L'ALGÈBRE ABSTRAITE EST-ELLE DIFFICILE PARCE QU'ELLE EST ABSTRAITE ?

Renaud Chorlay*, Nicolas Grenier-Boley**

RÉSUMÉ
Nous présentons les premiers résultats d'une étude exploratoire visant à problématiser la question de l'enseignement-apprentissage de l'algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur dans le cadre de l'apprentissage de l'algèbre abstraite (voire de l'abstraction en algèbre).

Mots-clefs : abstraction, algèbre linéaire

ABSTRACT
We present the first results of an exploratory study aiming at problematizing the question of teaching-learning linear algebra in higher education in the context of learning abstract algebra (or even abstraction in algebra).

Keywords: abstraction, linear algebra

INTRODUCTION

Ce travail de recherche provient d'une réaction de ses deux auteurs – à la fois comme didacticiens et comme enseignants du supérieur – à la lecture d'un numéro récent de *ZDM – Mathematics Education* (Stewart, Andrews-Larson & Zandieh, 2019), qui ne fait pas à la question de l'abstraction la place qu'elle nous semble mériter.

D'une part, ce numéro porte sur un modèle d'enseignement étasunien (Strang, 2006) de nature exclusivement procédurale et extrinsèque, sans problématiser la question de l'abstraction comme paramètre, obstacle ou levier.

D'autre part, il suggère que les réflexions et résultats des nombreux travaux des années 1990 synthétisés par Dorier, (2000) ont largement été oubliés, en particulier les analyses épistémologiques et didactiques (théoriques et empiriques) des enjeux liés à l'abstraction dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.

À titre heuristique, nous avons souhaité montrer dans ce poster que des exercices « abstraits » – dans différents sens du terme précisés ci-dessous – peuvent être beaucoup mieux réussis par des étudiants en Master que des exercices moins « abstraits ».

L'ABSTRACTION : UNE NOTION POLYSÉMIQUE

Les étudiants interrogés dans les études menées par Dorier, Robert, Robinet et Rogalski dans les années 90 attribuaient majoritairement leurs difficultés en algèbre linéaire à son caractère « abstrait » (Dorier, 2000, p.94).

Dans cette étude préliminaire, notre objectif n'est pas de proposer une caractérisation épistémologique ou didactique d'une notion de « théorie abstraite » ou d'« exercice abstrait » (ou d'exercice « plus ou moins abstrait » qu'un autre). Nous avons mené une étude empirique sur un petit corpus de textes relatifs à l'enseignement supérieur (de l'algèbre linéaire ou au-

* Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France
** Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France

delà), au sein duquel les usages des termes « abstrait » et « abstraction » ont été relevés. Les résultats de cette étude sémantique montrent que ces termes servent à désigner l'un des deux pôles dans une série de *polarités*. Ces polarités vont du très général au très spécifique à l'algèbre linéaire. Elles ne sont pas toutes indépendantes.

1. Corpus étudié

Le corpus que nous avons étudié est constitué des documents suivants :

- Des travaux de didactique sur l'algèbre linéaire : Dorier (2000), le numéro spécial récent de *ZDM - Mathematics Education* (2019).
- Des travaux de didactique sur l'algèbre abstraite et la place de l'abstraction comme enjeu didactique dans ce contexte, en particulier ceux de Hazzan (1999).
- Les rapports du jury de l'agrégation de mathématiques sur la période 2004-2020[1].
- Un manuel d'algèbre linéaire considéré comme représentatif de l'enseignement étasunien et qui évoque de temps à autre une approche plus « abstraite » que celle qu'il utilise : Strang (2006).

2. Sens d'usage des termes « abstraits » et « abstraction » dans ce corpus :

Des lectures des documents du corpus, il se dégage différents invariants ou polarités pour le caractère « abstrait » :

- « Abstrait » s'oppose à « intuitif », dans plusieurs sens du terme « intuitif » :
  - Abstrait *vs* intuitif au sens de « familier »,
  - Abstrait *vs* intuitif au sens de susceptible de représentation visuelle.
- Un travail de démonstration est considéré comme plus « abstrait » qu'un travail procédural, en particulier qu'un travail passant par du « calcul ».
- Un objet est considéré comme plus abstrait lorsqu'il est caractérisé par des propriétés, moins abstrait lorsqu'il est donné par un procédé de construction, une figure, une formule.
- L'étude d'objets généraux est considérée comme plus « abstraite » que celle d'instances spécifiques (par exemple l'étude d'un groupe ou d'un espace vectoriel particulier).
- Plus spécifiquement, en algèbre linéaire :
  - Un travail en petite dimension (2 ou 3) est considéré comme moins abstrait qu'un travail en plus grande dimension, ou en dimension infinie, ou dans des espaces de dimensions indéterminées.
  - Un travail « en coordonnées » ou « extrinsèque » est considéré comme moins abstrait qu'un travail « sans coordonnées » ou « intrinsèque ».

ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI*

Les énoncés des exercices qui ont été proposés aux étudiants de Master (9 étudiants en M1 MEEF, 8 étudiants en M2 agrégation) figurent au sein du poster. Nous y renvoyons pour la bonne compréhension de leurs analyses *a priori*.

1. Exercice 1

Cet exercice est peu "abstrait" en différents sens du terme (familier, procédural, en petite dimension, en coordonnées). Les difficultés prévisibles sont les suivantes :

[1] Consultables sur https://agreg.org/index.php?id=archives

- L'exercice demande de coordonner les représentations cartésiennes et paramétriques dans $\mathbb{R}^3$ (Dias, 1998). Par exemple dans la question 1, dans le système caractérisant le noyau, on peut regarder une inconnue comme un paramètre pour obtenir une description du noyau comme droite vectorielle.
- Dans la question 2, l'image étant de dimension 2, un contrôle doit s'exercer pour isoler une base parmi une famille génératrice de l'image.
- Dans la question 3, le noyau étant de dimension 1, il est caractérisé par des systèmes de deux équations de plans vectoriels non confondus. Une infinité de tels systèmes existe.

2. Exercice 2

- Les questions 1a et 2 sont « abstraites » dans tous les sens du terme relevés dans l'étude sémantique préliminaire.

Les questions 1a et 2 relèvent de l'algèbre « abstraite » et non spécifiquement de l'algèbre linéaire. Par exemple, l'énoncé et la réponse auraient été les mêmes pour la structure « groupe ».

- La question 1b est spécifique à l'algèbre linéaire puisqu'elle demande la production d'un exemple d'application linéaire vérifiant certaines propriétés.
- Exemples de solution : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (0, x)$ ou encore une composée de rotation et de projection.

L'exercice laisse cependant beaucoup de marges de manœuvre (question ouverte, pas d'indication sur la manière de choisir ou construire les espaces et l'application concernée).

3. Exercice 3

Cet exercice est un grand classique, étudié en particulier par Dorier (2000, p.101 et suiv.). L'item n°1 fait l'objet de plusieurs études (Stewart, Andrews-Larson, & Zandieh, 2019).

PISTES DE RÉFLEXION OUVERTES PAR CE PREMIER TRAVAIL

Nous renvoyons au poster pour une synthèse des résultats des deux cohortes d'étudiants interrogés sur ces exercices. Nous décrivons ci-dessous quelques éléments de réflexion que ceux-ci nous inspirent.

1. Sur l'« abstraction »

En premier lieu, il semble que ce n'est pas l'“abstraction” *en soi* qui est source de difficulté, puisque l'exercice le plus abstrait est loin d'être le moins réussi. Par conséquent :

- Il importe de mieux caractériser ce qui dans les tâches ou contextes « abstraits » est source de difficultés, et ce qui ne l'est pas.
- En particulier, on peut chercher à caractériser la question 2 de l'exercice 2 – qui s'avère ne pas être source de difficultés – comme relevant de ce que Bourbaki appelait « l'âne qui trotte ». Cette expression, attribuée à Pierre Samuel, désignait un argument qui se déroule « automatiquement ». Elle a donné son nom à deux « congrès » Bourbaki : *Congrès de la motorisation de l'âne qui trotte* (juin-juillet 1952) et *Congrès de l'incarnation de l'âne qui trotte* (oct. 1952). Des outils pour une caractérisation didactique de telles démonstrations sont donnés, par exemple, dans Selden et Selden (2009).

2. Sur les difficultés résistantes en algèbre linéaire

- Certaines difficultés semblent relever de conceptions erronées héritées du début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (exercice 3).
- Les tâches de *production d'objet sous contrainte* (exemples ou contre-exemples) sont particulièrement sources de difficultés (exercice 2, question 1b) ; sont-elles source de difficultés *spécifiques* ? Plusieurs hypothèses se présentent pour expliquer la présence de difficultés :
  1. caractère inhabituel de ces tâches pour les étudiants,
  2. pauvreté de l'*example space* mobilisable (Fukawa-Conelly & Newton, 2014)
  3. faiblesse des *contrôle*s mis en œuvre par les étudiants dans ces tâches de production (Balacheff, 2013).

3. Sur l'interaction entre ces deux thèmes

Plusieurs auteurs (Dorier, Robert, & Rogalski, 2002 ; Sierpinska, 2000) ont avancé l'idée selon laquelle un passage explicite par l'abstraction, loin d'aggraver la difficulté de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, constituait un levier utile voire un passage nécessaire pour cet apprentissage. Les arguments épistémologico-didactiques (notion de concept FUG, levier méta) ou épistémologico-mathématiques (l'algèbre linéaire comprenant la théorie de la représentation de ses objets) mis en avant par Dorier-Robert et Sierpinska (resp.) se voient mis en perspective par les résultats de cette étude empirique préliminaire.

Ces résultats empiriques recoupent aussi ceux de Dorier (2000, chap.4) : les difficultés observées en algèbre linéaire relèvent moins de difficultés transversales (logique, formalisme) que de difficultés spécifiquement liées aux concepts d'algèbre linéaire. Cette étude invite à caractériser plus finement cette spécificité, en la comprenant dans le cadre de l'algèbre abstraite, dont l'exercice 2 constitue un échantillon.

RÉFÉRENCES

BALACHEFF N. (2013). cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.), Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

DIAS M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

DORIER J. L. (ED.). (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer.

DORIER J. L., ROBERT A., & ROGALSKI M. (2002). Some comments on 'the role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 185–191.

FUKAWA-CONNELLY T., & NEWTON C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(3), 323–349.

HAZZAN O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(1), 71–90.

SELDEN A., & SELDEN J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In *Teaching and learning proof across all the grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). Reston (VA): NCTM.

SIERPINSKA A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorier, op.cit., 209–231.

STEWART N. ANDREWS-LARSON C. & ZANDIEH M. (EDS). (2019). Research on teaching and learning in linear algebra. *ZDM – Mathematics Education*, *51*(7).

STRANG G. (2006). *Linear algebra and its applications* (4th edition). Thomson Brooks / Cole.