

PROBLEMATISATION ET DEMONSTRATION : ÉTUDE DES CONDITIONS FAVORISANT L'APPROPRIATION DU PROCESSUS DE DEMONSTRATION ALGEBRIQUE EN CYCLE 4 CAS DES PROPRIETES ARITHMETIQUES.

Nadia Zebiche*

RÉSUMÉ

Le cycle 4 (12-14 ans) marque l'entrée dans le calcul algébrique. La recherche entreprise s'est orientée vers l'apprentissage de la démonstration. Nous nous intéressons plus particulièrement à des propriétés sur les entiers qui se démontrent algébriquement. La recherche engagée vise ainsi à proposer une ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; Perrin-Glorian, 2011) favorisant l'appropriation du processus de démonstration algébrique dans le cas particulier des propriétés arithmétiques. L'ingénierie didactique, qui constitue également une méthodologie de recherche, nous amènera à procéder à une analyse préalable. Cette première étape nous permet d'identifier des conditions à l'entrée dans un tel processus. Dans un premier temps nous donnerons les premiers éléments de cette première étape puis nous montrerons comment le cadre de l'apprentissage par problématisation (Fabre & Orange, 1997) peut contribuer à la construction et à l'analyse d'une telle ingénierie.

Mots clés : Ingénierie-Démonstration- Problématisation-Nécessité- Calcul algébrique

ABSTRACT

Cycle 4 (12-14 years old) marks the entry into algebraic calculus. The research undertaken is oriented towards learning how to prove. We are particularly interested in properties of integers that can be proved algebraically. The research undertaken thus aims at proposing a didactic engineering (Artigue, 1988; Perrin-Glorian, 2011) favoring the appropriation of the algebraic proving process in the particular case of arithmetic properties. The didactic engineering, which is also a research methodology, will lead us to proceed to a preliminary analysis. This first step will allow us to identify the conditions for entering into such a process. We will first give the first elements of this first step and then show how the framework of learning by problematization (Fabre & Orange, 1997) can contribute to the construction and analysis of such an engineering

Keywords: Engineering-Mathematical proof- Problematization-Necessity- Algebraic calculus

L'ANALYSE PREALABLE PREMIERE PHASE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE

L'ingénierie didactique se distingue par la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. Mais c'est son mode de validation interne qui la caractérise fondamentalement (Artigue, 1988). Celle que nous visons s'apparente à une ingénierie de recherche (Perrin-Glorian, 2011), car elle vise à faire apparaître des phénomènes didactiques, à les étudier, à produire des savoirs. Nous nous placerons donc dans une telle perspective. Nous nous appuyons sur les quatre phases identifiées par Artigue (1988). Nous nous situons ainsi dans la première phase, celle de l'analyse préalable. Celle-ci devrait nous permettre d'identifier des conditions permettant à des élèves d'entrer dans un processus de démonstration algébrique.

1. Premiers éclairages didactiques.

De multiples directions ont été choisies dans des recherches pour éclairer les difficultés des élèves à entrer dans l'algèbre élémentaire ; l'étude de la transition de l'arithmétique vers l'algèbre (Chevallard, 1999) ou celle des curricula en algèbre (Squalli, 2000) en constituent une infime partie. Le Hors-série de l'ARDM 2012 recense un état des lieux des dernières

* Université de Nantes, CREN (centre de recherche en éducation de Nantes)

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et des posters.

recherches existantes. L'observatoire de la pensée algébrique, créée en 2013, regroupement international de chercheurs, oriente également sa réflexion sur l'enseignement de la pensée algébrique et le courant Early Algebra. Et pourtant, les enquêtes récentes nationales PRAESCO 2019** et internationales TIMSS*¹ en 2019 attestent de difficultés persistantes. Cet état de fait invite à poursuivre les recherches dans ce domaine. De la même manière, les recherches didactiques sur l'enseignement de la démonstration font également l'objet d'une littérature abondante. Nous nous attardons sur certaines.

La preuve par l'exemple générique : l'examen de la nécessité et de la généralité (Arsac, 2009)

Le recours à l'étude d'un élément générique, à savoir un élément présent non pour lui-même mais comme représentant d'une classe d'objets, permet de mener la démonstration d'énoncés universels (Arsac, 2009). Dans ce type de démarche, Arsac(2009) distingue la généralité et la nécessité. Dans le cas algébrique, le caractère de nécessité, c'est ainsi et il ne peut pas en être autrement, est assuré par l'usage de règles de calcul comme la commutativité, l'associativité ou la distributivité ; le caractère de généralité est lui, assuré par le recours à la notation littérale.

Pendant, dans les faits, nécessité et généralité sont souvent absentes des démonstrations algébriques. D'une part pour la nécessité car l'explicitation des règles mobilisées n'est pas systématique (clarté, règles supposées acquises), d'autre part pour la généralité car la notation littérale dispense de toute argumentation d'universalité. Comme nous le verrons à plusieurs reprises, les implicites véhiculés dans l'exercice de la démonstration algébrique peuvent expliquer les difficultés et les malentendus des élèves.

Les calculateurs aveugles et l'expérience de la nécessité épistémique :

Les travaux du groupe CESAME (Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées) (Sackhur et al, 2005) apporte un angle de vue éclairant pour notre recherche. En particulier, leurs recherches ont permis d'identifier un type d'élèves appelé calculateurs aveugles pour lesquels :

« [...] le travail mathématique se réduit à l'application de règles, vraies ou fausses, dépourvues de cohérence globale, dont l'origine leur est inconnue et qu'ils ne cherchent pas à contrôler par leurs connaissances personnelles préalables » (Sackhur et al, 2005, p. 59).

Pour ces élèves-là, l'étude des difficultés et des erreurs n'est pas seulement dû à un manque de connaissances des énoncés. Un autre type de connaissances entre en jeu. Leurs travaux ont abouti à proposer des connaissances de trois ordres. Les connaissances d'ordre I sont les règles, les définitions, les axiomes, les énoncés ...

Les connaissances d'ordre II sont les règles du jeu et sont inhérentes aux mathématiques : ces connaissances sont garantes du bon fonctionnement des mathématiques. Elles relèvent de la sémiotique (Duval, 1995), de la validité et de la logique. Elles permettent de qualifier ou non l'activité mathématique. Ces connaissances ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions et les théorèmes : on ne peut faire un cours sur la nécessité. Si quelques élèves les acquièrent "chemin faisant", beaucoup n'en ont qu'une connaissance superficielle et peu opérationnelle : c'est le cas du caractère nécessaire des énoncés ou nécessité épistémique. Ainsi, le fait pour un énoncé mathématique d'être nécessaire donc apodictique, ne serait pas une propriété de l'énoncé mais serait inhérent, essentiel à l'énoncé lui-même ; c'est-à-dire qu'un énoncé dont le caractère nécessaire n'est pas perçu, n'est plus un énoncé mathématique.

¹ <https://www.education.gouv.fr/timss-evaluer-les-competences-des-eleves-de-cm1-et-de-4e-en-mathematiques-et-en-science-308600>

Les connaissances d'ordre III participent, indirectement, à la définition des mathématiques. Il s'agit des connaissances sur les mathématiques qui fondent les règles sur leur apprentissage. Qu'entend-t-on par faire des mathématiques ?

« Est-ce qu'apprendre les mathématiques c'est apprendre par cœur les connaissances de niveau I et des méthodes... Alors, que doit institutionnaliser sur les mathématiques le professeur de mathématiques qui souhaite que ses élèves fassent vraiment des mathématiques ? » (Sackhur et al, 2005, p.71).

Ainsi ces premières lectures soulèvent plusieurs pistes pouvant être explorées pour permettre à des élèves d'entrer dans un processus de démonstration algébrique. Elles révèlent aussi des liens tangibles entre l'expérience de la nécessité épistémique (Sackhur, 2005), les travaux sur l'exemple générique de Arzac (2005) et les nécessités du cadre de la problématisation (Fabre & Orange, 1997), liens qu'il conviendra d'affiner.

2. Prescriptions institutionnelles

Considéré comme une transposition didactique de l'algèbre élémentaire, le calcul littéral apparaît dans les programmes du cycle 4. Les injonctions institutionnelles (BO cycle 4, 2020) ciblent la dimension objet à travers le travail sur le statut de la lettre, le statut du signe égal, les règles sur les manipulations d'écritures, en particulier la règle de la distributivité, et à travers la résolution d'équations de degré 1 ou s'y ramenant. Elles ciblent aussi la dimension outil (au sens de Douady, 1984) à travers quatre grands types de tâches : la traduction d'une propriété générale, la démonstration d'un résultat général, la validation ou la réfutation d'une conjecture, la modélisation d'une situation dont la mise en équation.

Si l'on se restreint aux tâches de démonstration, le calcul littéral doit être mobilisé pour établir un résultat général ou pour valider/réfuter une conjecture ; ce qui questionne sur ce qui peut prendre le statut de résultat général. Et par ailleurs, une seule mise en œuvre est proposée, celle de la situation des trois nombres qui se suivent. Cela questionne sur le statut de cet exemple. Constitue-t-il à lui seul un représentant d'une classe de problèmes à proposer en classe ? Ainsi par la suite, comme annoncé dans l'introduction, afin de circonscrire notre étude nous axerons notre recherche sur les démonstrations algébriques des propriétés sur les nombres entiers.

3. Du côté des manuels

Nous faisons l'hypothèse que les manuels offrent un aperçu des tâches proposées aux élèves.

Nous exposons seulement quelques résultats obtenus à partir de 4 manuels de cycle 4 (Indigo, Transmath, Math Monde, Myriade). En appui sur les éléments de la Théorie Anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous identifions les praxéologies mis à l'œuvre à travers des différents types de tâches proposées. Nous constatons ainsi une proposition très réduite voire inexistante d'exercices de démonstration algébrique de propriétés arithmétiques dans certains manuels. Par ailleurs, l'accent est mis sur la dimension objet du calcul littéral. L'aspect procédural prédomine sur l'aspect sémantique. Les séquences sur l'arithmétique et celles sur le calcul algébrique sont menées sans aucun lien. Enfin les technologies (Chevallard, 1985) mises en œuvre ne sont que trop rarement explicitées.

Ces premiers résultats rendent compte d'un vide didactique et conforte l'urgence de réfléchir à des alternatives.

LE CADRE DE LA PROBLEMATISATION POUR PENSER L'ENSEIGNEMENT DE LA DEMONSTRATION ET RENDRE COMPTE DE SON APPROPRIATION

Dans le cadre de la problématisation la construction d'un problème prime sur sa résolution (Orange, 2012). Cadre développé au sein du Centre de recherche en éducation de Nantes

(CREN) avec un fort ancrage bachelardien il questionne la nature même des savoirs d'un point de vue épistémologique, didactique et idéologique.

Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. (Bachelard, 1938, p 14)

Fabre et Orange (1997) éclairent les savoirs scientifiques sous trois aspects. Les savoirs scientifiques sont des compétences pour maîtriser des problèmes, pas seulement les résoudre. Les savoirs scientifiques sont raisonnés. Les savoirs scientifiques sont partagés, soumis à la critique.

Un savoir scientifique n'est pas une simple connaissance privée, aussi pertinente soit-elle (mais qui pourrait alors en juger ?). Il doit être soumis à la discussion publique et pouvoir être remis en question. (Fabre & Orange, 1997, p 41).

Ainsi en engageant des élèves dans un processus de problématisation, on vise à supplanter des savoirs assertoriques par des savoirs apodictiques : on vise la construction de nécessités, c'est-à-dire de savoirs scientifiques : c'est vrai et il ne peut pas en être autrement.

Nous œuvrons donc à l'élaboration de dispositifs didactiques qui permettent la construction de tels problèmes, et non pas seulement à leur résolution. En particulier, un travail sur le caractère nécessaire ou nécessité épistémique sur les expressions algébriques pourrait permettre aux élèves d'appréhender le sens porté par les expressions et donc favoriser le processus de démonstration

PERSPECTIVES – IDENTIFICATION DES CONDITIONS

Ces premiers éléments nous permettent d'établir des conditions favorables à l'entrée dans un processus de démonstration. En effet, l'analyse des manuels et des programmes nous permet d'identifier les savoirs cachés pour lesquels l'institution n'organise aucun système didactique (Castela, 2008), savoirs par ailleurs convoqués dans certains exercices du diplôme du brevet des collèges.

La question du sens porté par les expressions algébriques apparaît également comme une condition favorable voire incontournable. Le cadre de l'apprentissage par problématisation fournit ainsi des éléments permettant de penser et d'analyser des situations, celles-ci visant la construction de nécessités (Hersant, 2020).

Enfin la question de l'institutionnalisation de connaissances de différents ordres (Sackhur et al, 2005) nous semble également être incontournable dans la construction de cette ingénierie et constituerait l'une des hypothèses de notre travail.

RÉFÉRENCES

- ADAM, J., AGACHE, A., BARRET, O., CHABRIER, C., CHARPENTIER, R., LEVEE, M., LOISEAU, J., REY, S., SIMONET, M. (2016). Maths Monde. Cycle 4. Edition Didier.
- ARSAC, G. (2009). La démonstration une logique en situation ? Colloquium CFEM-ARDM
- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3),281-308.
- BACHELARD, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris, Vrin (1986).
- BERGER, H., BILLA, N., DEMOULIN, P., FLOUS, A., LAFARGUE, B., LARRIEU, M., LAULHERE, A., LAYAN, M-C., POLLET, S., ROBERTOU, M., RUDELLE, F., VILLATTES, A. (2016). Maths cycle 4. Collection Mission Indigo. Edition Hachette.
- CARLOT, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P-A., JACQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, JM., MAHE, A., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F., VERDIER, F. (2016). Cycle 4. Collection Transmath. Edition Hachette.
- BOULLIS, M., CAMBON, M., DANARD, Y., GALLIEN, V., HERRMANN, E., MEYER, I., MONKA, Y., PERCOT, S. (2016). Maths. Manuel de cycle 4. Collection Myriade. Edition Bordas.
- CASTELA, C (2008). Travailler avec sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 28(2),135-182.
- CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221--266
- DOUADY, R. (1984). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. THESE D'ETAT, PARIS VII.
- Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- FABRE, M., & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- HERSANT, M (2020). L'usage du cadre de la problématisation en didactique des mathématiques : quels apports possibles ? *Séminaire national de didactiques de mathématiques*.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS. (2020). Programme du cycle 4. <https://eduscol.education.fr/document/621/download>
- ORANGE, C. (2012). *Enseigner les sciences. Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck
- PERRIN-GLORIAN, M-J (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. (p. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.
- SACKUR, C., ASSUDE, T., MAUREL, M., DROUHARD, J.-P., & PAQUELIER, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 57-90.
- SQUALLI, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat. Québec : Université Laval.