

CONCEPTIONS SUR LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES CHEZ LES ÉTUDIANTS EN FORMATION INITIALE

Matias Pavez-Bravo*

RÉSUMÉ

Dans cette contribution, nous avons l'intention de présenter les grandes lignes qui guident la réalisation de notre thèse, ainsi que les principaux éléments théoriques permettant de répondre à notre problématique, qui est liée à la formation initiale des enseignants et à leurs conceptions de la preuve en mathématiques. En ce sens, nous considérons qu'il est nécessaire d'ajouter à l'équation une composante appelée "perspective émique" qui nous permet d'accéder à des fragments de l'histoire mathématique personnelle de chaque individu, et de cette manière d'accroître notre compréhension sur la façon dont ces conceptions font partie des individus. 28 étudiants chiliens en deuxième et quatrième année d'université ont participé à notre expérimentation.

Mots-clefs : preuve mathématique, formation initiale, étudiants-enseignants, Chili

ABSTRACT

In this contribution we propose to present the general guidelines of our thesis, as well as the main theoretical elements to address our problem that links the initial training of teachers with their conceptions about proof in mathematics. In this sense, we believe it is necessary to add to the equation a component called "emic perspective" that allows us to access fragments of the mathematical history of each individual, and in this way be able to increase our understanding of how such conceptions inhabit individuals. The participants were 28 Chilean students in their second and fourth year of university.

Keywords: mathematical proof, pre-service training, pre-service teacher, Chile

UNE PROBLÉMATIQUE À ABORDER DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Au cours des dernières années, les pratiques de preuves ont pris un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques comme un moyen pour développer, établir et communiquer des connaissances (Stylianides, 2007). Plusieurs recherches montrent les avantages et difficultés associées à ces pratiques dans l'apprentissage des mathématiques (e.g., Balacheff, 1987, 1991 ; Boero et al., 2010; Mariotti & Pedemonte, 2019; Stylianides, 2007). Dans ce contexte, le défi pour l'enseignant est de donner aux élèves les opportunités de s'engager dans ces pratiques, pour développer pleinement leurs compétences mathématiques.

Par rapport à l'enseignant, deux points de conflit se croisent ; d'une part, certaines recherches font état de difficultés rencontrées par les enseignants-mêmes en matière des pratiques de preuves, par rapport à la méthode de preuve utilisée ou la validation/acceptation d'une certaine preuve présentée (e.g., Dickerson & Doerr, 2014; Sowder & Harel, 1998; Stylianides et al., 2007, 2013). D'autre part, les pratiques enseignantes sont difficilement modifiables dû à leur complexité, cohérence et stabilité constatée surtout dans le cas des enseignants plus expérimentés (Robert, 2001, 2005, 2007). Ainsi, nous croyons que la mise en œuvre effective des pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques dépend, dans une large mesure, tant des conceptions sur la preuve chez l'enseignant que de la façon dont il se positionne par rapport à cette notion par rapport à sa propre activité mathématique, sachant a priori, qu'il semble difficile d'agir et de modifier les pratiques enseignantes.

C'est pour ces raisons que nous prenons comme point de départ la formation initiale des futurs enseignants, où les étudiants n'exercent pas encore leur métier et où nous avons accès à leur histoire personnelle par rapport aux pratiques de preuves : cela nous permettra d'avoir

* Doctorant LDAR, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

quelques pistes tant pour la formation initiale que pour la projection des pratiques enseignantes sur les pratiques de preuves dans la classe.

Nous devons préciser que cette contribution est en lien avec une thèse en cours dans le contexte des futurs enseignants chiliens. Ce que nous présentons correspond aux éléments principaux de notre thèse. L'analyse de données est également en cours.

Contexte de la recherche

Les nouvelles exigences des programmes curriculaires du niveau secondaire au Chili (MINEDUC, 2015, 2019) et les nouveaux standards pour la formation initiale des enseignants (MINEDUC, 2021) mettent en évidence le besoin d'intégrer les pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques comme une manière de contribuer progressivement au développement de la macro-compétence « argumenter et communiquer », en faisant de la démonstration l'objet principal de cette compétence :

« [Les élèves devront être capables de] établir la différence entre une argumentation intuitive et une argumentation mathématique, d'interpréter et comprendre des enchaînements d'implications logique [...], de cette façon, ils seront capables de faire des démonstrations mathématiques de propositions » (MINEDUC, 2015, p.98)

« Argumenter des idées mathématiques devant leurs pairs par le biais d'assertions, de propositions, de justifications, de réfutations, de démonstrations, d'exemples et de contre-exemples » (MINEDUC, 2021, p. 99)

Ces demandes convergent dans un domaine de recherche qui n'a pas encore été pleinement exploré dans le cas du Chili. Les données encore rares (à voir Pavez-Bravo, 2019; Varas et al., 2008) sur les pratiques de preuve des futurs enseignants motivent notre recherche à développer une analyse clinique à la fois de leurs expériences et de leur activité mathématique dans le cadre de la production de preuves.

Notre hypothèse de départ soutient que les difficultés rencontrées par les étudiants-enseignants trouvent essentiellement leur origine dans une double rupture ; d'une part, le changement dans la nature de la preuve en tant qu'objet au lycée vers celui d'outil privilégié de l'activité mathématique à l'université, et, d'autre part, le manque d'une formation didactique permettant une réflexion sur la mise en œuvre des pratiques de preuve dans l'enseignement des mathématiques, ce qui perpétue la reproduction des pratiques enseignantes de l'enseignant qui lui a appris à « faire des maths » à l'école. Nous inscrivons cette hypothèse dans le cadre de la Double Discontinuité de Klein (Klein, 1924) par rapport aux pratiques de preuve. Ainsi, quelles conceptions les étudiants-enseignants ont-ils sur la preuve en mathématiques d'après leurs expériences et leurs histoires personnelles ? Quelles conceptions mobilisent-ils dans leur activité mathématique pour proposer des conjectures, construire et valider des preuves ? Et, comment leurs expériences et leurs histoires personnelles influencent-elles leur activité mathématique pour s'engager dans les pratiques de preuves ?

VOCABULAIRE ET CADRE THÉORIQUE

Les concepts principaux que nous utilisons sont définis pour affiner nos questions de recherche. D'une part, il faut préciser les éléments théoriques principaux pour comprendre les pratiques de preuves, ainsi que la manière selon laquelle nous regardons les expériences et l'histoire personnelle des étudiants. Ainsi, nous entendons par *conception* :

« L'instanciation d'une connaissance dans une situation spécifique précisée par les propriétés du milieu en jeu et les contraintes sur les relations (action/feedback) entre ce milieu et le sujet » (Balacheff, 2010. p. 125)

Pour comprendre l'activité mathématique des individus en termes des pratiques de preuve, nous prenons comme point de départ les travaux de Lakatos (1963) en distinguant trois activités :

(1) *l'activité d'exploration* : se rapporte à tout ce que l'individu fait pour construire une conjecture.

(2) *l'activité de preuve* : se rapporte à l'organisation cohérente des arguments mathématiques pour produire une preuve cherchant à être validée au sein d'une communauté donnée. Pour *preuve* nous prenons la définition suivante :

« Une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » (Balacheff, 1987, p. 2)

(3) *l'activité de validation* : se rapporte à la mobilisation de critères pour décider sur l'acceptation ou non d'une preuve donnée au sein d'une communauté donnée.

Ainsi, les conceptions sur la preuve chez les étudiants pourraient être identifiées à partir de leur activité mathématique.

Cependant, nous considérons que les conceptions et l'activité mathématique sont influencées par l'histoire personnelle de chaque individu ; les expériences vécues tout au long de leur vie (académique et non-académique), leurs croyances, leurs comportements. Nous souhaitons alors accéder à la *perspective émique* (Pike, 1988) des individus, c'est-à-dire accéder partiellement, en tant qu'observateur externe, à des fragments de l'histoire mathématique des individus afin de mieux comprendre leurs conceptions et leur l'activité mathématique. Cette perspective émique prend pour source d'inspiration les composantes institutionnelle, sociale et personnelle de la Double Approche Didactique et Ergonomique (Robert & Rogalski, 2002).

SITUATIONS, CONTEXTE ET MÉTHODOLOGIE

Pour répondre aux questions de recherche, nous proposons quatre tâches inscrites dans différents domaines : arithmétique, théorie de nombres, géométrie, combinatoire. Chacune des situations (présentées dans notre poster) a une consigne comprenant : la demande d'une conjecture, d'une production de preuve de la conjecture proposée et l'entrée dans un débat pour décider si la preuve présentée est valide ou non. Cette consigne répond ainsi à chacune des activités décrites dans notre cadre théorique. Chaque situation a été implémentée dans une séance de classe de 2 heures, sans intervention. Par exemple, notre tâche géométrique, nommée « Nature d'un quadrilatère », est la suivante :

« Soit ABC un triangle et M et N les milieux respectifs de [AB] et de [AC]. On choisit un point I intérieur à ce triangle. On désigne par E et F les milieux de [IB] et de [IC]. Le quadrilatère MNFE peut-il être un rectangle ? »

Les séances se sont déroulées à distance, via Zoom, d'où nous avons enregistré le travail des 28 étudiants : 16 en 2^{ème} année et 12 en 4^{ème} année universitaire. Les participants se sont divisés en 7 groupes de 4 étudiants en respectant la condition de travailler avec leurs camarades de la même année. Pour avoir les réponses des étudiants, nous avons utilisé la méthodologie des Narrations de Recherche (Chevalier & Sauter, 1992) sur un document nommé « Cahier de réflexion » en format Word, étant donné les conditions de travail à distance. Dans ce cahier et en suivant cette méthodologie, les étudiants peuvent exprimer ce qu'ils éprouvent lors de la réalisation de chaque tâche. En particulier, nous leur avons proposé de nous raconter en quelques lignes : (1) des commentaires personnels par rapport à leur expérience en résolvant la tâche proposée (ainsi nous aurons plus d'informations qui peuvent ne pas être présentes dans les enregistrements) ; (2) répondre à la question sur comment ont-ils abordé le problème, de façon de leur permettre de réfléchir sur les arguments trouvés lors de la réalisation de la tâche ; et finalement (3) la production de la preuve en considérant la

prise de photos de toutes les traces de l'activité développée par les étudiants. Nous avons prévu une vingtaine de minutes pour la mise en commun : un ou deux groupes ont présenté leurs résultats face aux étudiants restants pour donner la place à un débat afin de décider de la validité des preuves présentées. Finalement, après les quatre séances, nous avons demandé aux étudiants de remplir un questionnaire avec sept questions ouvertes pour récolter les expériences vécues par les étudiants tout au long de leur parcours académique, afin d'accéder à la perspective émique des étudiants. Il ressort de l'analyse de leurs discours que les étudiants entrent difficilement dans la pratique de la preuve mathématique : ils reconnaissent ne pas avoir encore engagé une réflexion sur la production de preuves. La diversité des preuves produites témoigne d'une formation nécessaire des futurs enseignants sur la dimension sociale et « communication » d'une preuve au sein d'une communauté. Les analyses sont en cours.

RÉFÉRENCES

- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- BALACHEFF, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction : The Case of Mathematical Proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Éds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 173-192). Springer Netherlands.
- BALACHEFF, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Éds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Springer US.
- BOERO, P., DOUEK, N., MORSELLI, F., & PEDEMONTE, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of PME 34 the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 179-209.
- CHEVALIER, A., & SAUTER, M. (1992). *Narration de Recherche* (Brochure). IREM de Montpellier.
- DICKERSON, D. S., & DOERR, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.
- KLEIN, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Vol. 14). Springer.
- LAKATOS, I. (1963). *Proofs and refutations*. Nelson.
- MARIOTTI, M. A., & PEDEMONTE, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. *ZDM*, 51(5), 759-777.
- MINEDUC. (2021). Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- MINEDUC. (2015). Nuevas Bases Curriculares y Programas de Estudio; 7° y 8° año de Educación Básica/ 1° y 2° año de Educación Media. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- MINEDUC. (2019). Bases Curriculares 3o y 4o medio. Ministerio de Educación, República de Chile. Santiago de Chile : Ministerio de Educación
- PAVEZ-BRAVO, M. (2019). *Compétences des enseignants stagiaires autour d'une petite tâche de modélisation dans le domaine de géométrie* [Mémoire Master]. Université Paris Diderot.
- PIKE, K. L. (1988). Cultural relativism in relation to constraints on world view—An emic perspective. *Bulletin of the Institute of History and Philology*, 59(2), 385-399.
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1), 57-80.
- ROBERT, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : Un point de vue didactique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 10, 209-249
- ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : Une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(81), 271.
- ROBERT, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- SOWDER, L., & HAREL, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- STYLIANIDES, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., & PHILIPPOU, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166.
- STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., & SHILLING-TRAINA, L. N. (2013). Prospective teachers' challenge in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463-1490.
- VARAS, L., CUBILLOS, L., & JIMENEZ, D. (2008). *Análisis de la calidad de clases de Matemática : Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático* (Proyecto FONIDE N°: 209-2006; p. 1-61). FONIDE – Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación, Chile.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.