CRITERES POUR CARACTERISER LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EFFECTIVEMENT PRODUIT

Assia Nechache*

RÉSUMÉ

Dans le cadre de cette contribution, nous allons présenter les critères qui ont été utilisés pour caractériser des formes de travail mathématique effectivement produites. Ces critères ont été définis dans le cadre de la théorie des Espaces de Travail Mathématique. Ils ont été utilisés dans une étude portant sur le travail géométrique effectivement produit par les étudiants inscrits en première année de master enseignement. L'analyse du travail à l'aide de ces critères a permis d'identifier des formes de travail géométrique pratiquées par les étudiants. L'usage de ces critères dans cette étude a également permis d'identifier des formes erronées mais très fréquentes de travail géométrique réalisé par des étudiants.

Mots-clefs : Travail mathématique, caractérisation, Espace de Travail Mathématique

ABSTRACT

In this contribution, we will present the criteria that have been used to characterize effectively produced forms of mathematical work. These criteria have been defined in the framework of the theory of Mathematical Work Spaces. They have been used in a study of the geometric work effectively produced by students enrolled in the first year of a master's degree in teaching. The analysis of the work using these criteria allowed the identification of forms of geometric work practiced by the students. The use of these criteria in this study also allowed us to identify incorrect but very frequent forms of geometric work performed by students.

Keywords: Mathematical work, characterization, Mathematical Workspace

INTRODUCTION

Nos études sur la résolution de problèmes géométriques par des étudiants-enseignants du primaire français dans l'environnement papier crayon nous ont permis d'identifier des formes erronées mais très fréquentes de travail géométrique réalisé par ces étudiants (Kuzniak & Nechache, 2020). Ces formes, sont principalement caractérisées par le fait que ces étudiants semblent respecter le travail géométrique standard qu'ils ont rencontré au cours de leur scolarité mais, en fait, le résultat qu'ils ont produit n'est pas correct. Leur travail géométrique semble répondre à certaines attentes institutionnelles sans être mathématiquement correct par manque de moyens de contrôle. La théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM) a été utilisée pour analyser et caractériser ces formes de travail. Pour ce faire, trois critères ont été construits dans le cadre de cette théorie qui s'est révélée (ou qui se sont révélés) utile(s) pour évaluer le travail géométrique.

Dans le cadre de cette contribution, nous allons exposer ces critères ainsi que la méthodologie utilisée pour évaluer le travail mathématique effectivement produit. A partir des exemples de productions d'étudiants, nous allons présenter la manière dont les trois critères ont été utilisés pour caractériser des formes de travail mathématique pratiquées.

* LDAR, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France

TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS LA THEORIE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

1. Travail mathématique

La théorie des Espaces de Travail Mathématique se concentre principalement sur l'étude du travail mathématique dans le contexte scolaire dans lequel les élèves et les enseignants sont effectivement engagés. Le travail mathématique est considéré comme un travail intellectuel qui implique une activité cognitive significative dont l'orientation et le but sont définis et soutenus par les mathématiques. Dans ce cadre, les mathématiques sont envisagées comme un travail humain spécifique et, par conséquent, le travail mathématique est considéré selon deux aspects : cognitif et épistémologique.

Dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), le travail mathématique est conçu comme un ensemble d’actions organisées avec un but à atteindre, ce qui est permet de mettre l’accent sur la dualité entre les processus du travail et les résultats du travail (Kuzniak, & Nechache, 2021). Les résultats produits par le travail mathématique sont reliés aux contenus et les processus sont reliés aux structures et formes engendrées par ce travail (ibid., 2021).

2. La théorie des Espaces de Travail Mathématique

Un Espace de Travail Mathématique désigne une structure abstraite organisée de manière à favoriser le fonctionnement du travail mathématique dans un domaine spécifique (géométrie, probabilités, etc.) dans un contexte scolaire. Cet espace est basé sur l’articulation de deux plans fondamentaux :

Un **plan épistémologique** qui permet de structurer le contenu mathématique. Il est composé de trois pôles en interactions et organisé selon des critères mathématiques : un ensemble d'objets concrets et tangibles, appelé representamen ; un ensemble d'artefacts - tels que des instruments de dessin ou des logiciels - ; un référentiel théorique basé sur des définitions, des propriétés et des théorèmes. Ce plan a pour fonction de décrire le travail mathématique dans sa dimension épistémologique.

Un **plan cognitif** qui permet de rendre compte du travail mené par l’utilisateur de cet espace de travail pendant l’activité de résolution d’une tâche. Il est composé de trois processus cognitifs qui sont en étroite relation avec les trois pôles du plan épistémologique. Ces processus sont : la visualisation qui concerne l’interprétation des signes ; la construction qui renvoie au mode de raisonnement et dépend des artefacts utilisés et des techniques associées ; et enfin le processus de preuve, qui passe par des processus de validation et repose sur les éléments du référentiel théorique.

Le passage d’un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles des deux plans :

- Une genèse sémiotique (Sem) qui met en relation les signes et les représentations avec les processus de visualisation. Elle est fondée sur les registres de représentation sémiotiques qui donne aux objets tangibles de l’ETM leur statut d’objets mathématiques opératoires ;
- Une genèse instrumentale (Ins) qui établit le lien entre les artefacts et les processus de construction. Elle a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- Une genèse discursive de la preuve (Dis) qui met en lien le référentiel théorique avec les processus de preuve. Elle permet de donner un sens aux propriétés (référentiel

théorique) pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique et les validations discursives.

L'élaboration du travail mathématique est perçue comme la mise en réseau de ces trois genèses. L'articulation entre les différentes composantes et genèses de l'ETM favorisent ainsi la circulation du travail mathématique entre le plan épistémologique et plan cognitif de l'ETM (Figure 1).

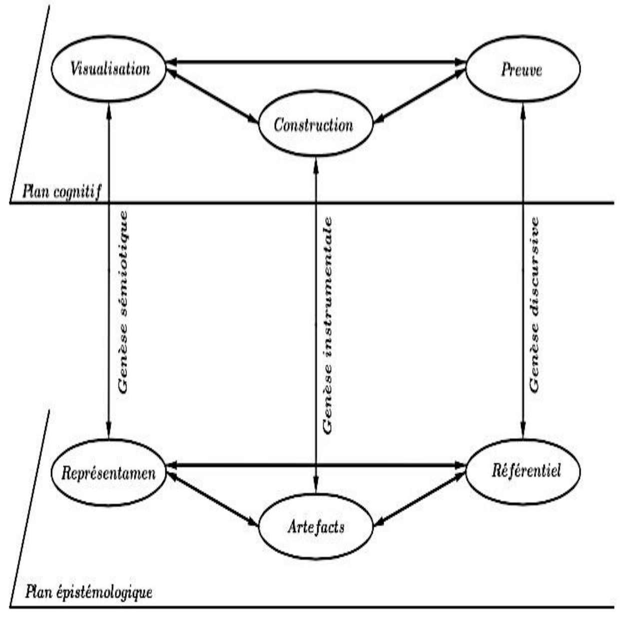


Figure 1. *– Le diagramme général des ETM*

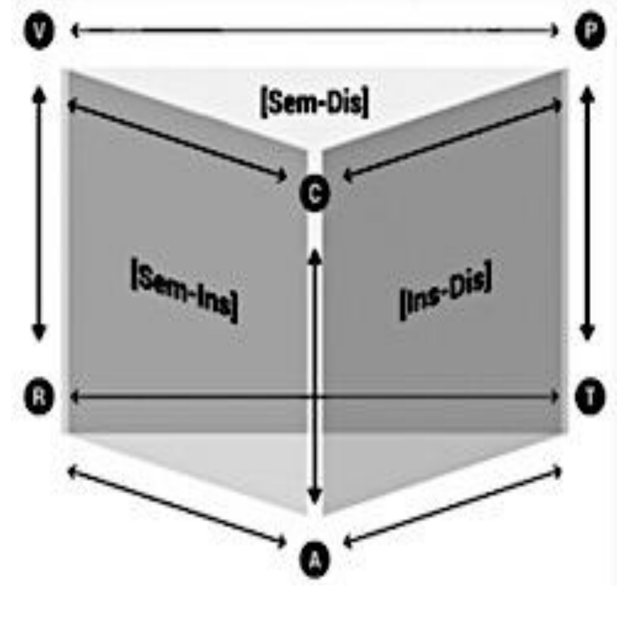


Figure 2. *– Les plans verticaux des ETM*

La circulation du travail mathématique est aussi visualisée à travers les interactions entre les différentes genèses. Ces interactions sont caractérisées par trois plans verticaux : sémiotique-instrumental (noté [Sem-Ins]), instrumental-discursif (noté [Ins-Dis]), et sémiotique-discursif (noté [Sem-Dis]) (Coutat & Richard, 2011).

La théorie des ETM fournit des outils méthodologiques permettant d'étudier le travail mathématique. Cette étude passe par la description, la caractérisation et la formation et/ou transformation du travail mathématique dans un contexte éducatif. La **description** du travail mathématique vise à rendre compte du travail effectué dans un contexte éducatif spécifique et poursuit un double objectif. Le premier est d'identifier le rôle de chacune des trois genèses de l'ETM dans le travail mathématique, et la circulation de ce travail au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques. Le second objectif porte sur l'identification des éventuels blocages et malentendus qui peuvent surgir au cours de la résolution des tâches. La **caractérisation** du travail mathématique a pour but d'identifier certains invariants à partir de la description du travail. La caractérisation permet alors de déduire des formes de travail mathématique lorsque cela est pertinent. La (**trans)formation** du travail mathématique vise à construire une nouvelle structure pour le plan épistémologique du travail ou à fournir une nouvelle structure pour le plan cognitif.

La description et la caractérisation du travail mathématique sont donc liées à son identification et, au-delà, à sa compréhension. La (trans) formation se réfère à la construction des connaissances et des compétences. Dans le cadre de cet article, nous allons nous centrer sur la description et la caractérisation du travail mathématique.

1. Critères de caractérisation

La caractérisation du travail mathématique est basée sur l'analyse des processus et des résultats qui émergent lors de la résolution des tâches et des problèmes. Pour ce faire, trois critères ont été définit dans le cadre de la théorie des ETM (Kuzniak & Nechache, 2021) qui sont : **conforme**, **correct** et **complet**. Ces critères prennent en compte le(s) paradigme(s) (Houdement & Kuzniak, 2006) qui guident le travail mathématique et les composantes de l'ETM mobilisées dans l'élaboration de ce travail. Ils servent aussi à évaluer respectivement le processus, le résultat et la circulation du travail mathématique dans l'ETM. Le travail mathématique est dit *conforme*, lorsque les processus du travail mathématique sont valides, i.e ils sont conformes aux règles qui chapotent le ou les paradigmes qui guide ce travail. Le travail est dit *correct*, lorsque les résultats produits sont mathématiquement exacts selon le point de vue mathématique retenu, i.e ils sont en accords avec le référentiel choisi dans le plan épistémologique. Enfin, le travail mathématique est qualifié de *complet*, lorsque sa circulation est assurée entre toutes composantes de l'ETM, autrement dit lorsque toutes les genèses de l'ETM sont mobilisées au cours de la résolution de la tâche mathématique. Dans le cas où seulement une genèse ou deux genèses sont mobilisés au cours de la réalisation de la tâche, on dit que le travail mathématique est confiné sur une genèse ou un plan défini par ces deux genèses.

L'usage de ces trois critères du travail effectivement produit repose sur une méthodologie d'analyse qui est présentée dans la section suivante.

2. Méthodologie pour décrie le travail mathématique

La description du travail mathématique porte sur l'analyse des activités cognitives de sujets qui réalisent effectivement une tâche (ou des tâches) mathématique (s). Selon Leplat (2004), les activités cognitives d'un sujet au travail ne sont pas directement observables. Mais elles sont déduites des actions visibles d'un sujet lorsqu'il est confronté à des tâches mathématiques. Or, dans la théorie des ETM, la description du travail d'un sujet passe par l'identification du contenu mathématique mis en jeu dans les tâches, mais aussi les processus cognitifs mobilisés. L'accès aux processus cognitifs du sujet est basé sur les actions mathématiques lorsque le sujet réalise une tâche mathématique (Nechache & Gomez Chacon, 2022). Ces actions sont les traces réelles et observables de l'activité du sujet. Dans le cadre de la théorie des ETM, Kuzniak et Nechache (2021) ont conçu une méthode d'analyse du travail inspirée de l'analyse cognitive des tâches (Darses, 2001). Telle qu'elle est conçue, la méthode d'analyse est basée sur un découpage du travail mathématique de l'individu en épisodes. Chacun de ces épisodes correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'individu pour réaliser la tâche mathématique qui lui a été prescrite. Chaque épisode comprend une séquence d'actions mathématiques utilisées pour résoudre la tâche. Les actions mathématiques sont, par la suite, décrites en termes des composantes et de processus cognitifs et épistémologiques des plans de l'ETM.

Cette méthode est constituée de trois étapes. La première étape consiste à effectuer une analyse descendante à partir des productions (orales ou écrites) du sujet. Elle vise à repérer les séquences d'actions et les épisodes planifiés par le sujet pour accomplir la tâche prescrite. Ces actions sont ensuite interprétées selon les composantes épistémologiques et les processus cognitifs de l'ETM.

La deuxième étape, est une analyse ascendante qui vise à produire un aperçu synthétique des épisodes planifiés par le sujet, et à déduire l'organisation logique de ses actions et son parcours cognitif.

La dernière étape, consiste, à partir des observations faites lors des deux premières analyses, à appliquer les trois critères pour évaluer le travail afin de mettre en évidence ses caractéristiques. Il s'agit ainsi, d'estimer si les processus de travail sont conformes à tout ou partie de l'un des paradigmes, si le travail est complet ou s'il est confiné à une genèse ou un plan particulier. Enfin, si les résultats produits par le sujet sont mathématiquement corrects ou non.

UN EXEMPLE D'UTILISATION DES CRITERES DE CARACTERISATION

Dans cette section, nous allons monter, dans le cadre d'une étude menée dans le domaine de la géométrie, la manière dont les critères, ainsi que la méthodologie d'analyse du travail, ont été utilisés pour caractériser le travail mathématique.

1. Contexte de l'étude

Les étudiants participant à l'étude (soit 85) sont inscrits en première année de master MEEF1[1] et préparent en même temps un concours qui leur permettra, après l'obtention de leur diplôme, d'obtenir un poste de professeur des écoles. Les étudiants, ont pour la plupart, obtenu un diplôme d'études littéraires et n'ont suivi aucun cours de mathématiques après avoir terminé la première année de lycée (16 ans). De plus, ils rencontrent des difficultés en mathématiques, notamment en géométrie. Ils connaissent généralement les propriétés et les théorèmes géométriques, mais ils ne savent pas bien les utiliser car ils ne les maîtrisent pas suffisamment. Les étudiants de ce niveau de classe sont censés développer un travail géométrique leur permettant d'enseigner à leurs futurs élèves du primaire un contenu géométrique proche du paradigme-GI. Ils doivent aussi être capables de résoudre les problèmes liés au paradigme-GII (Houdement & Kuzniak, 1999, Kuzniak, 2018) pour réussir le concours. Cette étude s'est déroulée à la fin du deuxième semestre de la première année du master. Les cours ont été dispensés à quatre groupes d'étudiants par deux formateurs expérimentés (dont l'un est l'auteur de cet article), chacun ayant enseigné à deux groupes. Les étudiants ont réalisé la tâche individuellement et avaient pour consigne de ne pas discuter de leur travail entre eux et avec l'enseignant. Leurs productions écrites ont été recueillies et les discussions (entre enseignants et les étudiants) produites lors des mises en commun ont été enregistrées et filmées. Toutes ces discussions ont été transcrites dans leur intégralité.

2. Tâche géométrique prescrite aux étudiants

La tâche proposée a été choisie car elle est représentative du type de tâche que les étudiants doivent savoir exécuter en première année du master. Elle est énoncée de la manière suivante :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m et 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
> *Une information complémentaire donnée ultérieurement*

[1] Master destiné aux étudiants souhaitant devenir professeur des écoles.

Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

Pour réaliser cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances telles que l'échelle et les quadrilatères – *les conditions de construction, aire, propriétés* –. La résolution de cette tâche peut s'effectuée selon différentes procédures prenant en compte : les connaissances des étudiants, les attentes institutionnelles pour ce niveau classe, mais aussi l'usage possible de théorème en acte faux bien connu (Vergnaud, 2009) sur la relation entre le périmètre et l'aire formulé de telle sorte : les figures ayant le même périmètre ont la même aire. Quelques procédures possibles (cf. Kuzniak & Nechache (2021) pour connaître l'ensemble des procédures) peuvent être mises en œuvre. Une première (P1) consiste, après lecture de l'énoncé, à identifier immédiatement le manque de données pour fixer la forme du quadrilatère. Une deuxième procédure (P2), prend appui sur le théorème en acte faux cité précédemment, consiste à construire une figure à l'échelle avec les outils de construction géométrique. Puis prise de mesures de longueur directement sur la figure. Enfin, appliquer des formules de calcul d'aire de quadrilatères usuels. Dans ce cas, le travail géométrique ainsi produit est conforme au paradigme de la Géométrie-I. Une troisième procédure (P3), mobilise aussi le théorème en acte faux (cité précédemment). Elle consiste à construire - à main levée ou à l'aide des outils de construction géométrique - un quadrilatère particulier (un carré ou un rectangle) ayant le même périmètre que le quadrilatère évoqué dans l'énoncé de la tâche prescrite. Appliquer, par la suite, la formule de calcul de l'aire de ce quadrilatère. Cette procédure semble s'inscrire dans le paradigme de la Géométrie-II mais s'appuie sur un faux théorème.

3. La mise en œuvre de la tâche

La tâche a été mise en œuvre suivant trois phases. Dans le cadre de cette contribution, nous allons traiter uniquement les exemples de productions produites à l'issue de la première phase. La première phase s'est déroulée en trois temps. Tout d'abord, nous avons proposé aux étudiants de résoudre la tâche individuellement sans intervention de l'enseignant. L'énoncé de la tâche leur a été communiqué sans l'information complémentaire. En effet, l'objectif est de faire constater le manque de données pour fixer la forme du quadrilatère pour résoudre complètement la tâche. Ils ont eu 10 minutes pour réaliser la tâche et répondre par écrit sur une feuille sur laquelle l'énoncé de la tâche a été rappelé. Ensuite, ils ont répondu individuellement par écrit aux deux questions suivantes :

1. Si vous n'avez pas eu le temps de terminer cette partie. Pouvez-vous décrire rapidement ce que vous auriez continué à faire.
2. Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous avez rencontrées en résolvant cet exercice ?

Enfin, nous avons ramassé l'ensemble des productions des étudiants et nous avons procédé à une mise en commun.

4. Étude du travail géométrique de deux étudiants F et M

Cas de l'étudiant F

L'analyse descendante montre que l'étudiant a planifié le travail géométrique en trois épisodes. Dans le premier épisode, l'étudiant F cherche à construire une figure. Pour ce faire, l'étudiant F choisi une échelle (action 1) et utilise une règle graduée et un compas (artefacts matériels) pour construire un quadrilatère convexe (representamen). Il procède à des ajustements à l'aide des deux artefacts de manière à obtenir la forme d'un trapèze (action 2).

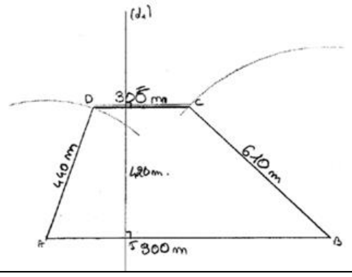
Action 1. *Choix d'une échelle*	*Action 2*. *Construction d'un quadrilatère convexe*
ech : 1cm = ~~1km~~ 100m.	

Tableau 1. *— Analyse descendante-Épisode 1 du travail de l'étudiant F*

Dans le deuxième épisode, (Tableau 2) l'étudiant F cherche à expliquer et à justifier la nature du quadrilatère. L'étudiant F se réfère à la définition du trapèze (référentiel théorique) pour expliquer la technique de construction employée afin d'obtenir le trapèze (action 3). En se référant à une propriété géométrique (référentiel théorique), il justifie que le quadrilatère ainsi construit est bien un trapèze (action 4).

Action 3. *Explication de la construction du quadrilatère*	*Action 4*. *Justification de la nature du quadrilatère*
Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base.	Cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elle donc cela fait un trapèze.

Tableau 2. *— Analyse descendante-Épisode 2 du travail de l'étudiant F*

Dans le dernier épisode (Tableau 3), il s'agit de calculer l'aire du quadrilatère. A l'aide d'une règle graduée (artefact), il mesure directement sur le quadrilatère (representamen), la longueur d'une des hauteurs du trapèze (action 5). Il applique par la suite la formule de calcul d'aire d'un trapèze (artefact) pour obtenir ainsi l'aire du quadrilatère (action 6).

Action 5. *Mesure de la longueur de la hauteur du quadrilatère*	*Action 6*. *Calcul de l'aire du quadrilatère*
Par mesure [I J] = 420m. $I \in [DC]$ et $J \in [AB]$.	$\mathcal{A} = \frac{300+900}{2} \times 420$ $\mathcal{A} = \frac{1200}{2} \times 420$ $\mathcal{A} = 600 \times 420$.

Tableau 3. *— Analyse descendante-Épisode 3 du travail de l'étudiant F*

L'analyse ascendante (Tableau 4.) de l'épisode 1 montre que les genèses instrumentale et sémiotique sont activées pour construire un quadrilatère particulier en choisissant une échelle (élément du référentiel théorique) et des artefacts matériels (compas, règle graduée). Dans l'épisode 2, la visualisation du quadrilatère (representamen) associée à l'usage des artefacts matériels (élément de la genèse instrumentale) permet de produire un discours pour expliquer la technique de construction. La genèse instrumentale est associée par la suite à la genèse discursive de preuve pour produire une justification de la nature du quadrilatère. Enfin, dans le dernier épisode, la formule de calcul d'aire d'un trapèze (artefact symbolique) est utilisée pour produire le résultat attendu (ici l'aire du terrain).

En conclusion, la procédure mise en œuvre par l'étudiant F est proche de la procédure P2, et mobilise les trois genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Par conséquent, ce travail est qualifié de complet. De plus que le travail géométrique de l'étudiant F s'appuie sur un processus de construction qui favorise l'utilisation d'outils de construction géométrique et de formules avec mesure prélevées sur la figure. La figure construite est utilisée par l'étudiant F comme support privilégié pour raisonner et prouver. De ce fait, le travail est conforme aux exigences du paradigme Géométrie-I. Or, le processus du travail prend appui sur une figure particulière et l'usage d'un théorème en acte faux (deux figures ayant le même périmètre ont la même aire). De ce fait, le résultat du processus de ce travail est non correct du point de vue des mathématiques.

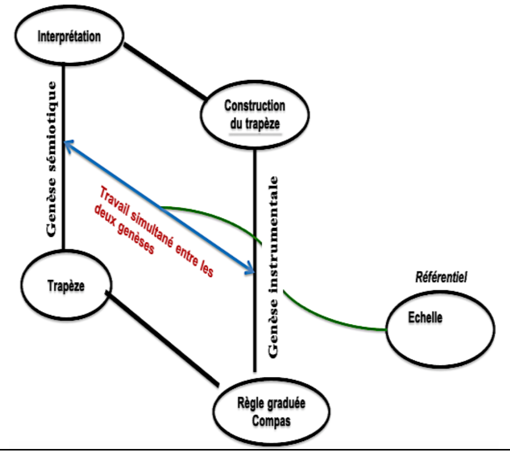
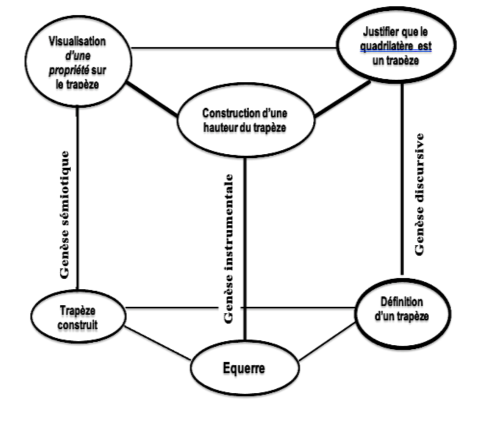
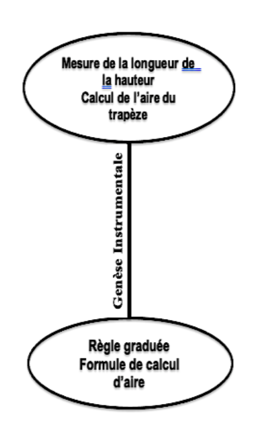
		
Épisode 1. **Référentiel théorique → Plan [Sem-Ins]**	**Épisode 2.** **Plan [Sem-Ins]→ Plan [Ins-Dis]**	**Épisode 3.** **[Ins]**

Tableau 4. *— L'analyse ascendante des épisodes du travail de l'étudiant F*

Cas de l'étudiant M

L'analyse descendante montre que l'étudiant M a planifié le travail en un seul épisode. Il a commencé par tracer à main levée un quadrilatère convexe (representamen) en reportant les dimensions de chacun des côtés sur le dessin (action 1). Il propose une transformation de la forme de ce quadrilatère de telle sorte que l'aire de la figure soit plus ou moins invariante. Pour cela, il calcul - à partir des dimensions initiales (900 m, 440 m, 610 m, 300 m) - la moyenne arithmétique (artefact symbolique) des longueurs des côtés opposés afin d'obtenir des longueurs de côtés permettant d'obtenir un rectangle (action 2).

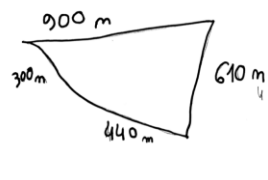
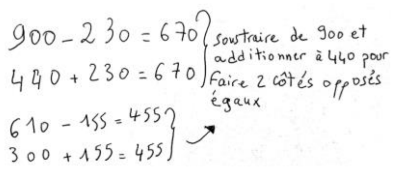
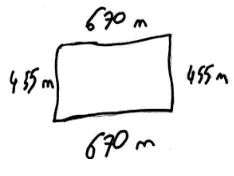
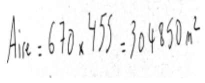
Action 1. Dessin à main levée d'un quadrilatère	**Action 2**. Calcul de la moyenne arithmétique des côtés opposés du quadrilatère	**Action 3**. Dessin à main levée d'un nouveau quadrilatère	**Action 4**. Calcul de l'aire du quadrilatère
			

Tableau 5. *— L'analyse descendante de l'unique épisode du travail de l'étudiant M*

Il trace à main levée un rectangle (representamen) en reportant la dimension de chacun des côtés (action 3). Pour finir, il applique la formule de calcul d'aire d'un rectangle (artefact symbolique) pour en déduire la mesure de l'aire du quadrilatère (action 4).

L'analyse ascendante montre que le travail géométrique produit par l'étudiant M est orienté vers l'utilisation d'une formule de calcul d'aire (artefact symbolique) bien connue. Cela a conduit l'étudiant M à transformer le representamen initial (quadrilatère convexe quelconque de l'énoncé) en un autre representamen (un rectangle). Cette transformation de representamen a mobilisé la genèse sémiotique (Sem) associée à la genèse instrumentale (Ins). Le travail se poursuit ensuite dans la genèse instrumentale pour calculer l'aire du quadrilatère, le tout réalisé sans aucune justification théorique. Par conséquent, le travail géométrique de l'étudiant a été produit dans le plan [Sem - Ins].

En conclusion, l'étudiant M produit un travail géométrique en recourant à des formules applicables après une reconfiguration sémiotique de la figure. On peut aussi supposer que l'étudiant M a eu recours à un théorème en acte faux (deux figures ayant le même périmètre ont la même aire). Pour justifier sa démarche, l'étudiant M explique qu'il a construit cette figure pour surmonter son blocage (dû au manque d'une donnée pour fixer la forme du terrain) et réaliser la tâche. Par conséquent, le travail géométrique produit tend à être plus adéquat aux attentes « scolaires » - produire un résultat, attendre une validation externe par l'enseignant -. Mais, il est aussi possible de considérer que ce travail est confiné dans un plan [Sem - Ins] où la genèse instrumentale est totalement orientée vers un calcul sans aucune mesure ni utilisation de la construction à l'aide d'outils de dessin. Par conséquent, ce travail peut être **conforme** au paradigme Géométrie-II sans recours à un discours de preuve. De plus, ce travail géométrique prend appui sur une figure particulière et des données erronées, il est alors **non correct** du point de vue des mathématiques.

En général, les étudiants ayant participé à cette étude, ont produit un travail géométrique en utilisant diverses méthodes. Toutefois, ils ont introduit des règles et des pratiques qui ne font certainement pas partie d'un des paradigmes géométriques. Ces règles et pratiques renvoient davantage à des attentes résultant de la pratique « scolaire » de la géométrie de ces étudiants. La majorité des étudiants ont volontairement attribué des propriétés spécifiques au quadrilatère (angle droit, côtés parallèles, etc.) pour pouvoir résoudre la tâche. Par conséquent, leur travail ne peut être considéré comme valide. Cela suggère qu'il existe peut-être une sorte de paradigme géométrique « scolaire » qui interfère avec les paradigmes géométriques.

CONCLUSION

Dans le cadre de cette contribution, nous avons présenté les critères (conforme, correct, complet) pour évaluer le processus, le résultat et la circulation du travail mathématique dans la théorie des ETM. L'usage de ces critères pour évaluer le travail géométrique a permis d'identifier et de caractériser des formes de travail pratiquées par des étudiants (Kuzniak & Nechache, 2021). Ces dernières dépendent de la place des representamen, des artefacts, et le rôle des propriétés du référentiel théorique dans la réalisation de la tâche. L'évaluation du travail géométrique a également permis de mettre en évidence le manque de contrôle des étudiants sur leur travail qui les conduit à produit des résultats mathématiquement incorrects. Ils introduisent de faux théorèmes en acte (équivalence du périmètre et de l'aire dans les deux exemples dans la section précédente). Ils font un usage systématique de formules (parfois inventées) et enfin ils considèrent que les figures impliquées dans un problème de géométrie sont nécessairement des figures particulières.

De plus, l'évaluation du travail à l'aide de ces critères repose sur une méthodologie d'analyse divisée en trois étapes. L'étape d'analyse descendante vise à mettre en relief la séquence d'épisodes et des actions mathématiques mises en œuvre par les sujets. Alors que l'analyse ascendante vise à donner, à l'aide du diagramme des ETM, un aperçu synthétique du travail mathématique au cours de la réalisation de la tâche. Tandis que la dernière étape, part des résultats des deux analyses précédentes pour caractériser le travail selon les trois critères d'évaluation du travail. Cette méthodologie est particulièrement basée sur l'identification et l'étude des actions mathématiques des sujets.

En perspective, il s'agit pour nous d'affiner la question des actions mathématiques du sujet afin de mieux les saisir et les comprendre, notamment en prenant en compte la grande diversité des processus impliqués. Au-delà du domaine de la géométrie, ces trois critères, articulés avec les outils de la théorie des ETM, ainsi que la méthodologie d'analyse du travail, seraient utiles pour caractériser des formes de travail mathématique dans d'autres domaines mathématiques. Ces formes reposent sur des invariants caractéristiques ou des idéaux-types (Bikner-Ahsbahs, 2015) qui peuvent être communs à des groupes d'individus et ne sont donc pas des attributs spécifiques ou fixes d'un individu.

RÉFÉRENCES

BIKNER- AHSBAHS A. (2015). Empirically Grounded Building of Ideal Types. A Methodical Principle of Constructing Theory in the Interpretative Research in Mathematics Education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.) *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 105–135). Dordrecht : Springer.

COUTAT S., & RICHARD P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 97-126.

DARSES F. (2001). Providing ergonomists with techniques for cognitive work analysis. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 2,* 268-277.

HOUDEMENT C., & KUZNIAK A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312.

HOUDEMENT C., & KUZNIAK A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 175-193.

LEPLAT J. (2004). L'analyse psychologique du travail. *Revue Européenne de Psychologie Appliquée, 54*(2), 101-108.

KUZNIAK A. (2018). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of Geometric Working Spaces. In P. Herbst et al. (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (pp. 5-21). New York: Springer.

KUZNIAK A., & NECHACHE A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 106*(2), 271-289.

KUZNIAK A., & NECHACHE A. (2020). Développer un travail géométrique complet et conforme chez les étudiants de première année de master enseignement en France. *RMé, 233*, 93-104.

NECHACHE A., & GOMEZ CHACON I.M. (2022). *Methodological aspects in the theory of mathematical working spaces.* In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, P. (Eds.). *Mathematical Work in an Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 33-56). Switzerland: Springer.

VERGNAUD G. (2009). The theory of conceptuel fields. *Human Development, 52,* 83-94.