

## PRATIQUES LINGUISTIQUES ET LANGAGES INTERMEDIAIRES DANS LA FORMATION DES FUTURS ENSEIGNANTS

Cristina Roshani\*

### RÉSUMÉ

Dans ce texte, je présente un travail de recherche dans lequel le langage est pris comme un objet d'étude dans le contexte de la formation pédagogique des futurs enseignants de mathématiques en Uruguay. Les caractéristiques du langage des mathématiques et la diversité linguistique inhérente aux cours de mathématiques, m'a permis d'élaborer un dispositif didactique centré sur la définition de la propriété de symétrie (réciproque) de la relation  $R$  dans un ensemble  $A$ . Le but a été d'offrir aux étudiants la possibilité de détecter la diversité des langages avec lesquels une même définition peut être énoncée, en faisant une première approche à l'étude méthodologique du langage à travers l'analyse de la présence des variables, des quantificateurs et des relations logiques de manière implicite ou explicite. Pour réaliser l'analyse du langage il m'a fallu établir six catégories de langage mathématique intermédiaire entre deux langages pôles, d'une part le langage naturel et d'autre part, le langage formel.

Mots-clefs : langage mathématique, langages intermédiaires, communication mathématique, formation pédagogique.

### ABSTRACT

This work presents research into language as an object of study in the context of pedagogical training of future teachers of Mathematics in Uruguay. The characteristics of the language of Mathematics and the linguistic diversity inherent to a Mathematics classroom, allow for the development of a didactic device centered on the definition of the symmetric (reciprocal) property of a relation  $R$  on a set  $A$ . The aim was to make students aware of the diversity of languages with which the same definition can be stated, making a first approach to the methodological study of the language through the analysis of the presence of variables, quantifiers and logical relations in an implicit or explicit way. In order to carry out the analysis of language, six intermediate categories of mathematical language were established out of two farthestmost ones, natural language on the one hand and formal language on the other.

Keywords: mathematical language, intermediate languages, mathematic communication, pedagogical formation.

### INTRODUCTION

Le langage mathématique peut-être considéré comme un moyen pour l'apprentissage, et voici que lors du parcours de l'apprentissage, ce langage mathématique commence à faire partie de l'acquis personnel des étudiants en leur fournissant des outils pour continuer à faire des progrès en mathématiques. L'apprentissage du langage mathématique ne se fait pas spontanément, il s'acquiert dans le processus systématique d'abstraction qui implique l'apprentissage des mathématiques. En conséquence, il est important que les futurs enseignants connaissent les caractéristiques du langage mathématique et la diversité linguistique que l'on trouve dans la classe de mathématique, pour parvenir à améliorer leurs pratiques.

Je commence par exposer quelques éléments théoriques sur le langage et la communication mathématique que j'en ai pris en compte pour établir les catégories de langages intermédiaires et pour concevoir l'instrument didactique. Ensuite je présenterai les catégories des langages intermédiaires et je montrerai les diverses manières, du point de vue du langage mathématique, dont la définition de la propriété de symétrie de la relation  $R$  sur un ensemble  $A$  est formulée dans différents ouvrages, manuels et sites web. Puis, je ferai référence à l'instrument didactique qui a permis aux futurs enseignants d'analyser le langage en classe de mathématiques et d'en faire une analyse plus systématique. Je conclurai par montrer que les catégories des langages mathématiques intermédiaires sont un outil qui a permis d'analyser

---

\* Institut de Formation Pédagogique de Rocha, Uruguay

les pratiques des futurs enseignants, et qui peut également être utilisé par eux pour faire leurs classes.

## LANGAGE MATHÉMATIQUE, LANGAGE NATUREL ET COMMUNICATION DANS L'ENSEIGNEMENT

La communication des mathématiques demande d'être précis, c'est-à-dire qu'il faut éviter les ambiguïtés pour pouvoir transmettre les concepts mathématiques en jeu. C'est ainsi que l'action de communiquer des idées mathématiques conduit à leur systématisation, donc une œuvre mathématique est créée (Barton, 2008). Pour être précis et rigoureux, il faut que le langage mathématique permette d'abstraire l'essence des relations mathématiques impliquées dans n'importe quelle situation (Gómez, 1989). Voilà pourquoi ce langage se caractérise par le fait d'avoir des règles, des symboles et des éléments dont l'objectif est celui de communiquer les notions mathématiques d'une manière précise, sans ambiguïtés, à différence du langage naturel ou courant (Radillo, Nesterova, Ulloa & Pantoja, 2005). Alors, on peut distinguer deux types de langages, le mathématique ou formel, et le naturel ou courant.

L'apprentissage des mathématiques et de leur langage se fait simultanément, systématiquement et progressivement. C'est un processus dans lequel les étudiants acquièrent la maîtrise d'un contenu mathématique qui implique des notions de plus en plus abstraites et complexes et d'un langage de plus en plus formel. De ce fait, il est important de comprendre comment le langage et, en particulier, la structure du langage mathématique, influencent la formation des concepts et de l'apprentissage des mathématiques.

Toutefois, pour apprendre des notions complexes, il n'est pas suffisant d'utiliser un langage précis et rigoureux. Une communication claire est nécessaire pour permettre la compréhension. Ce qui est important est de transmettre la signification, et pour cela, il est nécessaire de choisir les symboles avec le soin nécessaire pour parvenir à une communication réussie (Skemp, 1999). Selon Sfard (2000, 2001), la pensée est une forme de communication et l'apprentissage des mathématiques est une initiation au discours mathématique, c'est-à-dire, l'initiation à une manière particulière de communication connue sous le nom de mathématiques. Le discours mathématique implique plus que le langage, c'est une manière acceptée d'utiliser le langage, les expressions symboliques, les sentiments et les croyances, agissant de telle manière que chacun s'identifie en tant que membre d'un groupe social (Moschkovich, 2007).

Les discours mathématiques varient donc d'une communauté à l'autre, par exemple : entre les mathématiciens et les enseignants, parmi ceux qui se produisent à l'école primaire ou à la secondaire. Les étudiants sont censés de commencer par participer à des discours scolaires simples et, ils doivent progresser dans leur maîtrise jusqu'à réussir à posséder un discours académique, avec des notions plus complexes et abstraites au fur et à mesure que le temps d'apprentissage a lieu. Le langage utilisé dans chaque discours n'est pas le même. Evidemment, il faut considérer des langages intermédiaires entre le langage naturel et le langage mathématique symbolique qui permettent la transition entre les deux.

## LANGAGES INTERMÉDIAIRES

Les langages intermédiaires permettent la transition entre le langage naturel et le langage mathématique symbolique. Ils sont composés par six catégories, lesquelles j'ai établies en fonction des complexités des notions mathématiques et de leurs symboles associés, des activités qu'elles permettent de faire et du niveau d'abstraction nécessaire. Les catégories sont graduelles et les énoncés qu'on formule avec elles sont rigoureux. Les moins formels ont une prédominance du langage naturel, ils sont associés à des propositions simples dont la valeur

de vérité n'exige toujours pas de justifications intra-mathématiques, tandis que, les plus formels ont un langage plutôt symbolique, les connecteurs et les quantificateurs sont explicites et ils sont liés à des notions plus abstraites et plus complexes. Les six catégories sont les suivantes :

**Langage naturel mathématique :** les énoncés et les formulations sont exprimés en termes de langage naturel. Il n'y a pas de présence explicite des variables, ni des quantificateurs, ni des connecteurs. Les symboles mathématiques qui apparaissent sont ceux qui peuvent être utilisés dans la vie quotidienne des personnes (nombres, signes des opérations de calcul, notation d'unités de mesure, etc.). Les signes ou symboles mathématiques qui apparaissent sont ceux que les personnes utilisent dans la vie quotidienne.

**Langage intermédiaire élémentaire :** le langage prédominant est le naturel. Les variables son explicites et comportent des symboles mathématiques utilisés à l'école ou dans des contextes mathématiques ( $\in, N, <, \neq, \pi, \perp, //, \equiv, \subset, C_{O,r}$ ). Ce langage est caractérisé par l'utilisation des symboles pour désigner des objets ou pour exprimer des faits équivalents aux verbes utilisés dans le langage courant.

**Langage intermédiaire moyen :** les énoncés et les formulations sont plus éloignés du langage courant. Les variables et quelques connecteurs et quantificateurs sont explicites. Aux symboles utilisés dans les catégories précédentes on ajoute des notions qui n'appartiennent qu'au domaine mathématique et qui sont liées aux notions d'ordre supérieur (Skemp, 1999) ( $\ln, \sin, \lim, dx, \Sigma$ ).

**Langage intermédiaire avancé :** les énoncés et les formulations sont exprimés dans un langage plus formel. Les variables, les quantificateurs et les connecteurs son explicites en langage naturel ou mathématique.

**Langage formel appliqué :** les énoncés et les formulations sont exprimés dans un langage formel. Les variables, les quantificateurs et les connecteurs son explicites en langage mathématique.

**Langage formel logique :** les propositions et les énoncés sont exprimés formellement en faisant apparaître des variables, des symboles, des quantificateurs et des connecteurs. Les symboles sont utilisés en laissant une place minimale aux mots. Le langage naturel n'apparaît pas.

## INSTRUMENT DIDACTIQUE

Premièrement, je commence par présenter la manière dans laquelle cet instrument didactique a été conçu. Après je ferai référence aux étudiants qui ont réalisé les activités en faisant mention de leur formation académique. Ensuite je montrerai une analyse de la propriété de symétrie  $R$  sur un ensemble  $A$ , et finalement les activités proposées.

### *1. Conception*

Dans les cours de mathématiques, les enseignants travaillent avec de différentes notions, proposent des activités diverses et, ils peuvent travailler de plusieurs manières. Pourtant, il y a un élément qui est inhérent aux cours de mathématiques : c'est la définition.

La relation d'équivalence et les définitions par abstraction sont des sujets dans les cours de formation des futurs instituteurs et des futurs professeurs de mathématiques. En considérant les propriétés d'une relation d'équivalence, j'ai choisi la propriété de symétrie de la relation  $R$  dans un ensemble  $A$ , parce que dans la pratique j'avais pu identifier quelques difficultés associées aux propriétés des relations sur un ensemble  $A$  (symétrique, antisymétrique, asymétrique, réflexive) chez les étudiants. En outre, le fait que les différences entre les définitions de la propriété de symétrie sur de différents ouvrages, manuels et pages web sont

le langage utilisé par les différents auteurs, m'a fait penser que les difficultés des étudiants étaient dues au langage mathématique utilisé.

## 2. Contexte expérimental

L'instrument didactique a été appliqué en 2018 et il a été destiné aux étudiants de l'Institut Pédagogique de Rocha, en Uruguay. Dans cet institut se forment les futurs instituteurs et les futurs professeurs, c'est-à-dire les enseignants qui vont travailler à l'école primaire et à l'école secondaire respectivement. Les deux carrières ont une durée de quatre ans, et à partir de la deuxième année les étudiants ont des cours pratiques en didactique. Les deux activités de l'instrument didactique ont été réalisées par 25 étudiants de la deuxième année de la carrière pour devenir instituteur, et par 6 étudiants de la première année de la carrière pour devenir professeur de mathématique.

La formation mathématique et les discours des cours de chaque carrière sont différents puisque la formation des futurs professeurs est plus spécifique et formelle que celle des futurs instituteurs. Mais, ces derniers ont déjà commencé à faire les cours pratiques en didactique. Pour ces motifs, j'ai considéré que proposer les activités de l'instrument didactique aux étudiants des deux carrières, montrerait un aperçu différent de l'étude du langage mathématique.

### ANALYSE DE LA PROPRIÉTÉ DE SYMÉTRIE

Une manière d'analyser le langage mathématique est considérer les variables ( $x, y, a, b$ ), les symboles mathématiques et les éléments logiques comme les quantificateurs et les connecteurs (Romo-Vázquez & Hache, 2019). C'est-à-dire qu'il faut analyser la structure logique du langage.

Je ferai l'analyse de quatre des douze définitions que les étudiants ont choisies pour montrer la diversité de manières dont la définition de la propriété symétrique de la relation  $R$  dans un ensemble  $A$  peut être énoncée, en utilisant les six catégories de langages intermédiaires.

Définition (1) : "Soit un ensemble  $A$  dans lequel une relation  $R$  a été définie, c'est-à-dire que  $R$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $A \times A$ . Une relation  $R$  dans  $A$  est dite d'équivalence si elle répond aux propriétés suivantes :

Réflexive ou identique :  $a R a$

Symétrique :  $a R b \Rightarrow b R a$

Transitive :  $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$ " (Fernandez, 2007, p. 40)

Dans la définition 1 la propriété de symétrie fait partie de la définition de la relation d'équivalence dans un ensemble  $A$ . Elle est énoncée en langage intermédiaire moyen parce qu'il y a des symboles qui appartient au domaine mathématique comme  $R, \wedge$  et  $A \times A$ , les variables et le connecteur  $\Rightarrow$  apparaissent de manière explicite, mais le quantificateur universel et le connecteur biconditionnel  $\Leftrightarrow$ , sont implicites.

Définition (2) : "Une relation  $R$  dans un ensemble  $A$  est dite de symétrie si  $\forall (a, b) \in R$  implique que  $(b, a) \in R$ . C'est-à-dire,  $R$  est de symétrie  $\equiv \forall a, \forall b, (a R b \Rightarrow b R a)$ " (Villalpando, 2018, p. 9).

La propriété de symétrie de la relation  $R$  dans un ensemble  $A$  est énoncée deux fois dans la définition 2, l'auteur sépare les deux énoncés de la définition avec les mots « C'est-à-dire ». Dans les deux cas il y a des variables, des connecteurs et des quantificateurs formulés de manière explicite. Dans le premier cas, l'auteur utilise langage naturel pour exprimer l'implication  $\Rightarrow$ , langage mathématique pour le quantificateur universel  $\forall$ , et le connecteur biconditionnel  $\Leftrightarrow$  est implicite (le mot « si » est à sa place). Par conséquent, cet énoncé de la

définition est formulé en langage intermédiaire moyen. Dans le deuxième énoncé de la définition, le langage utilisé est le langage formel appliqué parce que tous les connecteurs et le quantificateur sont de manière explicite et ils sont exprimés avec leurs symboles. Dans la première partie de la définition l'auteur écrit  $(a, b) \in R$ , et dans la deuxième partie il écrit  $a R b$ .

Définition (3) : “Une relation  $R$  sur un ensemble  $A$  est de symétrie si pour tout  $x \in A, y \in A$ , si  $(x, y) \in R$  alors  $(y, x) \in R$ . Exprimé d’une autre façon :  $\forall x, y \in A$  il est vrai que si  $(x, y) \in R$  alors  $(y, x) \in R$ . Exemple :  $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)\}$ ” (Ferrari, y Tenembaun, 2010, p.1)

Comme dans le cas précédent, dans la définition 3 la propriété de symétrie est énoncée deux fois. Les auteurs ajoutent un exemple. Même si le quantificateur universel est exprimé en langage naturel dans le premier énoncé de la définition et avec son symbole dans le deuxième, dans les deux cas elle est exprimée en langage intermédiaire moyen parce que le connecteur biconditionnel est implicite.

Définition (4) : “Une relation  $R$  dans un ensemble  $A$  est de symétrie si un élément est mis en rapport avec un autre à travers  $R$ , alors l’autre élément est mis en rapport avec le premier à travers de la même  $R$ . C’est le même avoir  $(a, b)$  que avoir  $(b, a)$ . C’est-à-dire,  $\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y R x$ ” (“Relación simétrica”, 2021)

Dans la définition 4, il y a trois types de langages : du langage naturel mathématique pour formuler la première phrase. Comme sur la deuxième phrase apparaissent des variables de manière explicite, elle est exprimée en langage intermédiaire élémentaire. Finalement, la troisième phrase est formulée en langage intermédiaire moyen, parce que les variables, le quantificateur et l’implication sont explicites, mais le connecteur biconditionnel est implicite.

#### PREMIERE ACTIVITE ET ANALYSE DES TRAVAUX DES ETUDIANTS

Les buts de cette activité sont : 1) Reconnaître le langage comme objet de recherche. 2) Sensibiliser les futurs professeurs de mathématiques à l’existence de différents langages qui participent de l’activité mathématique.

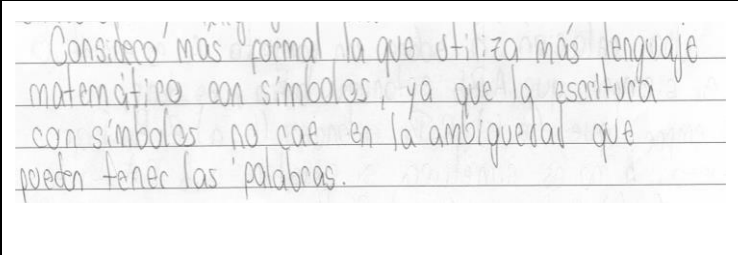
La consigne de l’activité 1 est la suivante : a) Cherche sur quatre livres (au moins) et dans deux sources fiables sur internet la définition de la propriété de symétrie (réciproque) de la relation  $R$  dans un ensemble  $A$ . b) Observes-tu des différences ? Penses-tu que l’une d’entre elles est la plus rigoureuse ? Pourquoi ? c) Si tu devais enseigner cette définition, laquelle tu choisirais pour présenter en classe et pourquoi ? d) Cela suffirait-il à tes élèves de le lire ou penses-tu qu’il faudrait l’expliquer ? Pourquoi ? e) Si tu penses qu’il est nécessaire de l’expliquer, écris l’explication que tu donnerais aux étudiants. f) Quelles différences il y a t’il entre la définition que tu as choisie et l’explication associée ? g) Quelles sont les caractéristiques du langage utilisé dans la définition et quelles sont les caractéristiques du langage utilisé pour l’explication ?

L’analyse des travaux des étudiants a révélé que travailler avec une même définition leur a permis d’observer la diversité linguistique. Ils ont reconnu que la même proposition est formulée de deux façons différentes dans une même définition, et que les notions peuvent être énoncées en langage courant ou en langage mathématique symbolique, qu’il y a des définitions avec plus de symboles mathématiques que d’autres, et que d’ailleurs, les auteurs écrivent  $(a, b) \in R$  ou  $a R b$  et finalement que, dans quelques définitions, on trouve des exemples ou la négation de la propriété.

##### 1. Définitions choisies comme les plus formelles

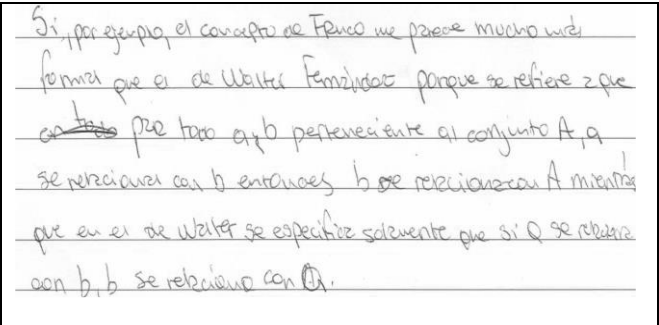
Dans la réponse Matías (Figure 1), il est possible d’observer que pour des futurs enseignants les définitions formulées dans un langage symbolique sont envisagées comme les plus

formelles, car ils considèrent que le langage naturel avec des mots du langage courant peut être ambigu.

	<p>Je considère la plus formelle celle qui utilise le plus du langage mathématique avec des symboles, car la structure avec des symboles ne tombe pas dans l’ambiguïté qui peuvent avoir les mots.</p>
---	--

**Figure 1.** – Réponse de Matías, futur enseignant dans le primaire, qui pense que le langage mathématique avec des symboles est plus formel que le langage de la langue courante.

Plusieurs étudiants ont exprimé que les définitions qui ajoutent des exemples, qui ajoutent la négation ou bien présentent la définition de plusieurs façons du point de vue linguistique, étaient plus faciles à comprendre et complètes. Par contre, ils choisissaient pour enseigner des définitions qui n’avaient pas ces caractéristiques, comme par exemple celle de Franco, Olave y Vitabar<sup>1</sup> (2015). La réponse de Bruno (Figure 2), explique la raison d’avoir fait ce choix. Il trouve plus formelle la définition de Franco, Olave y Vitabar (2015) parce que le quantificateur universel est exprimé par les mots « pour tous », tandis que dans celle de Fernandez (2007), le quantificateur universel n’apparaît pas, il est de manière implicite.

	<p>Oui, par exemple, la notion de Franco me semble beaucoup plus formelle que celle de Walter Fernandez parce qu’elle réfère que pour tout a et b qui appartient à un ensemble A, a est en relation avec b alors b est en relation avec A, tandis que dans celui de Walter est précisé seulement que si a est en relation avec b, b est en relation avec a.</p>
--	---

**Figure 2.** – Réponse de Bruno, futur instituteur, qui compare la définition de Fernandez (2007) (définition (1)) et celle de Franco, Olave y Vitabar (2015)

## 2. Définitions choisies pour être enseignées

La plupart des étudiants ont choisi une définition plus formelle du point de vue du langage pour la classe. 52% des étudiants ont choisi une qui été énoncée en langage formel appliqué et 39% d’entre eux, une qui été formulée en langage intermédiaire moyen et langage intermédiaire avancé. On peut distinguer quelques nuances parmi les futurs instituteurs et les futurs professeurs de mathématiques étant donné que 83% des futurs professeurs de mathématiques ont choisi pour travailler en classe la même définition qu’ils avaient choisie comme la plus rigoureuse. Tandis que 60% des futurs instituteurs ont choisi une définition en langage formel appliqué ou formel logique et le 40% restants ont choisi une définition formulée en langage intermédiaire moyen ou naturel mathématique.

Les étudiants qui ont choisi une définition énoncée surtout en langage naturel, pensent que c’est plus facile à comprendre. Ceux qui ont choisi un énoncé principalement en langage

<sup>1</sup> “Consideramos un conjunto A no vacío y una relación R definida en A. R cumple la propiedad simétrica o recíproca  $\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a R b \Rightarrow b R a$ .” (Franco, Olave, Vitabar, 2015, p. 70). Cette définition est formulée en langage intermédiaire avancé.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

mathématique considèrent qu'un langage plus formel est un but pédagogique. Les futurs enseignants considèrent que l'apprentissage des notions part du concret vers l'abstrait. C'est ainsi que pour apprendre il est nécessaire de commencer par un langage naturel mathématique pour atteindre un langage plus formel. La réponse de Maxi (Figure 3) est claire à ce sujet.

De même que Maxi, plusieurs étudiants ont signalé qu'il était nécessaire d'énoncer deux définitions. Les étudiants qui ont choisi une définition en langage plus formel ont dit qu'il serait nécessaire d'expliquer les symboles mathématiques en utilisant le langage courant.

En ce qui concerne les explications, les étudiants sont de l'avis qu'elles doivent être exprimées en langage naturel, pourtant les définitions doivent être énoncées en langage plutôt mathématique.

<p>c) Como resultado final elegiría la de Fernando Val, ya que es a la que se aspira como resultado final de la construcción del concepto.</p> <p>Por otro lado, para el proceso de construcción del mismo, elegiría en este caso la de Wikipedia, por el hecho de que está adaptada a un lenguaje más coloquial que facilita la comprensión del estudiante.</p>	<p>Comme résultat final je choisirais celle de Fernandez Val, car c'est à ce qu'on aspire comme résultat final de la construction d'une notion. Par contre, pour le processus de construction, je choisirais dans ce cas celle de Wikipédia, du fait qu'il est adapté à un langage naturel que facilite la compréhension pour les étudiants.</p>
--	--

Figure 3. – Réponse de Maxi, futur enseignant dans le primaire

Les futurs enseignants reconnaissent qu'il y a deux types de langages qui coexistent dans la classe de maths et qu'il est nécessaire d'apprendre un langage plus formel, mais ils ne sont pas conscients des langages intermédiaires. Voilà pourquoi je leur ai proposés une deuxième activité.

### DEUXIEME ACTIVITE ET ANALYSE DES TRAVAUX DES ETUDIANTS

Le but de cette activité est de rendre possible aux futurs enseignants une première expérience d'étude systématique du langage en employant des langages intermédiaires.

Les étudiants doivent compléter le tableau 1 d'après les indications suivantes : a) Observe les définitions de la propriété de symétrie de la relation  $R$  sur un ensemble  $A$  dont tu as fait la liste sur l'activité précédente et place-les dans la deuxième colonne selon le langage employé, c'est-à-dire que tu dois considérer les catégories énumérées dans la première colonne. Tu peux considérer plus d'une définition dans la même catégorie. b) Dans la troisième colonne place un analyse de l'usage des variables ( $a, b, x, y, \dots$ ), des quantificateurs ( $\forall, \exists$ ), des signes mathématiques, ( $\in, R, \dots$ ), des connecteurs logiques ( $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \dots$ ), utilisés dans les différentes définitions de la propriété symétrique. C'est à dire que tu devras répondre successivement aux questions telles que les questions ici mentionnées : les quantificateurs sont implicites ou explicites ? Quels sont ceux qui sont exprimés de manière implicite ? Les variables utilisées représentent la généralité ? Est-ce qu'il y a quelque implication explicite ? Est-ce qu'il apparaît quelque implication implicite ? Laquelle ? Si les signes n'apparaissent pas, quels sont les mots du langage courant qui ont été employés à leur place ? Les quantificateurs et les signes mathématiques apparaissent dans le même ordre dans les définitions ? Des signes et des notations sont utilisés dans les définitions pouvant être considérées comme équivalentes quant au langage ? Si oui, lesquels ?

Langages intermédiaires	Définition de la propriété symétrique	Analyse des variables et des formulations logiques
-------------------------	---------------------------------------	--

Définition exprimée en langage naturel. Il n'y a pas de présence des signes et/ou des symboles mathématiques		
Définition exprimée dans les termes d'un langage naturel, pourtant des variables et des signes mathématiques apparaissent de forme explicite ( $\in$ , $\mathbb{R}$ , $\emptyset$ , $\cup$ , etc.). Les connecteurs et les quantificateurs sont implicites		
Définition exprimée en termes qui s'éloignent d'un langage courant, les variables sont en forme explicite et quelques connecteurs ou quantificateurs apparaissent de forme explicite mais exprimés en langage naturel, et d'autres qui sont implicites		
Définition exprimée en termes plus formels, les variables, les symboles, les quantificateurs et les connecteurs apparaissent en forme explicite exprimés en langage rigoureux ou naturel		
Définition exprimée en termes formels en utilisant des variables, des quantificateurs et des connecteurs de forme explicite et avec leurs respectifs signes mathématique		
Définition utilisant des fonctions propositionnelles en langage formel		

*Tableau 1. – Tableau à compléter par les étudiants*

### *1. Diversité linguistique et difficulté de classification*

Les étudiants devaient classer six définitions. Aucun d'entre eux n'a classé les six définitions correctes, 4% ont bien classé cinq, 12% ont bien classé quatre, et le reste a bien classé trois ou moins. Ces résultats peuvent s'expliquer du fait de la nature de l'activité proposée (elle était nouvelle pour eux et par la diversité linguistique des définitions). Sur les douze définitions retenues au total, il n'y a pas deux définitions énoncées de la même manière du point de vue linguistique. En outre, dans diverses définitions, il est possible de constater que la même proposition est énoncée de deux façons différentes. Cela a causé des difficultés au moment de la classification, car quelques étudiants ont classifié chaque proposition dans une catégorie différente, mais d'autres non. Aussi, les étudiants ont l'idée qu'un langage rigoureux est un langage sans vocabulaire de la langue courante. Cette idée les a fait mal classer les définitions.

### *2. Étude systématique du langage*

Même s'ils ont fait des erreurs dans la classification, il est possible d'affirmer que les futurs enseignants savent quelles sont les éléments qui caractérisent les langages les plus rigoureux, et qu'ils reconnaissent les variables, les symboles et les éléments logiques comme les quantificateurs et les connecteurs.

Sur le travail d'Estefanie (Figure 4) il est possible d'observer qu'elle a indiqué pour chaque catégorie le caractère implicite ou explicite des variables, du quantificateur universel et de l'implication. Estefanie a reconnu que les définitions étaient énoncées de deux manières distinctes et elle a classé chacune d'entre elles dans une catégorie différente. Cependant, elle a commis trois erreurs dans la classification parce qu'elle n'a pas considéré que la double implication se trouve implicite.

Les étudiants savent que toutes les définitions se caractérisent par la possession d'une double implication, néanmoins, dans plusieurs définitions ce connecteur n'apparaît pas, et ils ne se rendent pas compte de cela. Les auteurs des manuels supposent que les personnes qui

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

lisent une définition connaissent qu'une définition est une formulation logique avec une double implication. Cela peut être attribué aux caractéristiques des pratiques langagières des mathématiciens.

L'analyse des travaux des étudiants a permis d'observer que les futurs professeurs de mathématiques ont fait une meilleure analyse du langage que les futurs instituteurs. La formation des étudiants du professorat de maths est plus formelle que celle des futurs instituteurs, et les pratiques langagières de leur cours sont plus rigoureuses. On peut supposer que l'analyse qu'ils ont faite en est la conséquence.

Definición expresada en términos que se alejan del lenguaje coloquial, las variables están de forma explícita y se reconocen algunos conectores o cuantificadores de forma explícita pero expresados en lenguaje coloquial, y otros están implícitos.	1) ✓	1- Los cuantificadores están implícitos. 2- 4. 3- si las variables representan generalidad 4- si 5- no
Definición en términos más formales reconociendo variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita utilizando lenguaje formal o coloquial.	2) 3) 4) 5) 6) ✓ X ✓ X X	Definición 3) 1) Están explícitos 2) ninguno 3) si 4) si 5) no. Definición 4) 1) Están explícitos 2) si 3) si 4) si 5) no
Definición expresada en términos formales utilizando variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita y con sus respectivos signos matemáticos	2)	1) Están explícitos. 2) ninguno 3) si 4) si 5) no

Figure 4. – Extrait du travail d'Estefanie, futur professeure de Mathématique

### CONCLUSIONS

Les futurs enseignants reconnaissent qu'en classe de mathématiques coexistent deux types de langages : d'une part, le mathématique symbolique qui est associé aux définitions mathématiques, et d'autre part le naturel, qui est associé aux explications. Cependant, une analyse plus approfondie du langage, pour ce qui est de la classification des définitions en utilisant les catégories du langage mathématique intermédiaire et en considérant les variables, les symboles mathématiques et les éléments logiques, leur a permis de reconnaître la diversité linguistique et d'apprécier le langage comme un objet d'étude en lui même.

Les discours mathématiques associés aux cours des futurs instituteurs et à celui des futurs professeurs de mathématique ont influencé l'analyse que chacun d'entre eux a faite. Ces derniers ont effectué une analyse plus rigoureuse et ont, en outre, privilégié des définitions plus formelles du point de vue du langage, pour travailler en classe. Cependant, il existe une perception répandue entre les futurs enseignants selon laquelle les définitions doivent être formulées en langage plutôt mathématique.

Le fait qu'une définition soit formulée en langage mathématique ne la rend pas plus compréhensible. Divers éléments influencent la compréhension et la formations de concepts mathématiques, tels que les conceptions de formateurs, le discours et les pratiques linguistiques de chaque cours de mathématiques. Les futurs enseignants ne sont pas toujours conscients de cela, il est important de proposer des activités qui permettent aux futurs enseignants de prendre conscience des pratiques linguistiques qui ont lieu dans une classe de mathématiques, en concevant le langage mathématique comme un objet d'étude. C'est ce qui peut permettre aux futurs enseignants d'améliorer leurs pratiques, d'anticiper les erreurs et d'éviter des difficultés chez leurs élèves.

Enfin, les catégories du langage mathématique intermédiaire sont l’outil qui a fait partie des activités proposées et qui a permis aux étudiants de réaliser une analyse tantôt du langage, tantôt des pratiques linguistiques associées aux cours de mathématiques. En outre, le fait de savoir qu’il existe différentes catégories de langage mathématique intermédiaire et de les connaître, devrait permettre aux futurs enseignants de choisir celle ou celles qui seront les plus appropriées pour planifier leurs cours et pour faire leurs classes.

#### RÉFÉRENCES

- BARTON, B. (2008). *The Language of Mathematics: Telling Mathematical Tales*. Auckland: Springer.
- FERNÁNDEZ, W. (2007). *Fundamentos de análisis matemático*. Montevideo: Kapelusz.
- FERRARI, G. Y TENEMBAUN, S. (2010). *Resumen de relaciones y funciones*. Recuperado de Instituto Normal de Enseñanza Técnica. Review : [http://www.x.edu.uy/inet/RELACIONES\\_FUNCIONES.pdf](http://www.x.edu.uy/inet/RELACIONES_FUNCIONES.pdf)
- FRANCO, G., OLAVE, M. Y VITABAR, F. (2015). *Texto para la asignatura Fundamentos de la Matemática de la formación de profesores*. Parte 1. Montevideo : Palíndromo.
- GÓMEZ, C. (1989). *La adquisición del lenguaje matemático : un difícil equilibrio entre el rigor y el significado*. Comunicación, Lenguaje y Educación. 3(4), 5-15.
- MOSCHKOVICH, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 24-30.
- RADILLO, M., NESTEROVA, E., ULLOA, R. Y PANTOJA, R. (2005). *Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa*. Trabajo presentado en el V Congreso Internacional Virtual de Educación. Guadalajara, México. RELACION SIMÉTRICA. (21 mars 2021). Dans Wikipedia. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Relaci%C3%B3n\\_sim%C3%A9trica&direction=prev&oldid=134418845](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Relaci%C3%B3n_sim%C3%A9trica&direction=prev&oldid=134418845)
- ROMO-VÁZQUEZ, A., Y HACHE, C. (2019). Prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas. Una experiencia de profesionalización online para profesores de matemáticas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 8(2), 112–138.
- ROSHANI, C. (2019). *Análisis de prácticas lingüísticas asociadas a la actividad matemática en la formación de futuros profesores*. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN. <https://repositorio.cfe.edu.uy/bitstream/handle/123456789/691/Roshani%2CC.Analisis.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- SFARD, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157-189.
- SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13–57.
- SKEMP, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata S.L.
- VILLALPANDO, J. (2018, abril 19). *Apuntes para la materia de matemáticas discretas*. Recuperado de Universidad de Guadalajara, Departamento de Matemática. Review: <http://mate.cucei.udg.mx/matdis/>