que tous les nombres entiers positifs sont factorisables de manière unique en nombres premiers ; un argument mathématique détaillé conduit au même résultat. Cet argument impliquera également des jugements intuitifs, mais ceux-ci seront moins exposés à la critique que le jugement initial sur la factorisation. Je ne tenterai pas d'expliquer plus explicitement cette idée d'« intuition ».

Il définissait en outre l'ingéniosité (Turing, 1939, p. 215, notre traduction²) de la manière suivante :

¹ Texte original : "Mathematical reasoning may be regarded rather schematically as the exercise of a combination of two faculties, which we may call intuition and ingenuity. The activity of the intuition consists in making spontaneous judgments which are not the result of conscious trains of reasoning. These judgments are often but by no means invariably correct (leaving aside the question what is meant by 'correct'). Often it is possible to find some other way of verifying the correctness of an intuitive judgment. We may, for instance, judge that all positive integers are uniquely factorizable into primes; a detailed mathematical argument leads to the same result. This argument will also involve intuitive judgments, but they will be less open to criticism than the original judgment about factorization. I shall not attempt to explain this idea of 'intuition' any more explicitly" (Turing, 1939, p. 214)

² Texte original : "The exercise of ingenuity in mathematics consists in aiding the intuition through suitable arrangements of propositions, and perhaps geometrical figures or drawings. It is intended that when these are really well arranged the validity of the intuitive steps which are required cannot seriously be doubted".

L'exercice de l'ingéniosité en mathématiques consiste à soutenir l'intuition par une disposition adéquate des propositions, et peut-être des figures géométriques ou des dessins. L'objectif est que, lorsque ceux-ci sont disposés de manière véritablement correcte, la validité des étapes intuitives nécessaires ne puisse faire l'objet d'aucun doute.

Ces idées permettent de comprendre que, même dans une discipline formelle comme les mathématiques, le raisonnement implique des dimensions qui ne se réduisent pas à des règles explicites. Ce constat devient crucial lorsqu'on envisage la possibilité de mécaniser la pensée. Dans cette perspective, Kurt Gödel a formulé une question décisive : « Peut-on réduire l'intuition de l'esprit, sa capacité à saisir la vérité et le sens, à une machine, à la computation ? » (Larson, 2022, p. 16). Ses théorèmes d'incomplétude ont montré que cela n'est pas possible en termes généraux, établissant des limites fondamentales à tout système formel.

Par ailleurs, l'histoire de la science et de la culture offre de multiples exemples du rôle de l'abduction, c'est-à-dire de la formulation d'hypothèses plausibles, dans la production de connaissances. Dans un passage de l'ouvrage *Ciencia y Poesía*, Claudio Teitelboim et Jaime Valdivieso (1995, p. 362, notre traduction³) relatent :

Claudio Teitelboim : Il existe une équation très célèbre, celle de Dirac. Si l'on lit aujourd'hui l'article de Dirac, on constate que toute sa justification est fautive, comme l'a montré la physique. Pourtant, le résultat de l'équation demeure valide. Quelqu'un demanda un jour à Dirac : comment êtes-vous arrivé à cette équation ? Dirac répondit en anglais, flegmatiquement : « I just wrote it down » (Je l'ai simplement écrite). (Il le dit en imitant la célèbre nonchalance anglaise, dans un geste histrionique très caractéristique de sa personnalité.) C'est cela, la vérité. Je suis sûr que Dirac s'est dit : « c'est ainsi ». Et ensuite il a justifié. Il s'agit d'une vision.

Jaime Valdivieso : Une intuition.

Claudio Teitelboim : Bien sûr.

Jaime Valdivieso : On raconte que García Márquez a « vu » tout le livre *Cent ans de solitude* lors d'un voyage de Mexico à Cuernavaca. En arrivant, il dit à sa femme : mets-toi au travail et vendons la voiture, car je vais écrire ce roman et je passerai trois ou quatre mois sans gagner d'argent. Un roman qui a ouvert, rien de moins, une nouvelle voie à la narration latino-américaine, puisqu'à partir de là on écrit et on conçoit le monde américain depuis une autre perspective linguistique et imaginative.

³ Texte original : “Claudio Teitelboim: Hay una ecuación muy famosa, la de Dirac. Tú lees el artículo de Dirac hoy día y compruebas que toda su justificación es falsa, según lo ha demostrado la física. Pero el resultado de la ecuación sigue siendo válido. Alguien le preguntó a Dirac una vez: ¿cómo llegó usted a esta ecuación? Dirac le contestó en inglés, flemáticamente: "I just wrote it down" (Simplemente la escribí). Esa es la verdad. Estoy seguro que Dirac dijo: "esto es así". Y después lo justificó. Se trata de una visión. Jaime Valdivieso: Una intuición. Claudio Teitelboim: Claro. Jaime Valdivieso: Se dice que García Márquez "vio" todo el libro Cien años de soledad durante un viaje de México a Cuernavaca. Al llegar le dijo a su mujer: ponte a trabajar y vendamos el auto, porque voy a escribir esta novela y estaré tres o cuatro meses sin ganar dinero. Una novela que abrió, nada menos, una nueva senda a la narrativa latinoamericana, pues a partir de allí se escribe y se concibe el mundo americano desde otra perspectiva lingüística e imaginativa.”

Ce type de récits illustre que la production d'idées, tant en science qu'en littérature, ne suit pas nécessairement une voie déductive, mais commence souvent par une intuition qui est ensuite justifiée.

Néanmoins, en philosophie des sciences, les formes d'inférence les plus systématiquement étudiées ont été la déduction et l'induction. La déduction permet de dériver des conclusions nécessaires à partir de prémisses vraies, mais elle ne produit pas de nouvelles connaissances : sa fonction est de garantir la validité logique. À l'inverse, l'induction élargit la connaissance, bien que de manière incertaine : la proportion Q d'un échantillon de la population possède la propriété P ; par conséquent, la proportion Q de la population possède la propriété P. Ce type de raisonnement, fondamental dans la science moderne, est également intrinsèquement faillible, comme le montrent des exemples classiques : de la découverte des cygnes noirs, qui a réfuté des généralisations antérieures, jusqu'au dépassement de théories physiques soutenues pendant des siècles.

Dans ce contexte, l'intelligence artificielle contemporaine peut être comprise comme un système principalement inductif. Les modèles génératifs, entraînés sur de vastes volumes de données, produisent des réponses plausibles à partir de régularités observées, mais pas nécessairement vraies. Ils ne possèdent pas pleinement, au sens fort, de capacités déductives et abductives, ce qui limite leur portée épistémologique.

Les conséquences de cette limitation sont multiples. D'une part, en mathématiques, ils peuvent générer des résultats incorrects ayant l'apparence de validité ; d'autre part, dans des contextes sociaux, ils peuvent reproduire des biais présents dans les données. Cathy O'Neil (2018) a montré comment ces systèmes peuvent conduire à des décisions problématiques, comme dans le cas d'algorithmes de recrutement qui finissent par discriminer systématiquement certains groupes.

Ce point conduit naturellement à une question plus profonde : si les systèmes actuels d'intelligence artificielle fonctionnent fondamentalement par induction, peuvent-ils réellement produire de nouvelles connaissances ?

Les modèles de langage de grande taille (LLM), comme ChatGPT, produisent des textes souvent convaincants, voire créatifs. Toutefois, leur fonctionnement peut être compris, en essence, comme une forme très sophistiquée de traduction ou de paraphrase. Ils génèrent de nouvelles combinaisons de mots, mais toujours à l'intérieur de l'espace statistique défini par les données d'entraînement. En ce sens, la « vérité » de leurs réponses n'est pas le résultat d'un processus de validation déductive ni d'une compréhension causale, mais plutôt un sous-produit de la fréquence avec laquelle certaines affirmations apparaissent dans leurs données. Si l'on adopte un point de vue vectoriel, une base d'un sous-espace permet de générer n'importe quel élément de ce sous-espace par combinaisons linéaires, mais pas l'espace entier.

Qualifier ces systèmes de simples « perroquets stochastiques » peut être réducteur, car cela sous-estime leur capacité de généralisation. Cependant, leur attribuer un raisonnement autonome ou une capacité de découverte constitue une surestimation tout aussi problématique.

Cette tension reflète, au fond, une confusion entre produire des réponses plausibles et générer des connaissances.

Pour mieux comprendre cette différence, il est utile de considérer le rôle du raisonnement dans la cognition humaine. Selon Felin et Holweg (2024), l'activité cognitive peut être comprise comme une forme d'activité théorique : les êtres humains ne se contentent pas de traiter des données, ils construisent des théories prospectives qui orientent leur perception, leur recherche d'information et leurs actions. Dans la lignée de Peirce (1992), l'esprit humain semble « naturellement adapté à imaginer des théories correctes de certains types », ce qui suggère que la connaissance n'émerge pas simplement des données, mais de leur interprétation dans des cadres conceptuels plus larges.

Dans cette perspective, à la frontière de la connaissance scientifique, les données ne précèdent pas la théorie, mais en sont souvent le produit : elles sont collectées, sélectionnées et interprétées à partir de croyances préalables, d'hypothèses et de schémas causaux. Cela introduit une dimension cruciale que les modèles actuels d'IA ne capturent pas : la capacité de formuler des questions pertinentes, d'imaginer des explications possibles et de maintenir des hypothèses même lorsque les données disponibles semblent les contredire.

Un exemple illustratif est celui du vol humain, analysé par Felin et Holweg (2024). Pendant des siècles, les données empiriques et le consensus scientifique suggéraient que le vol plus lourd que l'air était impossible. Même au début du XXe siècle, après de multiples échecs, parfois mortels, comme celui d'Otto Lilienthal, et face à l'autorité de figures comme Kelvin ou Newcomb, l'idée du vol restait jugée irréalisable. En 1903, le New York Times estimait qu'il faudrait « entre un million et dix millions d'années » pour y parvenir.

Pourtant, les frères Wright ont persévéré. Non pas parce qu'ils ignoraient les données, mais parce qu'ils étaient engagés dans une théorie causale du vol. Leur travail ne consistait pas simplement à accumuler des preuves, mais à les réinterpréter et à les réorganiser dans un cadre conceptuel différent. Ce cas illustre un principe plus général : les asymétries entre données et croyances ne sont pas un obstacle à la connaissance, mais l'une de ses conditions de possibilité. L'hétérogénéité des croyances, y compris celles qui paraissent initialement erronées ou même « délirantes », peut être le moteur de nouvelles idées et de nouvelles formes d'expérimentation.

Cette dimension théorique de la connaissance a été soulignée dans de nombreux contextes. Comme le suggère le titre même de l'article de Karmiloff-Smith et Inhelder (1974), « If you want to get ahead, get a theory » (si vous voulez progresser, apprenez une théorie), Comme le rappelle la célèbre formule généralement attribuée à Kurt Lewin (1943, p. 118) : « Rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie ». Dans les deux cas, il est souligné que le progrès scientifique ne dépend pas uniquement des données, mais des cadres conceptuels qui permettent de les interpréter.

Dans cette perspective, la différence entre intelligence humaine et intelligence artificielle ne réside pas seulement dans la quantité d'information traitée, mais dans la nature du raisonnement. Tandis que les modèles actuels fonctionnent principalement par induction, les

êtres humains combinent induction, déduction et, de manière cruciale, abduction : la capacité de générer des hypothèses explicatives et des théories causales.

Cela ne signifie pas que l'intelligence artificielle ne puisse pas contribuer à la production de connaissances, mais que son rôle doit être compris avec précision. Plutôt que de remplacer le raisonnement humain, ces systèmes amplifient certaines capacités, comme l'identification de régularités, mais ils ne possèdent pas, du moins pour l'instant, la dimension générative et prospective propre à la théorisation.

En définitive, le défi est épistémologique : comprendre que la connaissance n'émerge pas uniquement des données, mais de l'interaction entre données, théories et formes de raisonnement. Dans ce sens, progresser vers une intelligence artificielle plus robuste exige, en plus de meilleurs algorithmes, une théorie plus complète de l'inférence, intégrant explicitement la dimension abductive de la pensée (Larson, 2022).

À la lumière de ces éléments, il est pertinent de réfléchir à la nature de l'intelligence artificielle dans le contexte des artefacts numériques. Dans Flores et al. (2022), un artefact pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques est défini comme un ensemble de propositions dont l'exécution est possible par une machine électronique, caractérisé par une intelligence historique et une validité épistémologique relative. Dans ce cadre, l'intelligence artificielle générative introduit une nuance décisive : sa validité épistémologique n'est ni strictement déductive ni intentionnelle, mais probabiliste. Autrement dit, ses productions ne reposent pas sur des démonstrations ni sur des théories causales propres, mais sur des régularités statistiques issues de données antérieures. Cette distinction permet de situer plus précisément le rôle de l'IAg : celui d'un artefact qui amplifie certaines formes d'inférence, principalement inductives, et dont les résultats exigent, plus que jamais, interprétation, validation et problématisation de la part des communautés humaines.

Ces considérations méritent néanmoins d'être nuancées à la lumière d'évolutions récentes. Un article de Quanta Magazine (Kakaes, 2026) documente comment, depuis l'été 2025, des mathématiciens utilisent des systèmes d'IA pour découvrir et démontrer de nouveaux résultats, accomplissant en quelques jours ce qui leur aurait pris des semaines. Des modèles comme AlphaEvolve ont mis en évidence des structures mathématiques ignorées depuis des décennies, soulevant une question déstabilisante : s'agit-il encore d'une simple inférence inductive, ou d'autre chose ? Par ailleurs, Kustov (2026) souligne que la frontière entre recombinaison des idées existantes et production de connaissances nouvelles a toujours été floue, en science humaine comme en mathématiques, et que cette frontière l'est encore davantage aujourd'hui. Ces observations invitent à la prudence : les limites épistémologiques de l'IA générative, bien que réelles, ne sont pas statiques, et leur évolution rapide exige une veille critique permanente de la part des communautés éducatives et scientifiques.

Usage de l'IA dans des contextes d'enseignement scolaire et de formation des enseignants

La question du rôle de l'intelligence artificielle dans la production de connaissances acquiert une dimension particulière lorsqu'elle est située dans des contextes d'apprentissage formel. À

partir des considérations précédentes, notamment le caractère principalement inductif des systèmes d'IA et leur validité épistémologique de nature probabiliste, il convient de s'interroger sur leur capacité réelle à contribuer à l'apprentissage mathématique. Les données empiriques que nous présentons suggèrent une réponse nuancée : l'IA peut être mobilisée à des fins d'apprentissage, mais son intégration effective est loin d'être immédiate ou naturelle.

Dans le cadre des projets FONDECYT 11230953 et ECOS-ANID 220035, des tâches ouvertes ont été mises en œuvre au sein d'une plateforme d'évaluation en ligne avec rétroaction automatique, à destination d'élèves du secondaire ainsi que de futurs enseignants de mathématiques. Ces tâches, conçues pour admettre une diversité de stratégies et de solutions, visaient précisément à observer si, dans un environnement où l'usage des technologies, y compris l'intelligence artificielle, était explicitement autorisé, émergeait un travail mathématique articulant les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive.

L'IA dans les contextes scolaires

Les résultats globaux mettent en évidence un phénomène contre-intuitif : l'intelligence artificielle est très peu utilisée par les élèves, même lorsque son usage est non seulement autorisé, mais encouragé. Dans le cas du projet FONDECYT, qui a impliqué près de 240 élèves et plus de 100 enregistrements audiovisuels de séances de travail en classe, en présence de l'enseignant, l'utilisation d'outils tels que ChatGPT est restée marginale en comparaison d'autres artefacts comme GeoGebra ou les moteurs de recherche traditionnels. En effet, l'analyse quantitative montre que ChatGPT apparaît dans une proportion très faible des vidéos et avec des durées d'utilisation considérablement réduites (voir Figure 1, et le zoom à droite pour une meilleure lisibilité des catégories à faible temps de navigation).

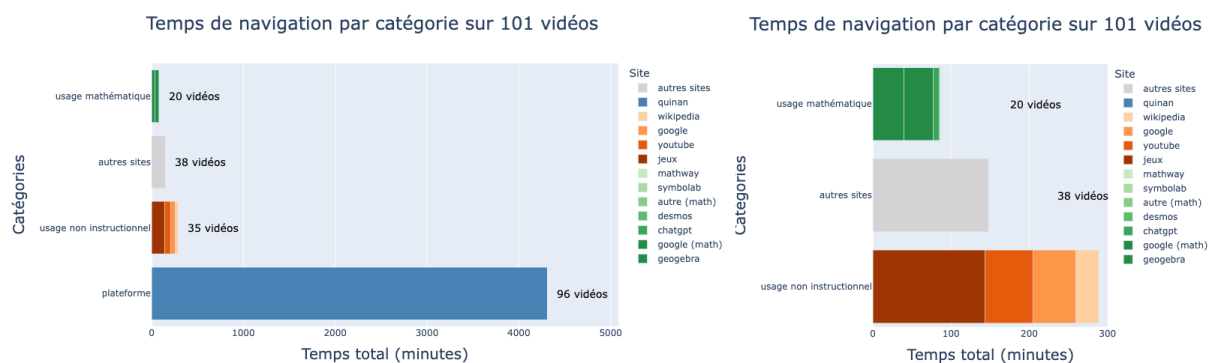


Figure 1. Graphique indiquant la durée totale de navigation et le nombre de vidéos pour chaque catégorie. Le graphique de droite présente un zoom sur les catégories « usage mathématique », « autres sites » et « usage non instructionnel ». Extrait et traduit de Gaona et al. (2026, p. 16).

Ce faible usage ne peut pas s'expliquer par un manque d'accès. Il tient plutôt à des difficultés d'appropriation cognitive et instrumentale. Dans les cas où les étudiants interagissent avec l'IA générative, des motifs récurrents émergent : des réponses longues, à forte densité symbolique, difficiles à interpréter ; des décalages entre le niveau de formalisation de l'IA et les connaissances mathématiques des étudiants ; et, dans de nombreux cas, des erreurs qui érodent la confiance dans l'outil. En conséquence, les étudiants tendent à abandonner

rapidement son usage, en privilégiant des artefacts perçus comme plus « transparents » ou contrôlables, tels que les calculatrices symboliques ou les moteurs de recherche.

L'analyse qualitative de cas spécifiques permet d'approfondir ces dynamiques. Dans une tâche de modélisation géométrique à l'aide de fonctions linéaires, un binôme d'étudiants articule de manière équilibrée l'usage de GeoGebra, de recherches en ligne et de discussion mathématique, réalisant un travail qui mobilise les trois genèses de l'ETM (Kuzniak et al., 2022). En revanche, dans une tâche portant sur les fonctions quadratiques, un autre binôme recourt très tôt à ChatGPT, en l'utilisant comme un générateur direct de réponses. Cet usage conduit à un travail principalement instrumental, avec une validation sémiotique faible et quasiment sans élaboration discursive. L'IAg, dans ce cas, n'agit pas comme médiatrice du savoir, mais comme un raccourci qui, paradoxalement, entrave la compréhension du problème et le développement de connaissances mathématiques.

Ces résultats peuvent être interprétés à la lumière de la nature même de l'IA générative. Si, comme cela a été soutenu, ces systèmes fonctionnent essentiellement par inférences inductives, produisant des réponses probables à partir de régularités dans les données, alors leurs productions ne garantissent ni une adéquation didactique ni une cohérence avec les processus d'apprentissage des étudiants. Plus généralement, l'IAg n'est pas conçue pour enseigner, mais pour prédire. Cette différence, qui peut sembler subtile, a des implications profondes dans les contextes éducatifs.

D'un point de vue historique, ce phénomène n'est pas entièrement surprenant. Comme le montre Larry Cuban (1986), les technologies éducatives traversent souvent des cycles récurrents d'enthousiasme initial, suivis de désillusion, de résistance et, finalement, d'une intégration lente et partielle. En ce sens, l'IAg pourrait ne pas constituer une rupture radicale, mais plutôt une nouvelle itération de ce schéma.

Les résultats suggèrent que, dans son état actuel, l'intelligence artificielle ne transforme pas de manière significative les pratiques d'apprentissage mathématique dans les contextes scolaires : elle ne les améliore pas de façon évidente, mais ne les entrave pas non plus de manière systématique. Elle demeure plutôt en marge, ignorée ou utilisée de manière superficielle. Ce constat invite à déplacer la question de « ce que peut faire l'IA » vers « dans quelles conditions didactiques elle pourrait devenir significative », ce qui implique de repenser non seulement la technologie, mais aussi les tâches, les cadres théoriques et les formes de médiation enseignante.

Expérience en formation des enseignants

Dans le cadre du projet ECOS-ANID 220035, développé en collaboration internationale par l'équipe composée au Chili de Jorge Gaona, Silvia Soledad López, Romina Menares, Elizabeth Montoya Delgadillo, et en France de Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier, les processus de travail mathématique d'étudiants en formation de professeurs de mathématiques ont été analysés, ces derniers étant confrontés à des tâches ouvertes en algèbre linéaire dans des environnements numériques (Gaona et al., 2025).

L'analyse s'inscrit dans la théorie de l'Espace de Travail Mathématique ou ETM (Kuzniak et al., 2022), en considérant l'articulation entre les genèses sémiotique, instrumentale et discursive, ainsi que les domaines mathématiques mobilisés : géométrie, algèbre et algèbre linéaire dans leurs différents paradigmes (voir Gaona et al., 2026). Dans ce contexte, l'usage des technologies numériques a été large et diversifié (GeoGebra, moteurs de recherche comme Google et calculatrices symboliques), mais l'usage de l'intelligence artificielle générative est resté, une fois encore, faible et peu structurant pour le travail mathématique.

En effet, les cas analysés montrent que l'activité mathématique des étudiants s'organise principalement autour d'artefacts permettant une rétroaction stable, contrôlable et validable, tels que GeoGebra ou les calculatrices matricielles. Par exemple, dans le cas d'un binôme, le travail se développe entièrement dans le domaine géométrique à travers une coordination progressive entre visualisation (genèse sémiotique), construction avec GeoGebra (genèse instrumentale) et mobilisation de propriétés (genèse discursive). La validation des résultats s'effectue à la fois par des propriétés mathématiques et par la cohérence interne de la construction, même lorsque la plateforme numérique indique des réponses comme incorrectes pour des raisons formelles.

De manière similaire, dans le cas d'un autre binôme, le travail évolue d'une approche instrumentale vers une coordination plus complexe intégrant les dimensions sémiotique et discursive, en passant de l'algèbre à l'algèbre linéaire (paradigmes AL1 et AL2). Ici, les artefacts symboliques, tels que les systèmes d'équations et les matrices, structurent le raisonnement, tandis que les difficultés émergent moins du calcul que de l'interprétation des solutions, en particulier lorsque celles-ci sont infinies.

Le cas d'un troisième binôme est particulièrement illustratif quant au rôle des outils automatisés : l'usage de logiciels de calcul matriciel permet d'accéder rapidement à des propriétés telles que le déterminant, le rang ou l'inversibilité, mais sans compréhension associée, ce qui conduit à un travail principalement instrumental et, à certains moments, non contrôlé du point de vue mathématique. Ce phénomène est particulièrement pertinent pour penser la place de l'intelligence artificielle, dans la mesure où elle partage avec ces artefacts la capacité de produire des résultats sans en garantir la compréhension.

Dans cet ensemble de données, l'intelligence artificielle générative n'apparaît que de manière marginale et, lorsqu'elle est mobilisée, ne parvient pas à s'intégrer de façon productive dans l'espace de travail mathématique des étudiants. Les raisons semblent multiples : l'extension et la complexité des réponses générées ; la difficulté d'interpréter les notations et de valider les résultats ; et, plus profondément, l'absence d'une articulation claire avec les pratiques mathématiques scolaires et institutionnelles. En revanche, des outils comme GeoGebra permettent une validation directe par la visualisation, tandis que les systèmes algébriques offrent des procédures davantage alignées sur les attentes curriculaires.

Ces résultats renforcent une idée déjà suggérée dans la section précédente : si l'IAg peut produire des réponses plausibles d'un point de vue inductif, son intégration dans les processus d'apprentissage mathématique nécessite des conditions spécifiques permettant d'articuler ses productions avec des formes de validation sémiotique, instrumentale et discursive propres au

travail mathématique. En l'absence de ces conditions, l'IA tend non seulement à être sous-utilisée, mais aussi à être reléguée au profit d'outils perçus par les étudiants comme plus « fiables » ou « mathématiquement légitimes ».

Conclusion

L'analyse proposée dans cet article invite à nuancer les discours actuels sur l'intelligence artificielle en éducation. Loin de constituer une rupture radicale, l'IA s'inscrit dans une longue histoire de technologies éducatives dont les effets réels se révèlent souvent plus limités et plus complexes que ne le laissent entendre les promesses initiales.

Du point de vue épistémologique, la distinction entre vérité mathématique et production algorithmique met en évidence un enjeu central : les systèmes d'IA ne produisent pas des connaissances au sens strict, mais des énoncés plausibles, fondés sur des régularités statistiques. Cette caractéristique, étroitement liée à leur fonctionnement inductif, limite leur capacité à s'inscrire dans des pratiques de raisonnement mathématique fondées sur la démonstration, la validation et la construction de sens.

Par ailleurs, dans les contextes étudiés, l'IA générative reste en marge du travail mathématique, peu mobilisée par les étudiants et rarement intégrée de manière productive. Lorsqu'elle est utilisée, elle tend à favoriser des approches instrumentales au détriment de l'élaboration discursive et de la validation sémiotique.

Ces constats ne conduisent pas à rejeter l'intelligence artificielle, mais à en redéfinir le rôle. Plutôt que de la considérer comme un substitut au raisonnement humain, il apparaît plus pertinent de la penser comme un artefact susceptible d'amplifier certaines formes d'inférence, à condition que ses usages soient inscrits dans des dispositifs didactiques adaptés.

En ce sens, le véritable enjeu n'est pas technologique, mais didactique et épistémologique : il s'agit de concevoir des environnements d'apprentissage dans lesquels les productions de l'IA puissent être interrogées, interprétées et mises à l'épreuve, en articulation avec les exigences propres au travail mathématique.

Références

- Cuban, L. (1986). *Teachers and Machines: The Classroom Use of Technology Since 1920*. Teachers College Press.
- Darnton, R. (2023). *Un himno al papel*. Ediciones UACH.
- Euclides. (1991). *Los seis primeros libros, y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides* (M. L. Puertas Castaños, Trad.). Gredos.
- Felin, T., & Holweg, M. (2024). Theory is all you need: AI, human cognition. *Strategy Science*, 9(4), 346–371.
- Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical work in the digital age: Variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Mathematical Working*

- Space Theory Perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8
- Gaona, J., López, S. S., Menares, R., Montoya-Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2026). Mathematical work in linear algebra: A transition through paradigms. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s40753-026-00304-x>
- Gaona, J., López, S. S., Menares, R., Montoya-Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2026). Paradigmes de l'Algèbre Linéaire. *Cahier du LDAR*.
- Gaona, J., Vargas, J., & Palacios, C. (2026). Más allá de ChatGPT: Un análisis de las prácticas tecnológicas de estudiantes de secundaria en la resolución de tareas abiertas en un sistema de evaluación en línea. https://osf.io/preprints/edarxiv/u5hn8_v1
- Gödel, K. (1992). *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Courier Corporation.
- Kakaes, K. (2026, April 13). The AI revolution in math has arrived. *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/the-ai-revolution-in-math-has-arrived-20260413/>
- Kant, I. (2013). *Crítica de la razón pura*. Taurus.
- Karmiloff-Smith, A., & Inhelder, B. (1974). If you want to get ahead, get a theory. *Cognition*, 3(3), 195–212. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(74\)90008-0](https://doi.org/10.1016/0010-0277(74)90008-0)
- Kustov, A. (2026, April 15). Academics need to wake up on AI, Part III: Most of us do not contribute to human knowledge—AI just made it obvious. *Popular by Design*. <https://www.popularbydesign.org/p/academics-need-to-wake-up-on-ai-part-4c6>
- Kuzniak, A., Richard, P. R., & Montoya-Delgadillo, E. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Larson, E. (2022). *El mito de la inteligencia artificial: por qué las máquinas no pueden pensar como nosotros lo hacemos*. Shackleton Books.
- Lewin, K. (1943). Problems of research in social psychology. In D. Cartwright (Ed.), *Field Theory in Social Science: Selected Theoretical Papers* (pp. 155–169). Harper & Brothers.
- OECD. (2015). *Students, Computers and Learning: Making the Connection*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264239555-en>
- OECD. (2019). *Panorama de la Educación 2019: Chile*. OECD Publishing.
- O'Neil, C. (2018). *Armas de destrucción matemática: cómo el big data aumenta la desigualdad y amenaza la democracia*. Capitán Swing Libros.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books.
- Peirce, C. S. (1992). *The Essential Peirce*. Indiana University Press.
- Platon. (1994). *Phèdre*.

- Richard, P. R., & Vivier, L. (2025). Éditorial du numéro 30. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 30, 7–9. <https://doi.org/10.4000/15dhx>
- Sadin, E. (2020). *La inteligencia artificial o el desafío del siglo: anatomía de un antihumanismo radical*. Caja Negra.
- Turing, A. (1939). Systems of logic based on ordinals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-45(1), 161–228.
- Valdivieso, J., & Teitelboim, C. (1995). *Ciencia y poesía: diálogo con Claudio Teitelboim*. Lom Ediciones.

Résoudre, modéliser, concevoir avec les grands modèles de langage : situations et formes d'engagement dans le travail mathématique

Philippe R. Richard

Université de Montréal, Québec ; philippe.r.richard@umontreal.ca

Résumé. Cet article examine les transformations du travail mathématique induites par les grands modèles de langage, dans la tension entre plausibilité discursive et nécessité logique. À partir de situations de résolution, de modélisation et de conception, il met en évidence les effets différenciés des IA génératives et symboliques sur le raisonnement, la validation et la structuration des savoirs. En s'appuyant sur la théorie des espaces de travail mathématique, il introduit la notion de contrepoint technologique pour caractériser les interactions humain-IA comme une mise en tension entre régimes hétérogènes de production. L'analyse montre que les délégations souhaitables ne concernent pas le contrôle épistémique du travail mathématique, qui demeure une responsabilité humaine et une condition de l'idoneité du processus. L'intelligence artificielle apparaît ainsi moins comme un partenaire de coopération que comme un instrument critique de reconfiguration du travail mathématique.

Mots-clés : Intelligence artificielle ; travail mathématique ; modèles de langage ; engagement épistémique ; idoneité ; contrepoint technologique

Abstract. Solving, modelling, and designing with large language models: situations and forms of engagement in mathematical work. This article examines the transformations of mathematical work induced by large language models within the tension between discursive plausibility and logical necessity. Drawing on situations of problem-solving, modelling, and design, it highlights the differentiated effects of generative and symbolic AI on reasoning, validation, and the structuring of knowledge. Building on the Theory of Mathematical Working Spaces, it introduces the notion of technological counterpoint to characterize human-AI interactions as a tension between heterogeneous regimes of production. The analysis shows that desirable forms of delegation do not concern the epistemic control of mathematical work, which remains a human responsibility and a condition for the idoneity of the process. Artificial intelligence thus appears less as a cooperative partner than as a critical instrument for the reconfiguration of mathematical work.

Keywords: Artificial intelligence; mathematical work; large language models; epistemic engagement; idoneity; technological counterpoint

Introduction

Depuis toujours, la classe de mathématiques est un lieu où coexistent et s'articulent de multiples systèmes sémiotiques. La langue naturelle y joue un rôle central : elle permet de formuler, commenter, expliciter, mais aussi de contrôler et de mettre à l'épreuve les relations entre différentes formes de représentation — figures, graphiques, tableaux, diagrammes ou expressions symboliques. Comme l'a montré Duval (1995), aucun système de représentation

ne peut, à lui seul, rendre compte de l'objet mathématique ; la compréhension suppose une coordination active entre registres, largement médiée par les ressources du langage.

Cette pluralité sémiotique n'est pas nouvelle. Elle a cependant été profondément reconfigurée par l'introduction d'artéfacts numériques dans les pratiques scolaires — calculatrices, logiciels de calcul formel, environnements de géométrie dynamique ou outils de programmation. Ces dispositifs ont déplacé le travail mathématique vers des formes d'interaction fondées sur la manipulation, la visualisation et l'exploration : variation de paramètres, itération de processus, simulation de situations. Ils ont ainsi modifié les régimes d'engagement du sujet, en brouillant les frontières entre exploration, conjecture et validation.

L'arrivée récente des systèmes d'intelligence artificielle introduit une rupture plus radicale. Contrairement aux outils précédents, qui s'inscrivaient dans un dialogue avec les langages formels des mathématiques, les grands modèles de langage produisent des énoncés en langue naturelle selon des principes statistiques, sans garantie intrinsèque de validité logique. Il en résulte une tension spécifique : un discours peut apparaître cohérent et convaincant sans satisfaire aux exigences de nécessité propres au raisonnement mathématique. Autrement dit, en mathématiques, il ne suffit pas d'« avoir l'air vrai » ; encore faut-il pouvoir en répondre du point de vue de la preuve et du contrôle, ce que ces systèmes ne garantissent pas.

Cette tension ne se limite pas à une opposition entre vérité et erreur. Elle affecte le travail mathématique lui-même : la manière de formuler un problème, d'explorer des pistes, de vérifier une solution ou d'interpréter un résultat. Dans l'interaction avec des systèmes comme ChatGPT, Gemini ou Claude, le sujet est confronté à des productions qui peuvent à la fois soutenir, déstabiliser ou masquer les processus de raisonnement. Les fonctions du langage — expliciter, guider, structurer — se trouvent alors partiellement simulées, sans que les conditions de leur validité soient toujours assurées.

C'est dans cet espace de tension que se situe le présent travail. Plutôt que de considérer l'intelligence artificielle comme un simple outil d'assistance, nous cherchons à observer comment elle reconfigure, en situation, le travail mathématique lui-même. Nous nous appuyons pour cela sur une série de situations instrumentées, dans lesquelles l'interaction avec l'IA permet d'observer des phénomènes de déplacement, d'hésitation, de contrôle ou de perte de repères. Le cadre théorique mobilisé pour analyser ces phénomènes — notamment en termes de travail mathématique, de contrepoint technologique et d'idonéité — est développé dans (Richard, 2026).

1. Intelligence artificielle : paradigmes et tensions du travail mathématique

L'expression « intelligence artificielle » désigne aujourd'hui un ensemble hétérogène de techniques numériques, dont les effets sur le travail mathématique varient considérablement selon les formes, les usages et les systèmes mobilisés. Pourtant, dans le discours public et médiatique, l'IA est souvent réduite aux seuls grands modèles de langage (GML) ou aux systèmes génératifs de type ChatGPT, occultant ainsi la diversité historique et conceptuelle des approches existantes.

Cette simplification pose un problème concret dès que l'on considère des situations de travail mathématique. Elle tend à homogénéiser des outils qui n'engagent pas les mêmes formes

d'action, de formulation ou de validation. Dans certains cas, des systèmes génératifs produisent des réponses discursivement cohérentes sans garantir leur validité mathématique ; dans d'autres, des outils issus de l'IA symbolique permettent un contrôle plus explicite des opérations, mais au prix d'une interaction plus contrainte. Ces écarts ne relèvent pas seulement de différences techniques : ils modifient en profondeur les conditions d'engagement du sujet dans l'activité mathématique.

Pour appréhender cette diversité, il importe de distinguer plusieurs familles d'approches selon leur principe de fonctionnement, tout en identifiant les tensions structurantes qui les traversent. L'enjeu n'est pas seulement de décrire ces approches, mais de comprendre comment elles reconfigurent le travail mathématique lui-même — notamment dans les relations entre exploration, formulation et validation. Cette section propose d'abord une typologie technique synthétique, puis une typologie fonctionnelle orientée vers les usages. Elle introduit également deux notions centrales pour la suite : les régimes d'engagement et le contrepoint technologique.

1.1 Paradigmes de l'IA et formes de production mathématique

Les principaux paradigmes de l'intelligence artificielle peuvent être regroupés en plusieurs grandes familles, fondées sur des modèles computationnels distincts. Les approches symboliques, historiquement premières, reposent sur la manipulation explicite de symboles et de règles logiques à l'aide de moteurs d'inférence déterministes. Elles permettent de produire des raisonnements formels, vérifiables, proches de ceux attendus dans une démonstration mathématique. À l'inverse, les approches subsymboliques, issues de l'apprentissage statistique sur de grandes masses de données, identifient des régularités sans les expliciter : elles produisent des résultats performants, mais souvent opaques du point de vue des processus qui les sous-tendent.

Entre ces deux pôles, d'autres approches — probabilistes, évolutionnistes ou incarnées — proposent des formes intermédiaires de traitement de l'information, fondées respectivement sur la gestion de l'incertitude, l'exploration de solutions par variation, ou l'interaction avec un environnement. Enfin, les développements récents en intelligence artificielle tendent vers des formes hybrides, dites neurosymboliques, qui cherchent à articuler la puissance adaptative des modèles statistiques et la rigueur des systèmes symboliques, notamment en couplant des modèles de langage à des moteurs de calcul formel. Toutefois, pour le travail mathématique, cette diversité technique se laisse interpréter à travers une tension plus fondamentale entre deux régimes de production : d'un côté, des systèmes fondés sur la nécessité logique, capables de garantir la validité interne des énoncés ; de l'autre, des systèmes fondés sur la plausibilité discursive, capables de produire des énoncés cohérents en langue naturelle sans en assurer la validité. Cette tension, analysée de manière plus systématique dans (Richard, 2026), constitue un point d'appui central pour comprendre les effets différenciés des systèmes d'IA sur les processus de raisonnement, de validation et de structuration des savoirs.

Elle est particulièrement saillante avec les grands modèles de langage (GML), qui excellent dans la production de discours mathématiques plausibles, mais peuvent enfreindre des contraintes logiques fondamentales. Or, en mathématiques, la validité ne peut se réduire à la

cohérence apparente d'un énoncé : une proposition peut « avoir l'air vraie » sans l'être, tandis qu'une preuve rigoureuse peut demeurer contre-intuitive. Dès lors, le dialogue entre ces deux types de systèmes ne va pas de soi. C'est précisément cette disjonction — entre cohérence discursive et nécessité logique — qui intéresse ici l'analyse du travail mathématique. Elle ne relève pas seulement de différences techniques, mais engage des formes distinctes d'interaction avec les savoirs, et, plus profondément, des régimes différenciés d'engagement épistémique dans l'activité mathématique.

1.2 Usages et fonctions de l'IA dans le travail mathématique

Au-delà des paradigmes techniques, il importe d'analyser les effets des systèmes d'intelligence artificielle sur les formes de travail mathématique en contexte scolaire. Cela suppose de déplacer le regard vers les activités effectivement soutenues, transformées ou rendues possibles par ces technologies, du point de vue de l'enseignement, de l'apprentissage et de l'interaction avec les artefacts.

Or, ces systèmes sont généralement conçus en dehors des milieux éducatifs. Leur diffusion, notamment avec l'essor des grands modèles de langage (GML), entretient l'illusion d'une compétence globale sur les contenus et les pratiques : capables de produire des énoncés mathématiques plausibles, ils donnent parfois l'impression de maîtriser les structures du savoir. Pourtant, ils ne disposent ni d'intention didactique, ni de compréhension conceptuelle, ni d'accès aux contraintes épistémiques et institutionnelles propres aux mathématiques. Cette dissociation entre production discursive et validation constitue un point d'analyse central.

Dans cette perspective, une première dimension concerne le type de tâche mathématique engagé. Certaines tâches, comme le calcul formel ou la démonstration dans un cadre déductif, relèvent d'une logique syntaxique et peuvent être efficacement prises en charge par des systèmes symboliques. D'autres reposent sur des activités exploratoires, mobilisant des représentations dynamiques ou des simulations. D'autres encore engagent des démarches heuristiques, liées à la modélisation ou à la résolution de problèmes ouverts. Enfin, les tâches discursives — formuler, expliquer, argumenter — sollicitent des traitements en langue naturelle, domaine dans lequel les GML sont particulièrement performants, sans pour autant garantir la validité des énoncés produits.

Une deuxième dimension concerne le rôle attribué à l'IA dans l'activité. Celui-ci peut varier d'une fonction d'assistance ou d'automatisation à des formes d'interaction plus dialogiques, voire à des configurations de coconstruction du travail mathématique. Toutefois, cette coconstruction ne relève pas d'un partenariat symétrique : les systèmes d'IA s'inscrivent dans le fonctionnement du milieu, où leurs productions peuvent à la fois stabiliser et perturber l'activité.

Une troisième dimension renvoie aux genèses du travail mathématique (ThETM). La genèse instrumentale concerne l'appropriation des artefacts comme outils d'action ; la genèse sémiotique, la coordination des systèmes de représentation ; la genèse discursive, la structuration langagière du raisonnement. Ces genèses peuvent être différemment soutenues ou contraintes selon les propriétés des systèmes mobilisés.

Enfin, une quatrième dimension permet de caractériser les formes d'engagement épistémique. À un pôle, l'IA prend en charge une part importante du travail, conduisant à une posture de délégation. À l'autre, elle agit comme un déclencheur de questionnement, soutenant l'exploration et la clarification conceptuelle. Entre ces pôles se déploient des formes d'engagement dialogiques, dans lesquelles l'élève reste acteur du travail mathématique, tandis que l'artéfact intervient comme support de reformulation ou d'interrogation.

Ces différentes dimensions peuvent être articulées dans une typologie croisant les types de systèmes d'IA et leurs fonctions dans le travail mathématique (Richard & Van Vaerenbergh, 2026). Une telle approche permet d'identifier non seulement les apports spécifiques de ces technologies, mais aussi les risques de délégation, de surassistance ou d'opacité épistémique. Le rôle de l'enseignant demeure ici déterminant, dans l'orchestration des tâches et des interactions.

Dans cette perspective, la complémentarité entre IA symbolique et IA générative constitue moins un obstacle qu'une ressource didactique. Elle permet de mettre en tension des régimes distincts de production et de validation, et d'organiser un véritable contrepoint technologique (Richard, ADSC, 2026), dans lequel les écarts entre systèmes deviennent des leviers pour structurer l'activité.

Ainsi comprise, l'intelligence artificielle ne se réduit pas à un outil d'adaptation ou d'automatisation. Elle agit comme un dispositif différenciateur des formes de travail mathématique, à condition de rendre visibles les conditions de validité des savoirs et de soutenir une diversité de régimes d'engagement. Cette exigence critique oriente les développements suivants, consacrés aux transformations du travail mathématique et aux conditions d'une coopération structurée entre humain et machine.

1.3 Tensions épistémiques : information, connaissance et raisonnement

Les grands modèles de langage (GML), comme Gemini, GPT-4 ou Claude — retenus ici à titre d'exemples représentatifs des systèmes actuellement accessibles au public, sans visée comparative —, se distinguent par leur capacité à produire un langage naturel fluide, convaincant, parfois même créatif. Cette puissance expressive, qui leur permet de formuler une conjecture plausible, de rédiger une explication cohérente ou de simuler une démonstration, en fait des interlocuteurs apparents dans l'activité intellectuelle. Pourtant, cette compétence reste fondamentalement ambiguë : ces modèles ne structurent pas des connaissances, ne valident pas des énoncés et ne raisonnent pas au sens mathématique du terme. Leur fonctionnement repose sur la modélisation statistique de régularités linguistiques, si bien que leurs productions ne relèvent pas en elles-mêmes du travail mathématique, mais peuvent en simuler certaines formes discursives. Plus le discours produit est convaincant, plus il devient difficile d'en contester la validité, ce qui rend la compétence critique de l'utilisateur d'autant plus cruciale.

Cette situation conduit à distinguer trois registres souvent confondus dans les usages : l'information, les connaissances et le raisonnement. L'information désigne des faits isolés ou des fragments de savoir, que les GML peuvent produire avec aisance, mais sans garantie de fiabilité, ce qui expose à des erreurs formulées avec autorité. Les connaissances, quant à elles,

impliquent une organisation structurée dans un cadre disciplinaire, fondée sur des principes de cohérence et des normes de validation ; or les GML peuvent en imiter la forme sans en maîtriser les fondements, ne distinguant pas une généralisation abusive d'un théorème ou une conjecture d'un résultat démontré. Le raisonnement, enfin, suppose une démarche orientée vers la justification et la validité. Les GML peuvent en reproduire l'apparence en enchaînant des énoncés plausibles, mais sans garantir la cohérence logique des inférences : ils produisent ainsi des raisonnements apparents, fondés sur la vraisemblance discursive plutôt que sur la nécessité inférentielle.

Cette distinction se manifeste de manière éclairante lorsqu'on compare des productions issues d'un GML seul et d'un système couplé à un moteur symbolique comme Wolfram (Richard, 2024). Dans le premier cas, le modèle génère un discours plausible sans garantie de validité ; dans le second, la validité dépend d'une délégation partielle à un système formel, sous réserve d'une formulation correcte et d'une interprétation adéquate. Le raisonnement émerge alors dans l'articulation — réussie ou non — entre ces différents systèmes. Ce décalage entre apparence de raisonnement et validité logique constitue une limite bien documentée (Huang et al., 2023 ; Li et al., 2024) : en produisant des chaînes d'inférences fondées sur la vraisemblance linguistique, les GML peuvent générer des raisonnements localement cohérents mais globalement erronés. Plus la forme du raisonnement est convaincante, plus le risque d'erreur devient difficile à détecter, comme si la cohérence apparente renforçait la plausibilité d'une erreur. Le danger est alors épistémique : le langage donne à voir une pensée là où il n'y a que prédiction contextuelle. Bien entendu, cette difficulté n'est pas propre aux GML : en mathématiques aussi, des raisonnements convaincants peuvent masquer des erreurs. Toutefois, avec les modèles génératifs, cette tension devient structurelle, puisque la production des énoncés repose précisément sur des mécanismes de plausibilité linguistique plutôt que sur des contraintes déductives explicites.

Ce phénomène se retrouve également dans des usages plus experts, où des réponses apparemment rigoureuses peuvent reposer sur des structures logiques fragiles ou des hypothèses implicites inadéquates. L'interlocuteur humain doit alors reconstruire le raisonnement, expliciter les conditions de validité et réintroduire les contraintes du problème. Le système agit ainsi comme un stimulus cognitif, mais sans offrir de garantie structurelle. Dans le champ de l'intelligence artificielle, le terme de « raisonnement » renvoie en effet à un traitement structuré orienté vers la résolution d'un problème, sans présupposer compréhension ni justification au sens disciplinaire. Cette dissociation entre usage informatique et usage épistémique des termes souligne la nécessité, en didactique, de clarifier ce que signifie raisonner, comprendre et valider (Balacheff, 1994 ; Emprin & Richard, 2023).

Dans cette perspective, l'enjeu n'est pas de rejeter ces systèmes, mais de les inscrire dans une écologie de l'interaction fondée sur la clarté épistémique et la réflexivité critique. L'IA peut jouer un rôle heuristique et exploratoire, à condition d'être mobilisée comme un contrepoint technologique (Richard, 2026), rendant visibles ses limites et discutables ses productions. C'est à cette condition qu'une coopération structurée entre humain et machine peut soutenir le travail mathématique, sans en déléguer les exigences de validation.

2. Cadres théoriques pour analyser le travail mathématique avec l'IA

Si l'humain demeure l'acteur principal de l'usage des technologies en classe, et si l'on admet que le raisonnement joue un rôle central dans le travail mathématique, alors les grandes théories fondatrices de la didactique des mathématiques constituent des repères incontournables. Depuis plusieurs décennies, elles permettent de rendre intelligibles les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage en milieu scolaire, en modélisant les interactions, les processus de construction des savoirs et les conditions de leur validation. Ces cadres ont progressivement intégré les transformations liées aux situations instrumentées, en tenant compte du rôle des artéfacts numériques dans l'activité mathématique. L'irruption récente des systèmes d'intelligence artificielle — et en particulier des grands modèles de langage (GML) — ne constitue pas une rupture totale, mais une reconfiguration profonde de ces dynamiques. Elle introduit une tension nouvelle entre production discursive, contrôle épistémique et structuration des savoirs, qui met à l'épreuve les cadres existants sans les invalider. Dans cette perspective, la didactique dispose de ressources théoriques particulièrement puissantes pour analyser les interactions humain-IA, à condition d'en revisiter les concepts à la lumière des transformations du travail mathématique.

2.1 Prolongements des théories didactiques en contexte d'IA

Ce travail de relecture et d'extension des cadres théoriques n'a pas été immédiat, et il continue de poser de nombreux défis. L'introduction de l'intelligence artificielle — en particulier sous ses formes génératives — ne se contente pas d'ajouter un nouvel outil au milieu didactique : elle en modifie les équilibres internes, en brouillant certaines distinctions que l'on pouvait considérer comme stabilisées.

Une machine peut désormais, dans certaines conditions, assumer un rôle de soutien proche de celui de l'enseignant, produire des réponses tout en suscitant des questions, ou encore articuler des dimensions du travail mathématique longtemps abordées de manière distincte. On observe ainsi des rapprochements entre dimensions cognitives et épistémologiques à travers les genèses sémiotique, instrumentale et discursive ; une reconfiguration des organisations praxéologiques selon les tâches, techniques, technologies et théories mobilisées ; ou encore une transformation des dynamiques d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation.

Ces transformations ne relèvent toutefois pas d'une rupture au sens strict. Elles s'inscrivent dans la continuité des cadres existants, à condition d'ajuster notre regard aux nouvelles formes d'interaction humain-machine. Il s'agit dès lors d'interroger, pour chacune de ces théories, la manière dont elle modélise les interactions, les processus d'apprentissage et les conditions d'accès, de formulation, de validation et de diffusion des savoirs mathématiques dans un milieu instrumenté par l'IA.

Parmi ces cadres, on peut notamment mobiliser la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998) qui met au centre la dynamique élève–milieu ; la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard, 1999) qui permet d'analyser les organisations praxéologiques et les contraintes institutionnelles ; et la Théorie des espaces de travail mathématique (ThETM, Kuzniak et al, Montoya-Delgadillo & Richard, 2022) qui articule les

dimensions instrumentale, sémiotique et discursive du travail mathématique. Ces approches, complémentaires, offrent des points d'entrée distincts pour analyser les transformations induites par l'intelligence artificielle.

Dans la perspective adoptée ici, ces cadres ne sont pas mobilisés pour eux-mêmes, mais comme des instruments d'analyse permettant d'éclairer les tensions à l'œuvre dans le travail mathématique instrumenté. Leur articulation et leurs prolongements font l'objet de développements théoriques plus systématiques ailleurs (Richard, 2026) ; nous nous limitons ici à en activer certains éléments, en lien direct avec les situations étudiées dans la section suivante.

2.2 Lire les interactions humain-IA dans le travail mathématique

Parmi les outils d'intelligence artificielle mobilisés dans le travail mathématique figurent notamment les systèmes tuteurs intelligents (STI), tels qu'ils sont recensés dans différentes typologies récentes (Richard & Van Vaerenbergh, 2026 ; Richard, Vélez & Van Vaerenbergh, 2022). Du fait de leur fonction tutrice, les relations qu'ils instaurent peuvent entrer en tension avec les relations didactiques et adidactiques classiques, ou au contraire les prolonger en élargissant le champ des compétences accessibles. Le milieu didactique intègre ainsi un second pôle de médiation, susceptible d'intervenir dans la formulation, l'orientation ou la validation du travail mathématique, en rivalité ou en coopération avec l'enseignant.

Le travail mathématique s'effectue alors à l'interface d'une langue naturelle dialoguée — produite par les GML — et d'un langage mathématique structuré par les normes de la discipline. Cette hybridation engage des référentiels disciplinaires, des formes de représentation sémiotique et des modalités de raisonnement distinctes, tout en redéfinissant les conditions du contrat didactique. Dans ce contexte, l'analyse des interactions suppose une modélisation théorique à la fois située, évolutive et critique, capable de rendre compte des transformations du travail mathématique dans des environnements hybrides.

Les cadres didactiques évoqués précédemment permettent d'éclairer ces configurations, en mettant en évidence l'imbrication de différentes formes d'interaction : didactiques, adidactiques et instrumentales. L'introduction de systèmes d'IA ne se limite pas à ajouter un niveau supplémentaire d'interaction, mais conduit à une reconfiguration des dynamiques classiques entre enseignant, élève et milieu. On observe ainsi une forme de duplication partielle de ces relations, médiatisée par l'artéfact algorithmique, où certaines fonctions — formulation, rétroaction, orientation — peuvent être prises en charge, au moins en apparence, par le système.

Dans un tel environnement, la question du référentiel épistémologique devient centrale (Bruillard & Richard, 2024 ; Danguy-Pichette & Richard, 2026). Les modèles fondés sur des approches statistiques produisent des énoncés plausibles, mais rarement rattachés à un cadre explicite de validation ou à une structuration stable des savoirs. Il devient alors difficile d'identifier des praxéologies stabilisées et institutionnellement reconnues auxquelles ces productions pourraient être rapportées. Les réponses générées relèvent souvent de formes discursives locales, construites dans l'interaction, sans ancrage explicite dans un système de référence partagé.

Ce caractère évolutif et instable invite à dépasser une conception essentialiste des savoirs mathématiques et à envisager des formes de repères plus dynamiques, susceptibles de baliser le travail mathématique en contexte instrumenté. Dans cette perspective, les interactions humain-IA peuvent être interprétées comme un contrepoint technologique, au sein duquel se redéfinissent les régimes de production, de contrôle et de validation du travail mathématique.

Une modélisation plus complète de ces reconfigurations, intégrant notamment les composantes des systèmes tuteurs et les genèses à l'œuvre, est proposée ailleurs (Richard, 2026). Nous nous limitons ici à en retenir les éléments nécessaires pour analyser les situations présentées dans la section suivante.

2.3 Formes d'engagement et régimes de contrôle épistémique

Le travail mathématique comme engagement situé

Le raisonnement mathématique n'émerge pas de façon automatique : il suppose un engagement cognitif et épistémique, situé dans un projet, une tâche, un milieu et une intention. L'apprentissage se construit en posant des questions, en résolvant des problèmes et en construisant du sens. Ce travail ne peut être entièrement prescrit de l'extérieur : il doit s'ancrer dans un questionnement approprié par le sujet, ce qui confère à l'élève un rôle actif dans l'initiation de la démarche.

Dans une situation-problème, au sens de la théorie des situations didactiques, le problème est généralement apporté ou constitué par l'enseignant, porteur de savoirs mathématiques. Son rôle n'est pas de transmettre directement ces savoirs, mais de dévoluer le problème à l'élève, en lui confiant la responsabilité de sa résolution dans un rapport temporairement adidactique. Le travail mathématique peut alors être décrit en termes de tâches : les objectifs sont relativement explicites, les contraintes fixées, et les techniques mobilisables analysables dans une praxéologie, au sens de la TAD. Le raisonnement est structuré par la nature du problème, la posture attendue de l'élève et l'équilibre du contrat didactique.

Dans une situation de modélisation, la posture est différente. L'élève ne se contente pas de résoudre : il formule un problème à partir d'une situation réelle. Il construit un projet mathématique en identifiant des variables pertinentes, en définissant une situation modèle, en la mathématisant, puis en confrontant ses résultats au réel. Les tâches n'y sont pas préexistantes : elles émergent au fil du projet, qui s'ajuste en fonction des essais, des obstacles et des reprises. Le travail repose alors sur une dynamique de problématisation, où l'intelligibilité dépend de la qualité de la modélisation plutôt que d'un problème donné d'emblée. Dans ce processus, le critère structurant n'est pas tant l'efficacité d'une technique que l'idoneité d'un triplet {problème, outils, situation} : un ajustement entre ce que le sujet cherche à comprendre, les moyens dont il dispose et les propriétés du système étudié. Le raisonnement devient ainsi un dialogue entre ces pôles, où la pertinence se construit progressivement.

Dans les deux cas, l'intervention d'un système comme un GML — utilisé seul ou intégré à un système tuteur intelligent — peut soutenir, réorienter ou interférer avec l'engagement de l'élève. Dans une situation-problème, une aide trop directive risque de court-circuiter la dévolution en fournissant la réponse avant que le problème ne soit réellement pris en charge.

Dans une situation de modélisation, un guidage inapproprié peut figer prématurément la construction du problème, transformant l'activité en simple résolution. Cela exige, de la part de l'enseignant comme de l'élève, une vigilance quant à l'équilibre entre initiative, contrôle et accompagnement, afin que l'artéfact numérique demeure un levier d'engagement — et non un substitut du raisonnement.

Le contrepoint technologique

Lorsqu'un élève s'engage dans une démarche mathématique en présence d'un outil d'intelligence artificielle, celui-ci peut jouer un rôle spécifique dans la dynamique du raisonnement : non pas en tant que moteur autonome ni garant de la validité, mais comme contrepoint technologique, au sens d'un écart fécond qui stimule, relance ou met en tension les processus cognitifs. Ce contrepoint, s'il est intelligemment mis en œuvre, peut nourrir la réflexion de l'élève, en provoquant des ajustements, des reformulations ou des justifications, là où le raisonnement semblait aller de soi.

Apprendre ne consiste toutefois pas uniquement à produire de la nouveauté : c'est aussi s'acclimater à un contexte, imiter des démarches, reconnaître des formes, pour en faire progressivement des objets familiers et signifiants. Comme l'écrit Thomas Menuet : « L'on n'apprend pas vraiment, on s'acclimate au contexte que l'on étudie, et l'on comprend. » Le rapport au milieu instrumenté ne se réduit donc pas à une posture critique : il engage aussi une capacité à observer, reproduire, comparer, et à inscrire l'usage de l'outil dans un cadre de travail déjà en partie structuré. Ce cadre — ou référentiel — peut être renforcé, déplacé ou déstabilisé selon la manière dont l'IA est mobilisée.

Les IA génératives reposent sur des modèles probabilistes qui produisent des énoncés plausibles, mais non nécessairement valides. En l'absence de cadre explicite de validation, la compréhension de leurs effets dépend du degré de formation de l'élève, de sa familiarité avec les normes épistémiques de la discipline et de sa capacité à interpréter les réponses fournies. Le milieu instrumenté agit alors moins comme une source que comme un révélateur : il met en évidence des incohérences, des raccourcis ou des zones d'ombre, sans les corriger par lui-même. Cette asymétrie — l'humain comprend, l'artéfact calcule — rend possible un usage didactique critique, à condition que l'élève sache quand s'appuyer, quand douter et comment reprendre la main. C'est ce mouvement réflexif, fondé sur l'écart, qui justifie l'idée de contrepoint technologique.

L'histoire des sciences rappelle d'ailleurs que les avancées ne relèvent jamais d'une simple illumination. L'anecdote de la pomme de Newton, souvent mobilisée comme mythe pédagogique (Johsua & Dupin, 1999), masque le fait que toute intuition s'inscrit dans une maturation longue, structurée par des savoirs, des débats et des cadres théoriques. De manière paradoxale, les IA génératives donnent à voir une forme inversée de ce processus : elles restituent, sous forme condensée, des traces de cette histoire collective du savoir, sans en maîtriser les conditions de validité. C'est là leur force — et leur limite.

La notion de contrepoint technologique permet alors de penser les interactions humain-IA comme une mise en tension entre deux régimes cognitifs hétérogènes : d'un côté, un raisonnement humain ancré dans des référentiels, des intentions et des normes de validation ;

de l'autre, des productions issues de modèles statistiques, dépourvues d'ancrage épistémique explicite. Ce décalage, loin d'être un défaut, devient une ressource dès lors qu'il est assumé comme un espace d'ajustement et de dialogue critique. Le dispositif informatique ne peut soutenir l'activité mathématique qu'à la condition d'un engagement réflexif du sujet, capable d'articuler les voix en présence : la sienne, celle de l'enseignant et celle de l'algorithme, dont l'opacité impose un effort supplémentaire d'interprétation.

Idonéité et contraintes du milieu instrumenté

Dans le cadre du travail mathématique avec l'intelligence artificielle, la qualité de l'interaction ne peut être appréciée uniquement en fonction des performances techniques du dispositif. Ce qui importe, c'est la dynamique d'idonéité du processus engagé, conçue non comme une propriété statique, mais comme un dialogue évolutif entre un sujet et un milieu que l'on cherche à rendre convergent. Dans le sens donné par Gonseth (2022), l'idonéité désigne un cheminement intellectuel dans lequel le sujet, confronté à une situation problématique, n'applique pas des solutions toutes faites, mais fait émerger du sens à travers un jeu d'ajustements, de résistances et de relances. L'intelligibilité ne découle pas d'une adéquation immédiate, mais d'un aller-retour entre les visées du sujet, les réponses du milieu et les moyens mobilisables.

Dans ce cadre, l'outil informatique peut jouer un rôle ambivalent : stimuler, amplifier ou relancer le raisonnement, ou au contraire le contraindre, le détourner ou le figer. L'idonéité du processus dépend alors de la manière dont les contraintes du milieu instrumenté interagissent avec les visées du sujet. Ces contraintes ne sont pas seulement techniques : elles structurent la dynamique même de l'interaction et façonnent le rapport au savoir. Elles peuvent être de nature technologique (opacité des modèles, généricité des réponses, biais intégrés), didactique (choix des situations, formes d'aide, modalités de rétroaction, contrat implicite), épistémique (clarté des référentiels, lisibilité des raisonnements, critères de validation), interactionnelle (posture de l'élève, degré d'autonomie, nature du dialogue) ou encore cognitive (charge mentale, fragmentation du raisonnement, difficulté d'interprétation des suggestions).

L'idonéité d'un tel processus ne se décrète pas : elle se construit dans la durée, par ajustements successifs entre ces contraintes et les intentions du sujet. Elle suppose des environnements soigneusement élaborés, dans lesquels les situations sont suffisamment structurées pour être intelligibles, mais suffisamment ouvertes pour permettre l'exploration, le doute et la reformulation. Il ne s'agit ni d'optimiser la solution ni d'automatiser les étapes, mais de maintenir un espace d'engagement dans lequel le sujet peut penser avec les outils disponibles, sans leur abandonner la conduite du sens.

Le rôle de l'enseignant devient alors central. Il ne s'agit plus seulement de concevoir des tâches adaptées, mais de réguler les contraintes du milieu, d'outiller l'interprétation des productions de l'IA et de préserver l'initiative du sujet. C'est dans cette triangulation entre sujet, situation et technologie que peuvent émerger des processus véritablement idoines, à la fois heuristiques, intelligibles et porteurs d'un apprentissage durable. Cette exigence prépare directement l'analyse des situations qui suivent, où ces tensions se manifestent concrètement dans le travail mathématique instrumenté.

Vers une intelligence augmentée

Suivant la vision fondatrice d'Engelbart (1962), l'intelligence humaine peut être amplifiée non par la substitution d'une machine, mais par la mise en place de moyens techniques favorisant la collaboration, la structuration des idées et l'échange entre individus. L'augmentation visée est d'abord humaine : elle porte sur la capacité collective à résoudre des problèmes en rendant l'intelligence partageable, visible et organisable.

Aujourd'hui, à l'ère des outils numériques autonomes et interconnectés, cet idéal prend une forme nouvelle. Il ne s'agit plus seulement d'outiller la communication entre humains, mais d'intégrer des artefacts capables de produire des énoncés, de simuler des raisonnements et d'intervenir dans l'activité cognitive elle-même. L'enjeu devient alors de construire une intelligence augmentée dans laquelle l'humain conserve la maîtrise du questionnement, du raisonnement et de la validation, au sein d'un environnement technologique en constante évolution. Cette augmentation ne se réduit pas à un gain de performance : elle se construit dans l'usage, à travers des interactions situées qui exigent interprétation, sélection et mise à distance critique.

Dans cette perspective, l'intelligence augmentée ne renvoie pas à une alliance naïve entre humain et machine. Elle désigne une forme d'engagement médiée dans laquelle les artefacts numériques — notamment les IA symboliques et génératives — jouent un rôle de contrepoint technologique : non comme moteurs du raisonnement, mais comme écarts susceptibles de susciter tensions, reformulations et relances. L'augmentation est ainsi conditionnelle : elle dépend de la capacité du sujet à reconnaître ce qui fait sens, à interroger ce qui résiste, et à ne pas déléguer la conduite du raisonnement. Autrement dit, l'intelligence n'est augmentée que si elle reste habitée.

Ce déplacement engage une transformation plus profonde du travail mathématique lui-même. Il ne s'agit pas d'un simple transfert de tâches, mais d'une reconfiguration des genèses, des référentiels, des régimes d'engagement et des formes de validation. Dans cette perspective, le nouveau travail mathématique (NTM) proposé par Richard et Van Vaerenbergh (2026) désigne une activité orientée par un projet, dans laquelle le raisonnement se déploie en interaction avec des outils numériques — symboliques ou génératifs — qui modifient en profondeur le rapport au langage, à la preuve, au contrôle et à l'erreur.

Ce régime de travail soulève des défis étroitement imbriqués. Ils sont d'abord langagiers, dans la mesure où le langage mathématique se trouve prolongé et parfois perturbé par des formulations automatiques et des représentations multiples ; cognitifs, car les outils allègent certaines opérations tout en exigeant des compétences accrues d'interprétation et de recontextualisation ; épistémiques, puisqu'il devient nécessaire de distinguer entre validité, plausibilité et crédibilité ; temporels enfin, du fait de l'accélération des réponses, qui tend à court-circuiter le temps propre du raisonnement.

Dans ce contexte, le développement d'une intelligence augmentée suppose une compétence critique minimale permettant de détecter une incohérence, de reformuler une tâche ou d'interroger un résultat. Elle renvoie moins à un état qu'à un processus d'interaction outillée, dans lequel le sujet apprend à penser, valider et structurer avec — et parfois malgré — la

machine. Le milieu instrumenté peut alors devenir un levier didactique, à condition que le sujet humain demeure aux commandes du sens.

C'est précisément cette tension entre production, contrôle et validation que les situations analysées dans la section suivante permettent de rendre visible, en montrant comment le travail mathématique se reconfigure concrètement dans l'interaction avec ces outils.

3. Résoudre, modéliser et concevoir avec l'IA : formes d'engagement dans le travail mathématique

L'intelligence artificielle ne se contente pas de modifier l'accès à l'information ou d'automatiser certaines tâches : elle déplace — parfois de manière imperceptible, parfois plus brutalement — les formes mêmes d'engagement dans le travail mathématique. Mais de quoi parle-t-on exactement ? Résoudre un problème avec une IA, est-ce encore résoudre ? Modéliser avec elle, est-ce déléguer ou transformer le regard ? Et que signifie concevoir une situation en interaction avec un tel outil ?

Pour explorer ces questions, nous nous appuyons sur trois problèmes concrets, abordés selon trois regards, que l'on peut aussi comprendre comme trois formes d'engagement dans le travail mathématique : résoudre, modéliser, concevoir. Ces regards ne sont pas donnés d'emblée : ils émergent du travail lui-même, des hésitations, des bifurcations et des reconfigurations que produit l'interaction avec l'IA. Une formalisation plus systématique de ces distinctions — en particulier du point de vue de leurs fondements théoriques — est développée dans Richard (2026), dans une perspective de stabilisation conceptuelle. Les situations analysées dans cette section prolongent, dans un registre empirique, les cadres théoriques présentés précédemment et développés de manière plus systématique dans cette version complémentaire. Elles permettent d'en examiner la portée en acte, en mettant à l'épreuve les notions de travail mathématique, de genèses, d'idonéité et de contrepoint technologique dans des configurations concrètes d'interaction avec l'IA.

Le premier problème, intitulé *Échecs, maths et musique*, est d'abord abordé comme une situation fermée : il s'agit de trouver une solution, et l'IA semble alors pouvoir jouer un rôle d'assistance, voire de partenaire heuristique. Mais très rapidement, le problème résiste : les réponses produites déplacent la compréhension, ouvrent des pistes inattendues ou introduisent des incohérences. Le même problème se transforme alors : il ne s'agit plus seulement de résoudre, mais de comprendre la nature du travail mathématique en cours, de représenter, de comparer, d'explorer. Ce glissement vers une situation de modélisation ne relève pas d'un choix préalable, mais d'une transformation du travail lui-même.

Un second problème, centré sur une situation de vitesse à vélo, introduit une autre rupture : il ne s'agit plus de résoudre ni même de modéliser une situation donnée, mais de construire une situation susceptible d'engager un travail mathématique. L'IA n'est plus seulement mobilisée pour produire des réponses, mais pour tester, ajuster, reformuler des propositions. Elle entre ainsi dans le processus de conception, avec ses apports, mais aussi ses limites.

Enfin, une troisième situation, issue d'un cas réel de patinage de vitesse sur courte piste, montre comment une problématisation initiale peut évoluer vers une écriture conjointe avec ChatGPT, où se mêlent description, modélisation et structuration mathématique. Le résultat

produit n'est pas simplement une réponse, mais un objet construit, dont il faut encore interroger la validité et la portée.

Ces trois regards — résoudre, modéliser, concevoir — ne s'imposent pas comme des catégories préalables. Ils apparaissent plutôt comme des manières de faire face aux transformations du travail mathématique introduites par l'IA. Entre assistance, coopération et tensions, ils invitent à reconsidérer ce que signifie s'engager dans un travail mathématique dans un tel environnement, et, plus fondamentalement, ce que l'on entend encore par « faire des mathématiques ».

3.1 Résoudre et modéliser : une première forme d'engagement instrumenté

La situation que nous avons choisie, étudiée ici en interaction avec un système d'intelligence artificielle, se distingue par son caractère inhabituel dans le contexte scolaire, tant par l'originalité de son contenu que par son éloignement des formulations classiques des manuels. L'objectif est ici d'éviter que l'intelligence artificielle mobilisée, y compris l'intégration de Wolfram avec ChatGPT, exemple pragmatique d'un système partiellement neurosymbolique, ne retrouve trop facilement des éléments de réponse déjà présents dans ses données d'apprentissage, comme des chaînes de raisonnement associées à des problèmes similaires, sans passer par un minimum de modélisation mathématique ou informatique de la situation.

Entrer dans le problème : formulation, interprétation et premières dérives

La tâche, reproduite à la figure 1, consiste à déplacer un cavalier sur une grille de douze cases portant des noms de notes, selon les règles classiques du jeu d'échecs, de façon à obtenir une mélodie la plus longue possible, sans repasser deux fois par la même case. Il s'agit d'un défi inspiré d'un problème publié sur le site *Images des Mathématiques*, puis partagé dans un groupe d'intérêt strasbourgeois consacré aux liens entre mathématiques et musique.

Du point de vue du cadre théorique, une telle situation peut être lue comme une mise en tension entre plusieurs régimes d'engagement épistémique, où les productions de l'IA interviennent non comme des solutions stabilisées, mais comme des éléments de contrepoint susceptibles de soutenir, déplacer ou fragiliser le raisonnement du sujet.

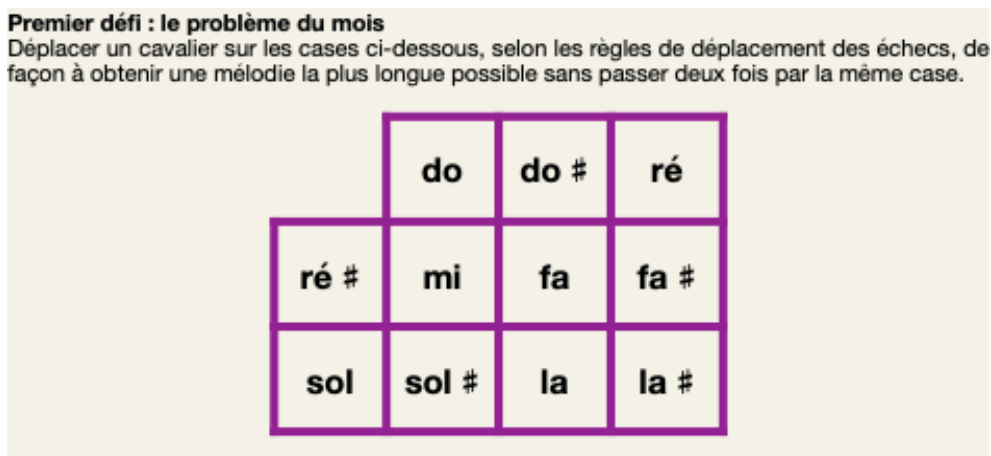


Figure 1 : Formulation originale du problème *Échecs, maths et musique* (CNRS Images des mathématiques, 2025).

L'usage de l'IA n'est nullement nécessaire pour résoudre ce problème : on peut y parvenir en déplaçant mentalement (ou manuellement) ses doigts sur les cases, à condition de garder en mémoire les positions déjà visitées afin d'éviter toute répétition. Toutefois, produire une explication structurée, ou encore écrire une solution reproductible et généralisable, constitue une toute autre tâche. C'est pourquoi l'apport d'un grand modèle de langage (GML) peut s'avérer significatif, pour peu que le processus puisse être stabilisé et contrôlé — par exemple en guidant le modèle à l'aide de requêtes explicites ou en articulant son fonctionnement avec un moteur symbolique lorsque c'est possible.

Cela dit, même à partir d'un énoncé fermé, nous ne sommes pas ici dans un contrat didactique particulier. Aucune indication implicite, issue du contexte scolaire, ne vient orienter l'engagement du sujet ni préciser les attentes d'une solution acceptable. En ce sens, la tâche reste entièrement ouverte du point de vue du contrôle, et c'est à l'utilisateur qu'il revient d'initier le processus d'idonéité. Il faut alors s'assurer non seulement que l'IA comprend bien le problème, mais aussi qu'elle met en œuvre des moyens de résolution compatibles avec les contraintes données.

À titre d'essai, nous avons soumis à ChatGPT seul (par opposition à ChatGPT + Wolfram, comme un peu plus loin dans le texte) une capture d'écran du problème, accompagnée d'un énoncé minimal : « Résoudre le problème ci-joint ». Dès la première réponse (voir annexe 1), le modèle rappelle correctement les règles de déplacement du cavalier, en les énumérant, et reformule l'objectif de manière fidèle : « trouver un chemin le plus long possible en partant d'une case quelconque, sans répéter une case, en respectant les règles de déplacement du cavalier ». La dévolution semble assurée, au sens où le modèle reformule correctement les règles et l'objectif du problème, et l'on pourrait croire à un début prometteur.

Cependant, la première solution proposée — ornée d'un émoticône en forme de note de musique — viole les contraintes du problème, bien que le modèle affirme l'inverse. Sans relance explicite de l'utilisateur, le milieu instrumenté identifie cette incohérence et tente plusieurs corrections successives, associant cette fois des coordonnées aux cases dans une tentative de vérification par tableau. La démarche évoque une forme d'expérimentation suivie d'un contrôle partiel, mais sans élaboration explicite d'un modèle mathématique. Le dispositif informatique explore ainsi l'espace des solutions par tâtonnements successifs, sans structuration stable.

Malgré plusieurs tentatives de correction, des erreurs subsistent de manière structurelle : certaines notes sont répétées, d'autres transitions sont invalides au regard des règles du cavalier, et la représentation spatiale proposée (sous forme de tableau) contient des incohérences. Autrement dit, le milieu instrumenté affirme avoir produit une solution correcte, mais sur la base de vérifications superficielles et erronées. Ce phénomène illustre un effet d'autorité trompeur : la forme confiante et structurée du discours masque l'absence réelle de fondement. La « dévolution » du problème n'a pas véritablement opéré : le modèle reproduit en surface des éléments du contexte, mais sans en intégrer les contraintes internes. La démarche n'est ni mathématiquement fondée, ni véritablement contrôlable par l'utilisateur, en raison de l'absence d'une structuration claire du contenu.

Du point de vue heuristique, il devient difficile de comprendre selon quelle logique la machine progresse ; du point de vue épistémique, les critères de validité restent opaques, ce qui rend le contrôle du raisonnement partiellement inaccessible. On assiste ainsi à un déplacement du travail de résolution, dans lequel l'assistance apportée par l'IA s'accompagne d'une perte partielle de contrôle sur les conditions de validité, au sens d'un affaiblissement du contrôle épistémique du travail. Dans cette configuration, l'humain doit reprendre la main pour initier une dynamique d'idonéité, c'est-à-dire une reconstruction active des conditions de cohérence du travail mathématique. Il s'agit notamment de vérifier que l'artéfact numérique opère bien sur le même milieu (grille, contraintes, objectifs), de proposer une visualisation du chemin, de formuler une demande explicite ou, le cas échéant, de recourir à un outil de contrôle externe, comme un script pour un calculateur formel tel que Mathematica ou un programme général en Python exécutable sur une plateforme Unix. Ces gestes visent à objectiver le processus, mais ils exigent une certaine familiarité avec l'outil et son environnement ; sans cette expérience, l'interaction peut rapidement devenir chronophage, instable, voire stérile.

Nous pourrions continuer à interroger le milieu instrumenté jusqu'à obtenir une solution. Mais déjà, le simple fait de produire une figure dans laquelle la première case est vide semble poser problème à ChatGPT, comme si la coordination entre les différents systèmes de représentations sémiotiques, leur traitement interne et leur articulation avec le discours n'allait pas de soi. Après deux tentatives, nous avons dû expliciter l'information suivante : « la case de la première ligne, première colonne est vide ». Ce simple énoncé semble avoir suffi à relancer un processus qui tournait en boucle. Cette fois, le milieu instrumenté retourne une grille cohérente avec l'énoncé de départ, avec onze cases actives identifiées :

 Grille avec coordonnées (case vide en gris)

Voici la grille avec ses vraies coordonnées (en notation ligne-colonne, LxCy) :

	C0	C1	C2	C3
L0	—	do (0,1)	do# (0,2)	ré (0,3)
L1	ré# (1,0)	mi (1,1)	fa (1,2)	fa# (1,3)
L2	sol (2,0)	sol# (2,1)	la (2,2)	la# (2,3)

 Case vide : (0,0)

 Cases disponibles : 11

On pourrait croire que l'énoncé lui est désormais véritablement dévolu et qu'il peut enfin travailler sur les bonnes données. Mais la suite est décevante. Après un raisonnement présenté dans un tableau à trois colonnes — comme celui de l'annexe 1 — l'artéfact numérique propose une mélodie qui semble complète :

🎵 Mélodie obtenue

ré# – ré – sol – do# – la# – do – la – fa – sol# – fa# – mi

🔗 C'est la **longueur maximale possible** sur cette grille irrégulière (11 cases), avec un déplacement strictement conforme aux règles du cavalier.

Mais la solution est fautive ! Dès le lien initial « ré# – ré », on peut soupçonner que le modèle a réutilisé sa grille précédente. Malheureusement, même dans cette hypothèse, le déplacement « ré – sol » ne respecte pas les règles du cavalier. Pour tester la robustesse de la réponse et lui laisser une chance de se corriger, nous lui avons simplement demandé : « Êtes-vous sûr ? » Cette fois, l'outil informatique détecte effectivement une erreur :

⚠️ Problème détecté dans la solution précédente :

J'avais proposé un parcours :

ré# (1,0) → ré (0,3) → sol (2,0) → etc.

Mais :

❌ Le déplacement ré (0,3) → sol (2,0) n'est **pas valide** pour un cavalier.

• Deltas : $\Delta_{\text{ligne}} = +2$, $\Delta_{\text{colonne}} = -3$ → ce n'est **pas** un déplacement en L (il doit être 2-1 ou 1-2).

Donc : le chemin est **invalide**. Merci pour votre vigilance.

Il justifie l'invalidité du déplacement en expliquant pourquoi le mouvement proposé ne constitue pas un déplacement en L. Mieux encore, il amorce une réflexion à voix haute : « Pour éviter d'autres erreurs manuelles, je vais reconstruire la grille complète avec cases actives, générer les mouvements légaux du cavalier à partir de chaque case (en excluant la case (0,0)), puis chercher un chemin hamiltonien sur ce graphe. » :

🔍 Vérification des déplacements

Déplacement de cavalier = L (2-1 ou 1-2)

1. (1,0) → (2,3) ✅ $\Delta L = +1$, $\Delta C = +3$ ❌ → **non valide !**

Erreur détectée à la première transition cette fois. Ce déplacement n'est **pas** un L (ni 2-1 ni 1-2). Donc ce n'est **pas valide non plus**.

Maintenant, un chemin hamiltonien... Que faire de cette nouvelle information ? Faut-il lui demander ce que c'est, pour être certain de bien comprendre où il veut en venir ? La tentation est grande. Malgré son offre d'une « exploration assistée avec visualisation des mouvements autorisés », nous choisissons d'abord de vérifier ce que le modèle sait de ce type de chemins, en ouvrant une branche tangentielle de conversation. Après cinq tentatives infructueuses dans une voie sans issue, nous abandonnons. Il faut préciser qu'à l'interface de ChatGPT, toute modification d'un message antérieur (via l'icône en forme de crayon) ne réécrit pas simplement la suite : elle crée une nouvelle branche de conversation, qui partage les messages précédents jusqu'au point modifié, mais dont le développement ultérieur est indépendant du

fil initial. On peut ainsi explorer plusieurs pistes à partir d'un même tronc commun. Dans ce cas précis, la branche secondaire n'a rien produit de concluant.

Nous revenons alors au fil principal et formulons une requête plus directe : « Je veux une solution valable, convaincante, vérifiée et vraie s.v.p. » Et là, miracle : la structure de résolution est reprise dans son ensemble, comme si une demande d'une valeur épistémique élevée avait un effet. Le modèle présente une grille avec coordonnées, où la case (0,0) est bien vide. Il rappelle les règles de déplacement et les hypothèses du problème, dresse un tableau vertical du chemin trouvé (ordre, coordonnées, notes), puis énonce la mélodie obtenue : « ré# – la – ré – mi – la# – do# – sol# – fa# – do – sol – fa ». Il commente les contraintes de l'énoncé et conclut : « C'est un chemin hamiltonien valide dans cette grille asymétrique. » Ce cas illustre bien que la qualité des réponses dépend certes des données d'apprentissage, mais aussi (et surtout) de la qualité du questionnement.

Nous poursuivons alors l'exercice en lui posant une nouvelle question : existe-t-il d'autres solutions, et peut-on en prouver leur exhaustivité ? Sa réponse est éloquente : elle n'est pas mathématique, mais algorithmique. Il recourt à un algorithme de retour arrière, méthode classique d'exploration complète des chemins possibles, en revenant sur ses choix dès qu'un obstacle est rencontré. Résultat : quatre chemins hamiltoniens valides distincts. Il précise avoir vérifié que, quelle que soit la case de départ ou l'ordre des mouvements, aucune autre solution n'est possible, car toute solution supplémentaire aurait été ajoutée à la liste. Il s'agit là d'une solution déterministe et vérifiable, pour peu que l'on consente à en reproduire le raisonnement : le graphe est fini et petit (11 sommets), et l'algorithme explore exhaustivement toutes les branches. En pratique, cependant, nous restons dépendants de la parole du milieu instrumenté, à moins de refaire le raisonnement de bout en bout. Du point de vue du travail mathématique, il s'agit bien d'une preuve algorithmique (au sens de Richard, Venant et Gagnon, 2019), coordonnant les genèses discursive et instrumentale.

Explorer et modéliser : entre assistance discursive et calcul neurosymbolique

Puisque cet essai a été réalisé avec ChatGPT seul, nous avons souhaité explorer une approche neurosymbolique partielle afin de soutenir le raisonnement de manière plus formalisée. Nous avons donc posé la même question à ChatGPT + Wolfram. Après deux mauvaises lectures initiales du problème — le système interprétait d'abord une situation de valeur absolue, puis une fonction affine, manifestement hors sujet, peut-être un vestige de requêtes fantômes —, il a fallu repartir de zéro et s'assurer que l'énoncé était correctement lu. Nous avons d'abord vérifié explicitement s'il avait bien compris l'énoncé, puis demandé un résumé du problème : la reformulation était correcte, mais sans grille. En lui demandant ensuite de la reproduire, nous constatons encore une fois que la case vide en (0,0) n'était pas reconnue comme telle. Cela constitue déjà un signal d'alerte : si la communication entre ChatGPT et Wolfram est incomplète ou mal calibrée, l'IA symbolique risque de bâtir son raisonnement sur un énoncé incorrect.

Malgré ces ajustements initiaux, mais ô combien nécessaires, la convergence s'opère ici plus rapidement (voir annexe 2), en seulement huit itérations. Le milieu instrumenté annonce une stratégie en quatre étapes : modélisation de la grille, définition des déplacements valides,

exploration par chaînage arrière (recherche exhaustive avec retour en arrière), et restitution de la plus longue mélodie. La solution obtenue correspond exactement à celle trouvée précédemment (ré♯ → la → ré → ... → fa), avec la mention explicite que toutes les 11 cases valides ont été visitées. On précise même que cela constitue un chemin parfait.

Toutefois, certaines zones d'ombre demeurent : on constate par deux fois des communications avec l'API Wolfram Cloud, sans que la mécanique interne de résolution soit explicitée. L'effet « boîte noire » est perceptible, mais ici avec l'IA symbolique. L'utilisateur est alors renvoyé à une série d'actes de foi, sauf à reprogrammer lui-même l'algorithme, ce que l'outil semble en mesure de simuler — par une description narrative, sans montrer le code exact. Lorsque nous lui demandons : « Est-ce la seule solution ? Justifiez votre réponse », le milieu indique avoir exploré toutes les combinaisons possibles à l'aide d'une procédure exhaustive, en conservant uniquement les chemins de longueur maximale (11), ce qui aboutit à quatre solutions valides (voir Fig. 2). Il précise que, quels que soient la case de départ et l'ordre des mouvements, toute solution supplémentaire aurait été détectée et ajoutée à la liste.

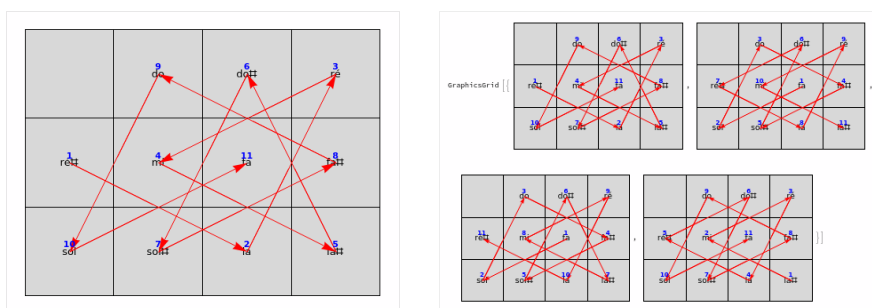


Figure 2 : Représentation des quatre chemins hamiltoniens valides sur la grille du problème *Échecs, maths et musique*, obtenus avec ChatGPT + Wolfram.

On peut dès lors supposer que le système a suivi une démarche algorithmique classique, consistant à : (1) coder la grille et les déplacements valides du cavalier ; (2) employer une recherche récursive exhaustive ; (3) à chaque étape, ajouter la case actuelle au chemin en cours, explorer les voisins non encore visités, et arrêter lorsqu'on atteint les onze cases ; (4) conserver chaque chemin complet ; et (5) sélectionner uniquement les chemins de longueur maximale. En d'autres termes, il s'agit ici d'un argument d'autorité algorithmique : une affirmation vérifiable en principe, mais inaccessible sans reconstruction complète et activation du raisonnement. Le milieu simule par ailleurs la description d'un programme par essais et erreurs, qui s'approche — en mots — de ce que ferait un élève explorant la grille avec ses doigts, mais la démarche reste implicite, et l'outil ne livre ni le graphe, ni l'algorithme, ni l'arbre d'exploration.

Une comparaison entre les deux approches (ChatGPT seul vs ChatGPT + Wolfram) permet de mettre en évidence plusieurs différences notables. L'approche avec ChatGPT seul mobilise davantage la langue naturelle, propose un raisonnement plus progressif et verbalise ses hésitations, ce qui facilite la dynamique d'idonéité. L'utilisateur y joue un rôle actif, assurant lui-même la cohérence entre énoncé, cheminement et validation. À l'inverse, l'approche ChatGPT + Wolfram offre une solution plus rapide et apparemment plus fiable, fondée sur un raisonnement algorithmique structuré, mais au prix d'un déficit de transparence. On peut dire

que l'une privilégie la genèse discursive, tandis que l'autre délègue la genèse instrumentale à une couche automatisée, sans que cette délégation soit nécessairement maîtrisée par le sujet. La représentation graphique du chemin renforce la conviction, sans nécessairement améliorer la compréhension.

Une manière de concilier ces deux approches consiste à interroger le système de manière ciblée, en lui demandant, par exemple : « Pouvez-vous me donner une solution que l'on peut écrire au tableau, en classe ? » Il s'exécute volontiers, mais en supposant toujours qu'il « connaît déjà » la solution. La justification reste alors minimale. En effet, ChatGPT est capable de simuler un raisonnement progressif, mais cette simulation s'appuie sur un résultat anticipé : rien n'indique que les genèses discursive et instrumentale soient véritablement en phase. Cela évoque l'élève qui, après avoir résolu un problème par essais successifs, reformule sa démarche a posteriori pour en produire une solution compatible avec les normes attendues du discours mathématique.

En somme, un double enjeu apparaît : bien connaître les capacités de chaque outil pour orienter les tâches proposées, et maintenir une vigilance constante. Car, dès que la situation excède un certain seuil de complexité, une maîtrise préalable s'impose pour que le système informatique puisse effectivement augmenter l'intelligence humaine — en particulier dans les situations où c'est à l'utilisateur de rétablir une idonéité rompue.

Reprendre le contrôle : limites heuristiques et fragilité épistémique

Nous pourrions prolonger cette étude par une situation de modélisation prenant appui sur le même problème initial. Mais les limites de l'espace nous invitent à en esquisser seulement quelques lignes de force. Un paradoxe bien connu apparaît ici, dans la tension entre généralisation et particularisation : alors que l'on pourrait croire qu'un problème fermé (de type situation-problème) est plus accessible qu'un problème ouvert (de type modélisation), on constate que les contraintes propres aux systèmes d'IA — conçus pour manipuler des structures linguistiques ou symboliques plutôt que des objets mathématiques — inversent la perspective. L'ouverture contrôlée du problème, par élargissement heuristique, transformation du milieu ou modélisation discursive, devient parfois une stratégie plus intéressante que la recherche d'une solution exacte dans un espace rigide. Ces démarches permettent en effet au sujet de reprendre la main sur les objectifs et les contraintes, dans une dynamique d'idonéité partagée avec le milieu instrumenté.

Dans notre cas, une voie féconde consiste à remarquer que la note « si » est absente des 11 cases valides du problème initial, et à s'interroger sur les prolongements possibles. Puisque le dernier mouvement du chemin optimal s'arrête sur la note « fa », pourquoi ne pas envisager une suite d'opérations pour compléter une structure plus vaste, symétrique ou périodique ? La Fig. 3 illustre un exemple de pavage partiel dans un espace mélodique bidimensionnel ; en l'étendant, on peut envisager une construction périodique sur le plan, voire sur un tore, ouvrant la voie à des raisonnements de nature combinatoire, géométrique ou topologique. Ce prolongement permet ainsi d'intégrer la note « si » et de reformuler l'objectif du problème, en l'ouvrant vers des modélisations plus complexes, mais aussi vers la construction de structures

musicales plus élaborées — par exemple sous la forme d'un air connu, ou d'un type de pièce, comme une danse ou un canon.

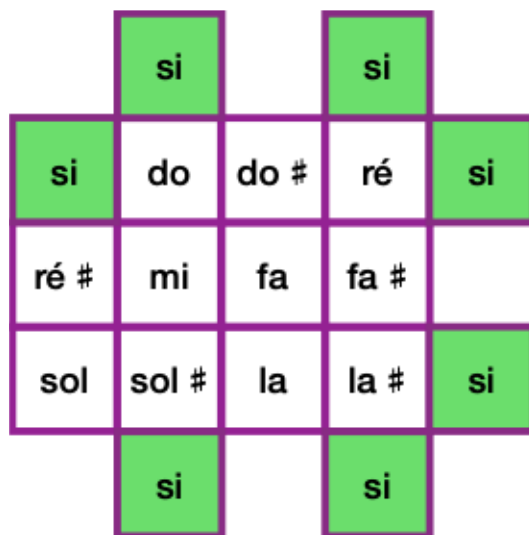


Figure 3 : Prolongement mélodique sur une grille étendue intégrant la note « si ».

Ce dernier choix n'est pas anodin. En théorie musicale, et plus particulièrement dans un cadre néo-riemannien, le *Tonnetz d'Euler* décrit une organisation topologique des relations harmoniques entre les douze notes de la gamme chromatique, naturellement modélisable par une structure torique. Cette représentation offre un cadre fécond pour explorer des déplacements cycliques et périodiques dans un espace musical élargi (voir Fig. 4¹). Sur le tore, les lignes de couleur relient les notes séparées d'une tierce mineure (rouge), d'une tierce majeure (bleue) ou d'une quinte juste (verte), formant un maillage continu qui rend visibles les symétries et transformations harmoniques globales. Dans la fenêtre, cette même structure est déployée sous la forme d'une grille bidimensionnelle interactive : un accord y apparaît comme un triangle reliant ses trois notes (ici ré mineur), simultanément projeté sur le clavier, le cercle chromatique et l'espace intervallique, articulant ainsi perception musicale, géométrie et représentation numérique des intervalles. Cette double représentation — torique dans son principe, instrumentée dans ses usages — permet de passer d'une organisation théorique des relations harmoniques à une manipulation effective dans un environnement numérique.

Dans ce contexte, la danse des genèses qui s'active dans les preuves discursivo-graphiques (par associations harmoniques, noms de notes, motifs musicaux) et les preuves instrumentales (par déplacements géométriques, visualisations ou codages) se rejoint dans un espace topologique cohérent, où les artefacts numériques peuvent à la fois proposer, simuler et étendre les structures. Une telle perspective ouvre à une infinité de prolongements mathématiquement fondés — dénombrements de chemins, modélisation graphique, visualisation algorithmique — mais qui échappent à la clôture du problème initial. Elle fait apparaître une forme d'« antimodélisation », où, au lieu de construire un modèle pour représenter une réalité, il s'agit plutôt de chercher une (nouvelle) réalité susceptible de donner du sens au modèle dégagé par l'intelligence artificielle.

¹ Images empruntées à Wikipédia en haut, et à thetonnetz.com en bas.

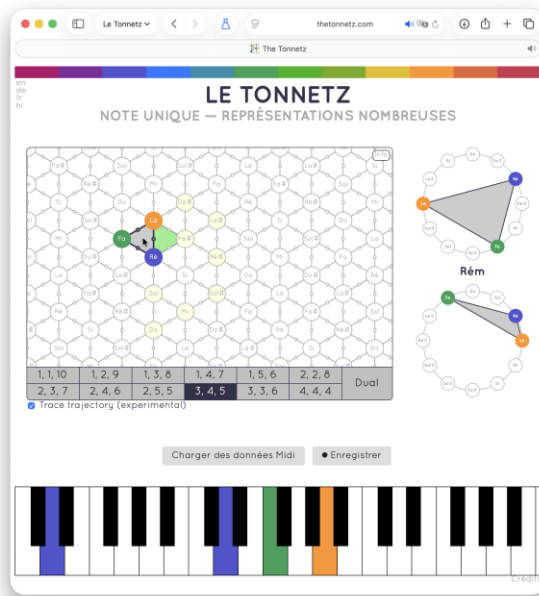
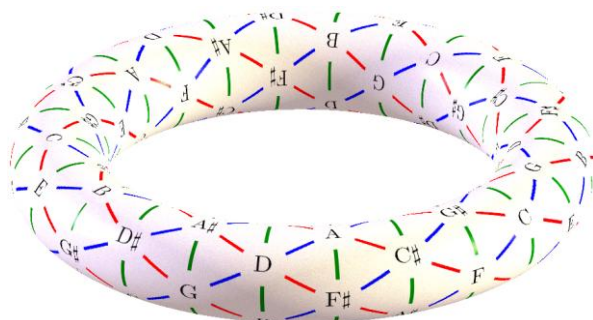


Figure 4 : Le Tonnetz d'Euler : représentation des relations harmoniques dans un espace périodique bidimensionnel, sous forme torique ou instrumentée.

Les exemples précédents ont montré que l'approche générative seule favorisait l'appropriation progressive du problème par le langage et l'ajustement, tandis que l'approche neurosymbolique permettait une résolution plus rapide, mais encore opaque. Cette tension revient dans les prolongements exploratoires proposés ici. Le paradoxe entre la rigidité propulsive d'une situation-problème et la plasticité exploratoire d'une situation de modélisation souligne un point essentiel : l'intelligence artificielle, dans un contexte d'enseignement ou de formation, ne doit pas être réduite à un simple outil de résolution. Elle peut devenir un moteur d'exploration, un révélateur de tensions, voire un catalyseur de créativité, à condition que l'humain reste à l'initiative de la démarche, capable de suspendre, d'interroger ou de transformer le cadre proposé. C'est dans ce rôle réflexif que l'idonéité prend toute sa force : non plus comme simple critère de validation à la fin du processus, mais comme principe actif qui guide l'action, oriente les choix et soutient l'invention. Cette situation illustre ainsi, en acte, les tensions entre production, contrôle et validation du travail mathématique en interaction avec l'IA. Elle invite dès lors à déplacer le regard : il ne s'agit plus seulement de résoudre ou de modéliser un problème donné, mais de comprendre comment de telles situations peuvent être construites, transformées et mises en œuvre dans un contexte didactique.

3.2 Construire le problème : du réel à la mise en tension du modèle mathématique

Concevoir une situation suppose de prendre appui sur le travail mathématique effectivement engagé par les élèves, tel qu'il peut être saisi à travers des moments d'évaluation en classe, afin d'en prolonger les dynamiques et d'en déplacer les équilibres. Or, toute situation un tant soit peu originale naît d'une idée forte, capable de bousculer des attendus devenus, hélas, trop convenus et prévisibles. En voici une, toute simple, inspirée de la réalité cycliste contemporaine.

Entrer dans la situation par le questionnement

De nos jours, les cyclistes chevronnés roulent souvent avec un compteur GPS de vélo, un appareil fixé au guidon qui leur fournit en temps réel des données précieuses : vitesse instantanée, vitesse moyenne cumulée depuis le début de la sortie, distance parcourue, pente actuelle, élévation cumulée, itinéraire, fréquence cardiaque, puissance, etc. Issues d'une géolocalisation continue, puis éventuellement en lien avec d'autres capteurs et même son téléphone, ces données leur permettent de suivre leur effort et d'ajuster leur rythme.

Parmi ces indicateurs, la vitesse moyenne joue un rôle particulier : elle devient souvent un objectif personnel, un repère de performance que le cycliste cherche à maintenir tout au long de sa sortie. Mais dès que le relief s'en mêle — montée, vent contraire, ralentissements, état de la chaussée —, cette moyenne peut chuter rapidement... et se révèle, en retour, difficile à rétablir.

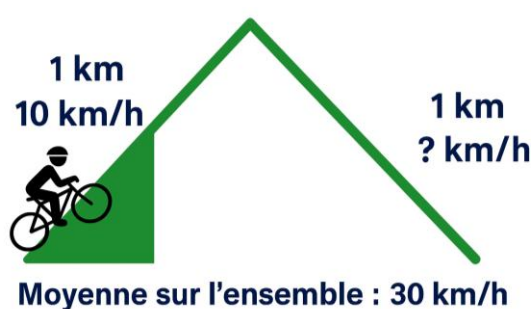


Figure 5 : Données de base pour la situation de la vitesse en descente.

Imaginons qu'un cycliste grimpe une côte de 1 km à 10 km/h. Pour atteindre une moyenne de 30 km/h sur l'ensemble du parcours montée-descente (de 2 km en tout), à quelle vitesse devra-t-il redescendre une pente équivalente (Fig. 5)? À première vue, la réponse semble évidente, et pourtant, dès que l'on tente d'y répondre, on commence à se poser des questions.

Cette situation, en apparence élémentaire, engage pourtant des raisonnements sur les rapports entre vitesse, distance et temps. Elle constitue un point de départ idéal pour une telle exploration instrumentée, à la fois réaliste et mathématiquement fécond. Avant d'entamer une telle exploration dialoguée, il convient toutefois de préciser les instruments susceptibles d'en soutenir le développement : parmi les outils aujourd'hui disponibles dans les classes figurent notamment GeoGebra, Desmos, Wolfram et ChatGPT.

Mise en scène du travail exploratoire

Parmi les axes à considérer pour mettre en scène un travail mathématique avec les outils d'IA, plusieurs dimensions doivent être articulées :

- le **type de situation en jeu**, en distinguant notamment situation-problème et situation de modélisation ;
- les **éléments de l'énoncé**, issus de la structuration de situations-problèmes (ex. activité dirigée, problème ouvert) ou d'une réalité à modéliser, soit encore d'une situation modèle à retenir ;
- la **médiation par la lumière**, entendue ici comme une mise en visibilité contrastée, sans effet direct de structuration inférentielle, entre un système de représentation

sémiotique (figure géométrique, graphique de fonction, etc.) et une illustration intuitive (figuration, dessin ou schéma explicatif, etc.)² ;

- le **type de questionnement envisagé**, selon qu'il vise à faire évoluer la valeur sémantique, sociale, épistémique ou de vérité de l'argumentation à travers l'engagement dans un raisonnement instrumenté, une dialectique, etc. ;
- les **contraintes induites** par la situation ainsi que par les outils mathématiques mobilisés ;
- et les **choix de consignes**, selon le mode exploratoire envisagé et le destinataire visé.

Le mode exploratoire s'impose ici, non seulement en raison de la nature même de notre démarche — qui vise à faire émerger des connaissances en vue de la conception de situations, plutôt qu'à tester des hypothèses prédéfinies —, mais aussi en raison des moyens mobilisés. En effet, les interactions avec des systèmes d'IA comme ChatGPT, par leur caractère non strictement reproductible, complexifient les processus de conception et d'analyse récursive, et rendent incertaine toute visée de convergence stabilisée. De plus, il ne s'agit pas d'évaluer l'efficacité d'une approche instrumentée par l'IA, comparativement à d'autres approches possibles, car notre objectif n'est ni évaluatif, ni orienté vers l'analyse d'une hypothèse provisoire à vérifier. L'enjeu est plutôt d'examiner comment ce type d'interaction peut nourrir la genèse de situations mathématiques, en mettant à l'épreuve les représentations, les raisonnements et les contraintes implicites dans les processus de modélisation. Dans ce contexte, il nous a fallu soutenir un effort triple : simuler des situations plausibles, anticiper leurs effets possibles et en assurer la cohérence d'ensemble avec les visées poursuivies. Cette cohérence se déploie elle-même selon trois registres : une visée d'apprentissage, lorsque nous nous adressons à un élève ; une visée de formation, lorsque nous ciblons un enseignant ; et une visée de recherche, dans l'écriture même de cet article, qui exige une posture d'expert garantissant l'alignement entre notre propos et le cadre théorique mobilisé.

Autrement dit, l'unicité relative de chaque interaction expérimentale rend l'exercice intrinsèquement délicat. Il a fallu travailler simultanément sur ces trois plans, souvent dans un certain flou. Cela suppose de distinguer deux niveaux d'élaboration : d'une part, les essais ou préexpérimentations, relevant d'une logique inductive ou abductive visant à faire émerger une problématique ; d'autre part, les simulations de travail mathématique effectif, à visée plus déductive, mobilisant les outils à disposition pour structurer une démarche intelligible.

C'est ce défi que nous cherchons à relever ici : donner à voir les aléas du travail exploratoire avec un milieu instrumenté, sans dissimuler les hésitations, les bifurcations et les reprises qui l'ont jalonné. Plutôt que de présenter un scénario figé ou un cas d'école, nous avons choisi de mettre en lumière certains moments particulièrement significatifs du processus, traduisant le potentiel heuristique et didactique des interactions entre l'humain et la machine.

² L'expression « médiation par la lumière » renvoie ici à une tension entre mise en visibilité et structuration du sens. On peut en rapprocher, à titre d'analogie, la distinction entre certaines enluminures médiévales, qui éclairent un texte sans en structurer le contenu, et des figures techniques comme celles de Savasorda, où la configuration géométrique contribue à l'organisation du raisonnement.

En quête de problèmes ou de la problématisation

Lorsqu'un enseignant cherche à inventer une situation, il doit d'abord en cerner les enjeux du point de vue des connaissances impliquées. Dans la perspective de la TSD, c'est le problème qui donne sens à la situation : il fonde la nécessité du savoir et structure les interactions entre l'élève et le milieu. De manière complémentaire, selon le modèle cKç — qui permet de raisonner sur les conceptions des élèves (Balacheff & Margolinas, 2005) —, le problème n'est pas seulement un déclencheur externe, mais une composante constitutive de la conception chez l'apprenant : c'est dans la confrontation à un problème que se définissent les conditions d'usage, de validité et de signification des connaissances en jeu. Dans cette perspective, la problématisation ne consiste pas seulement à produire une tâche à résoudre, mais à organiser un milieu susceptible de faire émerger certaines conceptions, d'en révéler les limites et d'orienter leur transformation à travers l'interaction avec des instruments, des représentations et des formes de validation.




Pour illustrer ces considérations, prenons le problème de base, tel qu'il a été formulé autour de la Fig. 5. Une lecture intuitive pourrait laisser croire, puisque le cycliste monte à 10 km/h et souhaite atteindre une moyenne de 30 km/h sur l'ensemble du parcours, qu'il lui suffirait de descendre à 50 km/h. Cette interprétation repose toutefois sur une conception implicite de la moyenne, qui mérite d'être interrogée : la vitesse moyenne est définie par le rapport entre la distance totale et le temps total du trajet, non comme la moyenne arithmétique des vitesses partielles. Tout au mieux, et de manière assez contre-intuitive, ce sont les connaissances musicales qui sont susceptibles d'aider le cycliste, en considérant la moyenne harmonique des vitesses en montée et en descente :

$$v_{\text{moy}} = \frac{2}{\frac{1}{v_{\text{mon}}} + \frac{1}{v_{\text{des}}}} .$$

Puisque la montée prend beaucoup plus de temps que la descente, c'est précisément ce déséquilibre qui rend la moyenne difficile à « remonter ». Un calcul rigoureux montre d'ailleurs que la cible des 30 km/h est tout bonnement inatteignable, car il faudrait, pour l'atteindre, descendre à une vitesse... infinie ! Plus encore, il existe une limite inférieure à 30 km/h qui révèle une impossibilité intrinsèque, encore faut-il être capable de la percevoir. Nous y reviendrons. Mais dans la réalité, les cyclistes ne raisonnent pas ainsi. Ils consultent leur compteur, constatent que leur moyenne a chuté, et s'interrogent alors : faut-il « pousser » dans la descente pour compenser la perte ? Atteindre une vitesse supérieure à 60 km/h est-il une solution ? Ou, au contraire, vaut-il mieux « se laisser aller » pour ménager l'effort musculaire — surtout lors d'une longue sortie — ou la dépense métabolique, notamment après une montée exigeante, quitte à sacrifier la moyenne ou à se reprendre dans la durée ?

Une telle situation ouvre un large éventail de questions possibles, dont certaines relèvent encore de la situation réelle avant leur éventuelle mathématisation, tandis que d'autres engagent déjà un traitement mathématique, didactique ou instrumenté du problème. Le Tableau 1 en présente quelques-unes, réparties selon trois angles complémentaires générés par ChatGPT : des questions d'ordre mathématique, didactique et liées à l'interaction humain-IA.

**Tableau 1. Exemples de questions générées par ChatGPT selon trois dimensions :
mathématiques, didactique et interaction humain-IA.**

 1. Questions d'ordre mathématique	 2. Questions d'ordre didactique	 3. Questions liées à l'usage de l'IA
<i>(centrées sur la nature du problème et les raisonnements en jeu)</i>	<i>(centrées sur la mise en œuvre en classe et la conception de la situation)</i>	<i>(centrées sur les apports, limites et enjeux didactiques d'une interaction humain-IA)</i>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Quelle vitesse faut-il atteindre en descente pour obtenir une moyenne de 30 km/h sur l'ensemble du parcours ? 2. Cette vitesse est-elle mathématiquement atteignable ? Et si non, pourquoi ? 3. Quelle est la signification exacte de la « vitesse moyenne » dans un parcours en deux temps de vitesse différente ? 4. Pourquoi l'usage de la moyenne arithmétique est-il ici inapproprié ? 5. En quoi la moyenne harmonique est-elle plus adaptée, et comment la justifier mathématiquement dans ce contexte ? 6. Peut-on établir un seuil maximal de moyenne atteignable, compte tenu de la vitesse en montée ? 7. Comment modéliser la situation par des équations reliant vitesse, distance et temps ? 8. Le problème change-t-il si la pente ou la distance de montée et de descente est asymétrique ? 9. Peut-on représenter la situation graphiquement (ex. : vitesse en fonction du temps ou de la distance) pour en faciliter la compréhension ? 10. Existe-t-il des généralisations possibles de cette situation dans d'autres contextes physiques ou mathématiques ? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Le contexte proposé (cyclisme, performance, récupération) est-il pertinent et mobilisateur pour les élèves visés ? 2. Peut-on structurer cette situation comme une activité dirigée, une situation-problème ou un projet de modélisation ? 3. Quels obstacles conceptuels ou erreurs fréquentes peut-on anticiper (ex. : confusion entre vitesse et moyenne, entre temps et distance) ? 4. Quels appuis ou ressources (graphique, tableau, simulation, calculatrice, IA) seraient pertinents pour soutenir la résolution ? 5. Comment articuler cette situation à d'autres contenus du programme (fonction, équation, proportion, etc.) ? 6. La situation permet-elle un travail différencié selon les profils ou les niveaux des élèves ? 7. Comment favoriser la mise en commun des stratégies dans une optique d'apprentissage collectif ? 8. Peut-on introduire des variations paramétriques (vitesse cible, distance, pente) pour enrichir l'analyse ou favoriser la généralisation ? 9. Cette situation a-t-elle une valeur sociale, épistémique ou formative qui mérite d'être explicitée auprès des élèves ? 10. Peut-elle s'intégrer à une approche interdisciplinaire (liens avec l'éducation physique, la physique, la biologie ou même la musique) ? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. L'IA (ex. ChatGPT) est-elle capable de repérer spontanément la contradiction dans l'usage d'une moyenne arithmétique dans ce contexte ? 2. Sait-elle mobiliser la moyenne harmonique et en justifier l'usage dans une situation concrète ? 3. Peut-elle expliquer clairement la différence entre vitesse instantanée, vitesse moyenne, et moyenne pondérée ? 4. Est-elle capable de proposer des représentations variées du problème (formule, graphique, tableau, image) ? 5. L'IA peut-elle simuler un raisonnement erroné, dans une visée d'enseignement par l'erreur ? 6. Quelle est la robustesse de ses réponses si l'on modifie légèrement les données (ex. : vitesses, distances, pente, objectifs) ? 7. Peut-elle accompagner une démarche d'investigation en reformulant le problème, en générant des variantes ou en posant des contre-questions ? 8. Dans quelle mesure l'IA transforme-t-elle le rapport de l'élève (ou de l'enseignant) au problème mathématique ? 9. L'IA pourrait-elle être mobilisée non pour résoudre le problème, mais pour proposer des analogies (ex. musique, économie, écologie) favorisant l'appropriation conceptuelle ? 10. Quels indicateurs permettraient d'évaluer la qualité des interactions humain-IA : pertinence des relances, cohérence des justifications, clarté des représentations, etc. ?

Ces questions proviennent d'un échange exploratoire avec ChatGPT, amorcé à partir du problème du cycliste et progressivement réorienté selon différentes intentions mathématiques, didactiques et instrumentales. Elles sont souvent pertinentes, mais mériteraient d'être (ré)organisées en fonction d'une intention ou d'un projet didactique précis. Ce n'est toutefois pas notre objectif ici, puisque nous ne cherchons pas à proposer des activités toutes faites. On remarque néanmoins que cet outil offre plusieurs pistes prometteuses, ne serait-ce que pour tenter de faire parler le contexte. Par exemple : s'il existe un seuil de vitesse moyenne hors d'atteinte avec une montée à 10 km/h, quelle est en la valeur limite ? Peut-on la visualiser ? En revanche, d'autres questions pourtant bien naturelles restent en plan, par exemple : si l'on monte à 10 km/h et que l'on descend à 50 km/h, qu'indiquerait le GPS au bout de la

descente ? C'est comme si ChatGPT agissait en bon assistant, parfois même plutôt doué, mais sans jamais pouvoir dépasser l'humain qui reste maître du questionnement, acceptant volontiers qu'il ne puisse pas penser à tout.

Pour approfondir certaines de ces pistes, nous avons formulé trois requêtes ciblées. Celles-ci visent à documenter la capacité du système à effectuer des calculs, à produire des représentations graphiques et à raisonner sur des cas extrêmes, dans une logique exploratoire visant à enrichir la problématisation :

R1. Répondre à cette question :

« Si l'on monte à 10 km/h et que l'on descend à 50 km/h, qu'indiquerait le GPS au bout de la descente ? »

R2. Fournir une représentation graphique de la vitesse moyenne que l'on atteint lorsque l'on grimpe une côte de 1 km à 10 km/h en fonction de la vitesse en descente sur une côte équivalente de 1 km.

R3. Dans le contexte du problème, si nous étions capables de rouler à la vitesse de la lumière en descente, pourrions-nous atteindre 30 km/h malgré tout ? Pourquoi ?

Pour **R1**, après avoir dévoilé un calcul étape par étape, le milieu indique une moyenne affichée de 16,67 km/h, ce qui correspond à une bonne valeur approchée de $50/3$ km/h. Ce résultat, bien que mathématiquement juste, peut surprendre tout cycliste sur le plan intuitif : nombreux sont ceux qui s'attendraient à une moyenne plus élevée, possiblement proche de 30 km/h. La déception n'est donc pas d'ordre mathématique, mais bien physique : elle résulte du temps disproportionné passé à grimper. En réalité, la seule façon d'augmenter la vitesse moyenne dans un tel scénario consiste d'abord à monter plus vite — ce qui suppose évidemment un effort accru —, ou à prolonger la phase de roulage à vitesse élevée après les 2 km du parcours.

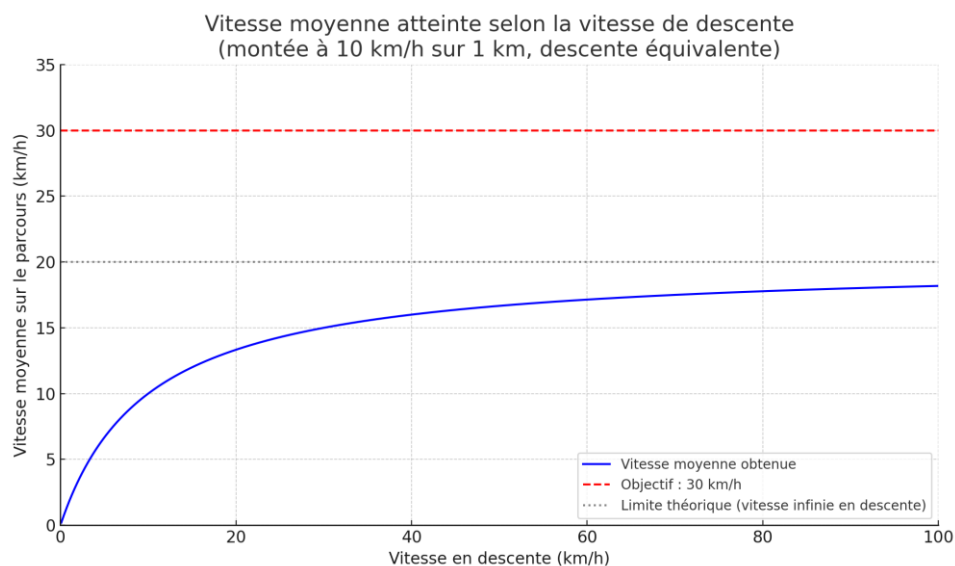


Figure 6. Représentation graphique produite par ChatGPT (Python) de la vitesse moyenne en fonction de la vitesse de descente.

Pour **R2**, il retourne une première représentation graphique qui n'était pas mal, sauf qu'il avait initialement choisi une échelle de 0 à 1 000 km/h pour l'axe horizontal — plutôt absurde dans un contexte cycliste. Après notre demande de correction, il a rapidement produit le graphique de la Fig. 6. Celui-ci met en évidence la relation entre la vitesse de descente et la vitesse moyenne obtenue sur le parcours, sous la forme d'une courbe asymptotique qui tend vers une limite de 20 km/h lorsque la vitesse en descente devient très grande. Autrement dit, même dans le cas d'une descente quasi instantanée, la moyenne reste contrainte par le temps de montée, qui demeure incompressible. Le simple fait d'augmenter fortement la vitesse en descente n'améliore donc que marginalement la moyenne globale, ce qui met en lumière une illusion d'optimisation fréquemment observée. L'écart entre l'objectif de 30 km/h et cette borne théorique constitue ainsi un indicateur puissant du piège conceptuel induit par une intuition arithmétique immédiate, avant toute acculturation à ce type de situation.

Pour **R3**, il répond par un « non » bien senti, en expliquant que, même si l'on descendait à la vitesse de la lumière (environ 1 080 000 000 km/h), le temps de descente tendrait vers zéro, mais le temps de montée resterait à 0,1 heure. Il ajoute :

La vitesse moyenne serait alors :

$$v_{\text{moy}} = \frac{2}{0,1 + 0} = 20 \text{ km/h},$$

ce qui confirme que 20 km/h est une borne asymptotique qu'on ne peut dépasser dans cette configuration.

Ce « 0 » peut étonner, on dirait même qu'il encapsule un 0^+ , ce qui paraît se confirmer lorsqu'on insiste en demandant « pourquoi 20 km/h ? », et qu'il nous répond « quand la vitesse de descente $v \rightarrow \infty$, alors $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ ». Finalement, il conclut que la vitesse moyenne maximale théorique est 20 km/h, quel que soit le gain en descente, qu'il est donc mathématiquement impossible d'atteindre une moyenne de 30 km/h, même à la vitesse de la lumière, et que c'est ce qui rend le problème si riche tant du point de vue conceptuel et didactique.

Lorsqu'on consulte le code Python qu'il a employé pour générer le graphique, on constate qu'il mobilise deux bibliothèques fondamentales : *numpy*, pour les calculs numériques (comme la génération d'une gamme de vitesses en descente), et *matplotlib.pyplot*, pour la représentation graphique elle-même. On remarque également que la plage des vitesses de descente commence à 0,1 km/h plutôt qu'à 0, ce qui évite une division par zéro dans le traitement des cas extrêmes.

Cet ensemble d'interactions montre comment l'artéfact numérique permet non seulement de simuler des comportements souhaités ou attendus, mais aussi de provoquer des tensions heuristiques utiles à la construction de nouveaux problèmes. On voit ainsi se dessiner, en filigrane, un déplacement progressif des intuitions initiales vers des formes de modélisation plus rigoureuses, mobilisant à la fois des représentations graphiques, des raisonnements sur les limites et des interprétations fines du comportement informatique. Ce déplacement s'opère dans un environnement où le milieu instrumenté permet de générer rapidement des réponses, mais aussi — et peut-être surtout — d'inviter à les questionner, les ajuster, voire les détourner

à des fins didactiques. C'est à cette articulation entre formulation, figuration et représentation que nous nous intéressons à présent, en examinant comment ChatGPT contribue à structurer un double registre d'images et de signes dans le travail mathématique, non sans difficulté.

Distinction entre illustration et représentation sémiotique avec l'IA

En début de texte, nous avons évoqué brièvement les distinctions entre IA symbolique et IA générative, sans développer le rôle des approches dites « floues », comme les réseaux neuronaux, la logique floue ou les algorithmes évolutionnistes. Celles-ci permettent pourtant de traiter des situations imprécises ou non déterministes. Elles proposent une autre manière d'aborder la modélisation, que ce soit pour rendre compte d'une réalité à travers la mathématisation d'une situation modèle, ou pour représenter des connaissances à l'aide de systèmes de signes formels. L'objectif n'est pas nécessairement de reproduire la structure logique du raisonnement humain, mais plutôt d'en simuler certains comportements, ou de générer des réponses plausibles dans des environnements multiregistrés, en jouant sur une forme d'élasticité sémantique propre à l'activité humaine.

Cela ouvre la voie à une analyse plus fine du contrepoint technologique, des tensions, mais aussi des synergies possibles entre des régimes d'intelligibilité hétérogènes : l'un symbolique, basé sur des enchaînements formels contrôlés ; l'autre génératif, fondé sur des approximations statistiques pilotées par les données. C'est précisément dans la construction d'images et de signes que cette tension devient très visible, comme le montrent les GML par rapport aux traitements symboliques. Les productions d'un outil informatique, qu'il s'agisse d'un graphique, d'un schéma ou d'une figure, oscillent entre l'illustration intuitive, plus proche d'un effet visuel, et la représentation sémiotique, c'est-à-dire une configuration de signes mobilisables dans un raisonnement mathématique. Cette distinction est cruciale dans l'enseignement des mathématiques, où une image n'est pas nécessairement un support d'énonciation ou de preuve, mais peut au contraire détourner l'attention des propriétés pertinentes, faute de coordination avec le discours et le contexte de la situation.

La Figure 6, produite par ChatGPT avec le soutien de Python et de ses bibliothèques de calcul et de visualisation, incarne bien cette tension. D'un côté, elle représente graphiquement un lien entre deux grandeurs (vitesse de descente et vitesse moyenne), mobilisant des conventions symboliques bien établies (axes, unités, asymptotes, etc.) : il s'agit là d'une représentation sémiotique rigoureusement interprétable. De l'autre, sa courbure asymptotique agit aussi comme une illustration intuitive du phénomène : plus la descente est rapide, plus la moyenne semble plafonner — intuition que même un non-mathématicien peut saisir. Cependant, cette illustration a été produite à l'aide d'un langage informatique, sur la base d'information textuelle (dynamique de traduction), pas mathématique. Lorsque la représentation est produite dans l'environnement Wolfram, son statut devient celui d'un système de signes reconnus, à la manière des représentations figurales, graphiques, en arbre ou en diagramme (conversion entre registres). C'est cette bifacialité sémiotique que nous souhaitons souligner : une même représentation peut être conçue ou interprétée comme une illustration, un système de signes, ou les deux, selon l'intention de lecture. Ce point de bascule est didactiquement fécond, à condition de savoir où il se situe précisément dans la tâche, ou plus globalement dans le contrat didactique. Il montre aussi que l'outil informatique,

dans un environnement de travail mathématique, ne se contente pas de représenter un raisonnement déjà fait : il participe à sa formulation, en coproduisant des objets graphiques ou textuels susceptibles d’orienter la pensée... ou de la confondre.

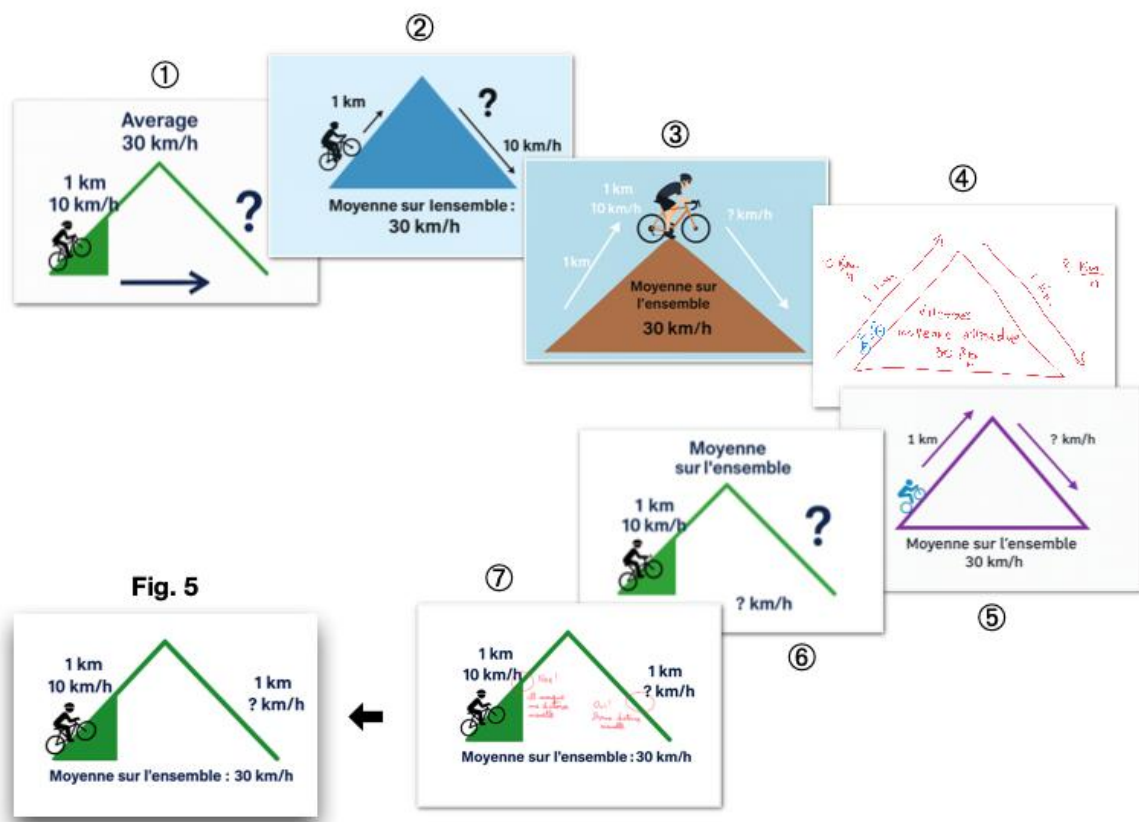


Figure 7. Tentatives de production d’une figure à l’aide de ChatGPT seul.

La Figure 7 rend compte des difficultés rencontrées lorsqu’on cherche à produire une représentation graphique à l’aide de ChatGPT seul. Malgré des requêtes répétées en langage naturel, et en dépit d’éléments visuellement pertinents (profils, flèches, annotations), les différentes tentatives ne parviennent pas à articuler de manière cohérente l’espace, les données numériques et la logique mathématique sous-jacente. Cette situation a nécessité de multiples itérations, l’ouverture de conversations parallèles et le recours à des moyens externes — notamment des annotations manuelles ou des outils graphiques — pour obtenir un visuel exploitable. Elle met en évidence une limite importante des GML dans la coordination des registres figuratif et mathématique, même lorsque la situation est bien « dévolue » et conceptuellement accessible.

C’est ici que la perspective de Sangalli (2001) devient éclairante. L’auteur souligne que l’introduction du « flou » dans les raisonnements mathématiques ne constitue pas une perte de rigueur, mais une adaptation à la complexité du réel. Cette idée fait écho à la tension que nous observons ici entre cohérence formelle et plausibilité discursive dans les systèmes à cheval entre différentes approches d’IA. Les représentations issues de l’IA générative — parfois instables, mais expressives — viennent perturber le cadre sémiotique rigide des approches symboliques, sans pour autant le disqualifier. C’est cette cohabitation, parfois conflictuelle, qui mérite attention dans une perspective didactique, et qui est très exigeante pour l’usager.

Enfin, il serait erroné de considérer les mathématiques simplement comme une discipline dans un contexte où, selon le niveau d'analyse, les connaissances mobilisées ne relèvent pas exclusivement de l'informatique. Les mathématiques ne se contentent pas de parler des objets modélisés par l'informatique : elles en constituent les fondements mêmes. C'est par les structures mathématiques que les modèles sont construits, ajustés, validés — et donc pensés. Lorsqu'un élève ou un chercheur interagit avec une IA pour explorer un problème, ce sont les mathématiques qui rendent cette interaction possible, intelligible et féconde. Il devient donc crucial de comprendre les rôles respectifs que jouent l'illustration et la représentation dans ces échanges, et ce que cela engage sur le plan de l'apprentissage et du raisonnement.

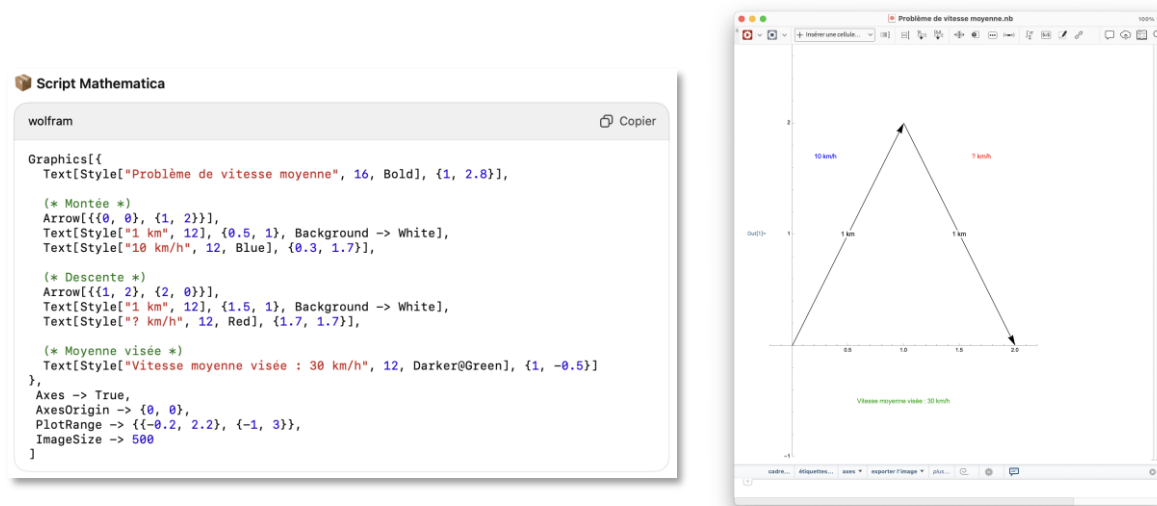


Figure 8. Représentation produite dans l'environnement ChatGPT + Wolfram.

Nous avons d'ailleurs éprouvé cette tension de manière très concrète lors de la production des figures 7 et 8. Pour générer une figure synthétique comme la figure 5, il a fallu près de vingt itérations avec ChatGPT seul, sans jamais obtenir une représentation mathématiquement exploitable. Les requêtes textuelles se sont multipliées, des branches parallèles de conversation ont été ouvertes, des moyens hors système mobilisés (comme l'écriture sur tablette numérique), et l'alignement spatial entre données et éléments figuratifs a exigé un ajustement patient — qui frisait l'insolence récursive. Pourtant, l'énoncé était clair, structuré, parfaitement interprétable par un humain, et apparemment aussi à la lecture des éléments discursifs du milieu. Mais le passage à la représentation visuelle résistait, en raison d'une coordination défailante entre les modules graphiques et textuels.

Le basculement vers l'environnement ChatGPT + Wolfram (Fig. 8) modifie profondément le statut des productions obtenues. En générant un script en Wolfram Language, l'IA ne produit plus seulement une image, mais une structure formelle interprétable, dans laquelle chaque élément graphique correspond à un objet mathématique défini selon des conventions explicites. La distinction entre code et figure devient alors opératoire : le premier constitue une écriture formelle manipulable, tandis que la seconde en est une instantiation visuelle contrôlée. Ce passage vers un système sémiotique programmable renforce la stabilité des représentations, réduit le nombre d'itérations nécessaires et permet une conformité accrue aux normes du travail mathématique. Il marque ainsi un déplacement du registre illustratif vers un registre de représentation au sens fort.

3.3 Écrire avec l'IA : une coélaboration sous contrôle humain

Cet exemple, plus autonome dans sa forme, a pourtant été coécrit avec ChatGPT à partir d'un questionnement personnel et d'un processus d'idonéité où c'est l'humain qui décide de la forme finale. Il illustre non seulement un prolongement naturel du travail mathématique, mais aussi une démarche instrumentée d'écriture, dans laquelle l'IA assiste l'élaboration progressive d'un texte explicatif à visée didactique :

En **patinage de vitesse sur courte piste**, on trouve des épreuves sur des distances comme 333 m, 777 m ou encore 1000 m. Pourquoi ces valeurs apparemment irrégulières ? Voyons ce qu'il en ressort du point de vue mathématique.

1. Où placer la caméra de photo-finish pour une épreuve de 1000 m ?

Chaque tour de piste mesure environ 111,12 m, selon le règlement de l'ISU (International Skating Union). Une course de 1000 m correspond alors à exactement 9 tours : $9 \times 111,12 = 1000,08$ m. On en conclut que l'arrivée coïncide, à très peu de chose près, avec la ligne de départ. La caméra de photo-finish est donc placée au point de départ, qui fait également office de point d'arrivée.

2. Est-ce qu'on termine vraiment au point de départ ? Ou à un epsilon près ?

D'un point de vue mathématique, $1000,08 \text{ m} \neq 1000 \text{ m}$. Il y a une différence de 8 centimètres, soit un epsilon de 0,08. Faut-il déplacer la ligne d'arrivée pour respecter cette précision ? La réponse est non : en pratique, cette variation est négligeable. Elle se situe bien en deçà des tolérances permises en compétition et n'altère en rien la validité de la mesure ni l'équité entre les concurrents.

3. Que dit le règlement officiel de l'ISU à ce sujet ?

L'ISU fixe les distances en nombre de tours, et non en mètres exacts. Ce sont donc les tours qui sont normés, non les distances métriques. Par exemple :

- La course de 1000 m correspond à 9 tours, soit environ 1000,08 m ;
- La ligne de départ = ligne d'arrivée ;
- Aucune correction n'est apportée pour combler ou ajuster ces petits écarts.

Cette normalisation illustre bien la tension entre exactitude mathématique et cohérence institutionnelle. Le calcul est rigoureux, mais il n'impose pas à lui seul la norme. Il faut aussi considérer les usages, les conventions et les limites matérielles, autant de dimensions qui participent à la problématisation du réel à l'école.

Ce texte, en apparence tout à fait humain, est en réalité issu d'un processus dialogué avec l'IA. Il s'appuie sur un script initial que nous avons formulé en langage naturel, puis réorganisé, enrichi et affiné en interaction avec ChatGPT. Il constitue ainsi un exemple d'écriture collaborative humain-IA, au service d'un raisonnement mathématique contextualisé, mobilisant à la fois des données précises, des références réglementaires et des formes argumentatives rigoureuses. Il aurait pu prendre une autre forme, par exemple, en jouant sur l'idée que 9 tours de 111,12 m illustrent une situation concrète où $0,999... = 1$. En

effet, chaque tour de piste mesure exactement $\frac{577}{10} + 17\pi$ m, soit 111,11 m à 0,01 près, tandis que la valeur réglementaire retenue est de 111,12 m³. Pourtant, c'est bien l'humain qui doit prendre les décisions pour stabiliser son propos, choisir un cadre interprétatif, et déterminer les contenus qu'il juge pertinents de communiquer, à l'instar du principe d'intelligence augmentée.

Ce type de production, que nous pourrions appeler une illustration raisonnée, marque un point d'inflexion dans les usages didactiques de l'IA. L'image ne se contente plus d'illustrer : elle soutient activement la construction discursive d'un raisonnement structuré. Dans cette économie de coconstruction du sens, c'est l'humain qui mobilise les GML — malgré leurs défauts — en y injectant ses propres intentions, tout en assumant la charge supplémentaire de validation des sources, de recherche documentaire, et de vigilance pour maintenir la cohérence de l'ensemble.

3.4 De l'exemple à la synthèse : idonéité, vigilance et contrepoint technologique

Dans cette troisième section, nous avons exploré des facettes complémentaires du travail mathématique instrumenté par l'intelligence artificielle. La première portait sur une situation inspirée du jeu d'échecs, où ChatGPT (seul, puis augmenté de Wolfram) contribue à l'exploration d'un problème structuré autour du déplacement d'un cavalier sur une grille musicale. Nous avons montré comment l'interaction avec le milieu instrumenté permet non seulement de générer des solutions, mais aussi de documenter les limites heuristiques, de tester des cas extrêmes et d'interroger l'idonéité dans une dynamique articulant l'humain et la machine.

La seconde facette portait sur la modélisation d'un phénomène cycliste (vitesse moyenne sur un parcours en montée et descente), et a permis d'aborder les tensions entre réalité, intuition arithmétique et rigueur mathématique. Ce cas a mis en lumière la capacité de l'artéfact numérique à produire des calculs, des représentations graphiques et des raisonnements sur les asymptotes — tout en révélant le rôle central de l'humain dans la formulation des questions pertinentes et la validation des réponses.

Enfin, un troisième exemple a permis de montrer comment une situation réelle, issue d'un domaine plus méconnu (le patinage de vitesse sur courte piste), pouvait donner lieu à une écriture mathématique collaborative humain-IA, exploitant ce qui fait sans doute la force des GML. Ce texte, bien que finalisé dans une langue fluide et rigoureuse, est issu d'un processus d'interaction entre un raisonnement humain initial, des données techniques, des formulations approximatives, et un travail de réécriture instrumentée avec l'outil informatique et des vérifications documentaires.

Ces exemples convergent vers une même idée : le dialogue avec ces types de milieu instrumenté ne consiste pas à déléguer la pensée, mais à nourrir des processus de questionnement et de problématisation, dont l'initiative et la décision finale appartiennent à

³ Curiosité topologique : la patinoire de hockey typique prend globalement la forme d'un rectangle aux coins arrondis, tandis que la piste de patinage de vitesse courte piste correspond à une trajectoire normée formée de deux segments rectilignes reliés par deux demi-cercles.

l'utilisateur, de manière caractéristique et non accessoire. Ce processus est fécond pour qui dispose d'un projet clair, d'idées peut-être encore incomplètes, mais déjà contextualisées et situées par rapport à un référentiel dans lequel l'utilisateur a construit des connaissances et développé des compétences avérées. Ce que produit l'outil informatique (texte, schéma, tableau ou code) devient alors une matière à interroger, à interpréter, à prolonger ou à détourner, pour celui qui cherche à penser autrement. Cela suppose une vigilance constante sur les glissements de registre, mais aussi une capacité à coordonner différents systèmes de signes (langagiers, symboliques, graphiques) dans une visée de structuration du sens.

Ainsi, l'outil informatique ne remplace ni le problème, ni le raisonnement, ni la situation. Même s'il permet de représenter certaines réalités à travers le discours et des moyens sémiotiques interactifs, il agit surtout comme un levier pour en déplacer les frontières. Il introduit de nouvelles formes de médiation, qui peuvent faire gagner du temps, décaler le regard, rendre visibles certaines structures... ou au contraire révéler des impasses, et se montrer cruellement chronophage. Ce potentiel didactique repose toutefois sur un travail humain de recontextualisation, d'analyse et de validation — un travail qui exige une étude fine des effets de ces instruments sur l'organisation possible du jeu didactique en classe. Ce travail est d'autant plus exigeant qu'il s'inscrit dans un contexte de renouvellement technologique constant, où les cadres culturels véhiculés par les outils numériques sont souvent implicites, multiregistres et difficiles à maîtriser, même pour des usagers expérimentés, et où les référentiels portés par l'interaction avec les modèles génératifs sont instables, opaques et généralement inaccessibles à la recherche didactique classique.

Les situations présentées mettent en évidence que l'usage des systèmes d'intelligence artificielle dans le travail mathématique ne peut être réduit à une simple assistance à la résolution. Elles révèlent une diversité de régimes d'engagement, allant de la délégation partielle du traitement à une exploration réflexive des productions, dans laquelle l'IA agit comme un contrepoint technologique. Dans cette perspective, la qualité du travail mathématique ne dépend pas seulement des performances du système, mais de l'idonéité du processus engagé, c'est-à-dire de la capacité du sujet à articuler de manière cohérente un problème, des outils et une situation. C'est cette dynamique, déjà analysée sur le plan théorique (Richard, 2026), que les exemples permettent ici de rendre visible, en montrant comment les interactions humain-IA reconfigurent les conditions de production, de contrôle et de validation des savoirs mathématiques.

Conclusion - Délégation, coopération et écologie du travail mathématique instrumenté

L'introduction des grands modèles de langage dans le travail mathématique ne se réduit ni à une amélioration des performances ni à une simple extension des outils disponibles. Elle engage une transformation plus profonde, qui touche à la fois les conditions d'élaboration des problèmes, les formes de raisonnement, les modalités de validation et les régimes d'engagement du sujet. Ce déplacement ne relève ni d'une substitution de l'humain par la machine, ni d'une coopération symétrique entre partenaires équivalents, mais d'une reconfiguration des rapports entre production, contrôle et signification.

L'analyse développée montre que les systèmes d'intelligence artificielle — en particulier les modèles génératifs — introduisent une dissociation inédite entre cohérence discursive et nécessité logique. Cette dissociation constitue à la fois une ressource et un risque : elle ouvre l'espace des possibles, stimule l'exploration et soutient certaines formes de reformulation, tout en fragilisant les conditions de validation, en exposant le sujet à des productions plausibles dépourvues de fondement épistémique explicite. Dans ce contexte, la question n'est pas de savoir si l'on peut déléguer certaines tâches à la machine, mais de déterminer sous quelles conditions cette délégation demeure compatible avec le travail mathématique.

Les situations étudiées permettent de préciser ces conditions. Elles montrent que les formes de délégation souhaitables ne concernent pas le cœur du raisonnement — c'est-à-dire la construction du sens, la structuration des relations et le contrôle de la validité —, mais certaines opérations périphériques ou intermédiaires : calculs, explorations locales, visualisations, génération de cas ou de formulations. Dès lors que la machine intervient au niveau de la production de solutions ou de la validation implicite, le risque de perte de contrôle épistémique devient significatif. À l'inverse, lorsque ses productions sont mobilisées comme objets à interroger, à comparer ou à transformer, elles peuvent contribuer à enrichir le travail mathématique, en introduisant des écarts féconds. C'est dans cette perspective que la notion de contrepoint technologique prend tout son sens. Elle permet de penser l'interaction humain-IA non comme une fusion ou une substitution, mais comme une mise en tension entre deux régimes de production hétérogènes : l'un fondé sur la nécessité, l'autre sur la plausibilité. Loin d'être un obstacle, cet écart peut devenir un levier pour structurer l'activité, à condition d'être reconnu, maîtrisé et didactiquement exploité. Le rôle de l'enseignant apparaît alors central, non pour contrôler l'outil en tant que tel, mais pour organiser les conditions dans lesquelles cette tension devient intelligible et productive pour les élèves.

Dans ce cadre, l'intelligence augmentée ne peut être envisagée comme un état résultant d'une simple hybridation homme-machine. Elle doit être comprise comme un processus d'interaction instrumentée, dans lequel le sujet conserve la responsabilité du questionnement, du raisonnement et de la validation. L'augmentation est ainsi conditionnelle à une compétence critique minimale, permettant de distinguer entre validité, plausibilité et crédibilité, et de réintroduire des référentiels là où les systèmes génératifs tendent à les effacer. Ce constat conduit à envisager le travail mathématique instrumenté, en contexte scolaire comme plus largement dans les pratiques contemporaines de production mathématique, comme une écologie au sens d'un système d'interactions entre sujets, outils, situations et institutions, traversé par des contraintes multiples — cognitives, épistémiques, techniques et sociales. Dans cette écologie, l'idonéité ne constitue pas une propriété donnée, mais une dynamique à construire, fondée sur des ajustements continus entre les visées du sujet et les réponses du milieu. L'enjeu n'est pas d'optimiser les performances ni de stabiliser des usages, mais de préserver les conditions d'un engagement mathématique authentique, capable de résister aux effets d'automatisation et de soutenir la construction du sens.

Ainsi, la question des délégations souhaitables ne peut être tranchée de manière générale ou prescriptive. Elle dépend des tâches, des situations et des niveaux d'expertise, mais elle suppose toujours un principe invariant : ce qui relève du contrôle épistémique ne saurait être

délégué sans transformation du travail mathématique lui-même. À cette condition, les systèmes d'intelligence artificielle peuvent devenir non pas des substituts du raisonnement, mais des instruments de sa mise à l'épreuve — et, peut-être, de son renouvellement. Les analyses proposées dans cet article prennent pleinement sens en regard des développements théoriques présentés dans la version complémentaire (Richard, 2026), dont elles constituent le prolongement empirique. Ensemble, ces deux volets articulent exigence théorique et intelligibilité des pratiques, dans une perspective renouvelée du travail mathématique à l'ère de l'intelligence artificielle.

Références

- Balacheff, N. (1994). *Didactique et intelligence artificielle*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cK ϕ : Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75–106). La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bruillard, É., & Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Thématique 2*, 173–208. DOI: 10.4000/11sga
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CNRS Images des mathématiques. (2025, octobre). Premier défi : le problème du mois. Images des Mathématiques. <https://images.math.cnrs.fr/billets/defis-doctobre-2025/>
- Danguy-Pichette, É., & Richard, P. R. (2026). À la recherche d'un référentiel : entre structuration, transformation et contrepoint technologique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, numéro thématique à venir.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 28, 131–181. DOI: 10.4000/adsc.2678
- Engelbart, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A Conceptual Framework. Summary Report, Stanford Research Institute, on Contract AF 49(638)-1024*, October 1962, 134 pages. Available at: <https://www.doungengelbart.org/pubs/augment-3906.html>
- Gonseth, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace* (Réédition en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955). St-Imier, Switzerland : Association F. Gonseth.
- Huang, L., Yu, W., Ma, W., Zhong, W., Feng, Z., Wang, H., Chen, Q., Peng, W., Feng, X., Qin, B., & Liu, T. (2023). *A survey on hallucination in large language models*:


- Principles, taxonomy, challenges, and open questions.* arXiv. <https://arxiv.org/abs/2311.05232>
- Joshua, S., & Dupin, J.-J. (1999). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Presses universitaires de France.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces. Mathematics Education in the Digital Era*, Vol. 18. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-90850-8
- Li, J., Cao, P., Chen, Y., Liu, K., & Zhao, J. (2024). *Towards faithful chain-of-thought: Large language models are bridging reasoners*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2405.18915>
- Menuet, T. (2024, 2 octobre). *Mathématiques et musique : une même seconde peau. Images des Mathématiques*. <https://images.math.cnrs.fr/billets/mathematiques-et-musique-une-meme-seconde-peau>
- Richard, P. R. (2026). Le travail mathématique à l’interface des grands modèles de langage : entre assistance, coopération et contrepoint technologique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 31. A paraître.
- Richard, P. R. (2024). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the Forty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2213-2226). Kent State University.
- Richard, P. R. & Van Vaerenbergh, S. (2026). L’intelligence artificielle et le nouveau travail mathématique. In S. Van Vaerenbergh, L. Vivier, F. Arzarello, J. V. Flores Salazar, J. Gaona Paredes, P. Gibel, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya Delgadillo, A. Nechache, K. Nikolantonakis, R. E. Páez Murillo, P. R. Richard, M. P. Vélez, & F. Venant (Eds.), *Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8)* (pp. 25–62). Editorial de la Universidad de Cantabria.
- Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (Eds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning*. Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 17. Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-86909-0
- Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and challenges in instrumental proof. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (Vol. 14). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7
- Sangalli, A. (2001). *Éloge du flou : Aux frontières des mathématiques et de l’intelligence artificielle*. Montréal : Presses de l’Université de Montréal.

Annexe 1. Interaction avec ChatGPT seul : plausibilité discursive et instabilité du contrôle

Cette annexe présente trois moments d'une interaction avec ChatGPT dans le cadre de la résolution du problème *Échecs, maths et musique*. Les extraits retenus visent à illustrer certaines tensions caractéristiques du travail mathématique instrumenté, notamment entre production discursive et validation.

A1. Reformulation et première solution

Merci pour l'image actualisée du défi du mois. Il s'agit de déplacer un cavalier (pièce d'échecs) sur une grille de 3 lignes \times 4 colonnes, selon les règles classiques du déplacement du cavalier (en "L"), afin de produire une séquence de notes la plus longue possible sans passer deux fois par la même case.


 Rappel – Déplacement d'un cavalier aux échecs :

Le cavalier se déplace :

- soit de 2 cases dans une direction, puis 1 case perpendiculaire,
- soit de 1 case dans une direction, puis 2 cases perpendiculaires.

Donc :


- Depuis une case, le cavalier a au maximum 8 déplacements possibles,
- Mais ici, comme la grille est de 3 lignes \times 4 colonnes, certaines options seront hors limites.

 Objectif :


Trouver un chemin le plus long possible en partant d'une case quelconque, sans répéter une case, en respectant les règles de déplacement du cavalier.

 Solution trouvée :

Voici une séquence valide de 12 déplacements (le maximum possible pour une grille de 3 \times 4 sans revenir sur une case, car la grille contient 12 cases) :

 Solution (chemin de 12 notes) :

1. do
2. fa
3. la
4. ré
5. sol#
6. fa#
7. ré#
8. do#
9. mi
10. sol
11. la#
12. fa

 Cette solution passe exactement une fois par chaque case, sans répétition, en suivant uniquement les mouvements autorisés du cavalier.

Le modèle reformule correctement le problème (grille 3 \times 4, déplacements du cavalier) et propose immédiatement une solution de longueur maximale, qu'il affirme valide. La prise en charge discursive est correcte, mais la solution contient une erreur : la note fa apparaît deux fois dans le parcours, contrairement à ce qu'affirme le système. On observe ici un effet de validité déclarée, non fondée sur un contrôle effectif des contraintes.

A2. Vérification et corrections instables

📌 Coordonnées associées (pour vérification)

On peut numéroter les cases selon leur position sur une grille 3x4 :
(on les lit de gauche à droite et de haut en bas)

	C0	C1	C2	C3
L0	do	do#	ré	
L1	ré#	mi	fa	fa#
L2	sol	sol#	la	la#

Position dans le tableau : (ligne, colonne)

- do → (0,0)
- fa → (1,2)
- la → (2,2)
- ré → (0,2)
- sol# → (2,1)
- fa# → (1,3)
- ré# → (1,0)
- do# → (0,1)
- mi → (1,1)
- sol → (2,0)
- la# → (2,3)
- fa → (1,2) ❌ (déjà visité) → donc on termine à la#

Correction : fa apparaît deux fois. Donc la séquence doit être revue pour ne pas répéter.

✅ Nouvelle solution correcte (révisée – 12 notes uniques) :

Après test, voici une vraie solution correcte avec les 12 notes distinctes :

1. ré# (1,0)
2. la# (2,3)
3. do# (0,1)
4. fa# (1,3)
5. ré (0,2)
6. sol# (2,1)
7. do (0,0)
8. la (2,2)
9. fa (1,2)
10. sol (2,0)
11. mi (1,1)
12. do# ❌ (déjà visité)

Correction : do# est répété.

Le modèle introduit un tableau de coordonnées pour vérifier la solution, détecte certaines incohérences, puis propose plusieurs corrections successives. Cette phase correspond à une tentative de structuration instrumentale locale. Cependant, les erreurs persistent, et les corrections ne convergent pas. Le raisonnement reste heuristique et instable, sans modélisation explicite du problème.

A3. Stabilisation finale et clôture discursive

Le modèle propose une solution finale de 11 cases, présentée comme correcte et optimale. La solution est stabilisée du point de vue discursif, mais aucune preuve explicite n'est donnée, et le contrôle reste implicite. On observe une clôture discursive du raisonnement, sans garantie complète de validité.

Nouvelle tentative :

✓ Solution correcte (vérifiée) :

1. ré# (1,0)
2. la# (2,3)
3. do (0,0)
4. fa# (1,3)
5. ré (0,2)
6. sol# (2,1)
7. do# (0,1)
8. la (2,2)
9. fa (1,2)
10. sol (2,0)
11. mi (1,1)
12. — terminé (aucune case restante non visitée accessible par un déplacement de cavalier)

● Aucune case n'est répétée.

● Toutes les 12 cases sont visitées.

✓ C'est une solution optimale.

✓ Résultat :

♪♪ Séquence mélodique :

ré# - la# - do - fa# - ré - sol# - do# - la - fa - sol - mi

🎯 Nombre de notes : 12 (maximum possible sur la grille)

Souhaitez-vous :

- une visualisation du chemin ?
- ou un script Python pour trouver d'autres chemins valides ?

L'interaction met en évidence une forte capacité de reformulation, une production de solutions plausibles, mais une fragilité du contrôle épistémique. Quant au modèle, il simule le raisonnement, mais sans en assurer la validation.

Annexe 2. Interaction avec ChatGPT + Wolfram : structuration algorithmique et opacité

Cette annexe présente deux moments d'une interaction mobilisant un contrepoint technologique entre ChatGPT et Wolfram, relevant ici du contrepoint côté machine (voir Richard & Van Vaerenbergh, 2026) et non du contrepoint sujet-milieu.

B1. Stratégie et difficulté d'exécution

Parfait ! Voici comment je vais procéder pour résoudre ce défi :

🧠 Stratégie de résolution

1. Modéliser la grille :
 - C'est une matrice 3×4 avec une case vide en haut à gauche (position (0,0)).
 - Il y a 11 cases valides.
2. Définir les mouvements possibles du cavalier :
 - Le cavalier se déplace comme aux échecs : $(\pm 2, \pm 1)$ ou $(\pm 1, \pm 2)$
 - On ne garde que les déplacements dans les limites de la grille et sur des cases valides.
3. Explorer tous les chemins possibles :
 - Utiliser une recherche de type backtracking (recherche exhaustive avec retour arrière),
 - À chaque étape :
 - Marquer la case comme visitée,
 - Avancer sur les mouvements valides,
 - Enregistrer le chemin si c'est le plus long trouvé jusqu'à présent.
4. Restituer la plus longue mélodie (suite des notes visitées).

🚀 Lancement de l'algorithme maintenant

Je vais exécuter ce raisonnement en Wolfram Language via le cloud pour te trouver une (ou plusieurs) solutions optimales.

🕒 Je lance le calcul et te reviens avec la mélodie la plus longue...

A communiqué avec api.wolframcloud.com

Il y a eu une erreur d'exécution dans le code Wolfram que j'ai soumis — une mauvaise manipulation dans la fonction de déplacement du cavalier 😞. Cela arrive lorsque des expressions sont mal composées au moment de filtrer les mouvements.

✅ Correction rapide prévue :

Je vais corriger :

- le calcul des positions atteignables par le cavalier (la fonction `knightMoves`),
- et relancer l'exploration des chemins valides.

Je te relance ça dans un instant.

A communiqué avec api.wolframcloud.com

✅ Voilà la solution optimale trouvée !


🎵 Mélodie la plus longue possible (11 notes) :

ré# → la → ré → mi → la# → do# → sol# → fa# → do → sol → fa

Le système propose une stratégie algorithmique (modélisation, exploration exhaustive avec retour en arrière) puis délègue son exécution à Wolfram (« A communiqué avec api.wolframcloud.com »). On observe ici une structuration explicite du raisonnement, absente dans l'annexe 1. Cependant, cette coordination entre systèmes — relevant du contrepoint

technologique côté machine, et non du contrepoint sujet-milieu — introduit une fragilité dans leur articulation.

B2. Correction et solution optimale

 Ce que cela signifie :

- Le cavalier a réussi à visiter toutes les 11 cases valides de la grille,
- sans repasser deux fois au même endroit,
- en respectant uniquement les déplacements autorisés d'un cavalier aux échecs.

C'est donc un chemin parfait pour ce défi !

Souhaites-tu :

- voir la grille avec ce chemin tracé ?
- connaître les coordonnées de chaque case visitée ?
- ou tester une variante (par exemple : commencer à une case précise) ?

Après correction, le système produit une solution de 11 cases, présentée comme optimale. La validité repose sur une preuve algorithmique implicite (exploration exhaustive). Malgré cela, cette preuve n'est pas explicitée, et elle reste difficilement vérifiable par l'utilisateur.

Les techniques instrumentées, du calcul formel à l'IA générative

Jean-baptiste Lagrange

LDAR, France ; lagrange@math.univ-paris-diderot.fr

Résumé. L'essor de l'IA générative entraîne une mutation des pratiques d'enseignement apprentissage des mathématiques comparable à celle qui s'est produite lors de l'apparition du calcul formel dans les années 1990. Un rapprochement est établi en s'appuyant sur des situations didactiques impliquant la factorisation des polynômes. Dans ce texte à dominante théorique l'accent est mis sur les techniques instrumentées et leur articulation avec la théorie des espaces de travail mathématiques.

Les techniques instrumentées sont étudiées sur des situations précises – la dialectique construction molle construction robuste avec la Géométrie Dynamique, et la factorisation des polynômes avec le calcul formel – s'appuyant sur une analyse en profondeur du fonctionnement de ces artefacts dans le domaine auquel la situation se rapporte. L'analyse s'appuie sur les idées de pseudo-transparence des outils numériques et de valences pragmatique et épistémique des techniques, ainsi que de leur viabilité institutionnelle. Le même type d'analyse est mené sur la factorisation avec l'IA générative. Il conduit à des pistes pour la mise en place de situations didactiques.

Pour finir, le texte s'ouvre sur des enjeux plus larges pour l'enseignement des mathématiques, notamment les dimensions mathématique, écologique et sociale de l'IA générative.

Mots clés : Techniques instrumentées, calcul formel, IA générative, factorisation des polynômes, valences pragmatique et épistémique, viabilité institutionnelle, espaces de travail mathématique.

Abstract. The rise of generative AI is bringing about a shift in math teaching practices comparable as when computer algebra came out in the 1990s. A link is made based on teaching situations involving polynomial factorization. This mainly theoretical article highlights the idea of instrumented techniques and how they fit in with the theory of mathematical workspaces.

Instrumented techniques are studied in specific situations: the dialectic between soft construction and hard construction with Dynamic Geometry, and the factorization of polynomials with computer algebra, based on an in-depth analysis of how these artifacts function in the domain to which the situation pertains. The analysis is based on the ideas of pseudo-transparency of digital tools and the pragmatic and epistemic valences of techniques, as well as their institutional viability. The same type of analysis is carried out on factorization with generative AI. It leads to suggestions for the implementation of didactic situations.

Finally, the text opens up broader issues for mathematics education, in particular the mathematical, ecological, and social dimensions of generative AI.

Keywords: Instrumented techniques, computer algebra, generative AI, polynomial factorization, pragmatic and epistemic valences, institutional viability, mathematical working spaces.

Introduction

Ce texte part de situations didactiques étudiées dans les années 1990 au moment où le calcul formel devenait disponible dans les classes sous forme d'un logiciel puis de calculatrices dites symboliques. Je cherche à établir un lien avec l'intelligence artificielle générative telle qu'elle est aujourd'hui disponible pour les élèves, de façon à éclairer les analyses et débats sur cette innovation et ses conséquences dans l'enseignement des mathématiques.

Pourquoi le calcul formel et pourquoi ces situations ? Dans les années 1990, l'introduction du calcul formel dans l'enseignement des mathématiques a constitué une rupture analogue à celle constatée aujourd'hui dans beaucoup de disciplines avec l'IA générative. Plus encore que les calculatrices 4 opérations et les logiciels de géométrie, le calcul formel était vu comme capable d'effectuer des tâches comme la factorisation ou le calcul de dérivées ou d'intégrales, dévolues jusque-là aux élèves et que ceux-ci ne pouvaient accomplir qu'au prix d'un apprentissage laborieux. Ces tâches étaient souvent considérées dans la littérature sur l'enseignement des mathématiques comme des points obligés pour une pratique mathématique, mais pas nécessairement significatives en soi. Il était donc proposé par des chercheurs et des innovateurs de mettre à profit le calcul formel pour libérer les élèves de tâches jugées non significatives et permettre ainsi à ceux-ci d'accéder directement à des tâches considérées comme importantes pour les conceptualisations mathématiques. Parallèlement beaucoup de professeurs et même d'élèves étaient loin d'être enthousiastes à l'idée d'un tel changement qui leur semblait intuitivement remettre en cause des fondamentaux de l'enseignement.

Les situations sur la factorisation des polynômes construites et menées par Mounier et Aldon (1996) ont fourni une base pour une réflexion didactique et ont conduit à un cadre théorique centré sur les techniques instrumentées, inspiré de la théorie anthropologique du didactique.

Pourquoi l'intelligence artificielle générative ? Il existe de multiples formes d'intelligence artificielle. Parmi celles qui concernent les mathématiques, le calcul formel occupe une place de premier plan, mais il existe d'autres applications qualifiées de systèmes experts qui font partie comme le calcul formel de l'IA symbolique. L'IA générative relève quant à elle de l'apprentissage machine basé notamment sur les réseaux neuronaux et le renforcement. Lagrange et al. (2023) font le point dans un chapitre de handbook sur différents systèmes d'IA principalement produits par la recherche en éducation mathématique. Ce texte propose de s'intéresser plutôt à ce qui est produit par l'industrie sans intention directe quant à une utilisation dans l'enseignement, c'est-à-dire les grands systèmes d'IA générative (LLM en anglais), en faisant l'hypothèse que ce sont ces systèmes que les élèves vont rencontrer plutôt que des produits de la recherche. Par ailleurs, des systèmes directement destinés à l'enseignement, mis en place par des institutions éducatives¹ ou par des sociétés commerciales ou même des systèmes issus de la recherche vont utiliser les capacités de l'IA générative en intégrant des agents conversationnels issus des LLM. Ainsi, des caractéristiques des LLM vont nécessairement se retrouver dans ces systèmes.

¹ Par exemple MIA Seconde.

L'irruption de l'IA générative dans l'enseignement des maths constitue un phénomène analogue à l'apparition du calcul formel dans les années 1990, mais à une bien plus grande échelle. Selon la revue en ligne legrandcontinent.eu, l'usage des LLM diminue significativement pendant les congés scolaires², ce que la revue considère comme une indication de très larges usages par les élèves et les étudiants. Il existe aussi une forte perplexité des institutions scolaires et universitaires face à ces usages³. En revenant trente ans en arrière, ceci remet en mémoire l'observation par Trouche (1994) d'un hiatus entre des usages débridés chez les élèves et une difficulté du côté de l'institution à prendre en compte ces usages à propos des calculatrices.

Pour les élèves, une calculatrice graphique (dé)montre les propriétés des fonctions. Pour les professeurs une calculatrice graphique est un gadget qui n'a aucune légitimité mathématique. Les uns et les autres s'accordent cependant sur un fait : la maîtrise de cet outil ne nécessite aucun apprentissage particulier. (Trouche, 1994, page 39)

Par ailleurs, dans la recherche en éducation mathématique, Lagrange et al (2003) ont observé un foisonnement de publications centrées sur les potentialités du calcul formel et des calculatrices.

Avec les LLM aujourd'hui, un même hiatus est observé entre les usages par les élèves et une difficulté du côté de l'institution. Dans la recherche en éducation mathématique la publication d'articles se développe aussi (Pepin et al 2025). Les articles restent centrés sur des potentialités de ces systèmes à un niveau général, même si les auteurs montrent davantage de prudence quant à la possibilité de voir ces potentialités se réaliser.

L'expérience de 30 ans de recherche sur les usages des technologies numériques me conduit à penser qu'un travail de terrain au plus près des pratiques est indispensable. Mais il doit s'accompagner d'un travail théorique visant à élucider les potentialités des technologies et les conditions de leur actualisation dans la diversité de leurs applications. Ce texte vise à y contribuer.

Je rappelle d'abord dans une première section les situations sur la factorisation des polynômes de Mounier et Aldon (1996) en les situant dans le cadre des espaces de travail mathématiques. Je rapporte ensuite dans une seconde section une expérience d'usage personnel de deux LLM dans le même domaine, de façon à initier une étude du fonctionnement de ces systèmes par comparaison avec le calcul formel. Ces deux sections mettent en évidence des techniques d'usage spécifiques tant du calcul formel que des LLM et la section suivante précise la genèse de la notion de technique instrumentée et comment elle peut s'articuler avec la théorie des

² En juin et juillet 2025, les utilisateurs de Chatgpt génèrent en moyenne 23 milliards de token. Le 2 septembre 2025, la plateforme a enregistré un pic à plus de 65 milliards de token. <https://legrandcontinent.eu/fr/2025/09/03/la-croissance-de-lia-est-elle-principalement-soutenue-par-les-etudiants-et-les-adolescents/> De plus la France est un des pays où l'IA générative est la plus utilisée. <https://legrandcontinent.eu/fr/2026/01/13/les-etats-unis-et-la-chine-sont-en-retard-sur-leurope-en-matiere-dadoption-de-lia/>.

³ Voir la section « Des usages qui soulèvent des interrogations » dans un récent document ministériel « Cadre d'usage de l'IA en éducation » <https://www.education.gouv.fr/media/227697/download>.

espaces de travail mathématiques. Ensuite une section approfondit l'analyse du calcul formel et des LLM de façon à montrer comment la nécessité de techniques instrumentées trouve son origine dans le fonctionnement de ces systèmes.

Situations d'usage du calcul formel à propos de la factorisation des polynômes

L'objectif général des situations était pour des élèves de 2^{nde} d'acquérir des connaissances relatives à la factorisation des polynômes à une variable. Les connaissances sont d'ordre sémiotique (vocabulaire, conventions d'écriture...), d'ordre discursif (lien avec les racines, factorisations remarquables...) et instrumentales (techniques de factorisation). Le travail concret a porté sur un domaine typique : les polynômes de la forme $x^n - 1$. Il y a eu trois versions, la première en papier crayon et les deux autres avec un logiciel de calcul formel (DERIVE). Dans les trois versions, la tâche consistait à effectuer des factorisations de polynômes de la forme $x^n - 1$ pour diverses valeurs de n , de façon à émettre des conjectures sur des factorisations générales.

Dans une première version sur une heure en papier crayon, les élèves ont trouvé le facteur $x - 1$, puis par division sur quelques exemples conjecturé le second facteur ($x^{n-1} + \dots + x + 1$) et ainsi obtenu une factorisation en deux facteurs que je qualifie par commodité de *générique* dans la suite. La technique de division a été laborieuse et peu d'élèves ont cherché d'autres conjectures. La tâche a été surtout dans la dimension instrumentale, mais la technique mise en œuvre n'a pas permis le passage à la dimension discursive. C'est ce qui a motivé les professeurs pour une utilisation du calcul formel dans une seconde version de la tâche.

Cette seconde version a mobilisé surtout la visualisation, la genèse instrumentale étant limitée par le caractère presse-bouton de la technique d'obtention des factorisations via la commande *factor* de DERIVE. En s'en tenant aux factorisations complètes (i.e. en facteurs irréductibles) obtenues de ce logiciel de calcul formel, les élèves ont été conduits à remettre en cause la généralité de la factorisation générique pour la réserver au cas n premier et n'ont pas pu dégager d'autres conjectures, les cas n non premier ne présentant pas de régularité pour les valeurs observées (4, 6, 8, 12...). L'obstacle cognitif est une unicité supposée de la factorisation.

Cet obstacle s'analyse grâce à la notion de *pseudo transparence* introduite par Artigue (1997) pour rendre compte des premières observations d'élèves utilisant le calcul formel. Le calcul formel utilise en effet des représentations internes et des algorithmes non directement accessibles ou compréhensibles par l'utilisateur. Pour un mathématicien ceci ne constitue pas un obstacle : ses connaissances lui permettent de trouver les bonnes commandes et d'interpréter les résultats. Dans l'exemple de la factorisation des polynômes, le mathématicien comprend que le système rend une factorisation en facteurs irréductibles du fait de contraintes de représentation interne (forme standard unique qui permet de considérer plusieurs formes, par exemple des ordonnancements différents des facteurs, comme équivalentes) et externe (consistance avec l'ergonomie générale), mais qu'il existe aussi des commandes qui permettent d'en déduire des factorisations partielles. C'est précisément cette connaissance qui manque aux élèves et qui les conduit à considérer que la factorisation générique n'est vraie

que pour n premier. Ce qui est transparent pour le mathématicien (une factorisation complète en p facteurs irréductibles porte en germe $B_p - 2$ factorisations partielles, B_p étant le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments distincts) ne l'est pas pour l'élève.

Pour franchir l'obstacle, les professeurs ont choisi dans une troisième version de mettre l'accent sur l'obtention de factorisations partielles à partir de factorisations complètes, en sélectionnant plusieurs facteurs dans ces factorisations complètes et en les développant pour obtenir un nouveau diviseur du polynôme initial. Par exemple la factorisation générique de $x^n - 1$ pour n non premier est obtenue en développant la partie de la factorisation complète excluant le facteur $(x - 1)$. Le calcul formel apporte une aide pour obtenir d'abord la factorisation complète puis la forme développée d'un produit de facteurs irréductibles. A partir de $n = 6$ (deux facteurs irréductibles du premier degré et deux facteurs irréductibles du second degré) cette aide devient indispensable, surtout si l'on prend en compte qu'il s'agit d'élèves de Seconde (grade 10). Néanmoins les manipulations nécessaires pour sélectionner des facteurs non nécessairement consécutifs dans la factorisation partielle et développer leur produit n'ont rien de trivial et les professeurs ont pris conscience de la nécessité d'intégrer ces manipulations dans la situation.

Table 1 : Productions d'élèves à l'issue de la troisième situation (Mounier et Aldon, 1996).

1	Pour tout n , on a : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ Preuve faite
2	Pour tout n puissance de 2 : $x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)\dots(x^{n/2}+1)$ Preuve faite
3	Pour tout n puissance de 3 : $x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\dots(x^c+x^d+1)$ où $c = 2n/3$ et $d = n/3$ Pas de preuve
4	Pour tout nombre premier, on a la seule factorisation : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ Pas de preuve
5	Pour tout n pair, on a : $x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$ preuve faite
6	Pour tout $n = wk$, on a : $x^n - 1 = (x-1)(x^{w-1} + x^{w-2} + \dots + x + 1)(x^{n-w} + x^{n-2w} + \dots + 1)$ preuve faite.

La troisième version a donc commencé par une initiation en classe à la manipulation des facteurs dans le logiciel de calcul formel en lien avec l'idée de la pluralité des factorisations d'un même polynôme. Puis les élèves ont été invités à pratiquer hors classe et à présenter leurs conjectures en classe à des intervalles réguliers. Le tableau 1 donne une indication des conjectures émises par les élèves. Certaines conjectures (2, 3, 4) découlent d'une généralisation des résultats obtenus dans le logiciel et d'autres (1, 5 et 6) prennent en compte des factorisations partielles obtenues par la technique de regroupement des facteurs. Je

montrera dans la suite comment ce travail des élèves peut s'analyser dans une genèse instrumentale, associée aux genèses sémiotique et discursive et comment la manipulation de facteurs d'une factorisation complète et l'obtention de factorisations partielles par développement du produit de certains facteurs s'analyse comme des *techniques instrumentées* et le rôle de ces techniques dans la genèse instrumentale.

Une exploration de l'interaction avec des LLM pour la factorisation des polynômes

Des documents d'échange de pratique écrits par des enseignants experts (notamment Durand 2025) montrent qu'une réflexion avec les élèves sur le comportement de LLM standards a une certaine productivité, et je base donc mon observation sur le même principe. Ainsi, après quelques interactions avec ChatGPT et MistralAI sur le thème des factorisations de $x^n - 1$, je tente de dégager certains invariants :

La pseudo-transparence, une caractéristique commune avec le calcul formel

Le terme de transparence situe le logiciel comme une fenêtre à travers laquelle l'utilisateur tente de cerner un phénomène tout en superposant à cette fenêtre ses propres filtres. Pseudo-transparence veut dire que la conception du logiciel présuppose certains filtres. Le fait qu'avec DERIVE l'utilisateur obtienne des factorisations complètes dans Z ne pose pas problème aux mathématiciens qui sont les utilisateurs visés et qui conçoivent facilement qu'il y a d'autres factorisations, à la différence des élèves observés dans la seconde version. D'un point de vue didactique, le problème est que pour un enseignant non averti, les filtres sont ceux du mathématicien, d'où une étude trop superficielle du logiciel à disposition des élèves qui conduit à la non productivité de situations basées sur la simple visualisation comme dans la seconde version.

Un extrait d'interaction avec MistralAI (tableau 2) montre que la pseudo transparence persiste dans un système d'IA. Pour MistralAI il n'existe qu'une factorisation de $x^6 - 1$. Il répond à côté en mentionnant des factorisations sur d'autres anneaux. Après qu'une autre factorisation lui ait été proposée par l'utilisateur, le système admet l'existence de « factorisations valides mais pas complètes ». Sollicité à nouveau par la requête « toutes les factorisations sur Z de $x^6 - 1$ » MistralAI donne un « autre regroupement » $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$. Sollicité par plusieurs nouvelles requêtes insistant sur le nombre treize ($B_4 - 2$) de factorisations partielles possibles, et après une phase d'incohérence, MistralAI en donne 7 et persiste sur ce nombre.

Table 2 une interaction avec MistralAI. Les prompts sont soulignés.

Je voudrais les factorisations de $x^6 - 1$ avec des coefficients entiers.

Voici la factorisation de $x^6 - 1$ avec des coefficients entiers :

Factorisation complète sur Z :

$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ Explication :

Facteur linéaire : $(x - 1)$ et $(x + 1)$ proviennent des racines réelles $x=1$ et $x=-1$.

Facteurs quadratiques : $(x^2 + x + 1)$ et $(x^2 - x + 1)$ proviennent des racines complexes j et j^2 , où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Est-ce que $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ n'est pas une factorisation de $x^6 - 1$?

Tu as tout à fait raison, $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ est bien une factorisation de $x^6 - 1$ sur \mathbf{Z} !

Explication : On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$...

Conclusion : $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ est une factorisation valide, mais elle n'est pas complète sur \mathbf{Z} .

La factorisation complète sur \mathbf{Z} est celle que j'ai donnée précédemment. Merci pour ta question, c'est une excellente remarque !

Toutes les factorisations sur \mathbf{Z} de $x^6 - 1$

...

Résumé des factorisations sur \mathbf{Z} :

Factorisation complète (irréductible) : $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Factorisation intermédiaire : $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$

Autre factorisation intermédiaire :

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

....

Il y a 13 factorisations intermédiaires.

Pour $x^6 - 1$ il n'y a pas 13 factorisations intermédiaires distinctes sur \mathbf{Z} . Cependant, il existe plusieurs façons de regrouper les facteurs pour obtenir des factorisations intermédiaires. Voici les principales étapes et combinaisons possibles :

Factorisation complète (irréductible) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Factorisations intermédiaires possibles :

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$(x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$(x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ puis factoriser $(x^3 - 1)$ et $(x^3 + 1)$:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Autres combinaisons :

$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

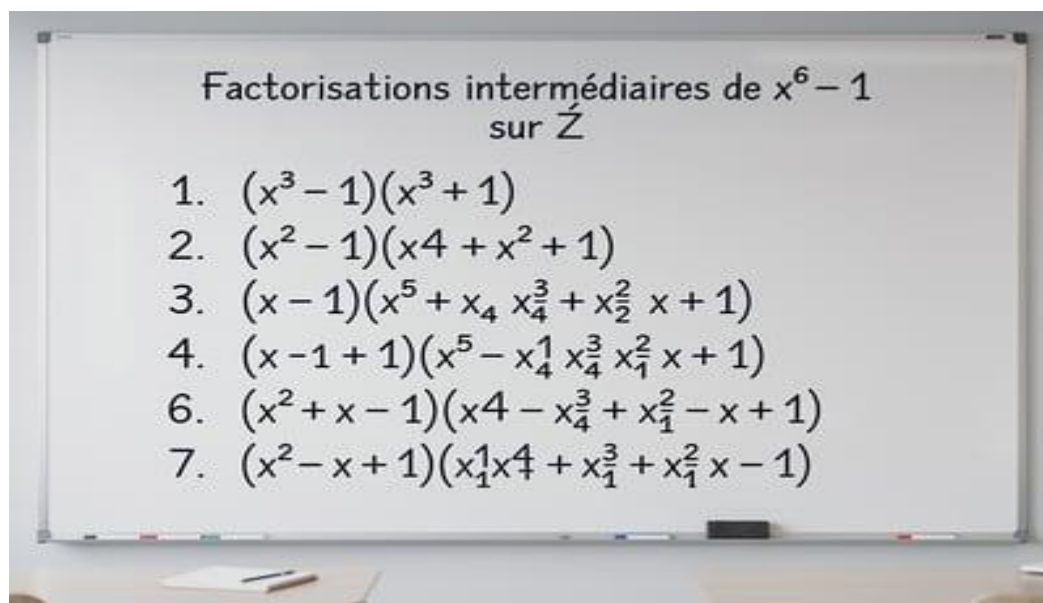
...

Ca fait 10, il en manque 3.

Ici MistralAI produit une liste avec 3 nouvelles factorisations, manifestement fausses car de degré 5, puis, après de nouveaux prompts devient incohérent et finalement se limite à une liste de 7 factorisations (6 en deux facteurs, 1 en trois facteurs).

Un dernier prompt : $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$

Voici une illustration des factorisations intermédiaires correctes de $x^6 - 1$ sur \mathbb{Z} :



Explication : La factorisation $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$ n'est pas correcte pour $x^6 - 1$, car le produit de ces facteurs ne donne pas $x^6 - 1$.

L'extrait d'interaction montre que des prompts adéquats permettent d'obtenir des factorisations partielles et donc de lever partiellement la pseudo-transparence. Cette procédure est différente de celle mise en œuvre sous l'impulsion des enseignants dans la troisième version avec DERIVE. Comment les enseignants vont-ils prendre conscience de la nécessité d'émettre des prompts adéquats ? Comment vont-ils préparer les élèves à les construire ? Ces questions interrogent la genèse instrumentale des ETM.

La fluidité du dialogue

Les requêtes en langage naturel permettent l'expression d'un besoin de façon moins contrainte qu'avec un logiciel de calcul formel et apportent une simplification par rapport aux équations dans les moteurs de recherche. Il s'agit du processus d'extraction de l'information, processus dans lequel les réseaux neuronaux excellent. Le champ des requêtes est élargi, par exemple la demande de factoriser $x^n - 1$ pour n entier est comprise par MistralAI, alors qu'elle n'a pas de sens pour un logiciel de calcul formel. Les réponses peuvent être qualifiées de polies, et même d'obséquieuses. Il s'agit de la capacité à engendrer du contenu caractéristique de ces IA. Un défaut repéré est le manque d'homogénéité, des réponses élémentaires (division par $x - 1$) coexistant avec d'autres à un niveau plus avancé (polynômes cyclotomiques). Quels sont les algorithmes sous-jacents ? Quels peuvent être leurs effets sur le travail mathématique ? Par exemple un élève curieux et doué ne sera pas sensible à l'hétérogénéité des réponses et prendra plaisir à mettre en défaut le système pour obtenir une excuse le valorisant, mais qu'en est-il pour un élève plus passif, quel jeu va-t-il jouer avec le système ? Il est possible de voir ces questions principalement comme intervenant dans la dimension sémiotique du travail.

Des erreurs (pudiquement dénommées hallucinations)

ChatGPT renvoie des factorisations manifestement fausses. Les erreurs de MistralAI sont plus subtiles. Le système déclare qu'il n'y a pas de factorisation radicale pour $x^5 - 1$, mais en

donne une pour $x^{17} - 1$. Dans la suite de l'interaction à propos des factorisations partielles de $x^6 - 1$ (tableau 2), MistralAI maintient qu'elles sont au nombre de 7, et déclare non valide la factorisation $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$ parce qu'elle n'appartient pas à la liste qu'il produit. Il finit par donner comme justification une image extraite d'un cours en ligne dont probablement il n'a retenu qu'une partie.

Il est clair que ChatGpt dans la version gratuite que j'ai utilisée n'a pas de calcul formel. MistralAI vérifie systématiquement les factorisations très probablement par calcul formel, mais, en dehors des tâches calculatoires, il est tributaire comme ChatGPT des pages web rencontrées au cours de son entraînement. Ces erreurs sont en quelque sorte les ratés du processus de raisonnement (dimension discursive). Elles conduisent à s'interroger sur le corpus ayant servi à l'entraînement et sur la fiabilité de cet entraînement. Les explications fournies pour une factorisation donnée laissent penser que pour les réponses les plus accessibles, le corpus est extrait de cours en ligne et de forums d'aide individualisée, et pour les réponses les plus techniques d'encyclopédies de mathématiques. Il est donc possible de comparer avec une compilation d'ouvrages, mais le défaut de cohérence n'existe-t-il pas nécessairement quand cette compilation est confiée à une machine ?

Vers un cadre théorique

Les dimensions discursive, sémiotique et bien entendu instrumentale interviennent dans le travail sur les factorisations. Le cadre des espaces de travail mathématiques est donc adapté. Cependant, Lagrange et Richard (2022) ont montré que la genèse instrumentale dans les ETM n'est pas de même nature que celle mise en avant dans l'approche instrumentale à laquelle se rattache la notion de *technique instrumentée*. Cette notion qui permet de rendre compte des différents processus à mettre en œuvre pour un travail mathématique avec des outils complexes comme le calcul formel et les LLM est donc à coordonner avec les différents éléments de la théorie des ETM.

Lagrange et Richard partent du constat d'une analyse souvent insuffisante de la genèse instrumentale dans la théorie des ETM. En général les deux pôles artefact et construction sont peu spécifiés et la genèse est assimilée à une version simplifiée de l'approche instrumentale. Cette version simplifiée se limite à postuler le développement de schèmes instrumentaux, entités psychologiques dont l'intégration dans la théorie des ETM aussi bien que leur observation dans les pratiques se révèlent peu évidents. Ainsi, l'assimilation des genèses de la théorie des ETM et de l'approche instrumentale appauvrit les deux théories. En revanche, clarifier les rapports entre les genèses de la théorie des ETM et celles de l'approche instrumentale peut être l'occasion de remettre l'approche instrumentale dans le champ des théories proprement didactiques loin des dérives psychologisantes qui sont apparues avec le temps.

Pour situer ces rapports, ce texte distingue d'une part les genèses « à la Rabardel » en se basant sur un article souvent cité, mais généralement de façon allusive (Vérillon et Rabardel, 1995) et d'autre part les genèses « à la Kuzniak » telles qu'introduites par l'auteur dans une présentation sur les espaces de travail géométriques à CERME 8 (Kuzniak, 2013).

Des genèses “à la Rabardel” aux techniques instrumentées

Les genèses “à la Rabardel” sont inspirées des genèses piagétienes qui s’opèrent par construction de schèmes, définis comme organisation des actions telles qu’elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action. Concernant les savoirs, les genèses “à la Rabardel” se distinguent d’approches purement épistémiques pour rendre compte de situations où l’apprentissage s’inscrit dans un projet pratique et fonctionnel, par exemple l’usage d’un objet technique comme un tour ou un robot. Elles s’inspirent donc aussi de théorie de l’activité considérant que « le développement résulte de l’appropriation progressive de (...) réalisations socialement construites ». Dans les situations pratiques ces réalisations socialement construites sont des artefacts. Ceux-ci se définissent comme « les objets de la culture matérielle auxquels une personne a accès au cours de son développement ». Les artefacts interviennent dans l’activité instrumentée telle que résumée dans le schéma SAI (figure 1). L’artefact devient un *instrument* qui opère comme médiateur dans la relation du sujet avec l’objet de son activité. La médiation opère dans le sens Sujet-Objet quand l’artefact permet l’action sur l’environnement et dans le sens Objet-Sujet quand la médiation contribue à la conceptualisation par le sujet de son environnement.

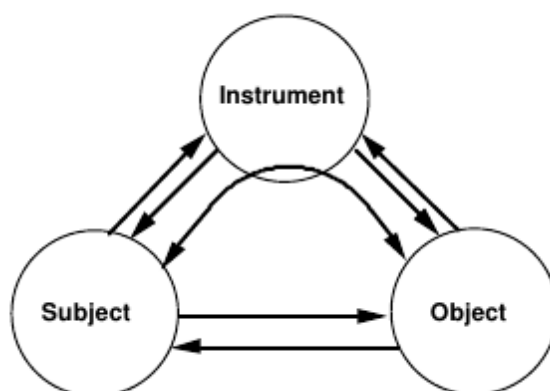


Figure 1 : Le diagramme SAI (Vérillon et Rabardel, 1995, page 85).

Je m’intéresse ici aux artefacts comme réalisations socialement construites et aux *techniques instrumentées* par lesquelles ils sont mis en œuvre. Cette *approche par les techniques* permet de dépasser une approche par les schèmes qui, si elle est utile du point de vue du sujet psychologique, atteint ses limites dans un contexte d’enseignement, ou plus précisément d’une institution ayant pour finalité un apprentissage donné. Cette approche par les techniques s’inscrit dans la théorie de l’activité mais il a été développé par Lagrange (2000, 2003) à partir de la notion de praxéologie de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). En effet, les artefacts, objets socialement situés, sont indissociables de techniques pour leur mise en œuvre elles aussi socialement situées. Dans l’enseignement, les institutions scolaires sont les lieux où les techniques trouvent leur légitimité en lien à la fois avec le niveau pratique des types de tâches qu’elles permettent d’accomplir et avec le niveau des théorisations où la cohérence et l’efficacité de ces techniques sont discutées. Les propriétés mathématiques, les concepts et un symbolisme spécifique apparaissent aussi à ce niveau des théorisations. L’apport d’une technique à un type de tâches est caractérisé selon Artigue (2002) par sa *valence pragmatique* alors que la contribution de la même technique à des théorisations

constitue sa *valence épistémique*. La valence pragmatique d'une technique est le plus souvent mise en avant pour justifier leur mise en œuvre. Si l'on considère le rôle du travail technique dans la construction des objets mathématiques (par exemple, on apprend ce qu'est une factorisation... en faisant des factorisations et en cherchant le meilleur moyen de les faire) la valence épistémique d'une technique est décisive pour l'apprentissage, mais elle est minorée dans la conscience des acteurs : une fois une théorisation installée, les moyens par lesquels cela s'est fait sont oubliés.

L'accent mis sur les techniques suppose une analyse fine des artefacts qu'elles mettent en œuvre. Dans quelles situations et pour quelles tâches un artefact donné peut-il être mis en œuvre ? Quelles sont précisément les caractéristiques de l'artefact qui vont permettre ces mises en œuvre ? Dans quelle mesure va-t-il entrer en concurrence avec des techniques habituelles légitimes dans l'enseignement ? Dans le cas par exemple de la calculatrice graphique, cet artefact va se trouver en concurrence avec les techniques papier/crayon pour l'étude des fonctions. Pour des tâches classiques comme l'étude d'une fonction polynôme de degré 3 ayant deux extrémaux et trois zéros dans \mathbf{Z} , la calculatrice graphique permet le repérage de ces valeurs par lecture sur l'écran et la production d'un tableau de variation de façon beaucoup moins laborieuse qu'une étude classique par dérivation et résolution d'équation. L'artefact est conçu pour résoudre de façon économique les cas les plus couramment rencontrés et se présente donc généralement avec une fenêtre initiale où les valeurs des deux coordonnées sont dans l'intervalle $[-10,10]$. La valence épistémique de l'étude d'une fonction dont les zéros et les extrema sont dans cette fenêtre (ce qui est généralement le cas dans les exercices scolaires) est ainsi limitée. Pour des fonctions qui échappent à ce standard, le repérage des valeurs critiques par lecture sur l'écran demande la mise en œuvre de techniques de cadrage. Ces techniques supposent des connaissances sur l'artefact (cadrage par zoom avant, arrière selon un des axes ou les deux, ou détermination explicite d'une fenêtre) et s'appuient aussi sur une forme d'étude de la fonction : il faut savoir où regarder. Leur valence épistémique est loin d'être négligeable. Ainsi l'analyse fine de la calculatrice permet de comprendre comment un artefact nouveau peut saper la valence pragmatique de techniques antérieures et rendre par conséquent obsolète les praxéologies auxquelles ces techniques participent. De nouvelles tâches et de nouvelles techniques sont à imaginer, en s'assurant que ces techniques ont à la fois la valence pragmatique qui justifie leur mise en œuvre et la valence épistémique qui fait qu'elles participent à la conceptualisation et ainsi, potentiellement, acquièrent une légitimité dans une institution d'enseignement donnée.

Un autre point important concerne spécifiquement les artefacts numériques. Pour comprendre cette spécificité, considérons les deux dispositifs dont la mise en œuvre par des sujets d'âge scolaire est étudiée par Vérillon et Rabardel, un tour et un robot, et comparons les genèses associées. Le tour sert à découper un matériau en une forme de révolution. Pour créer la forme souhaitée, le matériau est mis en rotation et l'opérateur déplace un outil de coupe le long de deux axes (respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe de rotation) à l'aide de vis visibles. Le robot sert à déplacer des objets dans un espace de travail en 3D. Extérieurement, le robot est composé d'un dispositif mécanique et d'un boîtier de commande. Le dispositif mécanique est similaire à un bras humain : une succession de trois segments mobiles relie une base fixe à une pince par quatre articulations motorisées. Le boîtier de commande est

composé de trois curseurs disposés comme les trois axes d'un système orthogonal XYZ. Entre le boîtier de commande et le dispositif se trouve un processeur programmé de telle sorte que chaque position des trois curseurs détermine une position de la pince dans une représentation cartésienne de l'espace de travail. Il en résulte que, contrairement au tour, il n'y a pas de relation directe visible entre l'action sur un curseur et le mouvement d'un élément isolé dans le dispositif. Le boîtier de commande est représenté par un triplet de coordonnées et le robot est représenté par la position de la pince dans l'espace. En interne, l'algorithme implémenté sur le processeur numérique utilise une autre représentation du robot, constituée d'une position angulaire pour chacune des quatre articulations, cohérente avec le fonctionnement mécanique du robot : pour un triplet de coordonnées donné, un algorithme calcule les valeurs des quatre positions angulaires afin d'assurer un positionnement adéquat de la pince. A la différence du tour, le robot se caractérise par des représentations de l'environnement et un traitement algorithmique. Selon cette caractérisation, le robot est un *artefact numérique* alors que le tour peut être qualifié de *dispositif analogique*.

Vérillon et Rabardel ont observé dans le cas du tour la genèse d'une relation géométrique entre le profil 2D créé par l'activation des vis et la forme 3D résultant du matériau en rotation. Avec le robot, la genèse est marquée par une prise de conscience très progressive des différentes représentations (internes et externes) de l'espace 3D et du traitement algorithmique entre le boîtier de commande et la partie mécanique, tel que programmé par le concepteur. Paradoxalement comme la partie mécanique est ouverte à l'observation, la représentation interne (position angulaire des quatre articulations) est plus visible que la représentation externe requise par l'interface utilisateur, en particulier pour les élèves dont la compréhension de l'espace 3D est à construire. C'est pourquoi les élèves associent initialement les actions sur les curseurs à des changements dans les positions angulaires des articulations. Ils sont surpris de ce que l'action sur un curseur entraîne le mouvement de plusieurs articulations. Ils associent néanmoins un petit mouvement d'un curseur avec un mouvement plus marqué d'une articulation. Ils tentent aussi de trouver une combinaison d'actions sur trois curseurs qui permettrait d'agir sur une seule articulation. Les élèves ne prennent conscience que progressivement du fait que la position de la pince est l'objet du contrôle par les curseurs, prenant implicitement conscience de la représentation externe du robot dans l'espace 3D et de l'algorithme à l'œuvre. Conformément à l'analyse de Vérillon et Rabardel, nous considérons le robot comme un instrument qui sert de médiateur dans la relation des élèves avec l'espace 3D, mais nous soulignons également le fait que l'artefact devient un instrument pour ces élèves grâce à une prise de conscience progressive des différentes représentations et de l'algorithme. La prise de conscience ne réside pas dans les détails, mais plutôt dans une compréhension globale de l'entrée et de la sortie, ainsi que de la nature de la transition entre celles-ci.

Considérons le cas d'artefacts plus généralement utilisés dans l'enseignement, la géométrie dynamique (GD) et le calcul formel (CF). Dans une thèse récente Lesnes-Cuisiniez (2022) reprend l'idée courante qu'un logiciel de GD *embarque* des connaissances géométriques mais il va plus loin en spécifiant comment ceci s'opère à travers le déplacement (*dragging*) des objets à la souris. Dans le cas des points, il distingue les points libres, les points libres sur objet et les points liés (« non attrapables »). Ces trois types de points ont des équivalents dans le langage géométrique (point quelconque dans le plan, etc.) mais en tant que représentation

dynamique leur emploi suppose une prise de conscience du graphe de dépendance qui lie les objets et de l'algorithme de mise à jour de la construction activé selon ce graphe lors d'un déplacement. À partir de là Lesnes-Cuisiniez distingue deux paradigmes propres à la GD : le paradigme des *constructions robustes* et le paradigme des *constructions molles*. Dans le premier paradigme une construction est effectuée selon un programme de création d'objets avec les fonctionnalités adéquates du logiciel (*outils*). Le graphe de dépendance est ainsi correctement constitué. S'il existe un ou des points libres, le déplacement de chacun de ces points va activer l'algorithme de mise à jour selon le graphe de dépendance, l'affichage à l'écran sera modifié, mais la construction conservera les propriétés géométriques inscrites dans le programme de construction. Dans une construction molle, l'utilisateur s'autorise en revanche à créer des points en les plaçant au jugé plutôt que par un outil de construction. Par exemple un point supposé au milieu d'un segment sera placé au jugé aligné et à égale distance des deux extrémités. Le point sera considéré comme un point non inclus dans le graphe de dépendance existant. Dans ce cas l'algorithme de mise à jour ne conservera pas la propriété de ce point et de ceux qui en dépendent.

Ces deux paradigmes correspondent en fait à deux techniques de construction qui se distinguent par leur valence pragmatique (plus élevée pour la construction molle) et leur valence épistémique (plus élevée pour la construction robuste). Concrètement dans les pratiques observées en classe, ces deux techniques sont rarement en évidence car la GD est plus souvent considérée comme un moyen commode d'obtenir une figure propre et des mesures (valence pragmatique) que comme un environnement dédié à la compréhension de la notion de construction et des propriétés géométriques associées (valence épistémique). La représentation de la construction par un graphe de dépendance et l'algorithme de mise à jour ne sont pas mobilisés. En revanche la recherche didactique sur la GD a mis en évidence le potentiel d'une dialectique entre les deux techniques comme le montre Leung (2014) à partir d'une synthèse des études dans ce domaine. La section suivante présentera un exemple.

Elbaz-Vincent (2005) caractérise le calcul formel comme un ensemble de représentations internes d'entités algébriques et d'algorithmes, en principe transparents pour l'utilisateur. Les logiciels de calcul formel offrent également une interface utilisateur avec une symbolique similaire à la symbolique mathématique habituelle. L'usage du calcul formel suppose cependant comme la GD une prise de conscience des algorithmes et représentations internes. Elbaz-Vincent donne l'exemple du traitement de l'expression $\cos(a)^2 + \sin(a)^2$ par cet artefact. Cette expression n'est pas *évaluée* à 1, même si a est déclaré réel. En revanche, elle est *simplifiée* à 1. La raison en est que l'*évaluation* et la *simplification* sont des algorithmes différents. Le premier effectue un traitement syntaxique standard afin d'obtenir une expression canonique, tandis que le second applique de manière heuristique un ensemble de transformations basées sur des règles et des propriétés mathématiques, dans le but de réduire la complexité de l'expression.

Quant au symbolisme, il n'est que partiellement similaire au symbolisme mathématique habituel, car les expressions canoniques doivent être compatibles avec les représentations internes et les algorithmes. Par exemple, les sommes, les limites et les intégrales et des calculs comme la factorisation et le développement doivent être saisis avec un symbolisme

fonctionnel pour le logiciel. De plus, le résultat correspond rarement directement à ce qu'attend l'élève, en particulier au niveau secondaire : c'est le cas, par exemple de $x^{\frac{3}{2}}$, lorsque l'utilisateur s'attend à $x\sqrt{x}$. Ceci rend les techniques d'utilisation du calcul formel particulièrement délicates à mettre en œuvre.

Genèses dans les ETM

Nous examinons maintenant les concepts fondamentaux de la théorie des ETM à la lumière de ce qui précède. Le premier concept est celui du travail mathématique. L'approche de Vérillon et Rabardel concerne principalement les domaines professionnels et techniques, comme le montrent les études empiriques (tour, robot) citées dans l'article, et repose sur l'idée d'activité plutôt que de travail. Néanmoins, modéliser un objet sur un tour, activer un robot pour une tâche donnée, ne sont pas des activités libres menées dans le but de développer des connaissances géométriques ou informatiques abstraites, mais plutôt des activités visant à la transformation d'entités matérielles et se développant dans des contextes sociaux. De son côté la théorie des ETM, en mettant l'accent sur le *travail* et en considérant les mathématiques du point de vue du travail qu'effectuent mathématiciens et apprentis mathématiciens rompt avec l'idée des mathématiques comme domaine abstrait déconnecté de pratiques sociales : comme l'opérateur de tour ou de robot, le mathématicien travaille avec des instruments qui ont une valeur psychologique et institutionnelle.

La genèse instrumentale, sur laquelle nous nous intéressons particulièrement ici, relie les *artefacts*, un pôle du plan épistémologique, et la *construction*, le pôle correspondant dans le plan cognitif. Sur le diagramme classique des ETM les genèses semblent à première vue avoir un caractère objectif, puisque les composantes du travail mathématique interviennent dans des processus observables : la genèse instrumentale avec une équerre, par exemple, serait simplement l'utilisation de l'équerre pour tracer des angles droits dans une construction donnée. Néanmoins, Kuzniak insiste sur le caractère *développemental* des genèses, suggérant que des transformations ont lieu au sein du ou des sujets ou des institutions qui utilisent les artefacts. Kuzniak (2022) distingue deux points de vue, ascendant et descendant, sur les genèses. En particulierisant à la genèse instrumentale, le point de vue ascendant décrit les actions par lesquelles l'utilisateur s'approprie les différentes techniques d'utilisation de l'artefact. Le point de vue descendant part de la réalisation souhaitée par l'utilisateur pour aboutir au choix adéquat de l'artefact avec lequel il va effectuer les actions requises. Ainsi la genèse instrumentale modifie la manière dont l'utilisateur agit et pense, et, en retour, transforme également les connaissances mathématiques. La genèse instrumentale dans les ETM est donc compatible avec l'idée de médiation instrumentale de Vérillon et Rabardel (diagramme SAI fig. 1), mais à la différence de l'approche instrumentale, elle ne théorise pas les dimensions liées au sujet (agir et penser) et aux institutions (techniques instrumentées, impact sur les praxéologies).

Une autre différence est le champ d'application de la genèse instrumentale : Vérillon et Rabardel, se référant aux instruments psychologiques de Vygotsky, expliquent dans leur conclusion que leurs remarques ne valent pas seulement pour les activités instrumentalisées par des artefacts matériels : « la dimension instrumentale concerne également la maîtrise du

langage, de l'écriture et des chiffres, qui peuvent être considérés comme des technologies destinées à communiquer, à représenter et à conserver des informations, et à calculer ».

Ainsi, Vérillon et Rabardel après avoir regretté que les processus psychologiques liés aux artefacts techniques soient négligés par la psychologie élargissent dans leur conclusion le champ d'application à la genèse de tout type d'artefact. L'idée de genèse instrumentale perd ainsi une partie de son potentiel en étant absorbée dans une catégorie trop large de processus cognitifs comme on peut le constater aujourd'hui dans beaucoup de recherches qui se revendiquent de l'approche instrumentale. En revanche, le plan épistémologique des ETM distingue trois pôles, chacun pouvant être considéré comme un artefact dans une genèse spécifique. La théorie des ETM apporte donc une clarification, nous aidant à considérer la spécificité de la genèse instrumentale.

Pour aller plus loin, il convient de caractériser les artefacts du pôle instrumental. Dans le plan épistémologique des ETM, les objets de chaque pôle peuvent avoir une base matérielle aussi bien qu'immatérielle. Cela est évident pour les signes dans le pôle sémiotique. Quant au corpus de référence dans le pôle discursif on les voit souvent comme un ensemble d' « idées » dépourvues de base matérielle mais Richard et al (2018) précisent que cet ensemble est souvent « matérialisé » de diverses manières (recueil de propriétés dans un cours papier/crayon, règle de déduction dans un système tutoriel...). La forme matérielle des instruments traditionnels (règle compas...) ou des logiciels contemporains ne doit pas cacher que leur réalisation physique découle de propriétés ancrées dans des théories et des institutions et, pour les logiciels, implémentées sous forme de représentations et d'algorithmes.

Finalement la bonne manière de caractériser les objets du plan épistémologique est de considérer leur rôle dans la genèse correspondante. Donc les artefacts instrumentaux sont ceux qui interviennent dans une *construction*. Il faut alors préciser ce qu'on entend par construction et pour cela il est utile de revenir sur la définition proposée par Duval (1995) : « (une) construction (...) peut fonctionner comme un modèle en ce sens que les actions sur le représentant et les résultats observés sont liés aux objets mathématiques qui sont représentés. » La construction est donc l'élaboration de modèles de configurations mathématiques c'est-à-dire d'un ensemble d'objets interdépendants, plutôt qu'un ou plusieurs objets isolés. Cela correspond bien aux figures géométriques traditionnelles qui modélisent les propriétés d'un ensemble d'objets géométriques : le mathématicien géomètre va tracer une ou des figures lui permettant d'explorer des propriétés. Les logiciels ajoutent une dimension dynamique, donnant un caractère de simulation au modèle. En algèbre, une calculatrice numérique aide à faire fonctionner une formule comme modèle d'une fonction en fournissant des valeurs calculées pour des entrées données. En interprétant l'étude de Vérillon et Rabardel sur les robots dans la théorie des ETM, nous devons comprendre que la construction est ce que font les élèves lorsqu'ils font fonctionner le robot à travers les microgenèses. Tout comme une figure en géométrie n'est qu'une des réalisations possibles d'une configuration, une action sur les curseurs n'est qu'une des actions possibles. Cependant, on sait que dessiner une figure aide à penser toutes les réalisations possibles, c'est-à-dire qu'elle est considérée comme un modèle de la configuration. De même, les actions des élèves sur les curseurs sont un moyen de tester un modèle implicite du robot et de faire évoluer ce modèle. Cela met en lumière une

caractéristique de la genèse instrumentale : il ne s'agit pas d'une application passive de techniques standard conformes à un mode d'emploi, mais plutôt de l'élaboration active d'une technique adaptée en vue d'obtenir des résultats pertinents. Cette élaboration participe au travail sur les techniques souligné par Chevallard (1999).

Soulignons à ce propos que la théorie des ETM et l'approche instrumentale divergent quant au statut des techniques dans la genèse. Selon Kuzniak et al (2016) « les artefacts sont intimement liés aux règles et techniques de construction ou de calcul (division euclidienne, constructions classiques à la règle et au compas, etc.). Ces techniques reposent sur des algorithmes dont la validation et le statut théorique ne posent plus de problème. » L'affirmation que je souligne n'est pas compatible avec l'approche instrumentale puisque celle-ci postule que la validation et le statut des techniques sont précisément ce qui est en jeu dans la genèse. La routinisation sous forme d'un algorithme est postérieure à ce travail sur les techniques et tend à l'oblitérer. Cette analyse a été développée dans la recherche sur les usages du calcul formel dans les années 1990 face un courant dominant notamment nord-américain qui voyait le calcul formel comme un moyen de minorer le travail technique, supposé routinier et peu producteur de conceptualisations, de façon à passer directement des tâches aux théorisations (Lagrange 2000, Artigue 2002).

Un exemple

Voici un exemple de l'apport d'une analyse des techniques instrumentées, à une situation étudiée dans le cadre des ETM par Kuzniak (2013). Les élèves de seconde (10ème grade) sont confrontés à la tâche de construire en papier crayon un triangle ayant les mêmes angles qu'un triangle donné (c'est-à-dire un triangle semblable) puis d'émettre des conjectures sur les longueurs des côtés des deux triangles. L'enseignant part du principe que la diversité des triangles obtenus leur permettra d'inférer la proportionnalité entre les longueurs des côtés du triangle initial et celles du triangle construit. Il vise à institutionnaliser la proportionnalité sans démonstration, mais il souhaite néanmoins que les élèves soient conscients qu'il s'agit d'une conjecture non prouvée, l'imprécision des mesures permettant cette prise de conscience. Kuzniak illustre ces attentes de l'enseignant dans un premier diagramme qui ne mentionne aucune genèse instrumentale. Les artefacts et la construction sont liés à la genèse sémiotique : ils « servent » simplement la visualisation, et leur lien n'est pas discuté. La construction est également censée « déclencher » une genèse discursive.

L'absence de la genèse instrumentale dans l'anticipation du professeur s'analyse comme une sous-estimation de la dimension technique de la tâche demandée aux élèves. Il s'agit d'une tâche de report d'angle. La technique la plus efficace serait celle du papier calque avec des variantes utilisant un rapporteur ou du papier plié. Ces techniques appartiennent au répertoire des constructions du cycle 4 et il serait étonnant qu'elles soient mobilisées par des élèves de lycée. À supposer que les élèves disposent d'un rapporteur, son maniement demande une habitude certainement perdue au lycée. La technique canonique au lycée serait le report au compas, mais on ne peut pas s'attendre à ce qu'elle soit élaborée spontanément.

Après que les élèves n'ont pas réussi la tâche de construction ou n'ont pas réussi à s'engager dans un processus de conjecture, l'enseignant présente une figure de géométrie dynamique

(GD) sur un ordinateur, fait calculer par le logiciel les rapports entre les mesures des côtés pour diverses configurations, puis demande aux élèves d'observer l'invariance des rapports. La figure de géométrie dynamique permet aux élèves de passer « directement » de la visualisation à une « preuve » empirique basée sur l'observation de l'invariance pour plusieurs configurations. La précision des mesures effectuées à l'aide du logiciel et la pluralité des configurations font croire aux élèves qu'ils ont réalisé une « véritable démonstration », ce qui n'était pas l'objectif de l'enseignant. Là encore, il n'y a aucune genèse instrumentale.

Ainsi le professeur clôt la phase de construction et de conjecture par les élèves malgré leur échec dans la tâche. Ceci s'explique si l'on considère la valence épistémique des différentes techniques de report d'angle. Cette valence épistémique est relative à la notion d'angle qui n'est pas l'objectif de la séance et un professeur ne peut pas se permettre de « perdre du temps » dans un travail sur des techniques dont la valeur épistémique ne correspond pas à son objectif.

Le choix de la GD par le professeur dans la seconde phase découle de la valence pragmatique des techniques d'utilisation de la GD : construction robuste (au sens précisé ci-dessus) qui permet de faire varier les configurations et visualisation dynamique des mesures et de leur rapport. Il est seul à mettre en œuvre ces techniques car ici aussi la valence épistémique de ces techniques ne l'intéresse pas. Il vise l'efficacité, au prix d'une confusion chez les élèves entre conjecture et preuve. Le travail sur les techniques de GD qui aurait permis de faire la différence entre ce qui est exact (la construction) et ce qui est approché (les mesures) a été négligé.

Une reconstruction

Une attention au travail sur les techniques permet d'envisager une alternative à la mise en œuvre par le professeur. Il s'agit d'imaginer l'élaboration d'une technique de construction d'un triangle semblable qui mette en évidence l'équivalence de la propriété d'égalité des angles et l'égalité des rapports. La reconstruction utilise la dialectique construction molle-construction robuste présentée plus haut. Concrètement, un triangle ABC et un triangle DEF sont créés en géométrie dynamique. Les points A, B et C sont libres dans le plan. D et E sont fixes. Il y a ensuite trois phases (Figure 2).

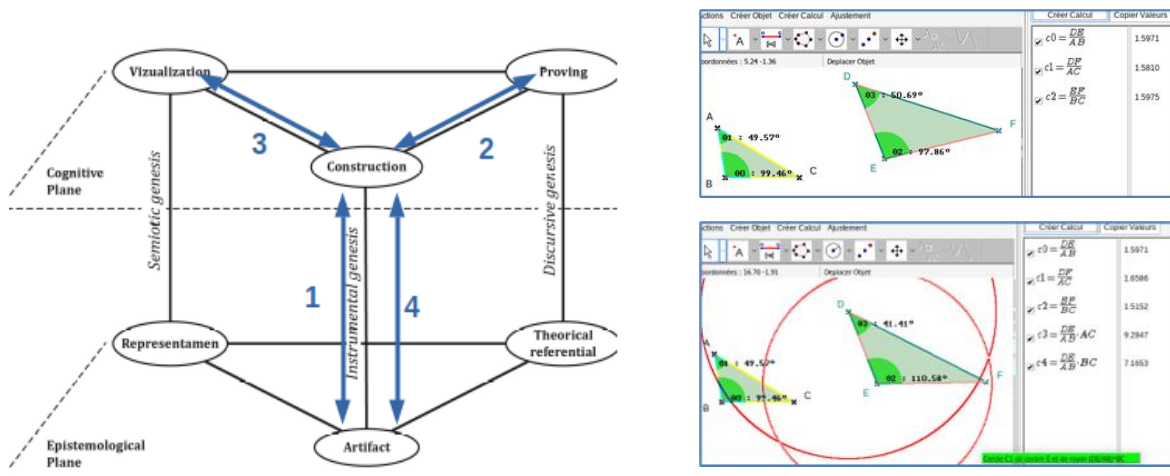


Figure 2 les techniques de construction dans l'espace de travail de la situation reconstruite

1. **Construction molle à l'aide d'un point libre.** Appropriation de la figure et ajustement à la souris du triangle DEF de façon qu'il ait les mêmes angles que ABC. Cette phase de construction molle est facilitée par l'affichage de valeurs approchées des angles dans le logiciel. Point fixes et points libres sont distingués. Les élèves prennent conscience de ce que l'égalité des angles ne résiste pas au déplacement d'un des sommets du triangle ABC.
2. **Prise de conscience d'une construction qui ne résiste pas au dragging.**
3. **Visualisation de la proportionnalité des longueurs pour s'engager dans une construction robuste.** Le triangle DEF restant en construction molle, on peut demander de créer des points E' et F' respectivement sur (DE) et (DF) pour que DE'F' et ABC soient perceptivement isométriques. Ainsi, la proportionnalité peut émerger à partir de la propriété de Thales.
4. **Construction robuste à l'aide de cercles et d'intersections.** Construction robuste à l'aide de cercles et d'intersections. Les distances DF et EF sont calculées par le logiciel à partir de l'égalité des rapports. Le point F peut alors être construit comme une des deux intersections de cercles respectivement de centre D et E et de rayon les distances calculées.

Les techniques de construction molle s'inscrivent dans une exploration perceptive, ce qui montre bien la proportionnalité comme une conjecture. Sans constituer une démonstration, la construction robuste met en évidence la relation de proportionnalité comme un outil utile pour la construction plutôt qu'un résultat à simplement ajouter au répertoire de référence. La reconstruction est résumée dans la fig. 2 qui montre les phases de construction dans la genèse instrumentale.

Le tableau 3 résume l'analyse des techniques intervenant dans la situation initiale et dans la reconstruction proposée. Une technique par report d'angle est supposée par le professeur être une routine pour les élèves. Elle n'est pas commode (Valence Pragmatique faible), elle n'apporte pas d'éléments pour la conceptualisation visée dans la séance (Valence Epistémique faible), mais elle est reconnue dans l'institution (Viabilité institutionnelle). Avec la GD, les techniques de construction molle et robuste s'opposent quant à leurs valence pragmatique et épistémique et à leur viabilité institutionnelle. La construction molle a une valence heuristique, mais n'est pas destinée à être une procédure canonique. La construction robuste est plus difficile à mettre en œuvre, mais elle fait intervenir des connaissances mathématiques, particulièrement celles qui sont en jeu dans la situation. De plus, la construction robuste est un enchaînement de primitives géométriques qui peut se faire reconnaître par l'institution comme l'équivalent d'une construction à la règle et au compas.

Table 3 Valences et viabilité des techniques de construction géométrique

Technique	Valence Pragmatique	Valence Epistémique	Viabilité institutionnelle
Report d'Angle	Faible	Faible	Oui (routine PC)
Construction Molle	Forte	Faible	Non
Construction Robuste	Moins Forte	Plus Forte	Oui (à construire)

A partir des situations sur les factorisations avec le calcul formel, le tableau 5 montre une analyse des techniques analogue à celle ci-dessus (tableau 4) dans le cas de la GD. Une figure

analogue à la figure ci-dessus (fig. 3) résume le parcours dans les différentes genèses et la place centrale de la genèse instrumentale des techniques dans la troisième version.

Table 4 Valences et viabilité des techniques de factorisation

Technique	Valence Pragmatique	Valence Epistémique	Viabilité institutionnelle
Division	Faible	Faible	Oui (routine PC)
CF presse-bouton	Forte	Faible	Non
CF presse-bouton+ regroupement des facteurs	Moins Forte	Plus Forte	Oui (à construire)

Synthèse : la théorie des ETM et les techniques instrumentées

Il serait vain de chercher à fusionner deux approches théoriques issues, comme montré ci-dessus, de perspectives théoriques différentes. Il est préférable de souligner les apports réciproques et les divergences. L'analyse et l'exemple qui précèdent montrent comment l'approche instrumentale peut étoffer la genèse instrumentale des ETM. L'accent mis sur les techniques instrumentées et leurs valences pragmatique et épistémique « colle bien » avec l'idée de travail, centrale dans les ETM. Cela tranche avec une analyse limitée à des schèmes instrumentaux peu opératoire à elle seule pour l'analyse des situations d'enseignement. En retour, la théorie des ETM apporte à l'approche instrumentale en distinguant trois genèses permettant ainsi d'identifier ce qui relève réellement d'une dimension instrumentale et l'articulation avec les dimensions symboliques et discursives, les trois dimensions étant trop souvent confondues dans les analyses se réclamant de l'approche instrumentale. Nous avons souligné aussi que, à la différence de la théorie des ETM, l'approche instrumentale met l'accent sur le travail sur les techniques plutôt que sur la mobilisation de techniques routinisées.

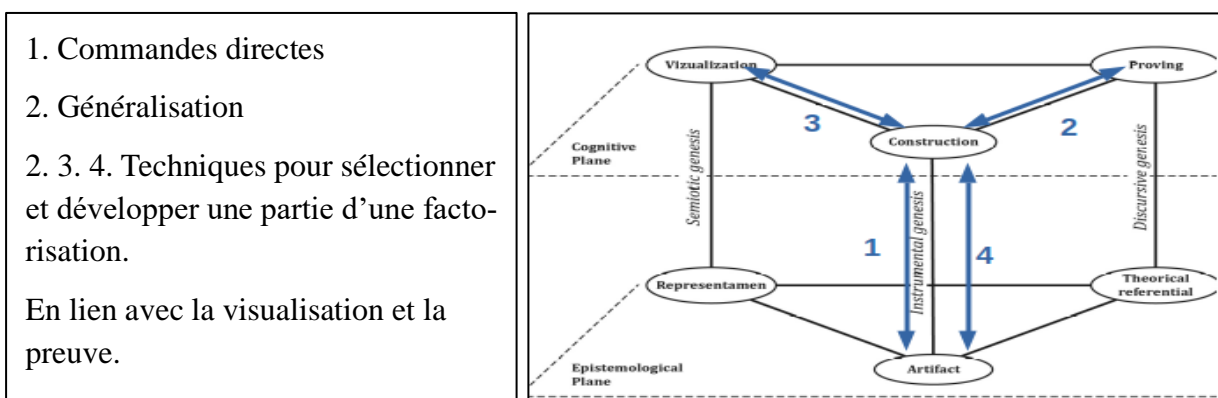


Figure 3 : Les techniques de factorisation dans l'espace de travail de la troisième version des factorisations.

Une analyse des artefacts

Dégager des techniques d'usage d'artefacts numériques, étudier leurs valences et imaginer des situations didactiques où elles pourraient émerger suppose une analyse de ces artefacts qui ne se limite pas à des potentialités générales. Il s'agit, sur un type de tâche donné de comprendre de façon suffisamment précise quels algorithmes et représentations sont à l'œuvre. Je

commence par la factorisation des polynômes pour montrer comment une telle étude peut être menée. Puis j'essaie de dégager quelques pistes pour une étude similaire dans le cas des LLM.

Données sur la factorisation des polynômes à une variable par le calcul formel

Comment les logiciels de calcul formel factorisent-ils les polynômes à une variable. Si un polynôme Q de degré d divise un polynôme P , alors tous les coefficients de Q sont majorés en valeur absolue par $2^d \|P\|$, la norme $\|P\|$ étant la somme des valeurs absolues des coefficients de P (inégalité de Mignotte-Landau). Une procédure simple consisterait donc à explorer de façon exhaustive les polynômes de degré inférieur à celui de P dont les coefficients respectent l'inégalité. Il est facile de se rendre compte de ce qu'une telle procédure appliquée telle quelle serait irréaliste en dehors de cas très simples. C'est pourquoi des algorithmes ont été inventés de façon à réduire l'exploration, notamment en passant par des factorisations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour n bien choisi et en utilisant d'autres majorations.

Le cas des polynômes de la forme $x^n - 1$ est particulier car il existe un algorithme déterministe qui garantit une factorisation complète dans \mathbf{Z} . En effet, dans \mathbf{C} , $x^n - 1$ a n racines, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. La factorisation dans \mathbf{C} est donc triviale. La factorisation dans \mathbf{R} sous forme de produits de trinômes s'opère en combinant les binômes conjugués. Elle n'est généralement pas donnée par les logiciels de calcul formel, sauf lorsque $\cos\left(\frac{2p}{n}\right)$ s'exprime avec des racines carrées (factorisation radicale). C'est le cas lorsque n est un nombre de Fermat $n = 2^{2^k} + 1$. Le tableau 5 donne un exemple où un logiciel (Xcas) retourne la factorisation radicale pour le premier nombre de Fermat (5), mais pas pour le second (17). Il peut y avoir plusieurs explications. (1) Le logiciel a une méthode pour $x^5 - 1$ passant par la résolution d'équations du second degré, mais pas pour $x^{17} - 1$. (2) les expressions radicales des coefficients des trinômes factorisant $x^{17} - 1$ sont très volumineuses et c'est un choix du concepteur de ne pas retourner ce type d'expression. En général les logiciels de calcul formel retournent par défaut une factorisation dans \mathbf{Z} et il faut préciser une commande spéciale pour les factorisations dans \mathbf{C} ou \mathbf{R} . Le concepteur de Xcas opère donc un choix spécifique qui conduit à une factorisation dans $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ pour $x^5 - 1$ et dans \mathbf{Z} pour les autres polynômes.

Table 5 Les factorisations avec un logiciel de calcul formel.

Tapez les instructions XCAS ci-dessous ou aidez-vous du clavier en haut à droite	
1	factor ($x^5 - 1$) $(x - 1)\left(x^2 + \frac{-(\sqrt{5}) + 1}{2} \cdot x + 1\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot x + 1\right)$
2	factor ($x^9 - 1$) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
3	factor ($x^{12} - 1$) $(x - 1) \cdot (x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
4	factor ($x^{17} - 1$) $(x - 1)(x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Pour comprendre comment les logiciels de calcul formel opèrent la factorisation dans \mathbf{Z} des polynômes de la forme $x^n - 1$, partons de la factorisation dans \mathbf{C} , c'est à dire comme produit des binômes $(x - \alpha^k)$, ($k = 0..n - 1$), les α^k étant les racines n -ièmes de l'unité. Pour chaque diviseur d de n , on considère les $E_d = \{k \mid 0 < k \leq n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = d\}$ et les polynômes $\phi_d(x)$ produits des $(x - \alpha^k)$ tels que k appartient à E_d . Les E_d réalisent une partition de l'intervalle de $\mathbf{N} [1, n]$, et donc aussi les E_d . Il en résulte que $x^n - 1$ est le produit des polynômes $\phi_d(x)$. On démontre que $\phi_d(x)$ est le produit des binômes $(x - e^{\frac{2i\pi k}{d}})$ pour $0 < k \leq d$ et $\text{pgcd}(k, d) = 1$. Il ne dépend donc que de d est appelé $d^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique. Il est démontré que les polynômes cyclotomiques sont irréductibles dans \mathbf{Q} et à coefficients entiers.

Dans la deuxième ligne de l'exemple du tableau 2, $n=9$ a trois diviseurs, 1, 3 et 9 :

$$\phi_1(x) = (x - 1) \text{ correspond au diviseur } d = 1,$$

$$\phi_3(x) = x^2 + x + 1 = (x - e^{2i\frac{\pi}{3}})(x - e^{4i\frac{\pi}{3}}) \text{ correspond au diviseur } d = 3,$$

$$\phi_9(x) = x^6 + x + 1 = (x - e^{2i\frac{\pi}{9}})(x - e^{4i\frac{\pi}{9}})(x - e^{8i\frac{\pi}{9}})(x - e^{10i\frac{\pi}{9}})(x - e^{14i\frac{\pi}{9}})(x - e^{16i\frac{\pi}{9}}) \text{ correspond au diviseur } d = 9.$$

Les logiciels de calcul formel utilisent $\phi_1(x) = (x - 1)$ et la formule $\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d < n} \phi_d(x)}$ pour calculer par récurrence les polynômes cyclotomiques et de là une factorisation de $x^n - 1$ sous forme de facteurs irréductibles dans \mathbf{Q} . Diverses propriétés des polynômes cyclotomiques (par exemple $\Phi_{2n}(x)$ est égal à $\Phi_n(-x)$ si n est impair, et à $\Phi_n(x^2)$ si n est pair) sont utilisées pour une plus grande efficacité.

Pour une situation de classe basée sur les factorisations de $x^n - 1$ par le calcul formel, les conséquences sont les suivantes :

- Les élèves obtiendront par la simple émission d'une commande une factorisation pour une valeur de n choisie (technique presse-bouton).
- Généralement, les élèves obtiendront une factorisation dans \mathbf{Z} . Il est possible qu'ils obtiennent une factorisation radicale dans certains cas, soit par décision du concepteur comme dans le tableau 2, soit parce qu'ils auront activé cette factorisation optionnelle.
- Les factorisations seront complètes, au sens de produits de facteurs irréductibles. En particulier la factorisation générique $(x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$ ne sera obtenue que pour n premier, et la factorisation $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$ ne sera obtenue que pour $n=1$.

Données sur le fonctionnement des LLM rendant compte de l'interaction pour la factorisation des polynômes

Je rappelle trois caractéristiques relevées empiriquement dans le domaine des factorisations, et les questions qu'elles posent : (1) la pseudo-transparence et les techniques pour y parer (2) les algorithmes cachés pilotant les réponses du système et leur influence sur la façon dont les

élèves peuvent interagir avec le logiciel (3) le défaut de cohérence dans les sources servant à l'entraînement du système, et la nécessité pour les élèves d'en prendre conscience et de l'intégrer dans leurs techniques d'interaction.

Est-il possible d'avoir une analyse qui dépasserait ce type de constat empirique au cas par cas ?

Je ne cherche pas à me situer dans un débat sur l'intelligence des machines et des humains, mais plutôt à baser mon analyse sur les principes de développement des IA. Les capacités de l'IA générative sont le plus souvent présentées comme découlant d'une approche statistique : la recherche du token (unité élémentaire d'information, par exemple un mot dans la génération de texte) le plus probable complétant une suite de tokens donnée grâce une matrice de proximité de très grande dimension. Comme beaucoup d'autres auteurs, Aghion et Bouverot (2025) décrivent ainsi cette approche : « à chaque possibilité de token successeur est associée une probabilité. La réponse est générée, token par token, en fonction de la probabilité de chaque token. Ce fonctionnement présente une caractéristique essentielle : les modèles d'IA générative n'appréhendent pas la signification des mots, des images ou du son. » Pour moi, cette caractérisation, qui réduit les LLM à des algorithmes de complétion de phrase (comme ceux des téléphones mobiles) ne dit rien sur l'IA générative. Qu'est-ce qu'appréhender une signification, si ce n'est créer une structure au plus profond d'un réseau neuronal ? L'IA générative ne se contente pas d'aligner des token sur un fragment de phrase. Une série de représentations et de traitements complexes permet la création de structures dont seuls les effets sur la génération de contenu peuvent s'observer. Différentes *fenêtres de contexte* permettent la prise en compte à la fois de tokens proches et d'autres plus éloignés. Si l'on désigne par *apprentissage* un tel processus et *généralisation* la création de contenus en réponse à un prompt non connu à l'avance, alors ces systèmes apprennent dans des domaines ou sur des tâches données, sans programmation explicite, et sont capables de généraliser. Les traitements interviennent a priori pour créer les structures et a posteriori pour corriger les comportements dans une finalité *d'alignement* avec les objectifs de leurs concepteurs. Dans l'ensemble ces traitements sont opaques.

La question n'est pas alors de savoir si ces systèmes appréhendent ou non des significations, mais plutôt comment et dans quelle mesure ils réalisent ce pourquoi ils ont été conçus. Il serait possible de répondre de façon sarcastique. Oui, ils s'expriment de façon correcte et fluide, avec une tendance à la flagornerie, mais ce n'est pas une raison pour prendre leur discours comme argent comptant. Certes ils donnent l'apparence d'un apprentissage, mais plutôt comme un élève très moyen : connaissances peu assurées, références hétérogènes. Certes ils généralisent, mais pas toujours à propos.

Parmi les processus mis en œuvre par les IA génératives dans le cas des factorisations, les processus de raisonnement et d'explication sont les points faibles, comparés à l'extraction d'information et à la production de contenus. De plus, ils ont un caractère plutôt chaotique, de légères variations dans la requête pouvant provoquer de grandes différences dans les réponses. Les différences s'observent aussi d'un LLM à l'autre. Est-ce à dire qu'un travail avec les élèves ne présenterait pas d'intérêt ? Mon expérience de recherche de toutes les factorisations de $x^6 - 1$ m'incite à penser le contraire. Les réponses et arguments avancés par l'IA et la

nécessité de réfutations m'ont amené à réactiver mes connaissances un peu lointaines sur les polynômes, en lien avec l'acquisition de connaissances sur le nombre de partitions d'un ensemble à 4 éléments. Bref, mon intuition est que l'on peut apprendre en interagissant avec un LLM sous réserve de construire des techniques adaptées reposant elles-mêmes sur une certaine compréhension du fonctionnement du système de disposer de connaissances permettant d'appréhender des connaissances nouvelles. Cette intuition est confortée par des retours d'enseignants experts comme Durand (2025).

Pour appuyer cette intuition, voici quelques éléments inspirés de commentaires de Victor Storchan (<https://legrandcontinent.eu/fr/2026/01/28/lia-est-un-risque-existential-lalerte-de-dario-amodei-texte-integral-comment/>).

Les limites des LLM

Storchan suggère que des « limitations » perçues des systèmes d'IA ne sont en fait pas des barrières intrinsèques, mais des objectifs temporaires liés à ce que à ce qu'il est choisi de mesurer à un moment donné. Il prend l'exemple de *benchmarks* en mathématiques :

« GSM8K⁴ mesurait surtout la capacité à enchaîner correctement des opérations arithmétiques de niveau scolaire ; avec l'augmentation de l'échelle et l'usage du raisonnement pas à pas (chaînes de pensées)⁵, il a été rapidement saturé. AIME⁶ a déplacé l'objectif vers des problèmes de concours, plus courts mais exigeant des intuitions algébriques et combinatoires, où la progression est plus lente et irrégulière. D'autres *benchmarks* plus récents comme FrontierMath⁷ évaluent la capacité à maintenir un raisonnement mathématique cohérent sur des problèmes longs et peu standardisés, et restent aujourd'hui non saturés. »

Selon Storchan, dès qu'une faiblesse est clairement formalisée par un *benchmark* elle attire des efforts de collecte de données, d'entraînement et d'optimisation, et l'écart de performance se réduit rapidement.

Je vois trois conséquences : (1) il est périlleux de se positionner de façon générale sur l'usage d'IA génératives en fonction de limites constatées à un moment donné et qui, possiblement, vont être dépassées. (2) En revanche, pour une situation d'enseignement donnée, il sera utile d'explorer le *benchmark* ayant servi à l'évaluation du ou des LLM à disposition des élèves, notamment les limites de ces benchmarks. Par exemple les modèles entraînés sur GSM8K sont sensibles à certaines variations de l'énoncé notamment l'introduction de données non

⁴ The GSM8K benchmark comprises 1,319 grade school math word problems, each crafted by expert human problem writers. These problems involve elementary arithmetic operations (+ - × ÷) and require between 2 to 8 steps to solve.

⁵ Chain-of-Thought (CoT) prompting is an approach where the model is prompted to articulate its reasoning process to arrive at an answer.

⁶ All 30 problems from the 2025 American Invitational Mathematics Examination, testing olympiad-level mathematical reasoning with integer answers from 000-999.

⁷ *FrontierMath* is a benchmark of hundreds of original, exceptionally challenging mathematics problems crafted and vetted by expert mathematicians.

pertinentes⁸. Plus généralement, il est possible que les benchmarks reflètent les représentations communément admises à partir des pratiques scolaires, un peu comme les calculatrices graphiques offrent une fenêtre initiale x et y allant de -10 à 10 reflétant le fait que la grande majorité des fonctions étudiées dans le cadre scolaire ont leurs propriétés dans cette fenêtre. Cela peut conduire à construire des situations didactiques où les élèves auraient à dépasser ces limites et qui pourraient fonctionner tant que de nouvelles versions entraînées sur des benchmarks améliorés ne seront pas disponibles. (3) Il reste à déterminer s'il y a des limites inhérentes, communes avec le calcul formel et liées à la pseudo transparence comme la supposée unicité de la factorisation.

Les modèles de raisonnement

Pour Storchan, « les modèles de raisonnement ne tirent pas leur efficacité uniquement d'un calcul plus long à l'inférence mais également de leur capacité à simuler implicitement des interactions complexes de type multi-agents dans laquelle différentes perspectives internes, associées à des traits de personnalité et à des expertises distinctes, se confrontent, débattent et se complètent pour produire un raisonnement plus robuste. » La conséquence est qu'on ne peut attendre de la part des IA génératives un raisonnement enchaînant des inférences comme le ferait un démonstrateur de théorèmes en logique symbolique, ni un calcul fiable comme le ferait un système de calcul formel. L'IA recueille en parallèle des éléments en faisant fonctionner une multiplicité d'agents avec des profils distincts, et les exploite en simulant un jeu social de façon à fonder sa production. Significativement, MistralAI et ChatGPT résistent vigoureusement à une remise en cause de leurs conclusions sur le nombre de factorisations de $x^6 - 1$, indice de ce que les multiples agents convergent vers un faible nombre, l'idée même de pluralité des factorisations semblant leur poser problème.

Quand une stratégie de chaîne de pensées, c'est-à-dire un paramétrage demandant à un LLM de produire une suite d'énoncés conduisant à sa réponse, est mise en œuvre, cette suite n'est qu'en apparence une série d'inférences et reste loin d'une preuve mathématique, quoi qu'en disent certains auteurs. Un journaliste spécialisé, Baudart (2025), met par exemple en avant la supposée productivité d'une stratégie de chaîne de pensées pour un problème impliquant deux quantités inconnues non nulles Y et B et un nombre entier naturel n qu'il s'agit de déterminer. Un raisonnement mathématique montre que $Y = 16(6 - n)$ et $B = 24(n - 4)$. Il en résulte que n ne peut être égal qu'à 5. La chaîne de pensées produite par le LLM est bien différente. Le LLM fait divers calculs, puis émet une hypothèse sur la quantité Y qui, grâce aux calculs qui précèdent, conduit à la bonne valeur : *Toutes les conditions sont satisfaites si $n=5$. Donc, la réponse est 5.* On notera que, contrairement à ce que dit l'auteur la chaîne de pensées n'est pas un raisonnement, mais plutôt un choix au hasard qui, par chance, se révèle productif. De plus, dans un contexte mathématique, la résolution n'est pas achevée car la question de l'unicité n'est pas posée. Ajoutons que les chaînes de pensée, produites par les LLM sont très

⁸ The LLMs' high performance variance on different instances of the same question, their significant drop in performance with a slight increase in difficulty, and their sensitivity to inconsequential information indicate that their reasoning is fragile and may be more akin to sophisticated pattern matching rather than true logical reasoning (Mirzadeh et al 2025).

verbeuses. Si des enseignants sont tentés de les mettre à profit pour diriger les élèves vers une preuve construite, ils doivent être conscients du travail de lecture et de mise en cohérence que cela suppose chez les élèves. Jonin (2025) précise que selon lui, le « chain-of-thought prompting », ne permet pas de faire expliciter à l'IA un raisonnement dont il est incapable. En revanche, cet enseignant expert propose d'inciter les élèves à émettre des prompts ciblés, ce qui leur permet à la fois un usage efficace du LLM et la formulation de questions et de démarches structurées.

Transposé dans une situation où l'intelligence est celle d'humains, le processus de raisonnement des LLM est celui que Duval (1992) désigne par *argumentation*. De façon intéressante, l'IA générative reproduit avec 30 ans de retard l'évolution dans l'enseignement : dans les années 1970, l'accent dans l'enseignement est mis sur la démonstration comme enchaînement d'inférences, puis, devant le succès très relatif de cette approche, une bascule se produit vers des processus d'argumentation impliquant une dimension sociale. L'intelligence artificielle, quant à elle, a longtemps recouru à des systèmes à base de règles dans le but de créer des raisonnements mathématiquement valides, et, aussi proches que possible d'un raisonnement humain. L'introduction des LLM constitue une rupture en introduisant une multiplicité d'agents chacun mettant en œuvre de façon indépendante des structures créées par apprentissage. En mathématiques et dans leur l'enseignement, l'argumentation n'est pas la finalité : la preuve, élaborée selon les critères d'une communauté mathématique est ce qui fait foi. L'argumentation s'insère comme une phase ou un moment dans un processus où la réfutation joue un grand rôle. Ajoutons que curieusement les chaînes de pensée produites par les LLM ressemblent à ce que l'enseignement des math désigne par *narration de recherche*, une activité favorisant la rédaction, elle aussi préliminaire à une preuve mathématique.

L'interaction avec un LLM et le rôle des garde-fous,

Pour Storchan, « dans la plupart des applications, le modèle d'IA n'est pas utilisé de manière isolée, mais est intégré dans un échafaudage plus large comprenant divers composants, notamment des garde-fous destinés à contrôler les contenus générés, » L'objectif principal des garde-fous est de s'assurer que chaque réponse générée par le système d'IA est non seulement pertinente, mais aussi sûre, conforme aux réglementations en vigueur et alignée avec les valeurs et les objectifs de l'organisation. Les garde-fous peuvent aussi s'adapter au profil de l'utilisateur, en s'inspirant de ses prompts et de ses réactions aux réponses. La nécessité d'un garde-fou est évidente quand l'interaction avec l'IA porte sur des sujets sensibles et présente un risque pour l'utilisateur ou contrevient à des règles morales ou légales. Ces garde-fous reposent sur le même fonctionnement que l'IA elle-même (apprentissage par renforcement). Ils présentent donc la même opacité. Qu'en est-il lorsque l'interaction porte sur les mathématiques ? Et quand il s'agit d'un apprenant ?

L'expérience d'une interaction avec ChatGPT et MistralAI sur la factorisation montre des IA sûres d'elles, y compris quand le résultat est faux : factorisations visiblement fausses pour ChatGPT et rejet par MistralAI d'une factorisation exacte mais qui n'est pas dans la liste qu'il a donnée. Il faut de la persévérance de la part de l'utilisateur pour que l'IA admette qu'il y a une erreur. Elle présente alors des excuses obséquieuses. Mais sur les forums des utilisateurs mentionnent au contraire une tendance de l'IA à se plier à leur avis même s'il n'est pas

pertinent. L'IA peine donc à trouver un équilibre entre la confiance dans son propre raisonnement et l'ouverture aux rétroactions de l'utilisateur. Ceci doit être présent à l'esprit si l'on veut enclencher une dialectique preuve et réfutation avec une IA.

Que conclure ?

En dépit de la nouveauté du sujet, tant de choses se disent sur l'IA générative que je ressens une saturation de l'espace de discussion. Dans cet espace le risque est d'enfoncer des portes ouvertes ou de s'engager dans des perspectives romanesques. À côté de cela ce texte présente plusieurs particularités. En premier lieu il fait le lien avec un phénomène plus ancien, celui de l'irruption du calcul formel dans l'enseignement des maths. Qu'en est-il aujourd'hui de ce phénomène ? Il semble que du côté des praticiens dans beaucoup de pays l'attention se soit portée sur les examens avec des questions telles que : dans quelle mesure les examens permettent-ils d'utiliser le calcul formel et quel effet cela a-t-il sur les usages ? Du côté de la recherche, particulièrement dans un pays qui a autorisé l'usage du calcul formel, un certain désenchantement est noté : Jankvist et al (2019) basent leur analyse de l'usage du calcul formel dans un pays où les pratiques se limitent à ce que je qualifie de « techniques presse-bouton ». Ils font ainsi un constat qui ne peut conduire qu'à un retour en arrière. L'idée de tâches et de techniques nouvelles, génératrices de nouvelles praxéologies en interaction avec les techniques habituelles, développée dans les années 2000, s'est perdue alors que l'approche instrumentale prenait une direction psychologisante.

Une seconde particularité de ce texte est donc de réactiver ce cadre des techniques qui s'est trouvé marginalisé dans ce qu'est devenue l'approche instrumentale, et de le coordonner avec un autre cadre, les ETM, qui a démontré sa robustesse pour l'analyse des situations d'apprentissage. Les techniques sont étudiées sur des situations précises – la dialectique construction molle construction robuste avec la GD, et la factorisation des polynômes avec le calcul formel –, s'appuyant sur une analyse en profondeur du fonctionnement de ces artefacts dans le domaine sur lequel porte la situation. Le même type d'analyse est mené sur la factorisation avec l'IA générative. L'interaction avec deux LLM conduit à 3 constats : (1) Malgré leur plus grande souplesse, les LLM restent fixés sur une supposée unicité de la factorisation : la pseudo-transparence déjà mise en évidence avec le calcul formel persiste. (2) Au-delà de sa fluidité, le discours des LLM laisse supposer une influence d'algorithmes opaques. Il peut tantôt rester buté sur un résultat faux ou aussi bien se plier à une objection de l'utilisateur pas nécessairement fondée. (3) Ce même discours présente un défaut de cohérence plus ou moins prononcé, qui suggère que l'hétérogénéité des sources servant à l'entraînement de ces systèmes n'est pas maîtrisée.

Une étude du fonctionnement des LLM approfondit ces points. Les discours sur les IA génératives qui partent de limites constatées à un moment donné n'ont pas grand intérêt car ces limites peuvent être bientôt dépassées. En revanche, pour une situation d'enseignement donnée, il est utile d'explorer ces limites de façon à construire des situations didactiques où les élèves auraient à dépasser ces limites. Le processus de raisonnement des LLM relève de l'argumentation, c'est-à-dire de l'accumulation d'indices divers convergeant vers un résultat, plutôt que d'une preuve. En mathématiques et dans leur l'enseignement, l'argumentation s'insère comme une phase ou un moment dans un processus où la réfutation joue un grand

rôle. Les LLM quant à eux fonctionnent sur le mode de la majorité des avis, un fonctionnement avec lequel la preuve introduit une rupture. Passer de l'argumentation à la preuve reste un enjeu didactique. Il en découle que l'usage d'un LLM sur une question donnée n'a un intérêt dans une situation d'enseignement que si des techniques d'interrogation ont été instituées et si le travail débouche sur une exploitation des réponses du LLM pour une élaboration conforme aux standards institutionnels. J'ai noté aussi que l'IA peine à trouver un équilibre entre la confiance dans son propre raisonnement et l'ouverture aux rétroactions de l'utilisateur. Cela implique pour l'utilisateur de faire lui aussi preuve d'opiniâtreté et de coordonner avec d'autres instruments dont bien sûr le papier crayon.

J'illustre ces points par l'exploration des factorisations avec deux LLM. Partant de la mise en évidence d'une supposée unicité de la factorisation, il m'est apparu intéressant de questionner les LLM sur *toutes les factorisations de $x^6 - 1$* . La valeur $n=6$ a été choisie pour avoir un nombre significatif de diviseurs (4) entraînant un assez grand nombre de factorisations (14). Il a fallu rechercher des prompts adaptés, notamment en fournissant au LLM des factorisations qu'il ne trouvait pas. Il a fallu coordonner cette technique d'interrogation avec des techniques calcul formel et papier crayon, ainsi que l'usage de Wikipedia pour le nombre de partitions d'un ensemble à 4 éléments. La recherche de *toutes les factorisations dans \mathbf{Z}* pour une valeur de n bien choisie s'est trouvée être une tâche adéquate pour l'usage d'un LLM donné à un moment donné, dans le domaine des factorisations. Chaque nouvel instrument implique de nouvelles tâches pour de nouvelles techniques et de nouvelles conceptualisations. Il y a du travail pour la didactique et j'espère que les quelques éléments théoriques apportés dans ce texte y contribueront.

Pour une approche mathématique et humaine de l'IA

Je souhaite dans cette dernière section aller plus loin qu'une approche strictement didactique, bien qu'en apparence, mon propos ne soit pas directement relié à ce qui précède. Les mathématiques et leur enseignement ont une responsabilité sociale qui devient particulièrement visible avec les LLM. Je propose trois thèmes qui peuvent faire l'objet de travaux des élèves dans un cours de mathématiques.

La dimension mathématique des LLM.

En dépit de la complexité des différents modules et bases de données qui interviennent dans l'apprentissage et le fonctionnement des LLM, les élèves peuvent devenir conscients des principes de base des réseaux neuronaux et de l'apprentissage par renforcement. Je propose en annexe un exercice de niveau Première ou Terminale faisant travailler sur un réseau très simple la notion de fonction d'activation, de rétroaction et de descente de gradient. Cet exercice a été testé par un élève de Terminale qui s'en est très bien sorti en deux heures, ce temps comprenant l'apprentissage de fonctions du tableur intervenant dans l'exercice.

La dimension écologique des LLM.

Il est possible de faire travailler les élèves sur les données en consommation d'énergie de diverses « intelligences ». Des données sont disponibles sur <https://drane-versailles.region-academique-idf.fr/spip.php?article1167>. Citons la conclusion : *Le cerveau humain a une puissance brute de calcul 1000 fois plus grande que celle du meilleur processeur GPU actuel*

pour une puissance consommée 10 fois plus faible ! C'est l'occasion de bons exercices sur les ordres de grandeur.

La dimension sociétale des LLM.

Les études de l'impact de l'IA générative sur l'emploi convergent pour mettre en évidence une baisse relative de l'emploi des travailleurs en début de carrière, ce que seront nos élèves dans un futur proche, dans les métiers les plus exposés à l'IA. Il est à prévoir que l'amélioration des performances des LLM amplifie ce phénomène qui, pour certains, va prendre une dimension sociétale. Prenons le cas des métiers du développement logiciel qui prennent de multiples formes avec l'envolée des services numériques et des objets connectés et sont souvent assurés par des jeunes de formation scientifique en début de carrière. Il est vrai que l'usage d'un LLM permet un gain de temps considérable sur la recherche d'un traitement adapté et son codage dans un langage et sur une machine spécifique, ce qui ne veut pas dire que le LLM fait le travail tout seul. L'activité de développement s'oriente vers la production de spécifications précises et la vérification soignée du code produit par un LLM. Elle demande une moindre spécialisation relative à un langage ou à un environnement, mais aussi la capacité à en saisir les principes : pour programmer par exemple un grille-pain connecté, il faut être capable d'émettre une spécification adaptée à des utilisateurs et des ustensiles génériques, et aussi avoir une connaissance suffisante du langage de commande et du fonctionnement interne de l'ustensile, faute de quoi prévoir un extincteur ! Une même analyse peut être faite des métiers d'analyste de données. Dans ce basculement des métiers vers une plus grande autonomie vis-à-vis de procédures spécifiques et une capacité à s'approprier des environnements divers, l'enseignement des mathématiques, en promouvant des techniques d'usage de LLM, a un grand rôle à jouer.

Références

- Aghion, P., Bouverot, A. (2025) *I.A. Notre ambition pour la France*. Paris : Odile Jacob
- Artigue, M. (1997). Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 133-169
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v7 n3 p245-274.
- Baudard, G. (2025) Faire communiquer un modèle de langage et un assistant de preuve. <https://www.lemonde.fr/blog/binaire/2025/05/23/faire-communiquer-un-modele-de-langage-et-un-assistant-de-preuve/>
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Durand, J. (2025) Quelques expériences d'usage d'une IA en classe <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1709>
- Duval, R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n°31, 37-61.

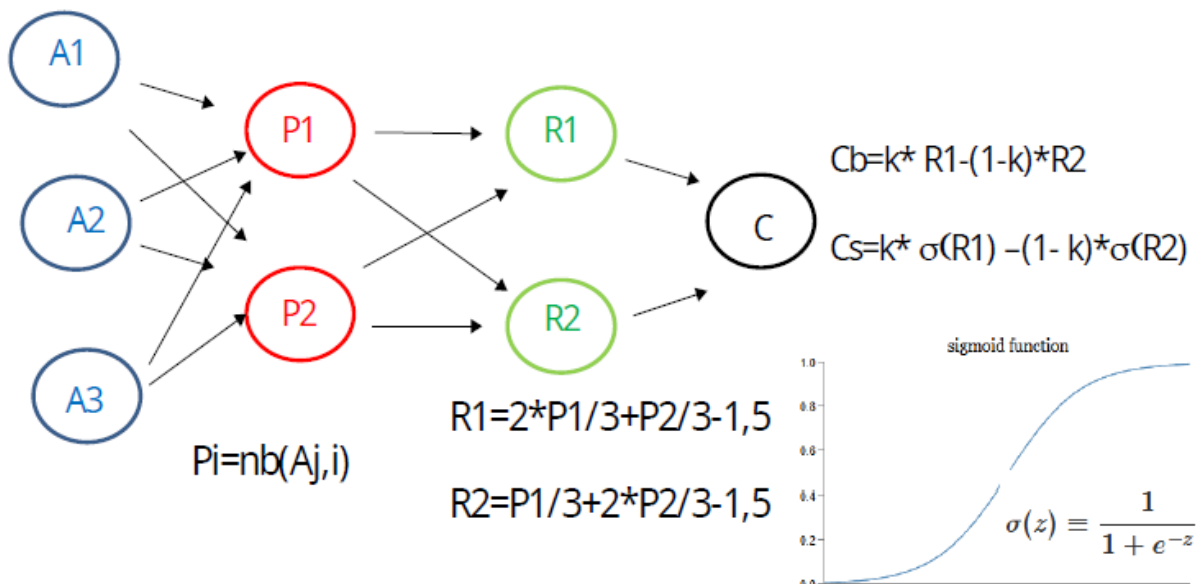
- Duval, R. (1995), Why to teach geometry, *Icmi Studies on Geometry*, Catania.
- Elbaz-Vincent, P. (2005). A CAS as an assistant to reasoned instrumentation. In D. Guin, K. Ruthven, et L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 41–65). New York: Springer. 19
- Jankvist, U. T., Misfeldt, M. et Aguilar, M. S. (2019). What happens when CAS-procedures are objectified? – the case of “solve” and “desolve”. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 67-81.
- Jonin, P. (2025) Utiliser l’IA générative en classe de mathématiques et en SNT <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1691>
- Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning geometry and beyond... In B. Ubuz, Ç. Haser, et M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 33–49). Antalya, Turkey.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education* 48, 721–737.
- Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgado, E., Richard, P. R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1
- Lagrange J.-B., Artigue M., Laborde C., Trouche L. (2003) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (eds) *Second International Handbook of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.
- Lagrange, J.-B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement : Une Approche par les Techniques (The Integration of technological Instruments in teaching/learning: An Approach from the techniques). *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Lagrange, J.-B. (2005). Transposing computer tools from the mathematical sciences into Teaching. In D. Guin, K. Ruthven, et L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 67-83). New York: Springer.
- Lagrange, J.-B., Richard, P. R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. In: Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (eds) *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_37-1
- Lagrange, J.-B., Richard, P.R., (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgado, E., Richard, P. R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context*, Springer International Publishing, pp.211-228., [10.1007/978-3-030-90850-8_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9). hal-03636678
- Lesnes-Cuisiniez, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les*

problèmes de construction de figures planes. Thèse. Université de Paris, Français. NNT : tel-03404996v1.

- Mirzadeh, I., Alizadeh, K., Shahrokhi, B. et al (2025) Gsm-symbolic: understanding the limitations of mathematical reasoning in large language models. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.05229>
- Mounier G., Aldon G. (1996) A Problem Story: Factorisations of $x^n - 1$. *International DERIVE Journal*, vol.3. 3, pp. 51-61
- Pepin, B., Buchholtz, N. et Salinas-Hernández, U. (2025) A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education. *Digit Exp Math Educ* 11, 9–41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>
- Richard, P. R., Venant ,F., Gagnon ,M. (2019) Issues and Challenges in Instrumental Proof. In: Hanna G., Reid D., de Villiers M. (eds) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Springer, Cham.
- Trouche, L., (1994) Calculatrices graphiques : la grande illusion. *Repères IREM*, 14, pp.39-55. {hal-01541174}
- Vérillon, P. et Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.

Annexe. Un exercice pour travailler sur les réseaux neuronaux

On considère un réseau neuronal devant permettre à trois amis A_1, A_2, A_3 de choisir parmi deux restaurants r_1 et r_2 . Le but est de comparer deux fonctions d'activation, C_b (binaire) et C_σ (sigmoïde). Comme on le verra C_σ est calculé à partir de la fonction sigmoïde (ou logistique) définie sur les réels par $\sigma(z) \equiv \frac{1}{1 + e^{-z}}$. L'exercice se poursuit par un exemple d'apprentissage par rétroaction.



Le choix des amis est r_1 si la fonction d'activation est strictement positive et r_2 si la fonction est strictement négative. Une couche intermédiaire comprend deux nœuds P_1 et P_2 correspondant à deux plats favoris des amis. P_1 envoie le nombre n_1 des amis qui apprécient le premier plat et P_2 le nombre n_2 des amis qui apprécient le second (appréciation non exclusive).

- Déterminer les valeurs possibles des couples (n_1, n_2) . Entrez ces valeurs dans deux colonnes P_1 et P_2 d'un tableur.
- r_1 fait mieux le premier plat. r_2 fait mieux le second plat. Le nœud R_1 envoie donc la valeur $\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3} - \frac{3}{2}$ et le nœud R_2 envoie la valeur $\frac{n_1}{3} + \frac{2n_2}{3} - \frac{3}{2}$. ($2/3$ et $1/3$ sont des poids, et $-3/2$ assure une moyenne nulle ce qui permettra une prise de décision en fonction du signe). Dans les deux colonnes suivantes faire calculer les valeurs sortant des nœuds R_1 et R_2 .
- On considère qu'il existe d'autres différences influant le choix des amis (situation, accueil...) On introduit un poids k (compris entre 0 et 1) pour quantifier cette influence.
Choisir une case du tableur pour le poids k . Dans la colonne suivante calculer la fonction de choix $C_b = kR_1 - (1 - k)R_2$ puis la colonne correspondant au nœud final (r_1 si $C_b > 0$; r_2 si $C_b < 0$; 0 si $C_b = 0$).
- Noter et représenter graphiquement le nombre de choix 0, r_1 et r_2 pour chaque valeur de k de 0 à 1 par pas de 0,1. Vous pouvez le faire avec le tableur en créant un curseur (slider) pour faire varier k , ou avec un programme Python ou encore Geogebra. Que remarque-t-on ? En l'absence de la connaissance de (n_1, n_2) , ces nombres de choix permettent-ils une prise de décision ?

5. Dans cette question et les suivantes, on considère la fonction d'activation $C_\sigma = k\sigma(R_1) - (1 - k)\sigma(R_2)$. Remplacer C_b par C_σ dans le tableur. Noter et représenter de même le nombre de choix $(0, r_1, r_2)$ pour les mêmes valeurs de k . Comparer avec les résultats de la question 3. Commentez l'assertion suivante : « la fonction d'activation sigmoïde permet qu'une petite modification sur un poids entraîne une petite modification sur le résultat ».
6. Vous avez observé que pour $k=0,5$, il y a 6 choix r_1 et 6 choix r_2 . Une étude statistique montre que le restaurant 2 n'est choisi que dans 5 cas (n_1, n_2) . En faisant varier k (vous pouvez changer l'incrément), repérer qu'il existe un couple (n_1, n_2) qui fait basculer le choix correspondant de r_2 de 6 à 5 ainsi qu'un couple (n'_1, n'_2) qui fait basculer le choix correspondant de r_2 de 5 à 4. Cette observation va permettre d'estimer le poids k .
7. Exprimer la fonction de choix $C_\sigma(k)$ pour le couple (n_1, n_2) . Quelle équation faut-il résoudre pour trouver la valeur de k pour laquelle le nombre de choix r_2 bascule de 6 à 5 ? Résoudre.
8. Calculer de même la valeur de k pour le couple (n'_1, n'_2) qui fait basculer le nombre de choix r_2 de 5 à 4. Vous obtenez ainsi un encadrement de la valeur de k correspondant à l'observation statistique.
9. Vous avez résolu les équations des questions 6 et 7 par l'algèbre. Dans la pratique des réseaux neuronaux, ces équations impliquent de très nombreuses inconnues (tous les poids du réseau) et ne sont pas résolubles par l'algèbre. L'actualisation des poids à partir d'exemples (l'apprentissage) utilise un algorithme de "descente de gradient". Nous écrivons l'équation trouvée à la question 6 sous forme $f(k) = 0$. L'algorithme part de la valeur $k = 0.5$, pour laquelle $f(k)$ est environ égal à $-0,03$. Il ajoute itérativement une valeur de plus en plus petite jusqu'à obtenir $f(k) > 0$. Par exemple, cette valeur peut être choisie égale à $-a \cdot f(k)$, a étant un facteur à adapter. Implémenter cet algorithme en python ou sur le tableur avec $a = 1/3$ Comparer au résultat obtenu en 6. Que se passe-t-il si on prend un facteur plus grand (par exemple $a = 1$) ou plus petit (par exemple $a = 1/5$) ? Rechercher dans une documentation sur les réseaux neuronaux le nom donné à $f(k)$ et celui donné au facteur a .

Exploration du travail mathématique : quels enjeux entre l'intelligence artificielle générative et l'intelligence artificielle symbolique ?

Elizabeth Montoya Delgadillo

Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Valparaíso, Chile ;

elizabeth.montoya@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Ce travail explore le type de travail mathématique qui émerge lorsque des enseignants en formation initiale interagissent avec des intelligences artificielles génératives et symboliques dans des tâches de construction géométrique. À l'aide de la théorie des espaces de travail mathématiques (ThETM), on analyse les genèses instrumentale, sémiotique et discursive mises en œuvre lors de la construction d'un rectangle et d'une spirale d'or à l'aide de GeoGebra et d'une intelligence artificielle. À partir de l'analyse de quatre cas, des différences sont identifiées dans les stratégies de résolution, les raisonnements et les processus d'instrumentalisation. Les résultats montrent des erreurs discursives, sémiotiques et instrumentales associées au suivi d'instructions générées par l'IA, notamment en ce qui concerne la compréhension du nombre d'or et des dépendances géométriques. De même, certains étudiants développent des formes plus sophistiquées de travail mathématique par le biais de la programmation et de l'automatisation. Enfin, nous discutons de la nécessité de promouvoir une utilisation critique et épistémologiquement contrôlée de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques.

Mots clés : Intelligence artificielle, instrumentalisation, espace de travail mathématique, spirale d'or

Introduction

L'expression *intelligence artificielle* (IA) est attribué à John McCarthy (McCarthy et al., 2006) lors de la conférence de Dartmouth en 1955, considérée comme le point de départ de ce domaine. Avec son équipe, il a défini les objectifs et les approches de l'IA moderne. Cependant, d'autres étapes cruciales avaient déjà été franchies auparavant, qui ont étayé les fondements théoriques, comme les travaux de Turing (1950) ou ceux de McCulloch & Pitts (1943) à la même époque. Considérés comme les fondements théoriques de l'informatique moderne et essentiels à l'IA, ils ont remis en question et concrétisé l'idée de simuler la pensée humaine à l'aide d'une machine. S'il est reconnu que les fondements de l'IA existent depuis plusieurs décennies déjà, les avancées technologiques récentes ont accéléré la portée et le potentiel de ses applications, tout particulièrement dans l'éducation, domaine sur lequel se concentre l'intérêt de cette recherche. L'IA a connu un développement croissant qui a suscité, depuis des décennies, un grand intérêt de la part de la didactique pour le champ des technologies de l'information. Il existe toutefois un écart considérable entre les produits de l'industrie et ceux qui relient spécifiquement l'IA à la didactique des mathématiques (Emprin et Richard, 2023), ce qui place les chercheurs dans une position difficile et rend nécessaire le développement de la recherche.

Les défis auxquels est confronté le secteur de l'éducation sont considérables, et il est important d'étudier comment les modèles d'IA améliorent les connaissances dans les environnements éducatifs. À mesure que l'on procède à des revues systématiques sur le sujet, les informations disponibles ne cessent de s'étoffer ; on peut notamment citer une revue déjà réalisée par Ali et al. (2024), qui porte sur 618 articles. Les auteurs classent les thèmes et nous présentent une série d'effets liés à : l'IA dans l'apprentissage à partir du besoin d'indications créatives, la formation sur divers ensembles de données et genres, l'intégration des contributions humaines et la confidentialité des données, ainsi que l'élimination des biais. Dans cette recherche, nous nous intéresserons explicitement à l'effet sur l'apprentissage, à l'utilisation de ces outils numériques qui ont transformé (et continuent de transformer) le secteur éducatif, le raisonnement mathématique et, en définitive, la manière d'apprendre et d'enseigner les mathématiques.

Toutefois, la relation entre l'intelligence artificielle et la didactique des mathématiques fait l'objet de débats depuis plusieurs décennies. Les travaux de Balacheff (1994a) nous montrent que la transposition informatique n'est pas un simple transfert vers des environnements d'apprentissage informatisés, mais qu'elle résulte d'une construction de transformations des objectifs pédagogiques. Il établit un lien naissant avec la notion théorique de transposition didactique (Chevallard, 1985), en affirmant que l'introduction des technologies informatiques dans la salle de classe (à tous les niveaux) s'accompagne de nouveaux phénomènes et de transformations complexes, avec des dispositifs informatiques présentant des limites et des contraintes, tant au niveau du matériel que des logiciels.

Un des modèles présentés par Balacheff (1994b) repose sur le principe selon lequel les dispositifs informatiques divisent le « monde » en trois régions : l'univers interne, l'interface et l'univers externe. Dans ce dernier, il identifie l'humain (appelé opérateur humain) avec ses propres connaissances et, éventuellement, avec un accès à d'autres dispositifs. Il y a plus de 30 ans, Balacheff (1994a, 1994b, 2019, 2022) s'est interrogé sur la place de la connaissance, en se référant aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Le développement mondial des technologies numériques et l'essor des IA génératives (ou statistiques) ont relégué au second plan les IA dites symboliques ; on constate d'ailleurs que ces deux types d'IA n'ont pas fait leur entrée dans les salles de classe avec la même rapidité. Cette véritable révolution technologique, comme beaucoup d'autres, s'accompagne de grandes interrogations pour les chercheurs. Dans notre discipline, l'IA générative est en train de transformer les méthodes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, les contrats didactiques (Brousseau, 1988), et de remettre en question les modes de raisonnement et l'intelligence humaine.

À ce propos, des inquiétudes resurgissent quant à la place laissée à l'intelligence humaine, aux effets de « boîte noire » sur l'apprentissage et au contrôle des processus d'apprentissage (Emprin et Richard, 2023), ainsi qu'à la nécessité d'ouvrir des espaces de formation où enseignants et élèves apprennent à interagir avec les outils numériques de manière critique, réfléchie et mathématiquement significative.

Ce qui est présenté dans ce texte s'inscrit dans le cadre d'une étude sur le travail mathématique intégrant l'IA afin de favoriser les connaissances mathématiques des enseignants en formation initiale. Pour ce faire, nous étudierons comment l'enseignant s'approprie l'IA en contrôlant, grâce à ses connaissances, le système génératif et le système symbolique. Nous espérons qu'à l'issue de cette recherche, nous disposerons de preuves des changements intervenus dans l'espace de travail mathématique de l'enseignant en formation, afin qu'il devienne un opérateur épistémique capable de contrôler l'utilisation de l'IA pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Panorama général : IA génératives – IA symboliques

A partir de 2022, l'émergence des IA génératives telles que ChatGPT ou Gemini, entre autres, a déclenché une véritable révolution, sans précédent depuis près de 50 ans, dans le domaine de l'IA, surtout si on les compare aux IA symboliques utilisées spécifiquement pour l'enseignement des mathématiques, telles que Geogebra ou Matlab, entre autres. La littérature sur l'IA est vaste et, à chaque fois qu'une revue systématique est effectuée, de nouveaux articles apparaissent, ce qui témoigne de l'intérêt suscité par la recherche sur ce sujet.

À ce jour, il n'existe pas de définition unique, claire, précise et unanimement acceptée de l'IA. Cela dit, Balacheff (2022) la définit comme une propriété des machines qui manifestent des comportements qui attire l'attention par leur intelligence, sans oublier qu'il s'agit d'un jugement fondé sur une sorte d'empathie humaine. Ainsi, l'IA simule une illusion d'intelligence face à l'humain qui l'utilise. À cet égard, l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE¹) suggère de prendre en compte deux approches fondamentales qui font référence à la manière dont la machine apprend ou traite l'information : l'approche statistique et l'approche symbolique (OCDE, 2019 dans Richard et Emprin, 2023, p136) :

L'IA symbolique s'appuie sur des représentations logiques pour aboutir à une conclusion à partir d'un ensemble de contraintes. Elle exige que les chercheurs construisent des structures décisionnelles détaillées, compréhensibles par l'homme, pour traduire la complexité du monde réel et aider les machines à parvenir à des décisions semblables à celles des humains. (...)

L'IA statistique, qui permet aux machines d'inférer une tendance à partir de schémas, connaît depuis peu un engouement grandissant. Un certain nombre d'applications allient les approches symbolique et statistique. (pp. 29-30)

Il convient de mentionner que ces deux systèmes sont des algorithmes informatiques, mais de nature différente. À cet égard, Richard et Van Vaerenbergh (2026) soulignent que les approches symboliques, fondées sur des règles et des symboles, modélisent la pensée humaine à travers des processus logiques, générant ainsi des résultats vérifiables. « Elles sont particulièrement adaptées aux démonstrations formelles, aux calculs, à l'analyse symbolique (dérivées, résolution d'équations) et au traitement de données statistiques pour établir des corrélations théoriques. Cependant, ils ont des difficultés à gérer l'incertitude et les grandes quantités de

¹ Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD en anglais.

données » (p. 33). Les approches statistiques (ou génératives), quant à elles, utilisent des données et des techniques d'apprentissage automatique (qui sont en fait des algorithmes) pour reconnaître des modèles et faire des prédictions. « Elles excellent dans les tâches prédictives et la modélisation probabiliste » (p. 33), et les auteurs évoquent l'effet de *boîte noire*, car les décisions et les réponses fournies par ce système manquent de transparence. Dans certains cas, le raisonnement semble être déductif, mais il s'agit plutôt de la réutilisation de segments déductifs extraits des données d'apprentissage et articulés selon des mécanismes de fréquence.

Les auteurs nous présentent une classification, que nous adoptons dans cette étude, du diagramme original de l'OCDE (2019), dans laquelle ils ont ajouté l'approche numérique, représentée par des lignes pointillées autour de l'approche symbolique, ainsi que les modèles GML et génératifs dans les réseaux neuronaux profonds.

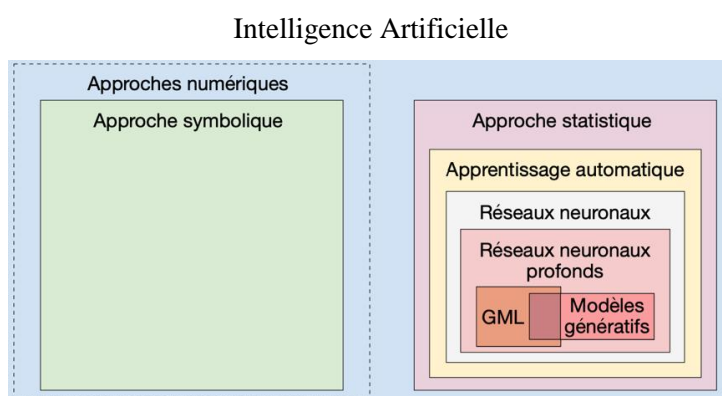


Figure 1 : Adaptation du diagramme original de l'OCDE (2019). Richard et Van Vaerenbergh (2026 p.33)

La classification proposée par ces auteurs nous semble essentielle pour intégrer le rôle décisif que joue l'humain grâce à sa propre intelligence. Il convient de noter que, dans le cadre de cette formulation, nous n'aborderons pas le concept d'intelligence en raison de sa complexité (Turing, 1950 ; Emprin et Richard, 2023).

Dans le cadre de notre propre revue systématique, nous avons relevé l'étude bibliographique d'Ali et ses collaborateurs (Ali, et al., 2024), qui a consisté en une sélection de 618 articles à l'aide de mots-clés liés à « ChatGPT », « IA » et « éducation » ; des filtres ont été appliqués par langue, année (2018-2023) et pertinence thématique, réduisant le nombre d'articles à 233. Enfin, ils ont appliqué un critère de qualité, ce qui a abouti à 124 articles constituant le corpus final, qu'ils ont classés en cinq catégories :

1. Utilisateur : difficultés liées à l'interaction, à la perception et aux compétences des utilisateurs (enseignants et étudiants) ;
2. Opérationnel : problèmes d'intégration et de fonctionnement technique ;
3. Environnemental : facteurs externes tels que la politique institutionnelle et le contexte social ;
4. Technologique : limitations techniques, biais et qualité des données ;
5. Éthique : préoccupations concernant la confidentialité, les biais, la dépendance et l'utilisation responsable.

L'équipe et les auteurs de cette synthèse ont également regroupé les résultats des articles examinés et soulignent les défis suivants :

1. Techniques et opérationnels :
 - Limites en termes de performances, biais dans les données d'entraînement et difficultés à intégrer ChatGPT dans les systèmes existants ;
 - Nécessité d'une personnalisation et d'une amélioration continue des versions pour différents contextes éducatifs.
2. Éthiques et liés à la confidentialité :
 - Préoccupations concernant la protection des données et la confidentialité ;
 - Risque de dépendance excessive à l'IA, biais dans les réponses pouvant favoriser certains groupes ou certaines idées.
3. Humains et liés à l'interaction :
 - Manque d'interaction humaine significative et d'empathie, qui sont essentielles dans l'éducation ;
 - Nécessité de former les enseignants et les élèves à l'utilisation efficace et responsable de ces outils.
4. Stratégies et opportunités :
 - Utilisation de ChatGPT comme complément et soutien plutôt que comme substitut au contact humain ;
 - Recommandations pour le développement de versions mieux adaptées, la formation et la réglementation de l'utilisation.

Bien sûr, plusieurs recommandations se dégagent, telles que la mise en œuvre de politiques garantissant une utilisation éthique et responsable de l'IA, la collaboration entre différents acteurs (formateurs, enseignants, développeurs) et l'adoption de politiques visant à relever ces défis. Mais l'une d'entre elles, dans laquelle s'inscrit cette recherche, consiste à développer davantage les recherches sur les effets sur l'apprentissage. Une question qui, pour nous, est au cœur de la formation des enseignants.

Fondements théoriques

La théorie des espaces de travail mathématiques (ETM) offre un cadre riche pour comprendre comment s'articulent les processus cognitifs et épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques, en mettant l'accent sur l'importance de la coordination entre les trois genèses : discursive, sémiotique et instrumentale (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak, Montoya Delgadillo et Richard, 2022). Cette interaction dynamique montre que le travail mathématique ne se limite pas à des actions isolées, mais qu'il est le résultat d'une activité complexe et intégrée. En effet, le travail mathématique peut être conceptualisé comme l'interaction entre un sujet épistémique (la personne qui apprend, enseigne ou produit des mathématiques) et un environnement épistémologique (le système dans lequel se déroule l'activité mathématique) dans un contexte éducatif.

Pour le chercheur, il est important d'identifier les genèses activées par un enseignant (ETM idoine) ou celles privilégiées par un élève lors de la réalisation d'une tâche mathématique (ETM personnel) afin de comprendre le travail mathématique. Or, les caractérisations de ces espaces

de travail mathématique sont déterminées par une autre notion, non moins importante, appelée *paradigmes*, qui dépend du domaine mathématique (Kuzniak et al., 2022).

Il est donc important de se pencher sur la genèse instrumentale, qui explique comment un objet devient un instrument et s'intègre ainsi à l'humain pour construire des connaissances mathématiques (Artigue, 2002). Cette genèse s'articule généralement autour de l'utilisation de matériel concret, mais aussi de routine opératoire et d'algorithme ; c'est un processus qui transforme l'outil en instrument, une dialectique entre l'*instrumentalisation* et l'*instrumentation* (Rabardel, 1995), appelée processus d'instrumentalisation (Trouche, 2002 ; Flores, Gaona et Richard, 2022). L'instrumentalisation peut conduire à l'enrichissement de l'artefact par une meilleure exploitation de celui-ci, mais aussi à sa sous-utilisation (Artigue, 2002). Les instruments deviennent des entités mixtes composées de l'objet technique (artefact matériel ou symbolique) et de composantes cognitives au moment de la manipulation du *representamen* (Peirce, 1974), liées à ses usages (schèmes d'usage) – la genèse sémiotique.

Il serait réducteur de considérer l'IA dans un nouveau *travail mathématique* uniquement sous l'angle de la genèse instrumentale, car l'utilisateur, en l'occurrence un étudiant (dans cette étude un enseignant en formation initiale), utilise d'autres raisonnements, d'autres visualisations et des registres de représentations propres aux IA utilisées. Mais comment les utilise-t-il ? Quelle est la qualité de l'utilisation de cette IA ? Et comment peuvent-elles bénéficier à son propre apprentissage ? Ce sont ces questions que nous abordons dans cette recherche.

Un exemple en formation initiale d'enseignants de mathématiques

Au cours du premier semestre 2025, dans le cadre d'une session de formation, il a été demandé à un groupe de 18 enseignants en formation initiale, en huitième semestre, de créer, en s'aidant éventuellement d'une IA, une spirale d'or avec Geogebra, le logiciel libre disponible à l'université. Par la suite, des questions leur ont été posées en tant qu'enseignant afin de les amener à réfléchir aux avantages, aux difficultés et aux obstacles que peut présenter la réalisation d'une construction de ce type.

La tâche demandée aux étudiants était de réaliser des constructions géométriques à l'aide de Geogebra, avec la possibilité de s'aider d'une IA :

1. Construisez un rectangle d'or.
2. Construisez une spirale d'or.
3. En tant que futur enseignant, quelles connaissances vos futurs élèves pourraient-ils acquérir ? Des savoirs mathématiques, pratiques (de la vie quotidienne) ou informatiques.

La construction géométrique associée au nombre d'or (ou proportion divine) n'est pas triviale, notamment en ce qui concerne l'obtention de segments et de quadrilatères faisant intervenir le nombre d'or (ou proportion divine). Mais de nombreux élèves ne connaissaient pas la spirale d'or, ni la suite de Fibonacci qui y est liée. La construction exigeait également des connaissances sur Geogebra en tant qu'artefact géométrique (ou outil) non classique, comme un compas ou une règle, avec un processus d'*instrumentalisation* de la part des étudiants. Cependant, pour certains d'entre eux, cet outil ne constituait pas encore pleinement un instrument. L'instruction

mentionnait donc la possibilité de s'appuyer sur une IA s'ils en avaient besoin pour réaliser cette construction, et ce librement.

Nous présentons ci-dessous, à titre d'illustration, une spirale d'or construite par l'un de ces enseignants en formation initiale.

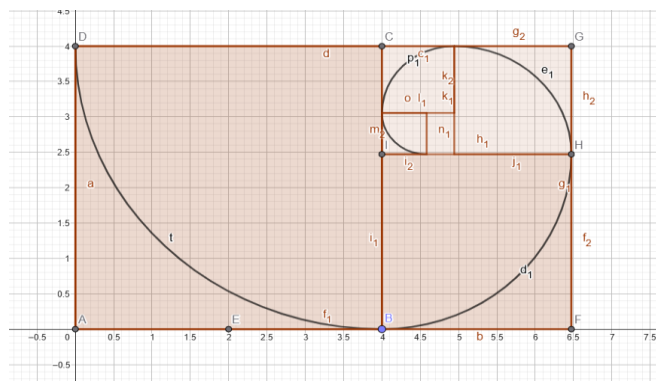


Figure 2 : Production d'un enseignant en formation

Nous présenterons ci-après les quatre cas qui ont été analysés lors de l'atelier des JETM4, au cours duquel ont été identifiés et étudiés : i) les stratégies possibles, ii) les éléments instrumentaux, discursifs et sémiotiques impliqués, iii) les domaines et les paradigmes ainsi que iv) les blocages dans le dialogue avec l'IA. Nous disposons des enregistrements vidéo des écrans d'ordinateurs et des requêtes effectuées auprès de l'IA choisie, en l'occurrence ChatGPT, pour suivre les instructions.

Sofía et le rectangle d'or : [Sem-Ins] et les paradigmes 1 et 2

L'étudiante demande d'emblée au chat de ChatGPT : « Bonjour chat, comment puis-je construire un rectangle d'or ? ». Elle suit alors les instructions de l'IA (Ins) et les affiche sur un écran adjacent au logiciel Geogebra pour réaliser la construction (voir figure 3). Nous détaillons à la suite les différents épisodes de son travail et nous concluons par une synthèse.

Épisode 1. Suivre des instructions sans comprendre le problème

Sofía lit les instructions de l'IA et recherche avec le moteur de recherche Google ce qu'est un rectangle d'or avant de suivre les instructions. Cependant, au bout de 20 minutes, elle se rend compte qu'elle n'a suivi que les instructions pour construire un carré (figure 3-a) ; elle se plaint donc à l'IA : « Chat, tu m'as donné de très mauvaises instructions ». L'IA lui donne raison et lui donne des instructions pour construire le carré à l'aide de l'outil de Geogebra permettant la construction d'un polygone régulier à quatre côtés (figure 3-b).

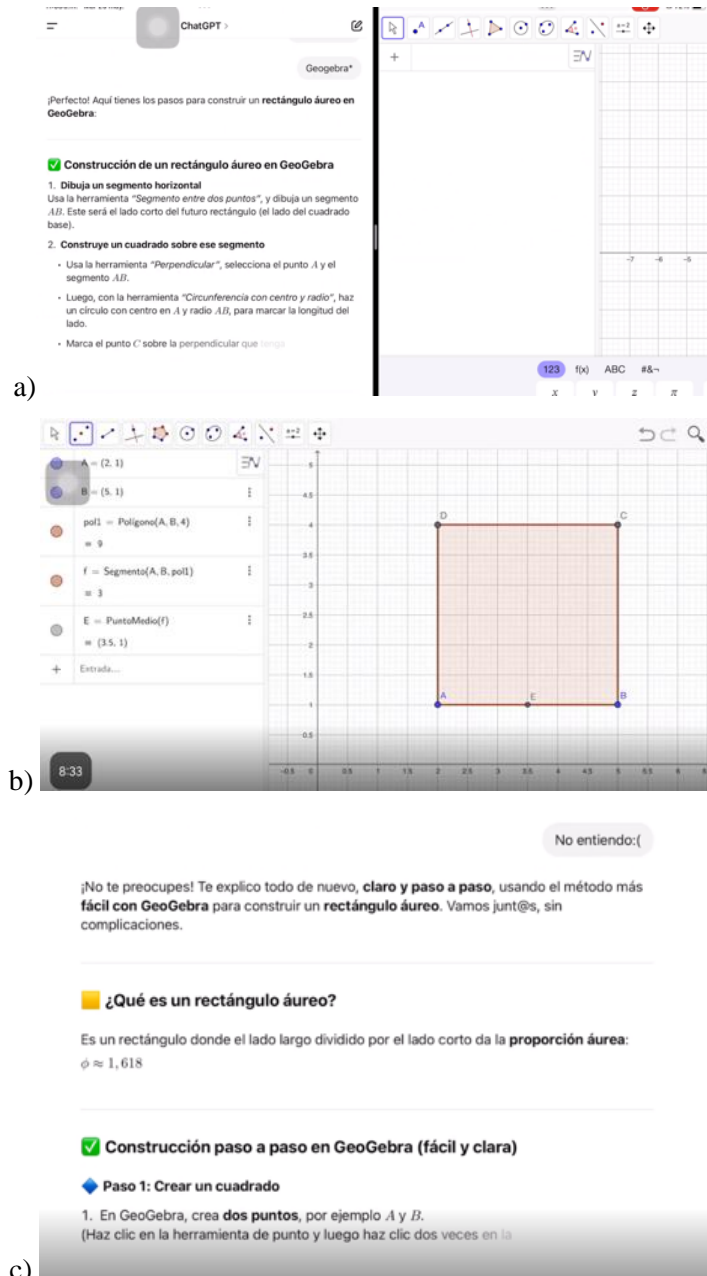


Figure 3 : Production de Sofía, épisode 1

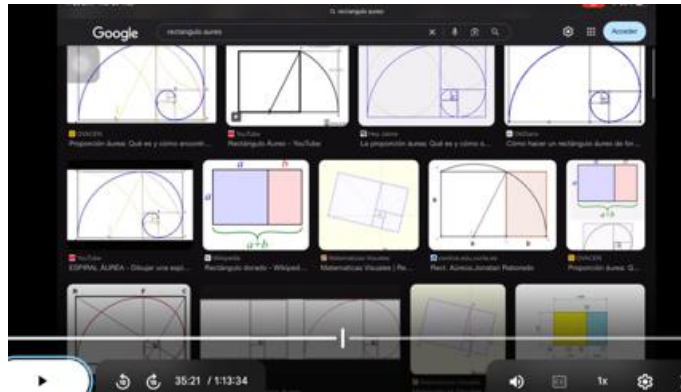
Une fois le rectangle construit à l'aide de l'applet Geogebra, Sofía ne comprend pas ce qu'elle doit faire ensuite ; elle écrit alors dans le chat de l'IA « je ne comprends pas » (figure 15-c). Après cet épisode, Sofía suit les instructions, en plaçant des points en s'aidant de la grille de Geogebra (en utilisant une géométrie cartésienne et non une géométrie synthétique).

Épisode 2. Le milieu dans la construction de nouveaux carrés

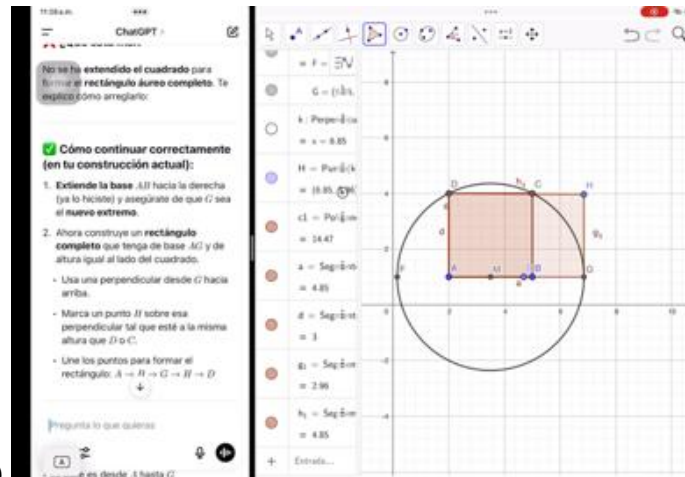
Sofía localise automatiquement le milieu, mais suit mal l'instruction pour la construction d'un cercle (ou d'un arc de cercle) requise. Elle est perdue dans la construction et demande donc à l'IA de vérifier où elle s'est trompée (elle charge le fichier dans le chat de l'IA), car ce qu'elle a construit ne ressemble pas visuellement à un rectangle d'or (Sem et iconique). L'IA « vérifie » la construction réalisée et lui fournit en réponse les étapes correctes et incorrectes (figure 4-a).

Sofía continue à poser des questions (à l'aide de *prompts*) pour améliorer sa construction, notamment pour savoir ce qu'est un rectangle d'or. Pour ce faire, Sofía consulte Google (figure 4-b) afin de savoir, une fois de plus, ce qu'est un rectangle d'or. Et bien qu'elle construise le rectangle (figure 5-c), elle retient l'image (iconique) et non le rapport (d'or) entre ses côtés.

- a) **✗ ¿Qué está mal?** Min 34.02. La estudiante
 No se ha **extendido el cuadrado** para prolonga el trazo y genera el
 formar el **rectángulo áureo completo**. Te rectángulo áureo
 explico cómo arreglarlo:



b)



c)

Figure 4 : Production de Sofía, épisode 2

Épisode 3. La construction sans comprendre le nombre d'or

Sofía construit le rectangle et, à l'aide d'un prompt, demande au chat « quelle est la proportion qui se forme ». La réponse qu'elle obtient fait référence aux carrés construits : ABCD et BCHG : « il y a congruence entre ces carrés, donc il y a une proportion de 1:1 ». Par la suite, Sofía se rend compte que la réponse n'est pas correcte, car elle comprend que le rapport concerne le rectangle construit, et elle « réclame » à nouveau l'IA (figure 5-a). Par la suite, le chat lui donne la réponse indiquant que ce que Sofía a construit est correct (figure 5-b). Malgré cela, Sofía mesure les côtés du rectangle dans Geogebra, puis effectue la division sur la calculatrice (figure 5-c) à titre de vérification.

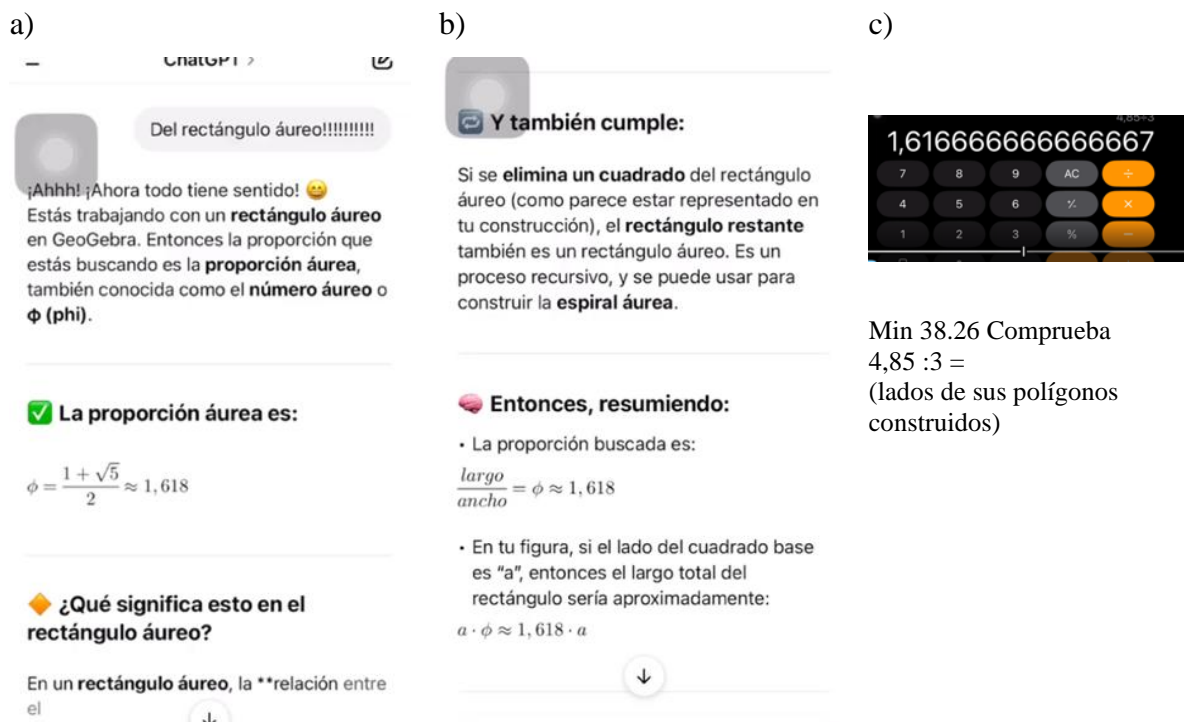


Figure 5 : Production de Sofía, épisode 3

Synthèse du travail de Sofía

Après 41 minutes de travail, Sofía parvient à construire un rectangle d'or. Cette construction a représenté une difficulté pour Sofía, non seulement sur le plan procédural, mais aussi dans la compréhension du nombre d'or qui en découlait. On observe notamment une faiblesse dans la genèse instrumentale (Ins), ce qui a limité sa capacité à mobiliser les outils de manière pertinente. De même, la genèse sémiotique (Sem), par le biais de la visualisation, a eu un effet prédominant, dans la mesure où l'étudiante s'est concentrée sur la forme sans parvenir à l'articuler avec la signification mathématique sous-jacente. Finalement, la genèse discursive (Dis) n'est pas suffisamment activée, car Sofía ne parvient ni à justifier ni à comprendre le rapport qui se dégage de la construction. Nous situons la production de Sofía dans les paradigmes 1 et 2.

A la question (P2), qui consistait à construire la spirale d'or, elle demande des instructions au chat et recommence à lui donner des consignes pour la construction du carré, qu'elle a déjà tracé ; elle envoie alors un prompt de « réclamation » pour lui demander les instructions précises permettant de le transférer dans Geogebra, ce qu'elle fait à l'aide d'une vidéo sur YouTube. Enfin, bien que Sofía se rende compte des imprécisions et des erreurs fournies par l'IA, elle répond à la question (P3) en tant que future enseignante sans faire référence à ses propres difficultés, ni faire allusion aux raisons géométriques en jeu :

En el ámbito computacional, los estudiantes podrían aprender a utilizar las distintas funciones de un software para poder construir el espiral áureo, así desarrollando distintas capacidades computacionales y además, aprendiendo a cómo buscar información sobre el tema, ya sea de la construcción de este o las propiedades del espiral

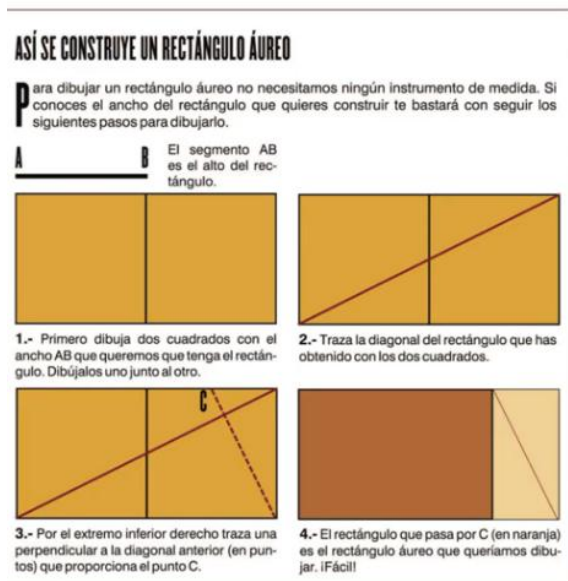
Humberto et la spirale d'or : [Ins-Dis] et le paradigme 1

L'étudiant recherche avec Google ce qu'est un rectangle d'or et considère une réponse générée par l'IA fournie par ce moteur de recherche, afin de suivre les instructions (Ins) d'une page qu'il reproduit ensuite avec succès en construisant un rectangle d'or. Cependant, il ne se rend pas compte des proportions qui existent entre les segments (Dis) et, lorsqu'il doit construire la spirale d'or il ne réutilise pas ces instructions, et il finit par tracer des arcs de cercle entre des points milieux. Ce qu'il construit ressemble visuellement à une spirale, mais n'est pas une spirale d'or, loin s'en faut.

Épisode 1. Suivre des instructions sans comprendre le problème

Humberto recherche sur Google ce qu'est un rectangle d'or pour ensuite suivre les instructions d'un document (figure 6-a) qui guide la construction de deux carrés pour former un premier rectangle, mais qui ne donne aucune indication sur la proportionnalité des segments. Humberto réalise la construction sur sa feuille de travail dans Geogebra (figure 6-b), mais sa non-compréhension de la proportionnalité qui se forme aura des conséquences sur la construction de la spirale d'or.

a)



b)

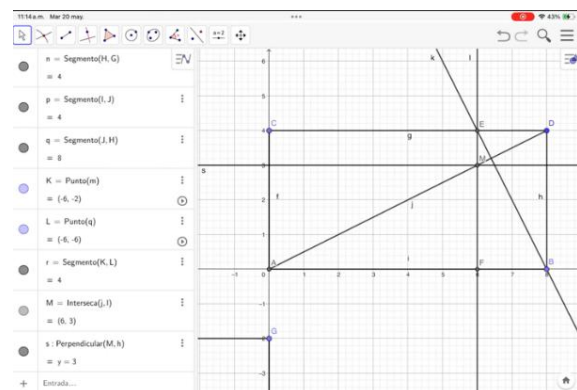


Figure 6 : Production de Humberto, épisode 1

Épisode 2. Une construction défailante.

L'étudiant consulte à nouveau différentes pages internet pour savoir ce qu'est un rectangle d'or, ce qui montre une certaine incertitude quant à la construction qu'il vient de réaliser. Par la suite, il écrit dans Google « comment construire un rectangle d'or » et élabore une nouvelle construction en essayant de reproduire les mesures observées, cette fois-ci à main levée (figure 7). Pour ce faire, il localise les points milieux en s'appuyant sur la grille de Geogebra, utilisée dans ce cas comme un outil symbolique et d'aide à la construction.

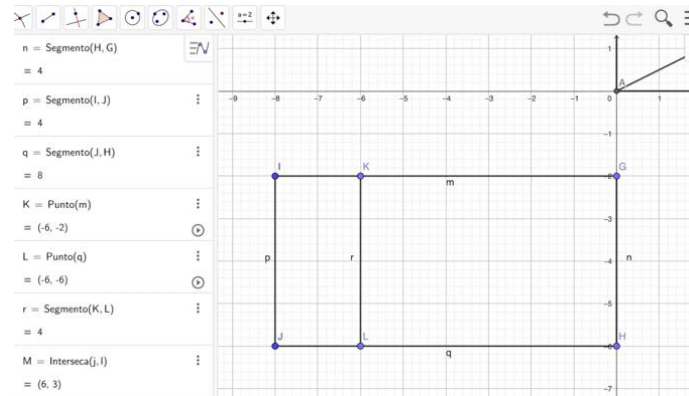
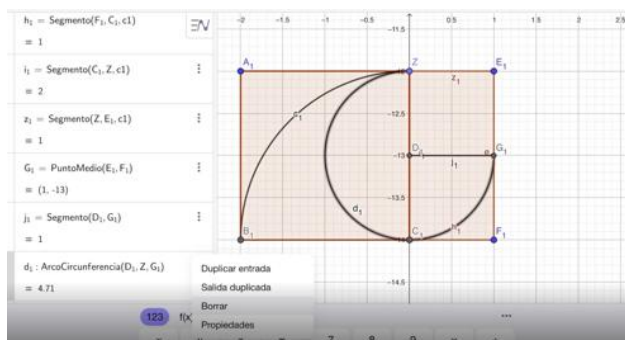


Figure 7 : Production de Humberto, épisode 2

Épisode 3. Une genèse discursive fragile

Cet épisode se caractérise par la recherche, sur différentes pages internet, de la définition d'une spirale d'or. Sans se rendre compte que le premier rectangle d'or, bien construit, lui était utile comme base pour la construction d'une spirale d'or, il l'écarte ainsi de son travail. Humberto construit automatiquement un nouveau polygone régulier à 4 côtés avec Geogebra, puis marque les points milieux des segments et trace des arcs de cercle (figure 8-a). On observe une certaine confusion dans la construction : il marque les milieux de segments puis trace des arcs de cercle (figure 8-b) pour obtenir une spirale, mais erronée.

a)



b)

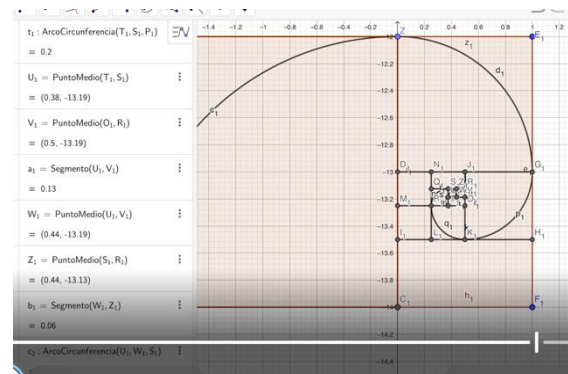


Figure 8 : Production de Humberto, épisode 3

Synthèse du travail de Humberto

On observe une certaine confusion dans la construction, car la procédure consistant à marquer les milieux des segments puis à tracer des arcs de cercle (Figure 8-b) a pour objectif d'obtenir la spirale demandée. Cependant, la construction obtenue est erronée, car il n'y a pas de compréhension des proportions entre les côtés ni des caractéristiques de la spirale d'or (Dis). Il s'agit d'un travail de construction en géométrie guidé par une visualisation iconique, donc plutôt caractéristique du paradigme 1.

Fernanda et le rectangle d'or : [Ins-Sem] et le paradigme 1


L'étudiante demande à l'IA ce qu'est un rectangle d'or, puis comment le construire. Il convient de noter que Fernanda fait trois tentatives pour construire le rectangle. Chacune d'elles présente

des erreurs de type instrumental, mais on constate également un manque de compréhension du rapport d'or qui s'établit entre les côtés du rectangle. L'instruction donnée par l'IA est de tracer un segment avec sa médiatrice, contrairement aux instructions données aux étudiants précédents, qui leur demandaient d'abord de construire un carré. On observe une construction numérique et non géométrique de la relation entre les côtés du rectangle, comme s'il s'agissait d'ajuster des mesures ; ce fait aura des conséquences sur la construction de la spirale d'or, dans laquelle elle procède à des ajustements et effectue un travail essentiellement visuel (Sem).

Épisode 1. La construction du segment

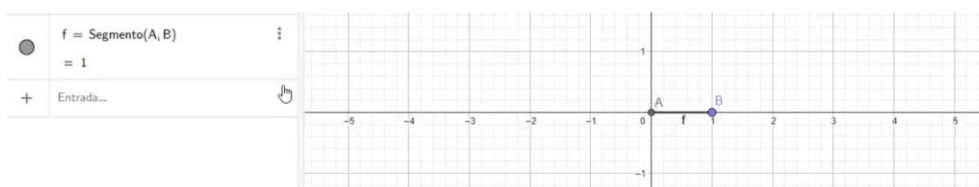
Elle génère un segment de longueur 1 en s'appuyant sur la grille de Geogebra (figure 9-a), puis elle utilise l'outil Médiatrice et l'outil d'intersection entre le segment et la médiatrice générée pour localiser le milieu I (figure 9-b). Bien que l'on observe l'utilisation d'un outil différent de celui fourni par l'IA, cela n'affecte pas l'objectif principal : « trouver le milieu ». Cependant, une représentation supplémentaire non nécessaire est ajoutée (la médiatrice), ce qui augmente la complexité instrumentale et peut constituer un facteur de distraction à l'origine des erreurs ultérieures commises par Fernanda. L'instruction de l'IA est imprécise et parle de « côté court ».

a)

 **Pasos para construir un rectángulo áureo en GeoGebra (método geométrico clásico):**

1. Crear un segmento base

- Selecciona la herramienta "Segmento entre dos puntos".
- Dibuja un segmento AB. Este será el lado corto del rectángulo (puedes darle una longitud, por ejemplo, 1 unidad).



b)

2. Hallar el punto medio del segmento

- Usa la herramienta "Punto medio o centro".
- Haz clic sobre el segmento AB para obtener el punto M, que es el punto medio.

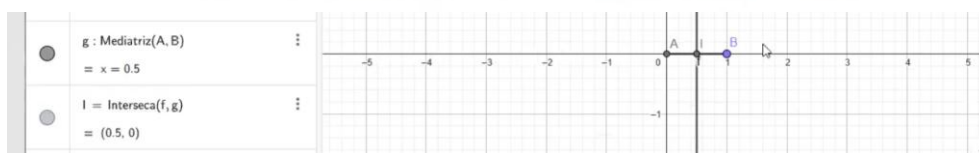


Figure 9 : Production de Fernanda, épisode 1

Épisode 2.

Cet épisode se caractérise par le fait que Fernanda trace des cercles sans bien comprendre à quoi ils servent. Elle trace une perpendiculaire passant par l'une des extrémités du segment

(figure 10-a), puis l'IA lui demande de tracer une droite perpendiculaire et des arcs de cercle (figure 10-b), mais Fernanda trace des cercles (figure 10-c) sans comprendre qu'elle doit tracer un rectangle aux proportions bien définies. Par la suite, elle utilise le bouton « polygone régulier » (figure 10-d) pour construire le rectangle demandé, mais celui-ci n'a pas la proportion d'or entre ses côtés.

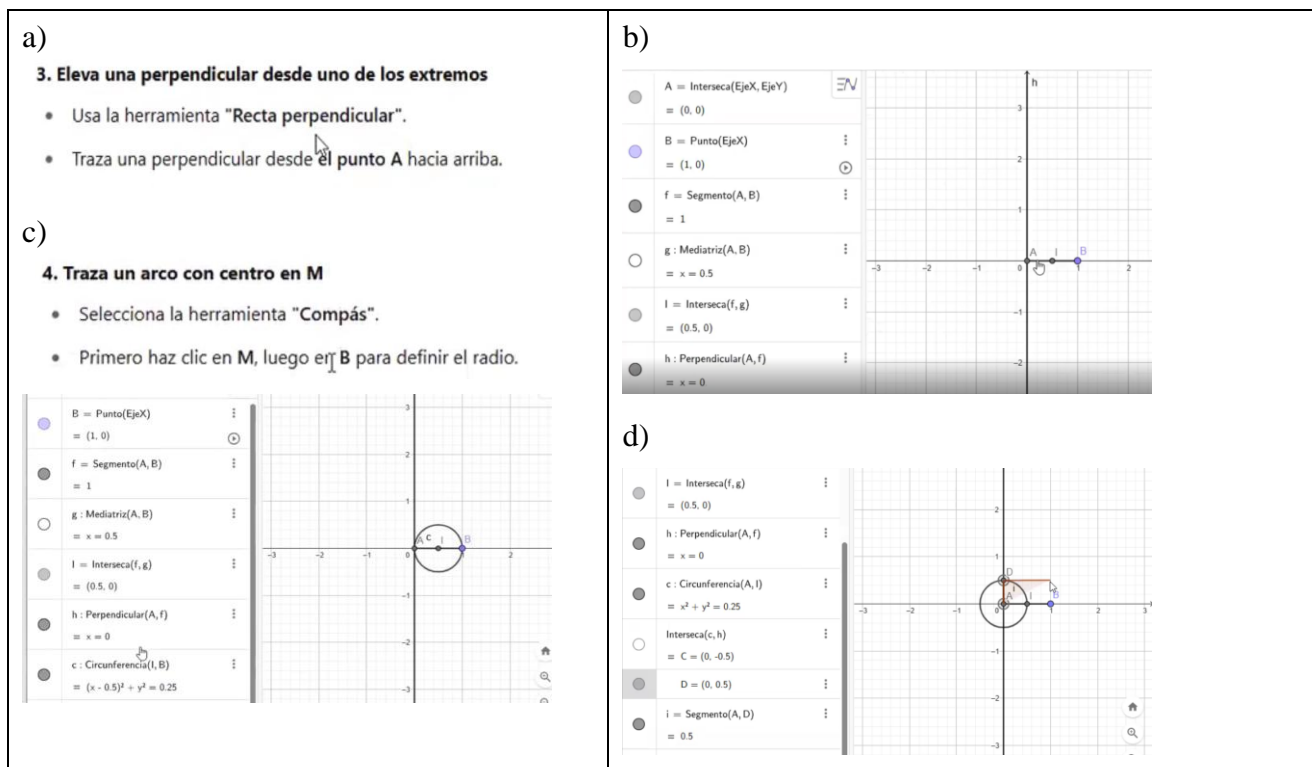


Figure 10 : Production de Fernanda, épisode 2

On relève une erreur instrumentale. L'étudiante utilise l'option « Cercle avec centre et point » (figure 10-c), ce qui entraîne la perte de la dépendance géométrique par rapport au segment précédemment construit. Cela signifie que, même si la construction semble identique, il n'est pas garanti que les proportions soient conservées si l'on déplace les points. En d'autres termes, le concept est correct, mais la dépendance géométrique est perdue.

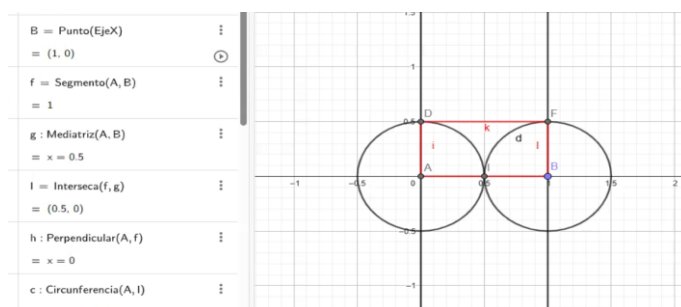


Figure 11 : Construction du rectangle

Par conséquent, le résultat obtenu n'est pas un rectangle d'or, car il ne découle pas de la division en extrême et moyenne raison et, par conséquent, le rapport de ses côtés n'est pas la raison d'or. Visuellement, il ressemble à un rectangle, mais la raison d'or ne peut pas être garantie. Les instructions de l'IA ne sont pas claires ; Fernanda a du mal à les comprendre et a effacé et

reconstruit à plusieurs reprises le rectangle, qui ne s'avère pas être un rectangle d'or (voir figure 11), ce qui témoigne d'une genèse discursive faible. Finalement, le rectangle construit ne peut pas lui être utile pour la suite du travail.

Épisode 3. La construction de la spirale d'or

Fernanda demande ensuite à l'IA comment construire une spirale d'or. La procédure suivie par Fernanda consiste en la construction de segments d'une mesure donnée, avec l'outil de Geogebra et à ajuster les mesures de ces segments (mesure de $AB = 1,618$, voir figure 12) ; elle ajuste même des segments pour que le rectangle ressemble au dessin fourni par l'IA.

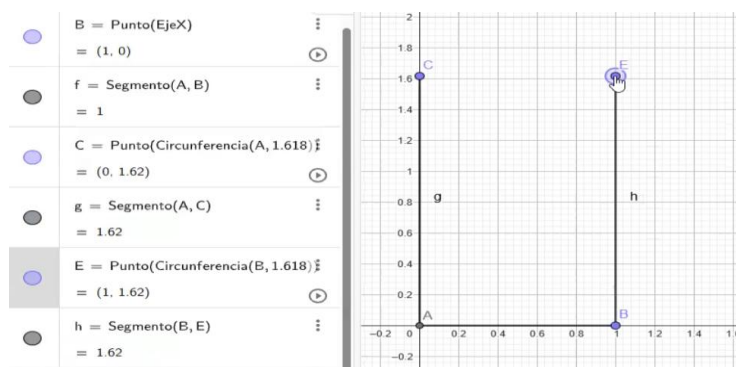


Figure 12 : Production de Fernanda, épisode 3

Elle utilise à nouveau l'outil « Segment de longueur donnée » (Ins), cette fois à partir du point B, avec une longueur de 1,618, en le déplaçant à nouveau verticalement. Ensuite, pour compléter la figure, elle relie les points C et E à l'aide de l'outil Segment.

Fernanda suit les instructions de l'IA, qui consistent à diviser le rectangle en carrés, et lit « extraire les rectangles » et « répéter le processus ». Fernanda répète ensuite la procédure en utilisant l'outil Distance pour mesurer différents côtés (Ins) et place les points manuellement à l'intérieur du polygone ; elle le fait à main levée et visuellement (Sem), et les mesure également (figure 13). Son travail relève du paradigme 1.

2. **Divide el rectángulo en cuadrados**

- Usa la herramienta "Segmento" o "Punto en objeto" para dividir el rectángulo en un cuadrado y un nuevo rectángulo áureo.
- Repite el proceso: en cada paso, extrae un cuadrado del rectángulo restante.
- Debes tener varios cuadrados encajados en forma de espiral (mínimo 5-6 para que se vea bien).

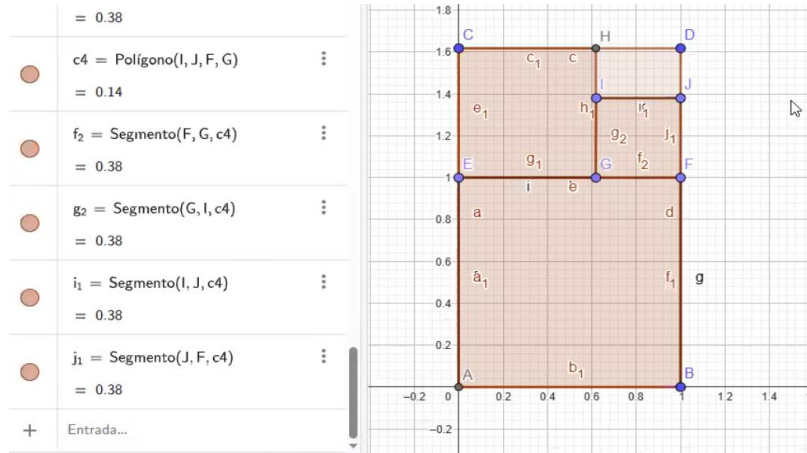
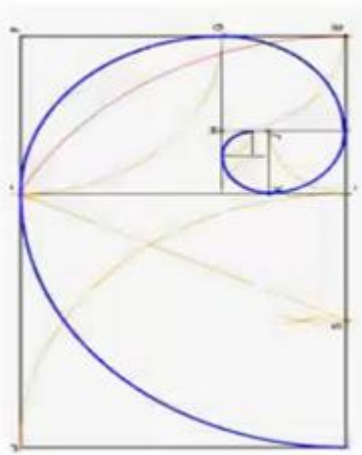


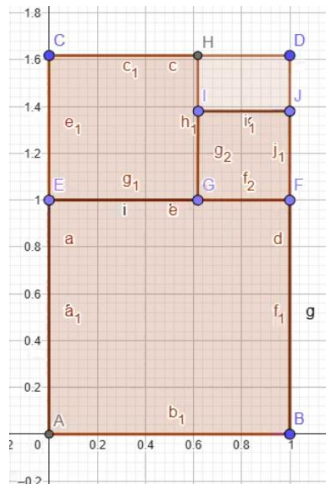
Figure 13 : Division de segments et mesure de longueurs

Au bout de 46 minutes, elle compare ce qu'elle a construit jusqu'à présent avec une image de référence représentant une spirale d'or (figure 14-a), puis utilise l'outil Distance pour ajuster ses segments (figure 14-b) et les déplace (figure 14-c).

a)



b)



c)

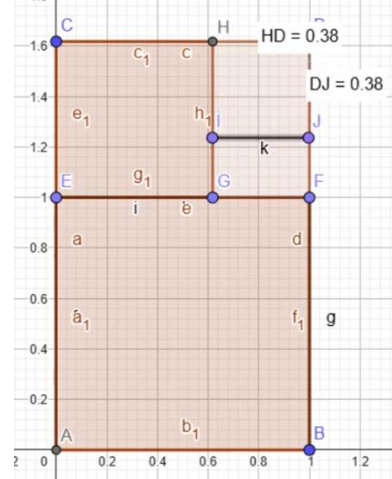


Figure 14 : Une comparaison de la figure construite

Finalement, elle utilise l'outil « secteur circulaire » pour tracer la spirale (figure 15-a). On constate une perte des propriétés géométriques, ce qui entraîne une déformation de la figure (figure 15-b) dès qu'on déplace un point.

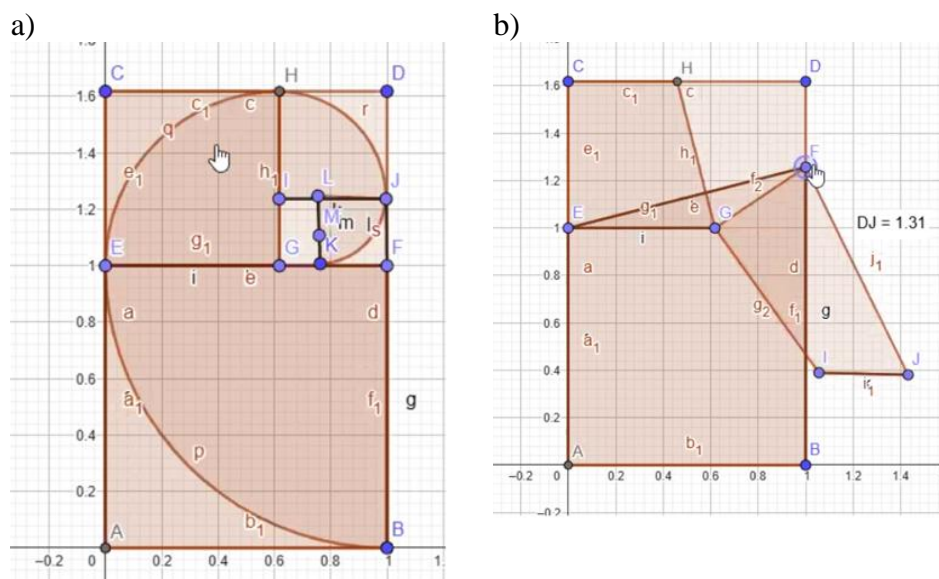


Figure 15 : La spirale d'or qui n'est pas dorée

Synthèse du travail de Fernanda

Le travail de Fernanda consiste à dessiner une figure avec un logiciel dans le paradigme 1. On peut observer des instructions ambiguës de l'IA et des raisonnements erronés tant au niveau de la construction elle-même (Ins) que de la propriété en jeu (Dis) :

- Erreur discursive : l'élève construit le « rectangle d'or » en reproduisant des mesures numériques fixes, sans tenir compte des relations géométriques qui le définissent (division en extrême et moyenne raison).
- Erreur instrumentale : en utilisant des mesures fixes et en déplaçant les objets manuellement, la dépendance géométrique entre les éléments est perdue. Le résultat n'est pas une construction géométrique, mais un « dessin approximatif ».

Nous situons la production de Fernanda dans le paradigme 1 parce que son travail se focalise sur des mesures de segments et il n'y a pas vraiment de construction géométrique. Les dessins du rectangle et de la spirale s'appuient sur une visualisation iconique déconnectée du référentiel théorique et de la raison d'or.

Alessandro et l'instrumentalisation dans le Paradigme 3

L'étudiant effectue une recherche sur Google concernant le rectangle d'or et, pour la spirale, il consulte Geogebra « en ligne ». On ne constate pas de recours à une IA générative. Sa construction se caractérise par le placement de points, dans un premier temps à l'aide de la grille de Geogebra, puis, pour la construction de la spirale, par leur automatisation². Sa construction diffère de celle de ses camarades, et le temps qu'il y a consacré est également moindre en comparaison.

² Dans cette section, le terme « automatisé » a été utilisé pour décrire la construction réalisée par Alessandro, qui a d'abord été programmée en Python avant d'être transposée dans un autre logiciel (Geogebra).

En approfondissant la raison pour laquelle il a terminé la construction si rapidement, et en ma qualité de professeure et de chercheuse, Alessandro m'a informée qu'il avait programmé en Python puis exporté les données pour la construction demandée dans Geogebra.

Épisode 1. Les premiers points

On constate qu'il place les points à sa convenance en s'aidant de la grille de Geogebra, en les espaçant d'une unité, afin de construire un carré (de côté 1) à partir d'un polygone régulier à 4 côtés. Il utilise ensuite l'outil de mesure de Geogebra pour vérifier que son rectangle répond aux exigences, et enregistre le résultat dans la même feuille de travail de Geogebra.

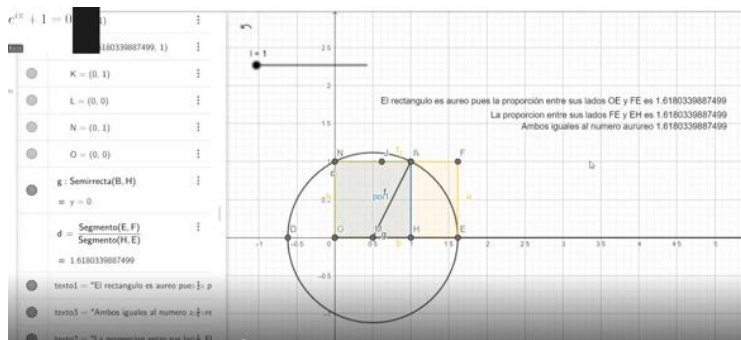


Figure 16 : Production de Alessandro, épisode 1

Épisode 2. Points automatisés

Le travail d'Alessandro est intéressant, car il parvient à comprendre qu'il a besoin de points qui font partie d'un rectangle qu'il ne dessine jamais (Sem, non iconique). Les points ne sont pas placés sur une grille, mais sont positionnés à une distance donnée (Dis) en soustrayant des segments (figure 17-b). Il convient de noter qu'auparavant, Alessandro a consulté la page Geogebra en ligne (figure 17-a), mais qu'il ne suit pas la construction proposée sur ce site.

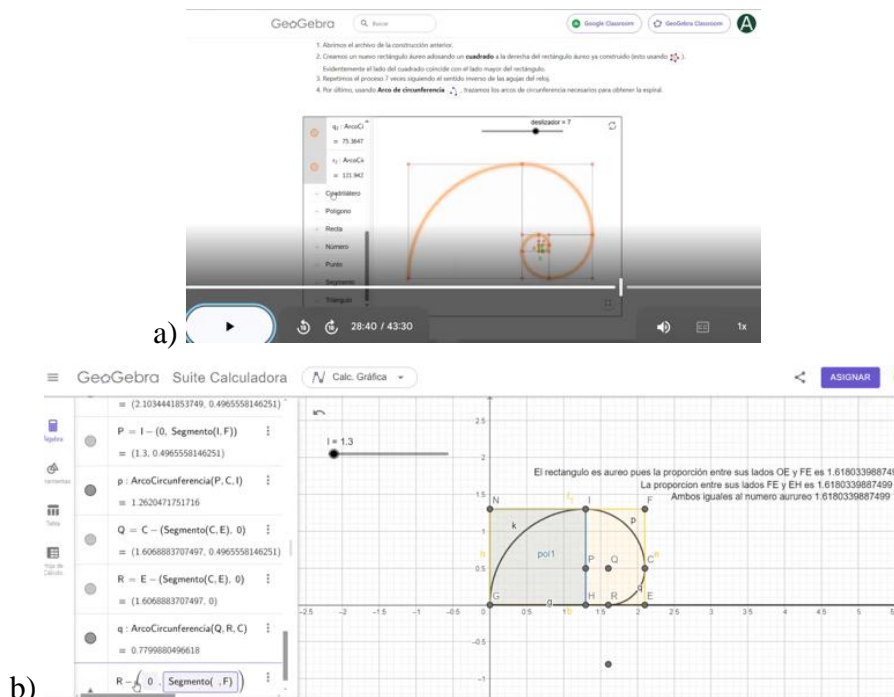


Figure 17 : Production de Alessandro, épisode 2

Épisode 3

À l'aide de l'outil Geogebra, Alessandro mesure les longueurs des segments générés par les points pour vérifier la raison d'or et l'écrit directement sur la feuille de travail Geogebra (voir la figure 17-b). De plus, il crée un curseur qui semble lui permettre de généraliser une construction (Dis) et, en quelque sorte, de mettre de côté le premier carré de côté 1. Il note ensuite sur sa feuille de travail Geogebra que la construction respecte les mesures et le nombre d'or.

À la minute 36, Alessandro a terminé les deux constructions et effectue un « zoom arrière » pour une dernière vérification, il masque les points de la construction (figure 18), puis enregistre l'image dans sa feuille de réponse. Ce temps de travail le distingue du reste de ses camarades.

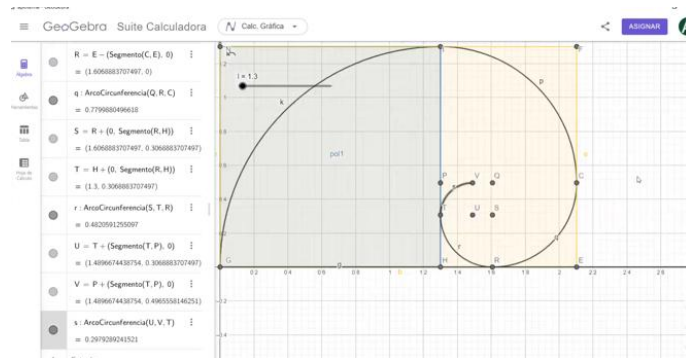


Figure 18 : Production de Alessandro, épisode 3

Dans la production d'Alessandro, on observe une abstraction consistant à visualiser un carré qu'il n'a jamais construit. Il s'agit d'une visualisation non iconique dans la genèse sémiotique, en relation avec les définitions et la propriété de proportionnalité liée à la raison d'or (Dis). De plus, il instrumentalise efficacement (Ins) avec des représentations sémiotiques plus sophistiquées en demandant à l'artefact Geogebra de placer des points présentant une proportionnalité avec des translations. Ces caractéristiques relèvent plutôt d'un travail dans le paradigme 2, avec même des traces du paradigme 3.

Enfin, à la question de savoir, en tant que futur enseignant, quels savoirs (ou connaissances) ses futurs élèves pourraient acquérir, Alessandro fait référence au développement de la pensée computationnelle, ainsi qu'à la résolution d'un problème par étapes et à la semi-automatisation du processus de construction. Il écrit :

Este ejercicio se puede aplicar para desarrollar el pensamiento computacional, mientras lo desarrollaba, tuve que **descomponer** el problema en partes más sencillas, y otra parte importante fue **depurar** la forma de desarrollar la espiral, esto me permitió “semi-automatizar” el proceso, [cela se voit dans la vidéo], y con más tiempo y conocimiento del programa podría llegar a una automatización más completa (según las herramientas de GeoGebra, u otro lenguaje, que tenga el alumno. Si hubiera usado Python, lo habría automatizado)

además de esto, es claro que se utilizan las razones y conocimientos geométricos de construcción, puntos en el plano y distancias para su construcción

Synthèse du travail d'Alessandro

Le travail d'Alessandro en matière d'IA relève de l'approche symbolique et de la programmation (approche numérique) et, contrairement à ses camarades, il n'utilise pas l'IA générative pour suivre des instructions et adapter son raisonnement aux constructions requises. Le niveau d'abstraction consistant à localiser des points et à imaginer les carrés requis témoigne d'une visualisation de type non iconique (Sem). L'instrumentalisation (Ins) dans sa construction est différente (et sophistiquée) et s'appuie sur la connaissance de la proportionnalité du nombre d'or (Dis). Ces éléments déterminants au niveau de l'ETM personnel d'Alessandro nous permettent de situer sa production entre les paradigmes 2 et 3, pour une « vision » plus générale de la propriété et la généralisation qu'il envisage.

Réflexions finales

Au cours de l'atelier, les travaux réalisés par les élèves ont été discutés dans le but de comprendre, de manière exploratoire, le type de travail mathématique qu'ils ont mené en suivant des instructions et en dialoguant avec une IA de nature différente (symbolique et générative). À cet égard, nous estimons qu'il est important de souligner la nature distincte de ces travaux, en évitant d'établir des comparaisons superficielles entre eux.

Les quatre cas présentés dans cet atelier nous permettent de comprendre certaines erreurs :

- Erreur discursive : l'élève construit des segments en leur attribuant une mesure fixe de 1,618, ce qui est incorrect, car pour que le nombre d'or soit respecté, il faut que la division en extrême et moyenne raison soit respectée. Cette division s'obtient à partir du milieu du segment AB et du prolongement de ce segment généré par un arc construit à partir dudit milieu. Par conséquent, attribuer une longueur numérique fixe ne garantit pas la propriété du nombre d'or.
- Erreur sémiotique : lorsque l'élève confond la valeur numérique approximative (1,618) avec le concept géométrique du nombre d'or, réduisant ainsi une relation mathématique à un nombre fixe. Cette confusion l'amène à reproduire des mesures plutôt qu'à construire la propriété.
- Erreur instrumentale : l'élève positionne manuellement les segments et les déplace librement, sans établir de dépendance géométrique avec les objets initiaux. En conséquence, la figure peut se déformer si l'on modifie un point précédent, ce qui montre qu'il ne s'agit pas d'une construction géométrique, mais d'un ajustement visuel.

Cette synthèse n'a pas approfondi en détail les analyses fondées sur la théorie des ETM, elle a plutôt présenté des éléments liés aux dimensions sémiotique, discursive et instrumentale. En particulier, nous avons abordé des aspects liés aux registres sémiotiques et aux processus de visualisation, aux raisonnements de validation et, enfin, à la dimension instrumentale, associée à l'utilisation de la tâche et au processus d'instrumentalisation réalisé par les étudiants. Ces éléments ont ensuite été discutés avec les participants à l'atelier.

Il convient de souligner que, sur les 18 élèves participants, la plupart ont réussi la construction géométrique et, grâce aux captures d'écran réalisées, nous disposons de données qui nous permettent d'identifier les questionnements, les difficultés et les doutes exprimés par ces élèves.

La question qui se pose ensuite est de savoir si les élèves peuvent contrôler l'IA générative (en lui demandant des instructions étape par étape) pour ensuite raisonner à partir de la construction dans un autre système symbolique (comme Geogebra). D'où la proposition de qualifier ce travail comme une *résolution assistée*. D'où également l'importance de la question de savoir comment renforcer toutes les genèses, et pas seulement la genèse instrumentale (avec les artefacts technologiques, Geogebra et ChatGPT dans ce cas précis), et faire évoluer leur ETM personnel. Nous pensons qu'avec des situations didactiques appropriées, nous pouvons réussir à guider l'apprentissage et permettre à l'humain de contrôler, grâce à son épistémè, l'utilisation des deux systèmes d'IA (génératif et symbolique).

Cela dit, il serait tentant de réduire l'idée d'un nouveau travail mathématique aux progrès rapides des logiciels ou de la technologie en général, en la considérant uniquement comme une conséquence directe des nouvelles possibilités technologiques ou comme un simple produit de l'univers discret qui caractérise largement l'informatique. Cependant, dès qu'un nouvel artefact technologique est utilisé dans le travail mathématique, nous devons nous demander si nous travaillons bien avec les mêmes objets mathématiques et les mêmes raisonnements.

Références

- Ali, O., Murray, P. A., Momin, M., Dwivedi, Y. K., & Malik, T. (2024). The effects of artificial intelligence applications in educational settings: Challenges and strategies. *Technological Forecasting and Social Change*, 199, Article 123076. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2023.123076>
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Balacheff, N. (2019). Proof, technology and learning in mathematics: Common issues and perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching*, (pp. 349–365). Springer.
- Balacheff, N. (2022). AI for the learning of mathematics. En P. R. Richard, M. P. Vélez & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. v–x). Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>
- Balacheff, N. (1994a). La transposition informatique : Note sur un nouveau problème pour la didactique. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 364–370). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1994b). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1), 9–42.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques, 1970–1990*. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnigot (Eds.). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition Didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

- Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 28, 131–181. <https://doi.org/10.4000/adsc.3286>
- Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. *Mathematics Education in the Digital Era*, 18. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-90850-8
- McCarthy, J., Minsky, M. L., Rochester, N., & Shannon, C. E. (2006). A proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955. *AI Magazine*, 27(4), 12. <https://doi.org/10.1609/aimag.v27i4.1904>
- McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5(4), 115–133. <https://doi.org/10.1007/BF02478259>
- Organisation for Economic Co-operation and Development OECD. (2019). *Artificial intelligence in society*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/eedfee77-en>
- Peirce, C. S. (1974). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne & P. Weiss, Eds.). Harvard University Press. (Édition originale publiée entre 1931 y 1958.)
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Richard, P. R. & Van Vaerenbergh, S. (2026). L'intelligence artificielle et le nouveau travail mathématique Van Vaerenbergh, S.; Vivier, L.; Arzarello, F.; Flores Salazar, J.; Gaona Paredes, J.; Gibel, P.; Gómez-Chacón, I.; Kuzniak, A.; Maschietto, M.; Montoya Delgadillo, E.; Nechache, A.; Nikolantonakis, K.; Páez Murillo, R.; Richard, P.; Vélez, M.; Venant, F (eds.). *Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8)*. Editorial Universidad de Cantabria: Santander, pp. 25-62. <https://doi.org/10.22429/Euc2026.005>
- Trouche, L. (2002). *Élèves et instruments : Approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques*. Éditions La Pensée Sauvage.
- Turing, A. M. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, 59(236), 433–460. <https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433>

TITRE :

Intelligence artificielle et travail mathématique

Actes des quatrièmes journées d'étude du travail mathématique - JETM4

AUTEURS :

Jorge Gaona Paredes, Alain Kuzniak, Jean - baptiste Lagrange, Dominique Laval, Elizabeth Montoya Delgadillo, Philippe R. Richard, Yasna Solar, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier, Gaston Yerbanga

RÉSUMÉ :

Cette quatrième édition des Journées d'Étude sur le Travail Mathématique est consacrée aux potentialités de l'intelligence artificielle (IA), et notamment générative, dans le développement du travail mathématique.

Les différentes contributions portent sur des réflexions théoriques et des expérimentations intégrant des outils d'IA à plusieurs niveaux d'enseignement et dans différents domaines des mathématiques (géométrie, algèbre et algèbre linéaire), au Chili, en France et au Québec. Elles s'appuient principalement sur la Théorie des Espaces de Travail Mathématiques avec ses dimensions sémiotique, instrumentale et discursive, mais aussi dans certains textes sur la Théorie anthropologique du didactique, l'approche instrumentale et la notion de ZPD, afin d'analyser les transformations du travail mathématique en contexte IA. L'objectif est de mieux comprendre les enjeux didactiques de l'intégration de l'IA dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et pourra intéresser les enseignants, les formateurs et les chercheurs.

MOTS- CLÉS :

Théorie des espaces de travail mathématiques, IA générative, IA symbolique, Grands modèles de langage, Contrepoint technologique, Usages des artefacts numériques

Éditeur : IREMS de Paris

Responsable de la publication : C. Hache

IREMS de Paris - Case 7018

Université de Paris Cité

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@u-paris.fr

<https://irems.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2026

ISBN : 978-2-86612-412-0