

LE CRDM GUY BROUSSEAU, UN BON OUTIL POUR RESSOURCER L'ACTIVITE DU CHERCHEUR EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Dilma FREGONA

Université Nationale de Córdoba

fregona@famaf.unc.edu.ar

Pilar ORUS

Université Jaume-I de Castellón

orus@uji.es

Lalina COULANGE

Université de Bordeaux, Lab-E3D

lalina.coulangue@u-bordeaux.fr

Grégory TRAIN

Université de Bordeaux, Lab-E3D

gregory.train@u-bordeaux.fr

Résumé

Le Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – Guy Brousseau (CRDM – Guy Brousseau) est un fonds documentaire archivant une grande variété de ressources liées aux ingénieries de recherche développées dans les années 80-90 au sein du Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM). Nous rendons compte de deux trajectoires d'utilisation de ce fonds, l'une ayant comme point d'entrée la diffusion d'une ingénierie sur la division dans la formation des enseignants, l'autre, proposant une revisite de la thématique des rationnels et de l'aspect commensuration des fractions. Nous montrons comment l'étude de ressources du CRDM – Guy Brousseau ont permis de renouveler un questionnement autour à la fois de la cohérence globale des décisions didactiques prises dans les différentes ingénieries mais également des conditions de reproductibilité de situations didactiques « proches » des situations originelles.

Mots clés

CRDM Guy Brousseau, ingénierie, division, multiplication, décisions didactiques, rationnels, commensuration, reproductibilité.

I. INTRODUCTION

Le Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques¹³ (COREM) s'est voulu, et ceci dès sa création, un lieu de partage, regroupant une pluralité d'acteurs, enseignants, étudiants, formateurs et autres chercheurs, tous partageant une ambition commune, celle de mieux comprendre les phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école. Sans nul doute, chacun et chacune des acteurs auront ainsi accompagné, nourri et enrichi les développements théoriques de la théorie des situations didactiques. A écouter les propos même de Guy Brousseau, les situations d'institutionnalisation, arrivées plus tardivement que d'autres types de situations, sont nées du besoin exprimé par les enseignants de l'école Jules Michelet de « revoir ce qu'ils ont fait », d'aménager un espace entre une leçon et la suivante ... Dans cette communauté, Nadine Brousseau aura tenu une place de premier choix. Ses ambitions et engagements sans faille en faveur de l'enseignement, sa connaissance fine des situations, son talent dans l'orchestration de la classe, sa générosité dans le partage de ses connaissances n'auront échappé à personne de ceux qui auront eu plaisir à croiser sa route. Ainsi, au-delà des ressources produites par le COREM archivées aujourd'hui précieusement dans le fonds documentaire Guy Brousseau et dont nous tentons dans cette contribution de montrer en quoi elles auront permis de ressourcer notre activité de chercheur(s), nous souhaitons tout autant, à travers ce texte, rendre hommage à Nadine Brousseau, qui aura, encore plus que d'autres, accompagné la construction de cette œuvre majeure que constitue encore et toujours la théorie des situations en didactique des mathématiques.

Nous rendons compte dans cette contribution de deux trajectoires d'utilisation du Centre de Ressources en Didactique des Mathématiques (CRDM) Guy Brousseau, en illustrant comment les ressources de ce fonds documentaire nourrissent de nouvelles recherches. Dans une première trajectoire, nous montrons comment une problématique liée à la diffusion d'une ingénierie sur la division dans la formation d'enseignants (Brousseau et al., 2012) permet de re-questionner un ensemble de situations liées à la multiplication (Fregona et al., soumis) et conduit à l'étude de la cohérence globale des décisions didactiques prises dans ces différentes ingénieries comme objet d'étude en soi. Nous montrons dans une seconde trajectoire comment le revisite de la thématique sur les décimaux et les rationnels (Brousseau et Brousseau, 1987) à l'aune de travaux plus récents sur les unités (Chambris et al., 2021a ; Chambris et al., 2021b) permet de réinterroger un ensemble de situations liées à l'aspect commensuration des fractions, d'étoffer un questionnement sur la reproductibilité de situations didactiques « proches » et d'envisager de possibles prolongements de ces situations.

¹³ Le COREM était un dispositif créé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de l'Université de Bordeaux en 1972, pour élaborer et expérimenter des ingénieries didactiques de recherche dans le milieu scolaire. Il a fait l'objet d'une présentation lors d'un précédent séminaire national (Brousseau et al., 2015).

II. UNE PREMIERE TRAJECTOIRE D'ETUDE SUR (LA DIVISION ET) LA MULTIPLICATION DE NOMBRES ENTIERS (PILAR ORUS ET DILMA FREGONA)

1. Une première étude à propos de la division

Nous avons conduit une première étude en prise d'appui sur une ancienne ressource produite par l'IREM de Bordeaux : *“La division à l'école élémentaire - compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2”* (Brousseau et al., 1985), peu après la création du CRDM Guy Brousseau. Le choix de cette thématique était initialement lié à une problématique attachée à l'enseignement de l'algorithme de la division et rencontrée de manière récurrente en formation initiale et continue d'enseignants.

L'identification d'un problème (pour la profession) : l'algorithme de la division

Nous avons fait l'hypothèse à l'époque que l'enseignement de cet algorithme pouvait constituer un « problème » pour la profession au sein de l'institution de formation qui vise à former les enseignants du primaire en Argentine. Nous avons en effet constaté des attentes potentiellement fluctuantes au sein de cette institution en ce qui concerne l'enseignement de l'algorithme de la division posée : il existe notamment une distance entre des attentes exprimées dans les programmes et les manuels au sein de l'institution scolaire (qui tendent à laisser une place importante à l'algorithme « en soi » et son enseignement) et des propositions plus « didactisées » en prise d'appui sur la recherche (qui tendent parfois à en amoindrir l'importance et aménager au sein de cet enseignement des occasions de consolider des connaissances sur la numération, le sens des nombres et des opérations). De telles fluctuations ont conduit des (futurs) enseignants du primaire à exprimer de manière récurrente des besoins « forts » de formation en la matière : en termes d'identification des connaissances mathématiques visées ou en jeu convoquées par cet algorithme.

En 2011-2012, nous avons proposé à des enseignants du primaire de *l'Universidad Nacional de Cordoba*, l'étude d'un ensemble de documents du CRDM avec pour visée l'appropriation de la séquence conçue sur un algorithme de la division posée, qualifié d'ergonomique¹⁴ par Brousseau (2010) et qui diffère de celui traditionnellement enseigné en Argentine (et en France à l'époque). Cette séquence a été élaborée dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau et al., 1985) et expérimentée au COREM. Si l'étude de ces archives a permis aux enseignants d'identifier les connaissances et les savoirs mathématiques en jeu dans l'algorithme de division et dans sa construction au fil des séances étudiées, la question d'un retour possible à l'algorithme traditionnellement enseigné dans l'institution scolaire (argentine) s'est rapidement posée. La suite de notre trajectoire découle de la recherche d'éléments de réponse à cette question formulée par les enseignants.

¹⁴ Brousseau (2010) montre en quoi l'algorithme traditionnellement enseigné dans plusieurs institutions scolaires (l'Argentine mais aussi le Chili et la France à l'époque) conjugue ce qu'il appelle des « facteurs de complexité didactique ». Il propose d'enseigner un autre algorithme qu'il appelle la « division ergonomique » pour pallier les difficultés potentielles d'élèves en lien avec ces facteurs de complexité. Les différences entre ces deux algorithmes sont développées dans Brousseau (2010).

Des décisions didactiques dans l'enseignement et l'apprentissage de la division

Il nous a tout d'abord semblé essentiel d'identifier ce qui pouvait justifier la proposition élaborée et expérimentée par les acteurs du COREM, en dehors de ce seul contexte de l'algorithme « posé » de la division. En particulier, notre attention s'est portée sur les connaissances mathématiques enseignées en amont et permettant de mieux cerner les décisions didactiques prises par les acteurs enseignants et chercheurs du COREM liées au processus d'enseignement et d'apprentissage de la division. Le processus d'enseignement de la division (Brousseau et al., 1985) débute en classe de CE2 avec l'étude du problème suivant relevant de la division quotient (Vergnaud, 1990) : « déterminer le nombre de groupes de 18 éléments dans un ensemble de 245 éléments ». En particulier, aucune technique spécifique de calcul ne semble attendue comme visée a priori dans la résolution. Un tel problème apparaît également « résistant » au regard à la fois du choix des nombres en jeu (18 et 245) et de l'absence chez les élèves de technique de calcul spécifique à mobiliser. Ce premier constat nous a conduites à vouloir mieux cerner ce que pouvaient être les conditions de mise en œuvre attachées à l'étude de ce problème, en identifiant dans l'inventaire fourni par le CRDM (figure 1), le bilan correspondant à ce début d'étude de la « division » (figure 2).

INVENTARIO CRDM				
Curso escolar	Clase (Nivel)	Extracción de actividades mat. del "BILAN" relacionada con los materiales de cada CAJA	Signatura de las CAJAS (nº Caja-curso escolar-nivel)	Contenido de la caja
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	148-1982/83-CP	Pavés; Estadísticas; CAS
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	149-1982/83-CP	Pavés; Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	150-1982/83-CP	Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	151-1982/83-CP	Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	152-1982/83-CP	Numeración; Trabajos alumnos;
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	153-1982/83-CP	Numeración; Trabajos alumnos: Sobres
1982/83	CE1A	http://hdl.handle.net/10234/91495	154-1982/83-CE1A	Carpets de alumnos; Trabajos
1982/83	CE1A	http://hdl.handle.net/10234/91495	155-1982/83-CE1A	Bilan; Pavés
1982/83	CE1B	http://hdl.handle.net/10234/91495	156-1982/83-CE1B	Carpets de alumnos; Trabajos
1982/83	CE1B	http://hdl.handle.net/10234/91495	157-1982/83-CE1B	Estadísticas de resultados; Progresión anual; TAS; CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	158-1982/83-CE2	Estadísticas resultados escolares; Progresión anual con fichas; TAS; CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	159-1982/83-CE2	Estadísticas resultados escolares; Progresión anual con fichas; TAS y CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	160-1982/83-CE2	Carpets alumnos con trabajos
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	161-1982/83-CE2	Carpets alumnos con trabajos
1982/83	CE2B	http://hdl.handle.net/10234/91551	162-1982/83-CE2B	Carpets alumnos con trabajos
1982/83	CE2B	http://hdl.handle.net/10234/91551	163-1982/83-CE2B	Estadísticas resultados escolares; TAS y CAS; Carpets alumnos con resultados
1982/83	CM1	http://hdl.handle.net/10234/91496	164-1982/83-CM1	Libretas alumnos
1982/83	CM1	http://hdl.handle.net/10234/91496	165-1982/83-CM2	Libretas alumnos; Estadísticas; Pavés
1982/83	CM2	http://hdl.handle.net/10234/91552	166-1982/83-CM2	Libretas alumnos
1982/83	CM2	http://hdl.handle.net/10234/91552	167-1982/83-CM2	Estadísticas resultados escolares; progresión anual; Pavés; Bilan; TAS y CAS; trabajos alumnos

Figure 1. Extrait d'inventaire – identification de la boîte 159 – CE2 - 1982/83

DATES	ACTIVITES	OBJECTIFS	INSTRUCTIONS	COMMENTAIRES
13.5.	Division : l'approche par la situation 1	Amener les élèves à résoudre un problème de division, avec les outils qu'ils possèdent : addition, multiplication, soustraction.	Dans les situations relevant de la division que l'on étudiera, on ne se limitera pas, et cela dès le début aux cas de diviseurs ou quotients inférieurs à 10.	Réf : Etudes en didactique des mathématiques. P.TEULE-SENSACQ et G.VINICH Travail par groupes de 2.
14.5.	Division : situation 2			
17.5.	Division : situations 3 et 4			
19.5.	Division : Situation 5. Construire une collection dont le nombre maximum de carreaux est donné ainsi que le nombre de carreaux sur la largeur de la collection.	Affiner les calculs. Rechercher des moyens plus économiques de calculer le quotient.	On se bornera à des méthodes empiriques de calcul du quotient et du reste à l'élaboration desquelles les enfants participeront.	

Figure 2. Extrait de bilan– CE2 - 1982/83, accessible à l'adresse <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/91551>

En plus d'un bref descriptif des premières « activités » proposées aux élèves, on trouve dans le bilan les « objectifs » poursuivis, les « instructions » correspondantes ainsi que les dates de réalisation (du 13 au 19 mai, soit en fin d'année scolaire de CE2). Une fiche de préparation d'un-e enseignant-e (figure 3) documente précisément les différents modèles de résolution de ce problème par les élèves : en lien avec l'addition ou la soustraction répétée ou en lien avec la multiplication « à trou » avec encadrements ou ajustements.

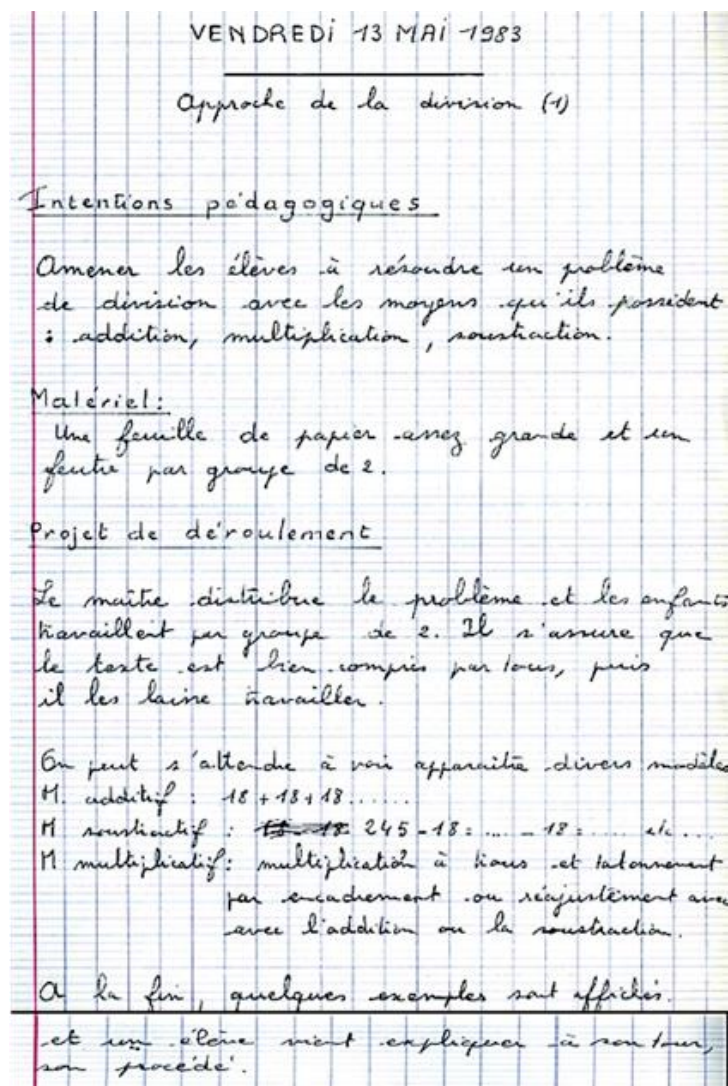


Figure 3. Extrait de fiche de préparation d'un-e enseignant-e trouvée dans la boîte 159 – CE2 - 1982/83

Cette nouvelle exploration des archives du fonds Brousseau a dès lors permis l'émergence de nouvelles questions : quelle situation didactique a été investie par les élèves ? Quelles stratégies « de base » (potentiellement afférentes aux modèles décrits dans la fiche) pouvaient-ils convoquer pour répondre au problème posé ? Quels discours (enseignant-e-s) sur ces stratégies ? Y-avait-il la possibilité de valider « empiriquement » de telles stratégies (ce qui renvoie à la question du rôle du milieu) ? Quels sont les observables des stratégies investies par les élèves (traces ou productions) ? Quelle(s) gestion(s) enseignant(es) de telles stratégies, en termes de formulation de connaissances, de dévolution et d'institutionnalisation ?

Plusieurs contributions conduites entre 2012 et 2017 (Brousseau et al., 2012 ; Fregona, D. & Orus, P., 2012a, 2012b, 2017b ; Fregona et al., 2013 ; Fregona et al., 2017a) en prise d'appui sur les archives du fonds Brousseau apportent différents éclairages sur cet ensemble de

questions. Dans cette contribution, nous nous attardons sur la « situation 5 » (figure 4) dans laquelle l'utilisation du quadrillage est signalée. Brousseau et al. (1985) mettent en avant le rôle joué par ce quadrillage dans la mise en œuvre « facilitée » de procédures relevant du modèle multiplicatif et dans la justification des résultats obtenus :

Intentions pédagogiques : les deux séances suivantes ont aussi pour objet de résoudre des situations de division qui, cependant, diffèrent des précédentes. En effet, elles s'appuient sur un matériel particulièrement familier aux enfants : le quadrillage... ce qui favorisera la mise en œuvre de procédures multiplicatives et facilitera la justification des résultats (phase de validation). (op. cité, p. 9)

La présence d'un quadrillage dans ces situations nous semble une variable didactique essentielle liée au milieu de cette situation, notamment du point de vue du rôle joué par la mémoire didactique. L'utilisation du quadrillage permet *a priori* d'activer un répertoire de connaissances construites antérieurement par les élèves sur des techniques de calcul renvoyant à la multiplication, notamment pour répondre à la question présentée ci-dessous (figure 4) :

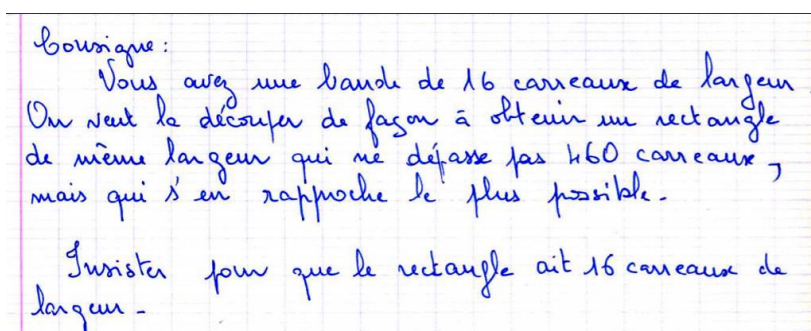


Figure 4. Extrait de fiche de préparation d'une enseignante trouvée dans la boîte 159 – CE2 - 1982/83

Le quadrillage est un élément important du milieu de la situation évoqué dans le bilan (voir figure 2). En particulier, la largeur fixée (permettant de matérialiser le diviseur, ici : 16) est conservée d'une situation à l'autre, puisque à la suite de cette première question, les élèves sont invités à réfléchir à « approcher (un rectangle de) 3300 carreaux ». Le choix de laisser la largeur du rectangle fixe, tout en jouant sur la modification du nombre de carreaux à approcher (correspondant au dividende) oblige un saut informationnel (Brousseau, 1997) important au regard des connaissances visées sur la division. Dans nos travaux antérieurs sur la division cités plus haut, nous avons en particulier montré, à partir des résultats des élèves aux évaluations archivées au CRDM, que les élèves (de CE2) faisaient preuve d'une habileté forte dans la résolution des problèmes. La question de savoir quelles connaissances avaient été construites sur la multiplication, en amont de celles examinées sur la division, en « remontant le fil » de la construction de ces savoirs mathématiques au sein du COREM s'est dès lors naturellement imposée.

2. Une deuxième étude sur la multiplication

Tout comme nous l'avons fait antérieurement pour la division, nous avons consulté une ancienne ressource produite par l'IREM de Bordeaux sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication (Berthelot et Grésilier, 1985) : *La multiplication au CE1. Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours. Document pour les enseignants.*

La multiplication pour désigner le cardinal d'une collection organisée de façon rectangulaire

La multiplication est envisagée, dans cette brochure, d'emblée comme « désignant le cardinal d'une collection, organisée de façon rectangulaire » (Berthelot et Grésilier, 1985).

Notons que ce point de vue de « désignation » d'un nombre (et non d'un calcul à effectuer pour trouver un nombre) revêt une forme d'importance que nous investiguons plus avant dans une publication en cours de soumission (Fregona et al., soumis). En examinant le travail conduit en amont du CE2, on constate, en classe de CP, que la production de différentes désignations de nombres était une tâche quasi-routinisée, avec une précaution prise de distinguer ce qui pouvait relever d'une désignation de type « nombre habituel » (le nombre dans son écriture chiffrée) d'autres désignations possibles de ces mêmes nombres. Un des premiers problèmes proposés aux élèves de CE1 (1er mars 1982) concernant la multiplication était notamment formulé ainsi : « donner le « nombre habituel » correspondant à 14×18 à partir d'un quadrillage.

S'agissant des stratégies mises en œuvre par les élèves pour résoudre un tel problème, les productions consultées dans les archives du CRDM (figure 6) montrent que d'emblée, les élèves convoquent des techniques relevant de découpages de la collection rectangulaire quadrillée en « morceaux » exprimés comme des produits. Ils laissent de côté des techniques plus élémentaires telles que le dénombrement « un à un » ou des additions répétées, le « jeu » n'étant pas tant de compter ou de calculer le nombre de carreaux « total », mais de produire de nouvelles désignations à même d'avancer vers la production de la désignation attendue de type « nombre habituel ».

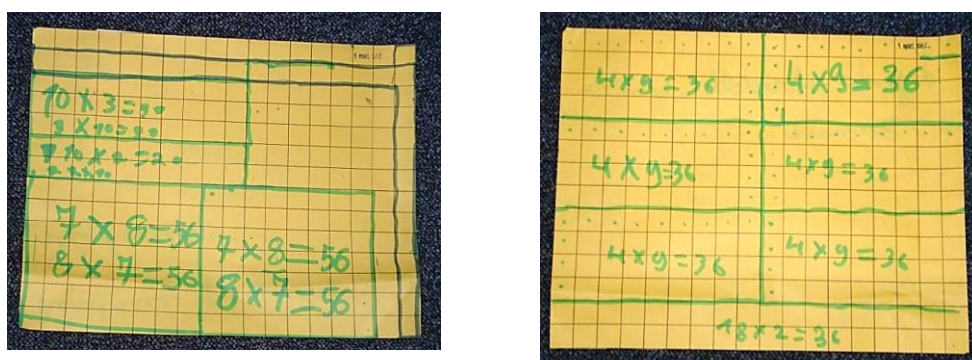


Figure 6. Productions d'élèves correspondant à la recherche du « nombre habituel de 14×18 » issues de la boîte 130 – CE1 - 1981/82

Plus dans le détail, la production du groupe d'élèves à gauche (figure 6) montre que pour répondre à la question posée, les élèves ont envisagé des découpages sans toutefois arriver à recouvrir totalement le rectangle. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ont recherché des produits intermédiaires pour lesquels ils disposent déjà de désignations sous la forme de « nombres habituels ». Ils trouvent ainsi les nombres habituels à associer aux produits « 7×8 » et à des produits par 10 (« 10×3 » et « 10×4 »). On note par ailleurs des expressions de la propriété de commutativité dans chacun des rectangles correspondants (correspondant peut-être pour eux à d'autres désignations égales à ces mêmes « nombres habituels »). Toutefois, des difficultés subsistent pour produire le « nombre habituel » associé au produit initial « 14×18 ».

La production du groupe d'élèves à droite (figure 6) fait apparaître une régularité dans le découpage qui a permis à ces élèves de produire des surfaces rectangulaires disjointes recouvrant l'intégralité du rectangle correspondant au produit « 14×18 », renvoyant chacune à un même « nombre habituel » renseigné : 36 (comme « 4×9 » mais aussi « 18×2 »). Le

« nombre habituel » associé au produit initial n'est toutefois pas encore renseigné quant à lui sur cette deuxième production.

A la recherche du « nombre habituel »

Concernant le projet d'enseignement de la multiplication, on note des avancées progressives dans les travaux d'élèves, liées à la recherche de ce « nombre habituel » comme somme des nombres correspondant aux « nombres habituels » de produits intermédiaires (figure 7).

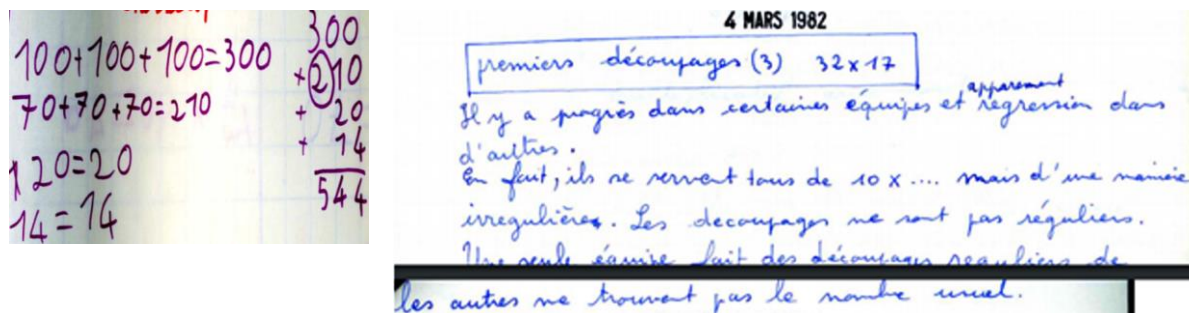
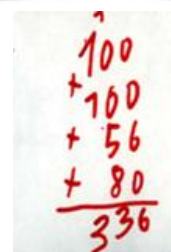
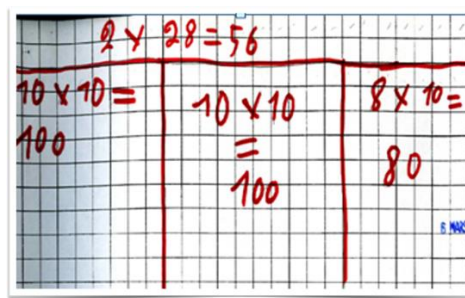
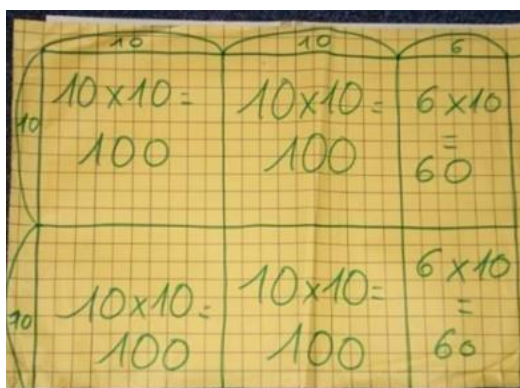


Figure 7. Productions d'élèves et compte rendu d'observateur trouvés dans les boîtes 130 et 132 – CE1 - 1981/82

Ainsi le 4 mars 1982 (soit 3 jours après la séance consacrée au problème évoqué ci-dessus) apparaissent des premières additions partielles arrangées verticalement et horizontalement, correspondant à des sommes de « nombres habituels », presque tous associés à des produits par 10. L'observateur de cette séance remarque que certains groupes d'élèves ont semblé avancer dans ce sens, mais que d'autres n'accèdent pas aussi aisément à ce type d'organisation dans leurs découpages et éprouvent dès lors des difficultés à déterminer le « nombre habituel ».

Un jeu sur les variables didactiques (notamment en proposant un produit de 26 par 20, le 5 mars 1982), semble permettre au plus grand nombre de progresser en ce sens : l'extension de cette technique (de découpage avec des produits avec un facteur 10) à de nouveaux produits (comme celui de 12 par 28, proposé le 6 mars 1982) permet le succès de quasiment tous les groupes d'élèves, d'après le compte rendu d'un observateur (daté du 11 mars 1982), soit sur une durée d'environ une semaine (voir figure 8).



11 MARS 1982

découpage par 10 : 24×13

travail par 2.

tous réunissant.

Une équipe s'est trompée à l'addition. (mal recopiée : 13 au lieu de 12)

Figure 8 : Productions d'élèves sur un problème de multiplication trouvées dans la boîte 130 – CE1 - 1981/82

On note par la suite une disparition progressive du quadrillage en tant que tel. S'y substituent des « plans de découpages » produits sur feuilles blanches (semaine du 11 au 18 mars 1982) comme l'illustre la figure ci-dessous (figure 9) :

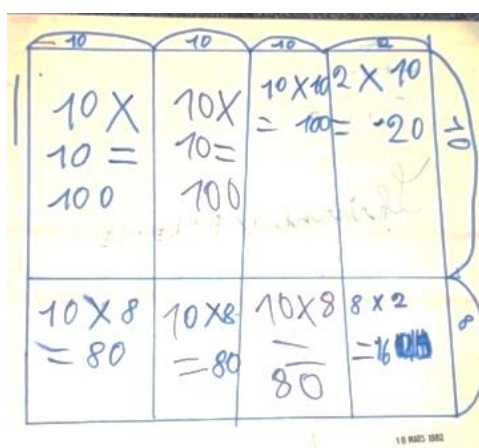
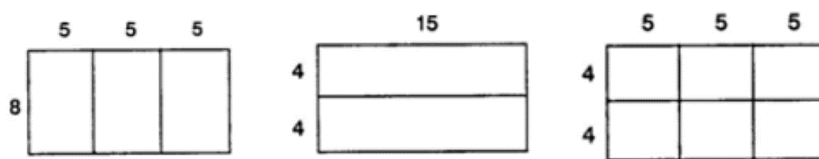


Figure 9. Production d'élèves sur un problème de multiplication trouvée dans la boîte 130 – CE1 – 1981/82

“[...] Par exemple, pour évaluer 8×15 on peut décomposer selon



(Boët et al., 1993, p. 239).

Si le principe de découpe en surface est identique, les techniques attendues pour « organiser » le découpage sont d'un autre ordre, visant à réactiver des techniques de calcul mental, éloignées d'une recherche de désignation d'un nombre d'une part, et ne visant pas des connaissances liées à la construction progressive d'un algorithme en prise d'appui sur les propriétés des nombres, d'autre part. Sur ce deuxième point, les auteurs de l'ouvrage signalent d'ailleurs :

« Il nous semble que la démarche de construction d'une technique opératoire, à l'aide des découpages de rectangles est lourde et coûteuse en temps au CE1 si l'on respecte toutes les étapes prévues et la démarche des élèves ». (Boët et al., 1993, p. 243)

Ces transformations de l'ingénierie de départ renvoient potentiellement au phénomène d'obsolescence¹⁵ rencontré dans les pratiques enseignantes par Brousseau (1981) observé au COREM, mais à l'œuvre ici, dans une tentative de diffusion de situations didactiques dans une ressource à destination d'enseignants. Un tel phénomène nous paraît précisément pointer la nécessité de poursuivre le développement de connaissances et de savoirs didactiques sur les ingénieries originellement développées dans le cadre de la théorie des situations didactiques, en prise d'appui sur le fonds documentaire CRDM – Guy Brousseau : il s'agit bien de veiller à « ressourcer » l'activité du chercheur en didactique des mathématiques ou celle du didacticien-formateur d'enseignants.

En guise de conclusion intermédiaire

À partir de 1972 et pendant 25 années, l'école Jules Michelet à Talence en France a été un espace de travail et de formation en didactique des mathématiques où il était rendu possible d'observer finement les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage à l'œuvre dans les classes au sein d'expérimentations conduites dans le cadre la théorie des situations. De telles expérimentations recouvraient parfois des marges de manœuvre inédites par rapport à un curriculum institutionnel prescrit, invitant par là-même à des prises de décisions (enseignantes) qui peuvent rester inhabituelles dans de nombreuses institutions scolaires, encore aujourd'hui. Cela nous semble justifier d'investir plus finement les prises de décisions (enseignantes) à l'œuvre à l'époque qui auront participé à préserver le sens de la perspective théorique adoptée dans ce groupe scolaire. *In fine*, ce sont la reconstruction et la recherche de ce sens qui nous semblent s'afficher comme un objet d'étude en soi et une porte d'entrée fructueuse pour l'analyse des prises de décisions enseignantes et la construction progressive des moyens pour permettre la résolution de problèmes similaires dans d'autres contextes.

¹⁵ « Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. » (Brousseau 1981, p. 85).

III. UNE DEUXIEME TRAJECTOIRE D'ETUDE SUR DECIMAUX ... ET RATIONNELS (LALINA COULANGE ET GREGORY TRAIN)

A l'instar de nos collègues, nous, revenons dans cette section sur ce qui a constitué le point de départ de notre trajectoire d'étude des ressources du CRDM - Guy Brousseau.

Le premier point d'ancrage a résidé, dans la continuité des recherches conduites par Chambris (2008) puis par Tempier (2013) sur les unités de numération dans l'enseignement des nombres entiers, à interroger une possible extension de ces travaux aux nombres décimaux (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019) et les conséquences potentielles d'une telle entreprise.

Le second point d'ancrage, non sans lien avec cette première perspective d'étude, a reposé sur une collaboration avec une enseignante exerçant dans un lieu d'éducation associé (le LéA Carle Vernet). Cette enseignante collaboratrice cherchait à prendre appui sur les écritures décimales convoquées spontanément (et de manière imprévue) par les élèves (car faisant partie par ailleurs de leur univers quotidien hors de l'école) dans des situations de mesure de longueurs pour tenter d'aménager avec ces mêmes élèves la (re)construction collective des significations de ces écritures (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019 ; Chambris et al., 2021a ; Chambris et al., 2021b)

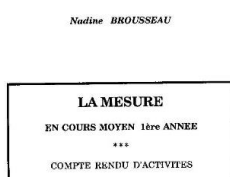
1. Les décimaux et l'écriture décimale

A l'époque, si l'initiative de l'enseignante collaboratrice avait pu apparaître à plusieurs égards intéressante, une telle proposition semblait, dans le même temps, quelque peu contradictoire avec ce que nous imaginions (trop naïvement) être la trajectoire, documentée dans Rationnels et décimaux (Brousseau et Brousseau, 1987) relative à l'étude des nombres rationnels puis décimaux (en particulier l'écriture fractionnaire précédant l'écriture décimale des nombres rationnels), trajectoire par ailleurs en conformité avec les attentes institutionnelles actuelles. Une première investigation du fonds Brousseau aura permis de rectifier une telle naïveté, avec la présence de premières écritures décimales rencontrées dans les cahiers d'élèves de CM1 (Figure 11), bien en amont de la mise en œuvre de l'ingénierie « Rationnels et décimaux » programmée en classe de CM2.

Plus encore, l'étude conjointe d'une ressource de l'IREM de Bordeaux¹⁶ (Brousseau, 1987) et d'une première fiche didactique extraite du CRDM (datée de 1994, voir figure 10), fiche en partie reprise dans la brochure IREM, a fait apparaître des proximités fortes avec nos propres observations conduites dans la classe de l'enseignante collaboratrice (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019).

Ainsi, adossée à la tâche initiale proposée aux élèves en 1994 : « une mesure de longueur étant donnée en mm (ici 250), exprimer cette mesure avec une seule unité (ici le décimètre) », on trouve trace dans la fiche didactique d'un discours explicite sur l'apparition (probable) de la virgule : si l'enseignant « ne dit rien sur la virgule mais n'interdit pas de l'utiliser », il est invité à rapprocher de telles écritures d'autres données en exemple afin de revenir sur la signification des chiffres positionnés après l'unité (ici le dm).

¹⁶ Accessible à l'adresse : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/09/Mesure87-annexe.pdf>



Correction : 205 mm, et 250 mm, ce qui est différent; le maître rappelle que 10 mm, c'est 1 dm, ...il s'agit d'un travail de conversion en l'unité plus petite connue.

"Et maintenant, vous allez essayer d'écrire ces mesures avec une seule unité : le décimètre (dm)."

Certains élèves vont probablement être perplexes, le maître attend d'avoir suffisamment d'écritures proposées et fait noter les ardoises.

Exemples de productions attendues :

2 dm 5	2 dm 50	2 dm 05	2,5 dm	2,05 dm	2,50 dm
--------	---------	---------	--------	---------	---------

Le maître ne dit rien sur la virgule, mais n'interdit pas de l'utiliser. Dans tous les cas, l'obligation de produire simultanément les écritures de deux segments visiblement de longueur différente permet de pointer le fait qu'on ne peut pas avoir deux fois la même écriture. Les débats entre élèves doivent porter sur la justesse des écritures, et la signification des chiffres placés après les unités, par comparaison par exemple avec les écritures en mm.

Document pour les enseignants
et pour les formateurs
1987

Tirage 1992

Edition augmentée

Figure 10. Brochure de l'IREM de Bordeaux « La mesure en cours moyen 1^{ère} année » (Brousseau, 1987) et extrait de fiche didactique - boîte 434 – CM1 – 1994/95

Les cahiers d'élèves de CM1 donnent trace de l'usage de telles écritures, écritures en place à la fois dans des tâches de conversion liées à d'autres écritures possibles (« complexes ») et dans des tâches de calculs additifs ou soustractifs mettant en jeu des grandeurs mesurées (longueur, monnaie, masse, etc.).

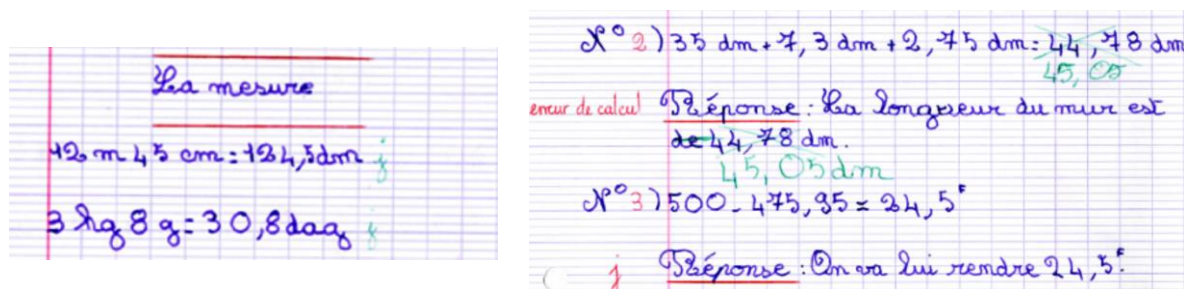


Figure 11. Extraits de cahiers d'élèves - boîte 434 – CM1 – 1994/95

Ces premières découvertes ont dès lors permis de poser un regard nouveau et d'accéder à une meilleure compréhension des phénomènes à l'œuvre dans d'autres matériaux d'enquête, récupérés plus tardivement au sein d'un autre système de ressources complémentaire aux ressources du CRDM : la banque de données Vidéos de Situations d'enseignement et d'Apprentissage » (VISA¹⁷). L'étude de premières données filmiques des situations didactiques dites de « l'épaisseur des feuilles de papier » laisse entrevoir des élèves de CM2 réintroduisant l'écriture décimale dans la formulation de premières réponses (copie d'écran du tableau – figure 11) et une négociation conduite par l'enseignante pour « exclure » de telles écritures du codage attendu d'un rationnel sous la forme d'un couple de nombres entiers (correspondant à un nombre de feuilles et à l'épaisseur du tas de feuilles mesurée en millimètres).

¹⁷ <http://visa.ens-lyon.fr>

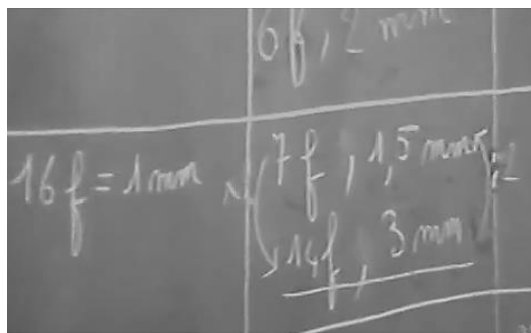


Figure 11. Capture d'écran d'une vidéo extraite du fonds VISA – codage de l'épaisseur d'une feuille de papier

Un tel fait de classe permet d'ailleurs de faire le constat suivant : la grandeur associée à l'épaisseur d'une feuille mesurée en millimètres et retenue par Brousseau et Brousseau (1987) comme *a priori* non éligible au fractionnement (pour ne pas détourner les élèves de l'enjeu lié à la commensuration), ne résiste pas tout à fait à l'entrée en scène de telles écritures décimales, fréquentées en amont par les élèves, en classe de CM1¹⁸. Nous soulignons et retenons ici une mise en regard et une complémentarité, particulièrement fructueuses¹⁹ des deux systèmes documentaires que sont le CRDM – Guy Brousseau et la banque de données VISA offrant l'accès à une pluralité de données filmiques liées aux ingénieries expérimentées au COREM.

En particulier, la perspective est offerte par le CRDM de (ré)inscrire les faits didactiques observables à l'échelle d'une séance ou de plusieurs séances filmées, dans une temporalité plus longue d'enseignement et d'apprentissage. Une telle perspective permet de (re)positionner une partie des phénomènes didactiques identifiés par rapport à l'histoire scolaire des élèves de l'école Jules Michelet. Dans la suite de ce texte, nous examinons plus avant l'accès à différentes dimensions du temps didactique, d'enseignement ou d'apprentissage à partir de l'étude de l'ingénierie de « l'épaisseur des feuilles de papier » en prise d'appui sur les ressources du CRDM associées.

2. Dimensions temporelles de l'ingénierie « épaisseur d'une feuille de papier »

Dans un deuxième temps de notre trajectoire, tourné vers l'examen de l'enseignement des rationnels et l'aspect commensuration de la fraction, l'étude des ressources du CRDM nous a permis de circonscrire plus précisément les dimensions temporelles liées à l'ingénierie didactique « l'épaisseur d'une feuille de papier » (figure 12).

¹⁸ Et ce, même si restreintes *a priori* dans leurs usages antérieurs à des unités de mesures de longueur plus grandes comme le mètre, le décimètre ou le centimètre...

¹⁹ L'intérêt d'une telle mise en regard avait déjà été mise en avant par Fregona, Orus et Gregori (2018) s'agissant de situations liées à des figures géométriques « téléphonées ».

UNIVERSITE DE BORDEAUX I

I.R.E.M. DE BORDEAUX

8.11.6

LADIST

Bibliothèque JEAN COLMEZ

DEA et Décimaux

Nadine et Guy BROUSSEAU

RATIONNELS et DÉCIMAUX
dans la scolarité obligatoire

— comptes rendus d'observations de situations
et de processus didactiques à l'école Jules
Michelet de TALENCE —

Document pour les enseignants
et pour les formateurs
1987

1.1 - EPAISSEUR D'UNE FEUILLE DE PAPIER

1.1.1 - Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

- sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc...) placés dans un ordre quelconque. Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. L'enseignant ne cherche pas à "savoir" ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de "bonne mesure" à découvrir.
- sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.
- 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)
- Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

1.1.2 - 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn).

L'enseignant place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation - Consigne.

- "Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ?"

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe - les enfants les touchent, les comparent.

"Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? (d'après le poids)

- Objectif didactique

"Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes.

Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.

Figure 12. Brochure²⁰ de l'IREM de Bordeaux « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » (Brousseau & Brousseau, 1987)

Ainsi, le temps dédié au processus d'enseignement et d'apprentissage du « rationnel-commensuration », débutant de la caractérisation de l'épaisseur d'une feuille de papier (incluant l'équivalence de désignations de cette épaisseur ou la comparaison de deux épaisseurs) et s'achevant par la construction de techniques d'addition de rationnels mais aussi de techniques liées à la multiplication et à la division d'un rationnel par un entier, peut apparaître somme toute, assez restreint au regard des enjeux de savoirs sur les fractions²¹. La figure ci-dessous synthétisant le parcours d'étude à partir d'extraits de cahiers d'élèves de l'année 1995/96, rend compte de cette temporalité « resserrée » : de mi-novembre à début décembre de la même année scolaire.

²⁰ Accès ressource : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf

²¹ A titre de comparaison, le curriculum actuel envisage ce processus d'enseignement et d'apprentissage des rationnels (équivalence, comparaison, addition et multiplication ou division par un entier) sur plusieurs années.

Jeudi 16 novembre 1995 <u>L'épaisseur d'une feuille</u> <u>J'écris 3 couples équivalents aux couples suivants :</u> 8 f; 8 mm $\equiv$ 16 f; 16 mm $\equiv$ 4 f; 3 mm $\equiv$ 24 f; 18 mm 50 f; 4 mm $\equiv$ 25 f; 2 mm $\equiv$ 100 f; 8 mm $\equiv$ 250 f; 20 mm	2) $\frac{25}{100} + \frac{18}{100} + \frac{45}{100} = \frac{88}{100}$ j $\frac{4}{25} + \frac{9}{50} + \frac{16}{100} =$ $\frac{16}{100} + \frac{18}{100} + \frac{16}{100} = \frac{50}{100}$ $\frac{16}{4} - \frac{18}{98} =$ $\frac{128}{32} - \frac{18}{98} = \frac{110}{82}$? erreur ou oubli
Caractérisation de rationnels (équivalence) 16 novembre 1995	Somme et différence de rationnels 21 novembre 1995
$\frac{1}{3} : 8 =$ $\frac{16}{36} : 8 = \frac{2}{36}$ j $\frac{15}{12} : 3 =$ $\frac{30}{34} : 3 = \frac{10}{24}$ j	4) $\frac{7}{25} : 8 =$ $\frac{56}{200} : 8 = \frac{7}{250}$ j l'épaisseur d'une feuille est $\frac{7}{250}$ mm 3) $\frac{3}{25} \times 5 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ a j Réponse : il est plus fin qu'un mm. il faut coller 10 feuilles juste feuille de plus pour qu'il soit plus gros qu'un mm.
Division d'un rationnel par un entier 30 novembre 1995	Évaluation 5 décembre 1995

Figure 12. Extraits de cahiers d'élèves - boîte 464 – CM2 – 1995/96

Dans le même temps, c'est aussi un autre fait temporel lié à la robustesse des situations didactiques que permettent de pointer les ressources du CRDM. Ainsi, un même sujet d'évaluation (celui pour lequel nous donnons à voir un extrait de cahier d'élève ci-dessus) a été proposé pendant une période longue d'enseignement (d'au moins 10 ans), puisque nous l'avons retrouvé proposé à l'identique dans des boîtes allant de 1985/86 à 1995/96. L'extrait de ce sujet, cité ci-dessous, a d'ailleurs particulièrement attiré notre attention, pour d'autres raisons, sur lesquelles nous reviendrons ci-après.

- 3) Pour faire un carton, on colle 5 feuilles identiques dont l'épaisseur est $\frac{3}{25}$ mm.
- Quelle sera l'épaisseur du carton ?
 - Ce carton est-il plus gros ou plus fin qu'un millimètre ?
 - Combien de feuilles faut-il coller (au minimum) pour qu'il soit plus gros qu'un millimètre ?
- 2) Un carton a une épaisseur de $\frac{7}{25}$ mm. Il a été réalisé en collant 8 feuilles identiques. Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?

Figure 13. Extrait d'un sujet d'évaluation – CM2 – trouvé dans les boîtes 236 de 1985/86 et 464 de 1995/96

3. Reprise de « l'épaisseur d'une feuille de papier », version « robots » ...

Forts de ces constats, nous nous sommes inspirés des matériaux issus du CRDM pour concevoir une ressource destinée à des enseignants de collège, contextualisant la commensuration par le biais de « robots » ou « d'automates », en reprenant l'idée émise par Neyret (1995) d'un

rapprochement possible entre les deux contextes du point de vue de la commensuration²². Nous avons ainsi proposé des adaptations de situations préexistantes, liées aux « automates » pour les rapprocher davantage des situations didactiques associées à « l'épaisseur d'une feuille de papier » (Coulange et Train, 2017). Ces adaptations visaient, entre autres, l'extension à certaines opérations sur les rationnels (addition et soustraction de rationnels, multiplication et division d'un rationnel par un entier). De premières expérimentations ont été conduites en classe de sixième et en classe de cinquième à partir d'une ressource détaillant une scénarisation de situations dans ce nouveau contexte des « robots ».

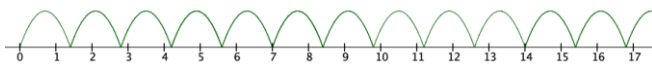
Le contexte des « feuilles de papier »	Le contexte des « Robots »
Nombre de feuilles identiques de papier : q feuilles	Nombre de sauts identiques d'un robot : q sauts
Epaisseur d'un tas de feuilles (q feuilles) mesurée en mm : p mm	Distance atteinte (sur une droite graduée) : p unités
Epaisseur d'une feuille de papier : $\frac{p}{q}$ mm mais aussi $\frac{p \times a}{q \times a}$ mm, etc.	Longueur du saut d'un robot : $\frac{p}{q}$ unités mais aussi $\frac{p \times a}{q \times a}$ unités, etc.
	

Figure 14. Deux contextes attachés à la commensuration

La mise en regard des résultats de ces premières expérimentations liées aux « robots » avec les ressources du CRDM et de VISA documentant l'ingénierie de l'épaisseur d'une feuille de papier a permis de révéler une forme de reproductibilité forte des phénomènes didactiques à l'œuvre, transcendant le changement de contexte. Cette reproductibilité concerne tout autant des leviers mais aussi des récurrences sur des points de difficulté rencontrés dans la trajectoire globale de l'étude de rationnels, en prise d'appui sur la commensuration.

Ainsi, entre autres phénomènes didactiques liés à des faits observés, a-t-on pu constater l'émergence de techniques de comparaison similaires et pourtant, relativement inédites dans le curriculum scolaire français actuel. Par exemple, dans une classe de sixième observée en mai 2018, pour comparer les fractions $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{2}$ et $\frac{17}{4}$ (données sous leur écriture fractionnaire), une élève envisage la technique suivante :

« Pour comparer 7 sur 3 et 17 sur 4 j'ai d'abord multiplié par deux, ça fait 7 fois 2, 14 et 3 fois 2, 6 et on sait qu'avec un plus grand nombre de sauts, on atteint une plus petite longueur / ça veut dire que ce nombre est plus grand »

Le raisonnement produit par cette élève consiste dans un premier temps en la recherche d'une nouvelle désignation de la longueur du saut codée $\frac{7}{3}$: le robot qui atteint 7 unités en 3 sauts atteint 14 unités en 6 sauts. Cette nouvelle désignation rend alors possible la comparaison : comme le robot dont la longueur de saut est codée $\frac{17}{4}$ parcourt une plus grande distance, 17 unités, en un nombre plus petit de sauts, 4 sauts, alors la longueur de son saut ($\frac{17}{4}$) est plus grande (que $\frac{7}{3}$). Un même raisonnement est mis en œuvre à l'identique dans le contexte de la situation des feuilles de papier une trentaine d'année plus tôt par des élèves du COREM et est documenté dans Brousseau & Brousseau (1987). La technique sous-jacente à un tel raisonnement peut être formalisée de la manière suivante : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a < c$ et $b > d$ (Coulange &

²² Le contexte des « automates » a d'ailleurs pu être exploité par ailleurs à d'autres fins, y compris dans la version qui a inspiré l'auteur cité ici (Neyret, 1995), documentées de manière exhaustive dans Coulange et Train (2017).

Train, 2021) et la commensuration semble favoriser l'émergence d'une telle technique de comparaison de rationnels.

En nous intéressant plus spécifiquement à la somme de deux rationnels (la contextualisation liée à la situation des « robots » est donnée figure 14) nous avons montré qu'elle semble recouvrir quant à elle un saut de complexité important du point de vue des connaissances des élèves dans les deux types de contextes.

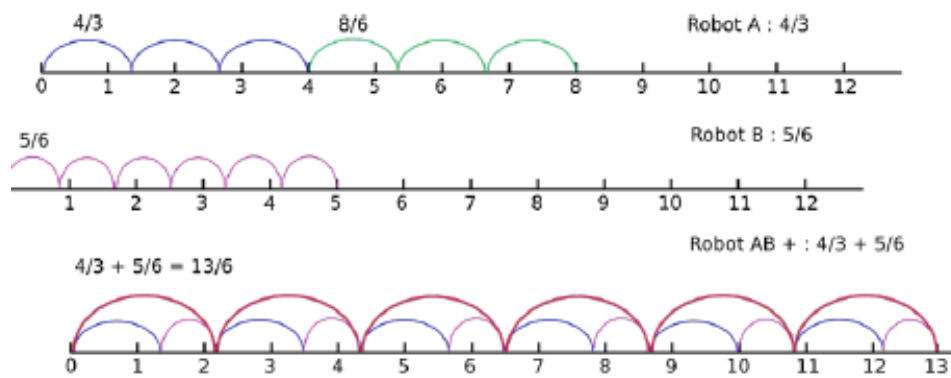


Figure 14. Somme de deux rationnels, contextualisée dans la situation « robots »

Ce saut de complexité est lié à la contrainte d'appariement (de deux feuilles d'épaisseurs différentes ou de deux sauts de longueurs différentes, voir figure 14) à identifier comme nécessitant la recherche d'un nombre (multiple) commun (de sauts ou de feuilles) au dénominateur pour calculer la somme des deux longueurs (des deux sauts ou de l'épaisseur de deux feuilles). Dans une classe de sixième observée, si un élève accède directement et spontanément au raisonnement en question et formule les calculs associés (*8 sur 6 plus 5 sur 6 égal 13 sur 6*), ce raisonnement est apparu comme difficile d'accès pour les autres élèves et sa diffusion dans la classe a été assez délicate à négocier par l'enseignant. L'étude de données filmiques provenant de la banque de données VISA (classe de CM2 observée en 1989) donne à voir que ce point a semblé tout aussi délicat à négocier pour l'enseignant de CM2 : même une fois la contrainte d'appariement dévoilée par l'enseignant (par un geste d'accolement de deux feuilles d'épaisseurs différentes, voir figure 15), la nécessité de disposer d'un même nombre de feuilles a du mal à émerger de la part des élèves.



Figure 15. Geste d'appariement de deux feuilles de papier dans la recherche de l'épaisseur de deux feuilles de papier différentes

Par ailleurs, sans disposer de données filmées, les retours d'autres enseignants expérimentateurs de la ressource « Robots » apparaissent converger vers une aisance acquise des élèves dans des tâches de multiplication et de division d'un rationnel par un entier telles que scénarisées dans la ressource « robots ». Même s'il s'agit de déclarations d'enseignants expérimentateurs, cette aisance résonne tout à fait avec celle constatée dans les cahiers d'élèves de CM2 consultés au CRDM (figure 16), en réponse au sujet d'évaluation donné figure 13.

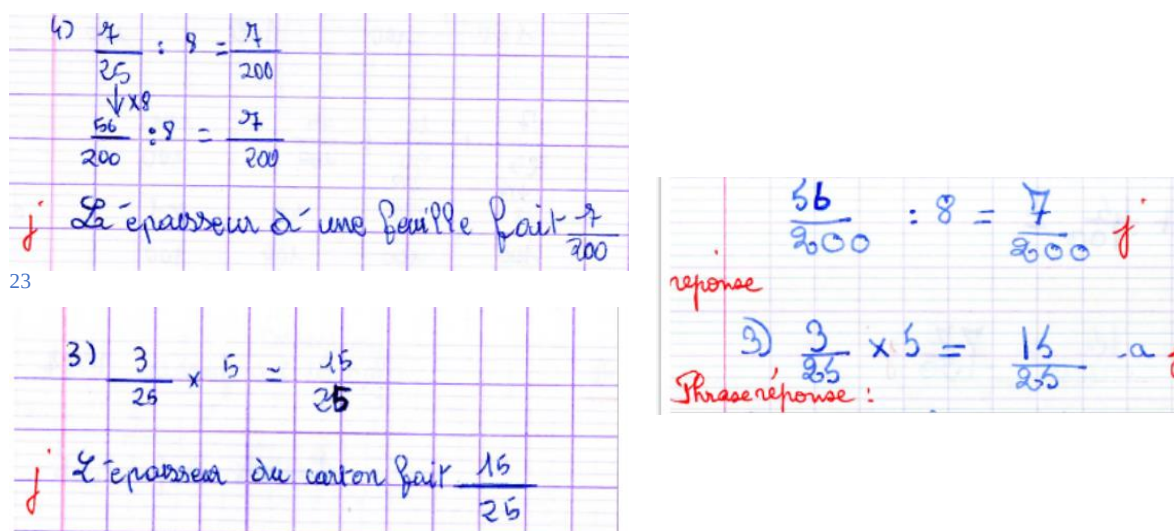


Figure 16. Productions²⁴ d'élèves de CM2 de l'Ecole Michelet relatives au sujet d'évaluation donné en figure 13, trouvées dans les boîtes 236 de 1985/86 et 464 de 1995/96

Ce constat nous a poussés à approfondir la question du potentiel de la commensuration dans le champ multiplicatif, champ que nous avons commencé à investiguer par ailleurs dans des travaux conduits en collaboration avec C. Chambris (Chambris et al. 2021a, Chambris et al., 2021b).

4. La commensuration, un levier pour construire des relations de comparaison multiplicatives entre grandeurs ?

En s'intéressant à la manière dont sont négociées la multiplication et la division d'un rationnel par un entier dans la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier », nous avons mis à l'étude la tâche correspondante présente dans le sujet d'évaluation cité plus haut (voir figure 13) : cette dernière nécessitait d'évaluer la mesure de l'épaisseur d'une feuille de carton qui serait obtenue en collant 5 feuilles d'épaisseur identique, désignée par $\frac{3}{25}$ mm (ie tel que 25 de ces feuilles formeraient un tas d'épaisseur 3 mm). Un raisonnement possible à tenir prend appui sur les éléments suivants : le carton étant 5 fois plus épais que la feuille de papier alors un même nombre de feuilles de carton empilées (25 feuilles de carton) formeraient un tas d'épaisseur 5 fois plus grande (5 fois 3 mm, soit 15 mm). Un autre raisonnement peut être tenu en considérant que pour former un tas de feuilles de carton de même épaisseur (3 mm) que celui formé par 25 feuilles, il faudrait 5 fois moins de feuilles de carton (soit 5 feuilles de carton). Les techniques sous-jacentes à ces raisonnements peuvent être généralisées et formalisées par les égalités suivantes : $\frac{p}{q} \times n = \frac{p \times n}{q}$ ou $\frac{p}{q} \times n = \frac{p}{q:n}$ (à la condition que q soit un multiple de n).

Des raisonnements similaires peuvent être tenus pour la division d'un rationnel par un entier. La tâche correspondante (voir figure 13) nécessite d'évaluer la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier, la désignation de l'épaisseur d'une feuille de carton constituée de 8 de ces feuilles étant désignée par $\frac{7}{25}$ mm, ce qui sous-entend que 25 feuilles de carton forment un tas d'épaisseur mesurant 3 mm. Un raisonnement possible pourrait être le suivant : sachant qu'une feuille de papier est 8 fois moins épaisse qu'une feuille de carton, alors le tas qui serait composé

²⁴ Notons dans cette production d'élève, le passage d'une écriture fractionnaire $\frac{7}{25}$ à une écriture équivalente $\frac{56}{200}$ codé par une flèche unique codée « $\times 8$ ». Nous y revenons un peu plus loin.

d'un même nombre de feuilles de papier que celui constitué de 200 feuilles de carton aurait une épaisseur 8 fois moins grande (soit 56 mm divisé par 8, 7 mm). Notons qu'un tel raisonnement sous-entend la production intermédiaire d'une désignation équivalente de l'épaisseur d'une feuille de papier ($\frac{56}{200}$ mm comme équivalente à $\frac{7}{25}$ mm) précisément envisagée dans les extraits de cahiers d'élèves de la figure 16. Un autre raisonnement possible (mais non apparu dans les cahiers d'élèves consultés à ce jour) serait que sachant qu'il faudrait 8 fois plus de feuilles de papier que les 25 feuilles de carton (soit 200 feuilles de papier) pour former un tas de même épaisseur que le tas de feuilles de carton (56 mm). Là encore, les techniques sous-jacentes à de tels raisonnements peuvent être généralisées et formalisées par les égalités : $\frac{p}{q} : n = \frac{p:n}{q}$ (à la condition que p soit un multiple de n) ou $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \times n}$.

Une telle analyse des tâches liées à la multiplication et à la division d'un rationnel par un entier, qu'elles soient contextualisées dans l'une ou l'autre des situations (les « feuilles de papier », ou les « robots ») souligne le potentiel de la commensuration pour conceptualiser des relations multiplicatives de comparaison entre grandeurs, telles que définies dans Chambris et al. (2021a). Un tel constat nous a notamment conduits à faire un rapprochement entre l'épaisseur d'une feuille de carton (qui serait n fois plus épaisse qu'une feuille) ou la longueur d'un saut de robot (qui serait n fois plus grand qu'un autre saut) et ce que Chambris (2021) qualifie d'unités relatives (comme n fois plus grande qu'une autre).

Adopter un tel point de vue permet d'envisager ce qui se joue dans les raisonnements décrits ci-avant comme mettant en fonctionnement ce que nous avons conjointement qualifié de théorème de compensation : « n fois plus que p unités, c'est p unités chacune n fois plus grande » ou plus exactement son corollaire que nous avons formulé comme suit : « n fois plus que p unités, chacune n fois plus petite égalent p unités » (Chambris & al., 2021a). Ce qui, en revenant aux feuilles de carton avec le formalisme adopté ci-dessus pour la multiplication, donne par exemple : q feuilles de carton, chacune n fois plus épaisse qu'une feuille de papier, constitueront un tas n fois plus épais que celui constitué par q feuilles de papier de mesure p mm, soit n fois p mm.

Dans ces mêmes travaux conduits en collaboration avec C. Chambris, nous avons eu l'occasion d'apprécier la difficulté d'accès à un tel raisonnement contextualisé en prise d'appui seul de la fraction sous son acception partage de l'unité, point de vue adopté dans l'enseignement des fractions en CM2 (Chambris et al., 2021a). A l'occasion d'observations menées en classe de CM2, une élève aura produit le raisonnement suivant relativement à une tâche de comparaison de deux fractions : ainsi, pour comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$, elle a déclaré que les 21èmes étant 3 fois plus petits que les 7èmes, il en fallait 3 fois plus, soit 9 pour conclure à l'égalité des deux fractions données. L'enseignante avait tenté de diffuser ce raisonnement aux autres élèves, sans succès, contrainte de négocier « à la baisse » en lui substituant progressivement un autre type de raisonnement (lié à des « groupes égaux » de trois 21èmes dans un 7ème) visiblement plus accessible et partagé dans la classe observée.

Nous faisons aujourd'hui l'hypothèse que la commensuration facilite l'accès à un tel théorème de compensation et à son corollaire, potentiellement convoqué dans les types de raisonnements décrits plus haut. Nous pensons, en effet, que les relations de comparaison multiplicative entre des grandeurs mesurées sont d'emblée au cœur des situations didactiques liées à la commensuration. Ainsi si l'on considère les nombres-grandeurs mesurées en jeu (nombre de feuilles, épaisseurs de tas) comme des unités relatives, des relations de comparaison multiplicative sont convoquées dès le départ sur des couples de telles « unités » (n fois plus de feuilles qui forment des tas d'épaisseur n fois plus grandes) dans la production de codages correspondant à des écritures fractionnaires équivalentes.

Cette relation de comparaison multiplicative entre des couples de grandeurs mesurées a d'ailleurs attiré notre attention sur des usages des ostensifs « flèches » dans les extraits de cahier d'élèves trouvés dans les ressources du CRDM. Ces ostensifs « flèches » présentent de fait des aspects mouvants. Ces relations sont désignées tantôt par une unique flèche opérant sur un couple de nombres (comme le montre l'extrait de cahier en haut à gauche de la figure 17), tantôt plus classiquement par deux flèches opérant sur chaque membre d'un couple de nombres (comme le montre l'extrait de cahier de droite de la figure 17), selon différentes périodes d'expérimentation, mais aussi parfois sur un même cahier, selon les exigences professorales exprimées (comme le montre le deuxième extrait de cahier de gauche sur la figure 17). Si la flèche unique peut surprendre et poser question (car créant potentiellement la confusion avec une autre flèche qui coderait la multiplication d'un rationnel par un entier), elle peut paraître cohérente avec le fait que c'est bien la même relation de comparaison multiplicative qui opère sur un couple de nombres qui est considérée²⁵.

Figure 17. Productions d'élèves de CM2 de l'Ecole Michelet trouvées dans les boîtes 464 de 1995/96 et 320 de 1989/90

En résumé, nous questionnons ce qui se joue du point de vue de la construction de relations multiplicatives entre grandeurs mesurées au regard de ces différents phénomènes dont la reproductibilité semble avérée et ce, dès les premières situations didactiques, qu'elles soient contextualisées par les « robots » ou les « feuilles de papier ». Notons au passage que du point de vue des unités relatives, on pourrait requalifier le geste inhérent à la commensuration comme la recherche d'une « sur » - unité (relative) commune par opposition au fractionnement qui consisterait à rechercher une « sous » - unité (relative) commune. Les constats ainsi faits sur les relations multiplicatives entre grandeurs mesurées, considérées comme unités relatives, nous ont conduit à explorer d'autres ressources, également rendues accessibles au CRDM, des enregistrements audio des interventions de Guy Brousseau auprès des différents acteurs enseignants de l'école, impliqués au sein du COREM. Des extraits de propos tenus sur le produit de nombres entiers ont particulièrement attiré notre attention :

« Saisir le rapport entre 3 et 12, par exemple combien de fois 3m dans 12m ? Combien de paquets de 3 gâteaux je fais avec 12 gâteaux ? Je fais sur 3 pour aller à 12 ce que je fais à 1 pour aller à 4 [...] Si je veux transformer ce 4 qui est un rapport en une mesure, ça veut

²⁵ D'ailleurs dans une des expérimentations conduites avec les « robots », un enseignant aura lui aussi temporairement fait usage de cette unique flèche opérant doublement sur le couple de nombres – grandeurs mesurées en jeu avant que de se questionner sur la pertinence d'un tel ostensif au regard de confusions possibles avec le produit d'un rationnel par un entier.

dire que je dois regarder ce 4 avec une unité, comme ayant une unité.... Pour passer de 3 à 12, il faut faire 4 quelque chose comme pour passer de 1 à 4 » (Brousseau, entretien avec les acteurs du COREM – enregistrement audio archivé au CRDM)

Ce discours nous a paru résonner fortement avec ce que, depuis, Chambris (2021) a théorisé en lien avec la multiplication, en prise d'appui sur le traité de Reynaud (1821) même si tout comme dans ce traité, le rôle des unités reste assez implicite. De notre point de vue, ces propos tenus au COREM sont en particulier des indices du produit appréhendé d'emblée comme opérant sur des couples de nombres (de 1 à 4, de 3 à 12). Un tel fait est d'ailleurs particulièrement visible dans la production d'écritures fractionnaires équivalentes en place dans la situation des feuilles de papier où l'on opère d'emblée avec un « multiplicateur commun » sur des couples de grandeurs mesurées (21 mm – 210 mm et 10 feuilles – 100 feuilles, le multiplicateur commun étant « x 10 », pour reprendre un des exemples figurant dans la figure 17). Ceci nous paraît aujourd'hui possiblement une des clés de la conceptualisation de relations multiplicatives entre nombres - grandeurs mesurées (Coulange & Train, 2021).

De tels rapprochements entre unités (relatives), relations de comparaison multiplicative et commensuration nous semblent ouvrir aujourd'hui encore d'autres perspectives. Si dans l'ingénierie des feuilles de papier, le produit et le quotient de deux rationnels n'ont jamais été envisagés en prise d'appui sur la commensuration²⁶, il nous apparaît aujourd'hui, en rapprochant les unités (relatives) de la commensuration, que l'étude de la question « combien de fois la longueur du saut du robot B dans la longueur du saut du robot A ? » (ou, de façon transposée à la situation de l'épaisseur des feuilles de papier, combien de fois l'épaisseur de la feuille de papier A dans l'épaisseur de la feuille de papier B ?) serait susceptible de conduire à une utilisation étendue de la commensuration (figure 18).

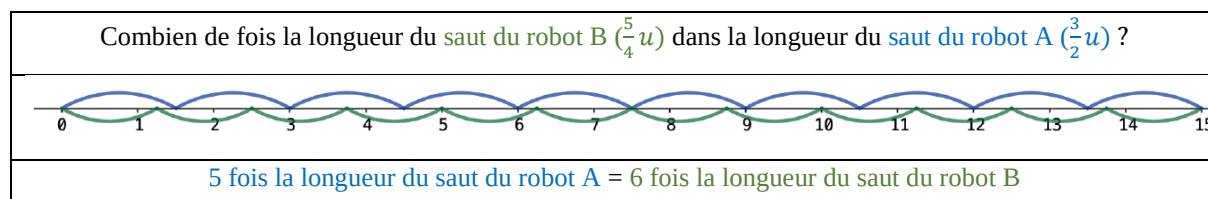


Figure 18. Une piste pour la division d'un rationnel par un rationnel en prise d'appui sur la commensuration

Il s'agirait ainsi de donner à voir qu'en 5 sauts du robot A, la distance parcourue est identique à celle parcourue en 6 sauts du robot B. A la condition de considérer comme « nouvelle » unité (relative) la longueur du saut du robot B ($\frac{5}{4}u$), ceci peut permettre de conclure que la longueur du saut du robot A égale $\frac{6}{5}$ fois la longueur du saut du robot B, soit $\frac{6}{5}$ fois ($\frac{5}{4}u$).

Ainsi l'obtention du résultat d'une division d'un rationnel par un rationnel nous paraît aujourd'hui envisageable dans une forme de continuité du geste de commensuration (appréhendé comme la recherche d'une (sur)unité commune) à la condition toutefois de négocier le changement d'unité (relative) sous-jacent²⁷. Si le produit pourrait dès lors être construit de manière indirecte comme une opération réciproque de la division, la question d'un chemin plus direct vers la multiplication de deux rationnels en prise d'appui sur la commensuration reste toutefois ouverte...

²⁶ Une telle trajectoire nous est d'ailleurs apparue délicate voire impossible dans nos premières investigations.

²⁷ Une telle piste est actuellement mise à l'étude dans la thèse en cours de A. Ovide – des premiers résultats de cette thèse semblent confirmer le potentiel de la commensuration en termes de relations de comparaison multiplicative entre grandeurs mesurées et même de composition de telles relations (Coulange & al., accepté), ce qui nous fait penser que nous nous rapprochons peut-être du produit...

5. En guise de conclusion intermédiaire

Notre trajectoire d'étude nous aura ainsi ramenés à considérer un empan majeur de l'œuvre de Brousseau, à savoir Rationnels et décimaux (Brousseau & Brousseau, 1987). Parce que par ailleurs, plusieurs aspects de cette ingénierie avaient été largement documentés (Brousseau et al. 2014, Brousseau, 1998), investir une telle trajectoire, à la recherche d'inédit et de nouveautés, pouvait paraître quelque peu risqué. Il nous semble aujourd'hui que cette trajectoire aura été fructueuse, jusqu'à largement participer à « ressourcer » notre propre recherche de chercheurs en didactique des mathématiques. De nouvelles voies de recherche nous apparaissent aujourd'hui ouvertes dans les rapprochements faits entre commensuration, unités (relatives) (Chambris, 2021) et relations de comparaison multiplicatives entre nombres - grandeurs mesurées (Coulange & Train, 2021). Certaines d'entre elles pourraient notamment mieux éclairer encore le potentiel de la commensuration en matière de champ conceptuel multiplicatif.

Si les ressources archivées au CRDM auront permis de nourrir fortement notre trajectoire, elles auront été également tout à fait précieuses pour (re)problématiser des questions d'ordre curriculaire, y compris attachées à des *curricula* contemporains. La contribution de D. Fregona et P. Orus aura permis de souligner un tel fait, davantage que notre propre contribution dans le cadre de ce séminaire. Pour autant, les expérimentations que nous avons conduites auront permis à des enseignants et des élèves de sixième de rencontrer le point de vue commensuration après que ces derniers avaient, conformément au curriculum actuel, fréquenté en amont le point de vue fractionnement des rationnels. Ceci n'est pas sans soulever son lot de questions nouvelles – que nous n'avons ici pas l'occasion d'approfondir – mais qui démontre clairement les potentiels apports d'une œuvre comme Rationnels et décimaux comme levier d'une réflexion didactique, y compris sur l'organisation du curriculum scolaire actuel.

IV. PERSPECTIVES LIEES AU CRDM – GUY BROUSSEAU

Nous espérons qu'avoir rendu compte de nos deux trajectoires d'étude respectives, celle de D. Fregona et P. Orus sur la division/multiplication, puis celle de L. Coulange et de G. Train sur les décimaux/rationnels puisse permettre à tout-e chercheur-se-s didacticien-ne-s d'envisager en quoi et comment le fonds documentaire CRDM-Guy Brousseau peut s'ériger en outil précieux pour ressourcer son activité de recherche, et ce à bien des égards. Le CRDM offre la possibilité unique d'un « retour aux sources » ancré dans la théorie des situations didactiques, en donnant accès à une grande variété de matériaux liés aux ingénieries de recherche conçues dans le cadre de cette théorie. Rappelons d'ailleurs que ces ingénieries ont largement contribué au développement même de cette théorie, fondatrice du champ de la didactique des mathématiques que Brousseau appréhendait comme une « science phénoménotechnique ».

Au potentiel avéré de telles ressources pour l'activité de recherche même contemporaine en didactique des mathématiques, s'ajoutent des conditions particulièrement propices au travail scientifique car le CRDM-Guy Brousseau, c'est aussi une équipe constituée de chercheurs, Pilar Orus, Pablo Gregori et d'une documentaliste, Paris Lidon, qui s'occupent avec passion de ce fonds documentaire et accueillent chaleureusement tout-e-s chercheur-se-s intéressé-e-s.

C'est pourquoi si vous êtes vous-mêmes intéressé-e-s, nous vous invitons à ne pas hésiter à contacter cette équipe, si vous souhaitez vous-même accéder à ces ressources quasi-

inépuisables en matière de recherches qui restent toujours à conduire en didactique des mathématiques, en consultant les annexes de ce texte qui apportent quelques précisions sur l'organisation d'une telle venue.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BERTHELOT, R. et GRESILIER, M. F. (1985) : *La multiplication au CE1. Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours. Document pour les enseignants*. Université et IREM de Bordeaux.
- BOËT, J., BOUCULAT, N., BOURSEY, E., CHANIAN, C., CHARNAY, R., DERAMECOURT, G., DOUAIRE, J., GUILLAUME, J-C., HUBERT, C., LALLEMENT, M-H., NOYARIE, D., PORCHERON, J-L., RAMUS, M., VALENTIN, D. (1993). *ERMEL, Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*. Hatier.
- BROUSSEAU, N. (1987). *La mesure en cours moyen première année*. Université de Bordeaux, IREM d'Aquitaine.
- BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (vol. 2.1). La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1997). *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. Disponible sur les archives de la CFEM en ligne : <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf/view>
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-90)*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux, IREM d'Aquitaine.
- BROUSSEAU, G., BRIAND, J., BROUSSEAU, N., GRÉSILLER, M., GRESLARD, D., LACAVE-LUCIANI, M., TEULE-SENSACQ, P. & VINRICH G. (1985). *La division à l'école élémentaire. Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Université et IREM de Bordeaux. <http://hdl.handle.net/10234/143287>
- BROUSSEAU, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, *Grand N*, 85, 13-41.
- BROUSSEAU, G., ORUS, P., FREGONA, D. & GREGORI, P. (2012). Los recursos del Centre pour l'observation et la recherche en didactique des mathématiques (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria, *VI Colloque International Analyse Statistique Implicative (A.S.I.)*, Réigner, Bailleul, Gras (Eds.) Caen (France) 7-10 Novembre, pp. 307-334.
- BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N. & WARFIELD, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Springer.
- BROUSSEAU, G., GRESLARD, D. & SALIN, M.-H. (2015). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. In A.C Mathé & E. Mounier, *Actes du séminaire national 2014* (pp. 66-79). IREM de Paris.
- CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- CHAMBRIS, C. (2021). Raison d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulangue, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Actes de la 20^{ième} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 169-195). La Pensée Sauvage.
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.M., & TRAIN, G. (2021a). Unités et systèmes d'unités pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école. Contribution à un état des lieux - potentialités. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulangue, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Actes de la 20^{ième} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 373-396). La Pensée Sauvage.
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L. & TRAIN, G. (2021b). Measurement units and numeration units: what reveals the introduction of a "mixed" table in decimals teaching. *ICME 14*, Jul 2021, Shanghai (online), China. (hal-03452940)
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2015). Quelle(s) extension(s) d'un système de numération des nombres entiers aux nombres décimaux ? *Actes du XXIII^e colloque de la CORFEM*, Nîmes. Disponible en ligne : https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2016_02.pdf
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2017). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 143-156. Disponible en ligne : <http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/Actes.pdf>
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2019). Teaching and learning decimal numbers: the role of numeration units. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.403-410). Utrecht, the Netherlands:

- Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. Disponible en ligne : http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2021). *Reasoning and comparing fractions Potentials of commensuration meaning*. [Communication]. 9th ERME Topic Conference: Perspectives on conceptual understanding of flexibility and number sense in arithmetic, Leeds.
- COULANGE, L. OVIDE, A. & TRAIN, G. (2022). *Multiplicative comparison of fractions: potentials and limits of commensuration meaning*, [Communication]. 12th CERME Topic Conference, Bolzano. Disponible en ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03746627v2>
- ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM*, Editions Hatier.
- ERMEL (1993). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM*, Editions Hatier.
- ERMEL (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM*, Editions Hatier.
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2012a). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente, XXXV REM, Córdoba, 6 al 8 de agosto. Disponible en ligne : http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_28/28-1_FregonaOtros-EnsenarDivision.pdf
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2012b). Cómo enseñar la división en la escuela primaria. Un ejemplo de utilización de los recursos del CRDM-GB para la investigación y la formación del profesorado”, XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 20-22 de septiembre, Universidad Internacional de Andalucía (Baeza, Jaén). Disponible en ligne : <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/93450>.
- FREGONA, D. & DELPRATO, F., ORUS, P. (2013). Desafíos en los procesos de estudio de matemática con adultos de baja escolaridad. Actas IV CITAD (Toulouse, Francia). Disponible en ligne : http://citad4.sciencesconf.org/conference/citad4/pages/Citad4_Preactes_Axe4.pdf
- FREGONA, D. & BLOCK, D. & ORUS, P. (2017a). Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática”, Oficina 3 A, Actas 1º Simposio Latinoamericano de Didáctica de la Matemática.
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2017b). [El Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: un sitio para explorar prácticas de enseñanza de las matemáticas](#) . cap. de libro *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios : aportes para la educación matemática*. pp.(109-132) Analía Cristante ... [et al.]; editado por Dilma Fregona ... [et al.]. Ed.- Córdoba : Universidad Nacional de Córdoba (Argentina).
- FREGONA, D. & ORUS, P., GREGORI P. (2018). *Quelques aspects de la géométrie enseignée et apprise au COREM (CM1-CM2) – Perspectives pour le cycle 3*, communication au 25^e colloque de la CORFEM, Bordeaux. http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/182275/CORFEM_2018_orus_CRDM.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- FREGONA, D., PETICH, A., PORRAS, M. & ORUS, P. (soumis). De diferentes designaciones de números a una técnica de cálculo escrito de multiplicaciones en la escuela primaria.
- NEYRET, R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03194180>
- REYNAUD, A. (1821). Notes sur l'arithmétique. In BEZOUT E., REYNAUD, A. *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9^e édition. Consulté sur Internet le 4 décembre 2021, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691>
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage.

ANNEXES

Annexe 1 (responsables du CRDM-GB à contacter pour organiser la consultation du fonds.)



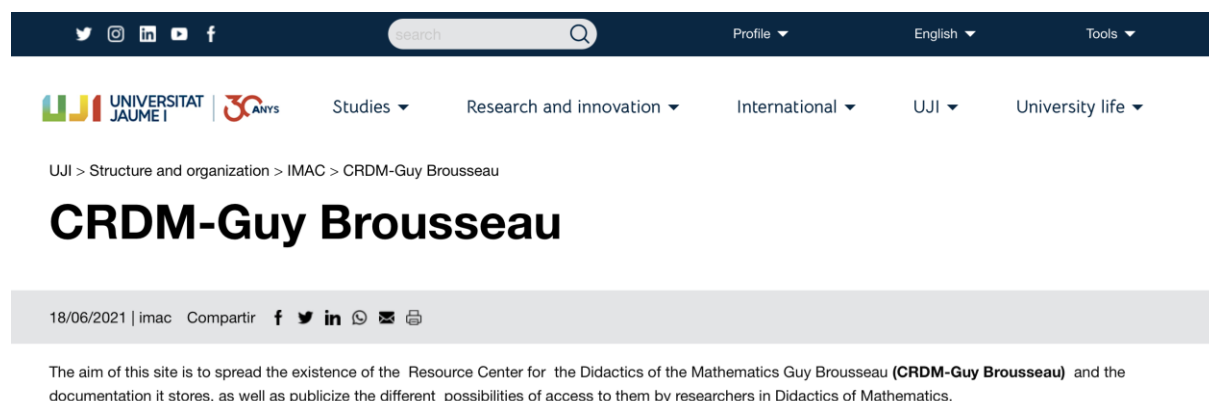
Annexe 2 (page d'accueil du site de l'IMAC)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/>



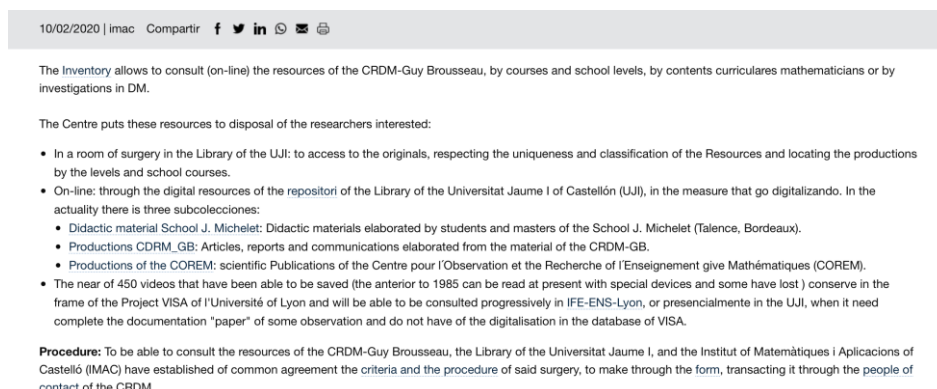
Annexe 3 (page d'accueil du CRDM-GB)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/base/crdm/presentacio/>



Annexe 4 (page d'accès aux bilans et autres ressources du fonds)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/base/crdm/inventari/>



Annexe 5 (bibliothèque de consultation du fonds CRDM-GB)

