

## CONTRIBUER AU DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS CONCERNANT LES SAVOIRS TRANSPARENTS PAR UN TRAVAIL SUR LE LANGAGE

Aurélie Chesnais\*, Céline Constantin\*

### RÉSUMÉ

Nos recherches en didactique de la géométrie et de l'algèbre nous ont amenées à identifier des difficultés d'élèves qui pouvaient s'expliquer par la transparence de certains savoirs dans l'enseignement. La poursuite de ces recherches dans le cadre de travaux en cours autour d'un dispositif collaboratif entre enseignant.e.s et chercheur.e.s nous amène à soulever un certain nombre de questions à la croisée de trois pôles fortement imbriqués. Le premier est celui de la transparence des savoirs, le deuxième est celui du développement professionnel des enseignants au sein de dispositifs collaboratifs avec des chercheurs, enfin le troisième concerne le rôle du langage dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Ce texte vise à rendre compte des questions qui émergent à la lumière de premières analyses du processus de secondarisation des discours à partir d'un corpus constitué de vidéos de séances de classes, ainsi que de productions d'élèves dans des tests.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, secondarisation des genres de discours, algèbre, mesure, géométrie

### ABSTRACT

Our research into the didactics of geometry and algebra in secondary schools has led us to identify student difficulties that could be explained by the transparency of certain knowledge in classrooms. The continuation of this research in the context of ongoing work on a collaborative arrangement between teachers and researchers leads us to raise a certain number of questions at the crossroads of three strongly intertwined poles. The first is that of the transparency of knowledge, the second is that of the professional development of teachers within collaborative arrangements with researchers, and the third concerns the role of language in the teaching-learning of mathematics. This text aims to give an account of the questions that emerge in the light of initial analyses of the secondarising process of discourse based on a corpus made up of videos of sessions implemented in classes of 6e and 3e, as well as tests proposed to the pupils of these classes.

Keywords: teaching practices, secondarising process of discourse, algebra, measure, geometry

### INTRODUCTION

Ce texte vise à rendre compte d'une recherche en cours dont les questions se situent à l'interface de trois pôles fortement imbriqués. Le point de départ de notre recherche est l'identification de difficultés d'élèves dans les domaines de la géométrie et de l'algèbre élémentaire que nos travaux antérieurs nous ont amenées à relier à la « transparence » (Margolinas et Lappara, 2009 ; Chesnais, 2018) de certains objets de savoir. Il s'agit d'une part, de la *mesure* en géométrie (Chesnais et Munier, 2016), d'autre part, de la *substitution* en algèbre élémentaire (Constantin, 2021). Nous considérons ces difficultés et les enjeux d'enseignement et d'apprentissage associés au regard de deux autres axes de recherche : celui du rôle du langage dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques et celui du rôle d'un dispositif collaboratif entre chercheuses et enseignantes dans le développement professionnel des enseignant.e.s. L'enjeu de cette contribution est de soulever un certain nombre de questions qui émergent dans ces trois pôles à partir de quelques premiers résultats issus d'une expérimentation. Afin de problématiser les questions qui nous préoccupent, nous présentons dans une première partie, succinctement, un certain nombre d'éléments liés à la transparence des objets de savoirs considérés. Dans une deuxième partie, nous abordons les éléments de cadrage théorique et la méthodologie adoptée ainsi que le dispositif expérimental autour du travail collaboratif chercheuses-enseignantes. À partir d'analyses de discours

---

\* LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France

mettant en relation prétests, post-tests et épisodes de classe, nous mettons ensuite en évidence quelques résultats concernant des traces d'évolution des pratiques langagières. La discussion permettra enfin de revenir sur les différentes questions soulevées par cette première étape de recherche, concernant les trois pôles.

## DES DIFFICULTÉS D'ÉLÈVES ET DES OBJETS DE SAVOIR TRANSPARENTS

### 1. Substitution

Dans l'enseignement secondaire en France, les analyses de manuels et d'épisodes de classe montrent que les substitutions dans les écritures algébriques ne se réduisent pas au remplacement d'une lettre par un nombre. Ainsi pour développer une expression comme  $3x(x+1)$  l'utilisation de l'écriture  $k(a+b) = ka + kb$  amène à remplacer  $k$  par un monôme tandis que dans les leçons des manuels ou pour la construction de l'identité,  $k$ ,  $a$ , et  $b$  sont considérés comme des écritures de nombres. Lorsque l'un des facteurs est une somme de trois termes, un monôme ou une différence par exemple, l'extension des techniques de calcul algébrique est souvent présentée comme allant de soi, alors même qu'elle s'accompagne d'étapes non négligeables. Nous avons identifié plusieurs phénomènes didactiques qui peuvent émerger dans les classes.

2 Exemple de référence Niveau 2.

$$A \times B + A \times C - A \times D = A(B + C - D)$$

Exemple 1 :  $\left(7,3x - \frac{1}{3}\right)(1,3x + 2) + \left(7,3x - \frac{1}{3}\right)(-3x + 12)$

Figure 1. – Un écart entre écriture algébrique d'une propriété et exemple

Observons par exemple l'image ci-dessus tirée d'un épisode de classe filmé en 3<sup>e</sup> dans une classe « ordinaire ». La forme de l'identité choisie montre une attention portée aux signes et au nombre de termes pour la factorisation de la part de l'enseignante. L'exemple proposé à la suite correspond toutefois à une somme de deux termes. Plus encore, si le remplacement de A est évoqué dans la classe (sans parler tout à fait de remplacement, il s'agit en réalité davantage de « reconnaître ce qui joue le rôle de A »), les autres substitutions, celles de B, de C et de D, restent complètement implicites. En l'absence de la notion de substitution, les discours ne peuvent pas véritablement prendre appui sur les écritures symboliques des propriétés. La substitution paraît donc être un objet de savoir transparent dans la classe.

Nous faisons l'hypothèse que ceci contribue à expliquer les difficultés observées dans d'autres recherches liées au faible rôle des propriétés algébriques pour soutenir et légitimer les manipulations d'écritures symboliques d'une part, et à la déstabilisation des techniques des élèves selon les formes d'expressions données d'autre part (par exemple dans Tonnelle 1979, ou Assude, Coppé et Pressiat, 2012). Nos travaux ont de plus montré que des difficultés liées à la modélisation peuvent aussi être corrélées à la transparence des savoirs autour de la substitution (Constantin, 2021). Prenons l'exemple d'un programme de calcul donné dans une classe de 5<sup>e</sup>: « choisir un nombre, ajouter 3, multiplier le résultat obtenu par 2 ». Une élève produit deux égalités :  $n + 3 = a$  puis  $a \times 2 = b$ . Elle doit montrer que le programme de calcul donné est équivalent à un autre. Cela nécessite de se ramener à une expression ne dépendant que d'une seule variable, ce qu'elle ne parvient pas à faire. Or, ceci n'est possible qu'à la condition de pouvoir interpréter la première égalité comme une égalité de substitution, le dénoté n'étant plus numérique mais littéral (Drouhard et Panizza, 2012). Plus généralement, l'étude épistémologique et didactique de la notion de substitution montre que les savoirs qui s'y rapportent sont bien plus complexes qu'il n'y paraît sans doute de prime abord.

## 2. *Mesure*

Le mot *mesure* renvoie dans les classes, au début du collège, à deux types d'objets différents. Par exemple, dans la phrase « [...] des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai » issue du manuel Triangle 5ème Hatier, 2001 cité par Houdement (2007), le terme *mesure* renvoie à l'utilisation d'un instrument et on parle en effet de mesurer (une longueur, un angle), lorsque l'on emploie la règle ou le rapporteur. Cependant, le terme *mesure* (en tant que substantif ou verbe) renvoie aussi (voire surtout), dans le discours mathématique de référence –et, de fait, dans les classes de collège – à une valeur que l'on ne peut obtenir par l'utilisation d'un instrument : la diagonale d'un carré de côté 1 a pour *mesure*  $\sqrt{2}$ . Sachant que beaucoup des énoncés de géométrie au collège portent sur des mesures (ou plutôt sur des grandeurs, mais elles sont de fait présentées et utilisées en se ramenant à des mesures)<sup>1</sup>, on pourrait ainsi reformuler la phrase précédente par « des mesures sur un dessin ne suffisent pas à établir des mesures », embarquant les deux significations du mot.

Cela nous a amenées à proposer une distinction entre ce que nous avons appelé la « mesure empirique » et la « mesure théorique » (Chesnais et Munier, 2016). La *mesure empirique* désigne ainsi la valeur obtenue à l'aide d'un instrument (par mesurage)<sup>2</sup> ; elle est par nature décimale ou, au mieux, rationnelle, et est soumise à incertitude (liée à la précision des instruments). La *mesure théorique* est soit une donnée, soit établie à partir des données et de démonstrations (impliquant souvent des calculs) ; c'est un nombre réel, une valeur « exacte » et unique. La première est liée au dessin, la seconde à la figure, si l'on s'appuie sur la distinction entre dessin et figure (Laborde et Capponi, 1994). Dans les « mathématiques constituées » (Vergnaud, 1990, Chesnais, 2021), seule la mesure théorique est légitime et les questions de précision et de dispersion sont non pertinentes. Cependant, une problématique didactique émerge si l'on veut construire la mesure théorique sur la base de la mesure empirique, comme c'est le cas dans la logique des programmes de géométrie français. Le mathématicien suffisamment expert (notamment l'enseignant) manipule dans son propre discours la distinction et la relation entre les deux, via l'idée qu'une mesure empirique est une « valeur approchée » de la mesure théorique, celle-ci étant la « vraie valeur ». Pour les élèves du début du collège, dont la seule référence est le dessin et pour qui les figures, et donc la mesure théorique, *n'existent* pas encore, les mesures empiriques ne peuvent être que des « valeurs approchées qui ne sont approchées de rien »<sup>3</sup> (Lebesgue, p. 18). Des analyses de manuels, de séances de classes et de travaux de didactique des mathématiques nous ont permis de montrer que la distinction et l'articulation entre ces deux aspects de la mesure ne sont pas prises en charge comme objets d'apprentissage, apparaissant ainsi comme un savoir transparent, alors même qu'elles sont cruciales pour la compréhension du changement de paradigme géométrique (ibid.).

Nous faisons l'hypothèse que la transparence des savoirs ainsi identifiés dans les domaines géométrique et algébrique les rend invisibles pour les élèves (Chesnais, 2018), ce qui se traduit dans les discours et pèse sur les apprentissages. La question qui se pose alors est celle

<sup>1</sup> Par exemple, il s'agit souvent de calculer la longueur d'un côté etc. quand on fait utiliser le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès.

<sup>2</sup> En réalité, comme le dit Perdijon, « il ne suffit donc pas d'un nombre pour exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance » (Perdijon, 2012). L'habitude en mathématiques est en revanche de donner uniquement le premier nombre, l'amplitude de l'intervalle restant implicite.

<sup>3</sup> Pour reprendre la formule de Lebesgue évoquant l'approximation des réels par les décimaux lorsque les réels n'ont pas encore été construits.

de la possibilité et des modalités envisageables de prise en compte de ces savoirs dans les classes, notamment sur le plan langagier et du bénéfice possible pour les apprentissages.

### *3. Rôle du langage dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques et question de recherche*

Nous situant dans la perspective des travaux de Vygotski (1934/1997) et Vergnaud (1990), nous considérons l'activité langagière comme étant au cœur du processus de conceptualisation, le langage étant à la fois objet et moyen d'apprentissage (Chesnais, 2018, 2021). L'activité langagière permet des -et témoigne de- réorganisations cognitives par des reformulations, des généralisations ou des instanciations, des mises en relation qui jouent un rôle dans le processus de conceptualisation vu comme construction de concepts scientifiques à partir de concepts quotidiens (Jaubert et Rebière, 2012, Rebière, 2013). Jaubert et Rebière (2012) qualifient de « processus de secondarisation des genres de discours » l'évolution des discours dans la classe depuis des discours de genre premier vers des discours de genre second accompagnant le processus de conceptualisation, celui-ci étant vu comme une évolution de concepts antérieurs (jouant alors le rôle de concepts quotidiens) vers des concepts « plus scientifiques ». Les discours de genre premier, associés aux concepts quotidiens sont très liés à l'action et à l'immédiateté des interactions ; les discours de genre second liés aux concepts scientifiques sont plus réflexifs, distanciés par rapport à l'action et plus proches des formes conventionnelles et culturelles propres à une discipline (Bakhtine, 1984). La secondarisation des discours est une forme d'« épaissement du langage » associé à la construction de significations partagées dans une communauté discursive (disciplinaire scolaire). A l'instar de Jaubert et Rebière (2012) ou Gobert (2014), nous ne considérons pas ce processus comme linéaire mais susceptible de se réaliser au moyen de boucles de secondarisation, « un énoncé premier vers un énoncé second qui devient premier puis second pour être premier d'un second devenant à son tour premier ... » (Gobert, 2014, p. 67).

Nous cherchons donc à déterminer comment et dans quelle mesure l'introduction dans les classes d'éléments issus de la recherche elucidant certains éléments de savoirs transparents *via* un travail collaboratif entre chercheuses et enseignantes, est susceptible d'enrichir le processus de secondarisation des discours.

## MÉTHODOLOGIE, DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET CORPUS

Dans cette partie nous présentons brièvement un certain nombre de caractéristiques du travail collaboratif avant de préciser le corpus des données recueillies.

Nous travaillons avec un même groupe de trois ou quatre enseignantes selon les thèmes (trois enseignantes participent au travail sur les deux domaines). Le travail collaboratif s'organise autour de rencontres régulières entre chercheuses et enseignantes. Il s'agit de boucles itératives formées de séances de discussions autour de la préparation de séquences et de séances, de mise en œuvre dans les classes et de discussions en groupe *a posteriori*. Le projet se déployant sur plusieurs années, on compte 6 à 10 séances de travail collaboratif par an selon les années et les thèmes. Elles concernent des classes de 6e pour le thème de la mesure en géométrie et des classes de 3e pour le thème de la substitution dans l'algèbre élémentaire. Le corpus sur lequel nous allons nous appuyer dans ce texte est constitué de vidéos de séances de classes, et de prétests et post-tests individuels complétés par quelques entretiens auprès d'élèves. Un certain nombre de tests ont également été proposés à d'autres classes dont les enseignants ne font pas partie du projet. Sans les considérer à strictement parler comme des classes témoins, notamment en raison de limites méthodologiques liées aux périodes de l'année et aux enseignements reçus, les résultats de ces tests donnent des indications pour éclairer les résultats des tests proposés aux élèves des classes expérimentales. Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

Dans les séances de classes, nous avons identifié des épisodes clés, c'est-à-dire des épisodes correspondant à des tâches clés ou identifiées a posteriori comme des occasions de discussion sur les objets qui nous intéressent. Nous analysons la secondarisation des discours au regard de déplacements de positionnements énonciatifs, d'articulation de différentes « voix » ou de dénivellations, qui constituent des indicateurs potentiels du processus de conceptualisation (Rebière, 2013, Gobert, 2014). Du point de vue technique, nous avons utilisé le logiciel de textométrie TXM pour les analyses de discours (Heiden et al., 2010).

## PREMIERS RÉSULTATS

Certaines analyses étant en cours, les résultats quantitatifs ne sont pas disponibles pour l'ensemble des items évalués. Les premiers résultats des analyses des prétests confirment que l'invisibilité des savoirs pour les élèves pèse sur les apprentissages. La mise en regard d'épisodes de classe et des comparaisons entre prétests et post-tests à la fois de manière quantitative globale et de manière qualitative pour certaines productions de mêmes élèves nous amènent à valider l'hypothèse selon laquelle la prise en charge de certains éléments autour des savoirs identifiés peut constituer un levier pour le processus de conceptualisation.

### 1. Substitution

Nous avons réalisé des prétests et post-tests dans trois des classes expérimentales de 3<sup>e</sup> (72 élèves). Ces tests ont été passés au mois de septembre et au mois de juin ; ils ont été complétés par des entretiens menés avec trois à six élèves par classe.

Les prétests confirment que le concept quotidien de substitution est largement lié au remplacement d'une lettre par un nombre. Par exemple, dans les classes expérimentales, 62,5% des 72 élèves estiment qu'il n'est pas possible de remplacer une lettre comme  $n$  par un monôme comme  $2x$  ou par une somme comme  $x + 5$  en expliquant par exemple que « ce ne peut pas être un calcul mais un chiffre ». A la question « peut-on utiliser  $k(a + b) = ka + kb$  pour développer  $3n(5n + 1)$  », seuls 32% répondent oui contre 43% pour  $3(a + 7)$ . Ceci tend à valider notre hypothèse concernant la nécessité de prendre en charge un certain nombre d'éléments liés à la substitution pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Par ailleurs, on note une évolution des discours dans les classes où une séquence autour de la substitution a été mise en œuvre que l'on n'observe pas dans les autres classes, même si les analyses des tests ne montrent pas de différences significatives dans les taux de réussite. Prenons l'exemple de deux tâches très proches<sup>4</sup> proposées entre le mois de septembre et le mois de juin. Ces tâches sont inspirées des travaux de Küchemann (1981). Les énoncés sont les suivants : « Si  $a + b = 5$  alors  $a + b + 3 = \dots\dots$  » et « Si  $n = x + 1$  et  $n + x + 1 = 20$  alors  $n = \dots\dots$  ». Il est de plus demandé aux élèves d'expliquer comment ils ont trouvé leur réponse. Les explications montrent que le terme de remplacement est très peu utilisé (4 élèves sur 72 l'utilisent lors des prétests) même si on peut considérer au regard de certaines réponses que des substitutions sont employées implicitement, tandis qu'ils sont 32 % à le mobiliser explicitement lors des post-tests. L'emploi de connecteurs logiques est bien plus présent en post-test (en comparaison des prétests et avec les classes témoins), de même qu'on peut noter la présence d'adverbes exprimant la nécessité. Ainsi pour la première tâche, Alice explique lors du prétest qu'elle trouve  $n = 10$  « car  $20 - n = x + 1$ , en fait je sais pas trop comment expliquer ». Lors du post-test, elle explique sa réponse de la manière suivante : « J'ai trouvé en remplaçant le «  $n$  » de l'équation  $n + x + 3$  par  $x + 3$  car  $n = x + 3$ , ce qui a donné  $x + 3 + x + 3$  et comme  $x + 3 + x + 3 = 2 \times (x + 3)$  et que le résultat de l'équation est 20 alors

<sup>4</sup> Seules les valeurs des nombres ont été modifiées, ce qui n'est pas sans poser question du point de vue méthodologique même si les tests sont « éloignés » dans le temps.

$x + 3$  est forcément égale à 10 car c'est la moitié donc  $n = 10$  ». Si le terme d'équation semble se référer au membre de gauche seulement, le concept de substitution est mis en relation avec d'autres concepts (expression, égalité), l'égalité  $n = x + 3$  étant interprétée comme une relation entre substituante et substituée. Parmi les éléments de discours, on peut noter que les arguments de la substitution sont identifiés, permettant un degré de conscientisation plus élevé de la pratique, ce qui est caractéristique des concepts plus scientifiques. En remontant aux épisodes de classe qui ont pu permettre de développer ce genre de discours, on peut identifier des tâches qui ont été aménagées pour ce faire (une tâche de travail de la substitution du point de vue technique et une tâche consistant à passer d'une expression d'une aire ou d'un périmètre à deux variables à une expression à une seule variable en appui sur une égalité). La relation avec l'égalité a néanmoins été particulièrement mise en avant. Par exemple, toujours dans cette classe, pour introduire la substitution, l'enseignante a demandé aux élèves d'effectuer des substitutions pour calculer  $x^2 \times x^3$ , en remplaçant  $x^2$  par  $x \times x$  et  $x^3$  par  $x \times x \times x$ , les égalités afférentes étant au tableau. Elle introduit une nouvelle interprétation du signe « = » ainsi que le montre l'extrait suivant :

P : Une chose très très importante en mathématiques c'est le signe égal, qu'est-ce que ça veut dire pour vous égal, que j'ai écrit là, sur ces égalités-là, qu'est-ce que ça signifie, Dim ?

Dim : Ben ça veut dire que les deux autres [...] sont égal heu pareil, ça représente la même chose [...]

Kev : Ben j'allais dire que ça correspond à la même chose d'un côté c'est juste une autre écriture

P : C'est juste une autre écriture d'une même chose, ok c'est intéressant, quoi d'autre ? Alors moi je vais vous donner une info très importante c'est que puisque c'est une autre écriture de la même chose, à n'importe quel moment je peux remplacer une écriture par l'autre si j'en ai besoin [...]

Les tâches motivant l'usage de la substitution sont peu nombreuses voire au potentiel didactique limité avec des concurrences d'autres techniques moins coûteuses comme ici (ajouter les exposants). On peut également noter que c'est l'enseignante qui prend en charge les reformulations de manière très majoritaire tout au long de la séquence. Pourtant, lors des post-tests, apparaissent des objets de discours et une extension des significations et des domaines d'usages de certaines expressions. Par exemple, le mot « valeur » est réservé dans les prétests à la désignation d'un nombre. Dans les post-tests, et pour certains élèves, le nom peut aussi désigner des expressions comme  $a + 5$  dans les tentatives de généralisations opérées par les élèves pour justifier (ce qui n'est pas sans poser question du point de vue des mathématiques) même si la recherche des occurrences liées à cet usage montre que ce n'est que lors d'une séance que c'est apparu<sup>5</sup>. On peut noter aussi une certaine diversité des moyens langagiers utilisés par les élèves pour parler des substituées ou substituantes. Certains élèves parlent de *nombre*, d'autres de *résultat* (pour désigner  $a + 5$ ), ce qui renvoie aussi à des besoins langagiers qui accompagnent une attention portée à de nouveaux objets (les expressions et sous-expressions associées aux remplacements), qui ne sont pas objets de discours au départ<sup>6</sup>. Ce faisant, des expressions algébriques comme  $x + 3$  deviennent pour certains élèves des objets de discours et semblent se constituer comme objets sur lesquels il est possible d'opérer, ou une forme de désignation de nombre au-delà de l'idée d'une opération en suspens. Ces premières analyses permettent d'identifier des traces du processus de secondarisation des discours même si les analyses restent à compléter. Elles montrent aussi une certaine diversité dans les classes pour désigner les sous-expressions, ce qui soulève des

<sup>5</sup> Notons qu'il a pu y avoir des reprises à d'autres moments de l'année, non concernés par le recueil de données. Toutefois, le fait que cet usage ne soit pas généralisé à l'ensemble des élèves nous amène plutôt à parler d'une généralisation que permet d'opérer un discours sur les substitutions.

<sup>6</sup> C'est également le cas dans le test réalisé après enseignement du « chapitre » autour du développement dans une autre classe de 3<sup>e</sup> ne participant pas à l'expérimentation.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

questions sur lesquelles nous reviendrons après avoir présenté les résultats concernant la mesure.

## 2. *Mesure*

Des tests ont été menés dans 10 classes de sixième (229 élèves), pour moitié situées en éducation prioritaire (EP), complétés par des entretiens, avec trois à huit élèves par classe.

Nous présentons ici les résultats obtenus à partir de l'Item 3 (Q3) des prétests. L'Item indiquait aux élèves que l'on s'intéressait à la longueur du quart d'une bande de 9,3 cm<sup>7</sup> et proposait deux réponses d'élèves imaginaires :

Pierre : j'ai plié ma bande en deux et encore en deux et j'ai mesuré un morceau avec ma règle. La longueur d'un quart de la bande est 2,3 cm.

Mehdi : J'ai fait 9,3 divisé par 4 avec ma calculatrice. Elle affiche 2,325. La longueur d'un quart de la bande est 2,325 cm.

La consigne était : « Quelle est selon toi la longueur cherchée ? Tu peux choisir la réponse de Pierre ou Mehdi ou donner une autre réponse. Justifie ta réponse. » La calculatrice était autorisée et les élèves disposaient d'une bande annoncée comme étant de longueur 9,3 cm. Un tiers des élèves choisit la valeur exacte (2,325 cm), avec une proportion qui varie de 8% à 58% selon les classes ; elle est de 22% en moyenne en EP et 37% en contexte ordinaire.

Les justifications proposées par les élèves lorsqu'ils choisissent cette réponse montrent qu'ils ont une conception proche de la conception experte (il y a une « vraie » valeur et la règle en donne une valeur approchée), même si le langage qu'ils emploient est encore peu « orthodoxe », par exemple Amyad : « La règle n'a pas de milli milli mètre alors que la calculatrice peut calculer vraiment ». En particulier, l'emploi de termes de la famille de « précis » ou « exact » est très rare.

En revanche, pour certains élèves (44% en moyenne, 12 à 72% selon les classes), la mesure renvoie à la mesure empirique, sans qu'ils soient capables d'envisager que la longueur puisse être un nombre avec plus d'une décimale, c'est-à-dire autre chose qu'un nombre entier de centimètres et de millimètres, ou encore qu'un nombre que l'on peut lire sur la règle ». Et même, pour certains élèves, il semble que le calcul donne une valeur approchée de la (vraie) mesure, qui est celle que l'on peut lire sur une règle (avec une position inverse de celle de l'expert !). Ainsi par exemple Eugénie : « J'ai fait  $9,3 : 4 = 2,325$ . Je l'ai arrondi au dixième car sur une règle graduée il n'y a que les centimètres et les millimètres. »

Pour un nombre important d'élèves, le fait que la mesure renvoie à ce que donne l'instrument<sup>8</sup> nous incline à valider notre hypothèse : la prise en charge dans les classes de la distinction et l'articulation entre les deux acceptions du mot semble nécessaire pour envisager les enjeux didactiques liés à la mesure en géométrie au début du collège. L'absence d'identification de cette distinction pourrait en effet contribuer à expliquer l'absence d'efficacité des discours fondés sur le discours expert.

Suite à ces tests, une séquence (concernant les angles en sixième) a été co-élaborée dans le cadre du dispositif collaboratif sur la base de la séquence que les enseignantes avaient élaborée entre elles les années précédentes. Les résultats dans les posttests indiquent que 95% des élèves considèrent des valeurs théoriques dans au moins une des tâches même si les réponses fluctuent selon certains facteurs (grandeur longueur/angle, le fait de donner un dessin à main levée / aux instruments etc.) ; 36 % des élèves distinguent les deux types de mesures dans leurs discours dans au moins une tâche, en utilisant essentiellement des modalisateurs (mesure /valeur théorique, théoriquement, précis, valeur mesurée), contre 0%

<sup>7</sup> Précisons que l'on s'était assuré en amont que les élèves savaient ce qu'était le quart d'une bande et que tous les quarts avaient la même longueur.

<sup>8</sup> Même si l'interprétation que l'on peut en faire mêle des aspects liés au contrat didactique et à la conceptualisation, sans qu'il soit possible de les distinguer.

dans les classes témoins. 18 % des élèves mentionnent la controverse entre les deux réponses possibles contre 0 % dans les classes témoins. Ces réponses sont liées à des traces d'une évolution des discours des élèves : 19% des élèves des classes expérimentales emploient le nom commun *mesure* contre 0 % dans les classes témoins, et 99% des élèves des classes expérimentales emploient des conjonctions de coordination (mais, alors que, or) indiquant des formes de raisonnement, contre 34 % des élèves dans les classes témoins. On y décèle également des traces d'hétéroglossie. Par exemple, dans une des tâches où on demandait aux élèves de dessiner un angle de  $89^\circ$  puis s'il était droit, Baptiste répond « oui et non. En mesures théoriques, ce n'est pas un angle droit ( $89^\circ$ ), mais en valeurs mesurées, non, parce qu'un rapporteur est précis au degré près ». On observe pour certains élèves une évolution très nette, comme par exemple pour Ambre qui, dans le prétest à la Q3 répondait : « Je n'ai pas compris pourquoi [le résultat de 9,3:4] est 2,325 puisque c'est 2,3 », explicitant le fait qu'elle n'arrive pas à mettre en relation les deux valeurs, la valeur empirique constituant la valeur de référence, tandis que le rapport est établi et pris en charge langagièrement par des désignations différenciées des mesures et par des conjonctions de coordination dans le posttest : « non parce que la mesure de l'angle ABC est  $89^\circ$  et la mesure théorique d'un angle droit est de  $90^\circ$ . ».

La mise en relation de ces effets avec l'analyse des séances de classes nous amène à identifier des épisodes contribuant à la secondarisation des discours dans la classe. Voici par exemple un extrait de séance de classe, à l'occasion du travail sur l'usage du rapporteur pour mesurer des angles, dans le cas de trois angles adjacents formant un angle de  $180^\circ$ , alors que les réponses données sont 32, 87 et 63 :

Raphaël : Les deux angles, enfin les trois angles, ça devrait faire 180 degrés, mais là, ça ne le fait pas.

P : Alors on est d'accord que théoriquement, cet angle devrait mesurer 180 degrés puisqu'on a bien un angle plat qui est formé par deux demi-droites qui forment une seule droite, d'accord ? Alors maintenant, ça, c'est la théorie, c'est ce qu'on appelle la valeur théorique. Maintenant, on va regarder en pratique, on est allé mesurer avec le rapporteur et nous, qu'est-ce qu'on a trouvé ? [...]

P : Donc là, on est avec un outil de mesure. L'outil de mesure ne peut pas être exactement précis, c'est toujours à plus ou moins un degré, donc forcément, chaque fois, on a plus ou moins un degré d'écart, et à la fin, donc on ne pourra pas trouver forcément 180 degrés. Mais ça, on a ajouté les valeurs qu'on a mesurées, donc il faut bien distinguer les valeurs qu'on a mesurées avec le rapporteur qui sont toujours précises à plus ou moins un degré, et la valeur théorique parce que là, on dit « comme elles forment une droite, ces deux demi-droites, donc forcément c'est un angle plat et ça fait 180 degrés ». Mais ça ne veut pas dire que nos mesures elles étaient fausses. Ça veut dire qu'il faut séparer deux choses. Il y a les valeurs qu'on mesure avec le rapporteur qui seront toujours imprécises entre guillemets, qui seront valables à plus ou moins un degré près, et puis il y a la valeur théorique, donc là oui, c'est la théorie, ces deux demi-droites, elles forment une droite, donc ça doit faire pile 180 degrés.

Le discours est essentiellement porté par l'enseignante, qui introduit à cette occasion des moyens langagiers de prise en charge de la distinction et la mise en relation (qui seront retravaillés par la suite). On note notamment des processus de nominalisation des deux types de mesures, avec l'usage de « valeur théorique » d'une part et de « valeurs qu'on a mesurées » d'autre part ; on note aussi l'utilisation du conditionnel (« cet angle devrait mesurer  $180^\circ$  ») et d'un certain nombre de moyens syntaxiques pour pointer une distinction entre « deux choses » (« mais », « il faut bien distinguer », « il y a ..., et puis il y a... »).

L'étude de l'ensemble des discours dans les 3 classes de l'expérimentation a fait apparaître une secondarisation des discours de la classe (même si la part de discours produit par les élèves reste globalement faible) qui s'appuie essentiellement sur de tels processus de nominalisation (Chesnais, 2021).

## DISCUSSION

Si les premiers résultats tendent à valider l'hypothèse selon laquelle les objets de savoir identifiés par la recherche en didactique peuvent jouer un rôle quant aux apprentissages (tant du point de vue de certaines difficultés du fait de leur transparence que de leur potentialité au vu de la secondarisation des discours), la question de la manière dont ils peuvent être pris en charge par les enseignants dans les classes reste ouverte selon nous. Cette question est d'autant plus ouverte que les savoirs identifiés ne sont pas des savoirs disciplinaires usuels, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tout à fait d'équivalent dans les mathématiques constituées actuelles. Plus encore, nous ne considérons pas la substitution ou la distinction entre mesure empirique et mesure théorique comme des objets d'enseignement usuels, dont on donnerait une définition et des propriétés, mais plutôt comme des outils de l'activité. Quelle transposition viable de ces objets peut-on dès lors penser ? Nous faisons l'hypothèse d'une nécessaire prise en compte des pratiques et même d'une forme de collaboration entre enseignants et chercheurs pour ce faire. De fait, le dispositif collaboratif amène à interroger le rôle du chercheur. Le parti pris ici est celui de l'aménagement de tâches existantes dans les classes (à partir des fiches utilisées par les enseignantes dans leur classe) en identifiant des potentialités au regard des objets introduits dans une logique « opportuniste » (Rogalski et Robert, 2015) pour le chercheur. De nouvelles tâches peuvent aussi être envisagées en réponse à des enjeux identifiés via la collaboration. Comment dès lors les préoccupations des chercheuses peuvent-elles rencontrer celles des enseignantes ? Quels déplacements (du point de vue écologique et langagier) s'opèrent nécessairement dans les discussions au cours du travail collaboratif, mais aussi pour et dans la classe ? Une autre question est donc celle de la légitimité de ces savoirs : n'étant pas à strictement parler mathématiques, dans quelle mesure cela peut-il peser sur les choix possibles pour les enseignants ? Dans l'une des classes de 3e observées, une enseignante explicite que parler de substitution ou de remplacement n'a pas d'importance, tout en précisant certains éléments importants à identifier lorsqu'on les effectue (le signe de la multiplication ou les parenthèses, ou même la possibilité de le faire lorsqu'on dispose d'une égalité). En géométrie comme en algèbre, les moyens langagiers élaborés pour la prise en charge dans la classe ne correspondent pas exactement à ce que le chercheur aurait pu envisager, ce que nous considérons comme un processus normal voire nécessaire.

Dans une logique de « comprendre pour transformer, transformer pour comprendre », il s'agit aussi de considérer la « perturbation » du système des pratiques, liée à l'introduction d'un objet de savoir transparent, comme permettant l'étude d'éléments de logiques des pratiques et des dynamiques de développement professionnel engagé via le dispositif collaboratif. De fait, il nous semble nécessaire de chercher à mieux cerner comment les objets du chercheur sont mis au travail dans le dispositif collaboratif, peuvent outiller les pratiques des enseignantes au regard de préoccupations qui peuvent être différentes, ce qui en retour peut aussi ouvrir une forme d'investissement qui n'était pas prévue par la recherche. Du point de vue du chercheur, ces objets sont considérés comme utiles pour interpréter des erreurs ou des difficultés d'élèves, en lien avec des enjeux d'enseignement peu identifiés par la profession. De fait, cela amène nécessairement la question de l'identification ou de la réinterprétation dans le travail collaboratif : quels observables communs peuvent permettre une rencontre et la possibilité même de l'introduction de ces objets du chercheur ? Nous faisons l'hypothèse que ce sont aussi des outils d'interprétation utiles pour l'enseignant ; toutefois, l'expérimentation a montré que ce n'est qu'à partir d'un premier travail de problématisation conjointe que certaines erreurs deviennent perceptibles pour certains enseignants. L'une des particularités de ce dispositif est qu'il est pris dans une temporalité assez longue (de l'ordre d'au moins 3 ans), ce qui permet aussi d'interroger des évolutions sur un temps long. Enfin, il nous semble nécessaire de réinterroger la notion de savoirs

transparents et des conditions qui les rendent éligibles à devenir des objets pertinents pour ce type de travail collaboratif.

#### RÉFÉRENCES

- ASSUDE, T., COPPE, S. & PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. Dans Coulange L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L. & Robert, A., Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série (pp.35-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BAKHTINE, M. (1984). Esthétique de la création verbale, Paris, Gallimard.
- CHESNAIS, A. (2021). Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices. ZDM, 2021-2.
- CHESNAIS, A., & CONSTANTIN, C. (2020). Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics. Communication at the 7th ETC 'Language in the Mathematics Classrooms (Montpellier, February, 18th-21th).
- CHESNAIS, A., & MUNIER, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathe, A.-C. & Mounier, E., Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (pp. 212–237). Paris : IREM de Paris.
- CONSTANTIN, C. (2019). Substitutions et transformations de mouvement : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique. Dans Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques (pp. 49-64). Ouvrage collectif coordonné par Maryse Maurel.
- CONSTANTIN, C. (2021). La substitution : points de vue écologique et sémiolinguistique. Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg, 26, 183-194.
- DROUHARD J.-P., ET PANIZZA, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM, 209-235.
- GOBERT, S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation. Spirale – revue de recherches en éducation, 54, 65-84.
- HEIDEN, S., MAGUE, J.-P., PINCEMIN, B. (2010a). TXM : Une plateforme logicielle open-source pour la textométrie – conception et développement. In Sergio Bolasco, Isabella Chiari, Luca Giuliano (Ed.), Proc. of 10th International Conference on the Statistical Analysis of Textual Data - JADT 2010 (Vol. 2, p. 1021-1032). Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, Roma, Italy.
- HOUEMENT C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, Repères IREM, 67, 69-84.
- JAUBERT, M. & REBIÈRE, M. (AVEC BERNIÉ, J.-P.) (2012). Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : L'hypothèse énonciative. Forum lecture.ch, 2012(3). [https://www.forumlecture.ch/sysModules/obxLeseforum/Artikel/476/2012\\_3\\_Jaubert\\_Rebiere\\_Bernier.pdf](https://www.forumlecture.ch/sysModules/obxLeseforum/Artikel/476/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf)
- KÜCHEMANN, D. (1981). Algebra. Dans Hart, K (Eds), Children's understanding of mathematics 11-16 ; 102-119.
- LABORDE, C., CAPPONI, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14/1-2, 165-209.
- LEBESGUE, H. (1975). La mesure des grandeurs. Albert Blanchard. 184 p. Vygotski
- MARGOLINAS, C., & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans Rocheix, J.-Y., & Crinon, J. (dir.). La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp. 19-32). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- REBIÈRE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner, et al. (éds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROGALSKI, J., & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Raisons Éducatives, 19, 95-114.
- TONNELLE, J. (1979). Le monde clos de la factorisation au premier cycle. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels [The theory of conceptual fields]. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3), 133-170.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.