

## DEPASSER LES PRAXEOLOGIES MUETTES DE MODELISATION : UN PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Floriane Wozniak\*, Berta Barquero\*\*, Marianna Bosch\*\*, Danielly Kaspary\*\*\*

### RÉSUMÉ

De précédentes recherches en théorie anthropologique du didactique ont montré que les besoins de connaissances mathématiques et didactiques pour enseigner la modélisation génèrent des praxéologies muettes (Wozniak, 2012). Les enseignants dirigent l'étude vers le recours à des outils mathématiques pour construire des réponses à des problèmes, mais souvent le processus de modélisation n'est pas explicité. Il s'agit d'enseigner les réponses plutôt que les moyens de les produire. L'objet de ce texte est de présenter et interroger un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants autour de la modélisation (Barquero, Bosch & Wozniak, 2019) pour de futurs enseignants de l'école primaire à l'Université de Barcelone (Espagne). Nous montrons comment cette formation permet le développement de praxéologies didactiques qui fassent vivre pleinement le processus de modélisation.

Mots-clefs : modélisation, Théorie Anthropologique du Didactique, praxéologie muette, Parcours d'Etude et de Recherche pour la formation des enseignants

### ABSTRACT

Previous research in the anthropological theory of the didactic has shown that the mathematical and didactic knowledge requirements for teaching modelling generate silent praxeologies (Wozniak, 2012). Teachers direct the study towards using mathematical tools to construct answers to problems, but the modelling process is not often made explicit. It is a question of teaching the answers rather than the means to produce them. The purpose of this paper is to present and interrogate a study and research path for teacher education around modelling (Barquero, Bosch & Wozniak, 2019) for future primary school teachers at the University of Barcelona (Spain). We show how this training allows the development of didactic praxeologies that bring the modelling process to life.

Keywords: modelling, Anthropological Theory of Didactics, silent praxeology, Study and Research Path for Teacher Education

## INTRODUCTION

Dans son cours, Berta Barquero a présenté deux exemples de formations, l'une au lycée et l'autre à l'université, qui répondent au problème de l'enseignement de la modélisation didactique à partir des outils de la théorie anthropologique du didactique. Ces exemples montrent le lien entre la conception de la modélisation que propose cette approche (dimension *épistémologique*) et les stratégies didactiques que l'on peut mettre en place pour faire vivre les mathématiques en tant qu'activité de modélisation (dimension *économique*). Nous abordons ici un troisième exemple dans le cadre de la formation de futurs professeurs des écoles à l'enseignement de la modélisation.

Yves Chevallard (1989) propose de décrire le processus de modélisation comme trois pôles en interaction : la définition du système par l'identification des variables qui permettent de circonscrire la question étudiée ; la construction du modèle qui comprend des relations entre ces variables ; le travail du modèle qui permet de produire de nouvelles connaissances sur le système étudié. Nous considérons ainsi, de façon minimale, qu'un système est un découpage (arbitraire) de la réalité et qu'un modèle est tout ce qui contribue à apporter une information sur ce système, quels que soient son niveau de mathématisation et les types d'ostensifs utilisés. Cet auteur distingue le travail *du* modèle (ou *dans* le modèle) et le travail *sur* le modèle qui est « la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude » (*op. cit.*, p. 57). Le travail du modèle peut conduire en effet à redéfinir le système et conséquemment le modèle lui-même du fait de la possible réversibilité de la relation système/modèle : « Le rapport du système au

---

\* Université de Toulouse Jean Jaurès, EFTS.

\*\* Universitat de Barcelona.

\*\*\* Université de Grenoble Alpes, LIG, MeTAH.

modèle peut en effet s'inverser ; le système peut apparaître, à rebours, comme un modèle de son modèle. » (*op. cit.*, p. 56). De cette articulation du système avec son modèle émerge la réponse au problème initial posé.

De précédents travaux (Wozniak, 2012) ont montré comment les enseignants de l'école primaire en France enseignent les solutions plutôt que les praxéologies de l'étude. L'enjeu didactique, révélé par les discours technologiques des praxéologies mathématiques mises en œuvre, n'est pas la démarche de modélisation, mais la consolidation d'objets de savoir mathématiques déjà institutionnalisés qu'il s'agit d'appliquer au contexte du problème. Il manque des mots, des ostensifs et des concepts aux professeurs pour que se révèle le processus de modélisation dans la classe. D'un point de vue théorique, ces observations ont conduit à catégoriser les praxéologies en fonction de la place et du rôle du discours technologique :

Nous considérons qu'une praxéologie est muette lorsqu'elle se donne à voir uniquement au travers de sa composante praxis ; seule la technique mise en œuvre dans un rapport d'action est perceptible alors que la composante *logos* n'est pas audible, à moins qu'elle ne soit simplement tue. Une *praxéologie faible* laisse entrevoir la composante *logos* au travers des ostensifs associés à la technique mise en œuvre ; le discours technologique reste implicite ou limité à la seule description de la technique dans un rapport de formulation non encore abouti. Enfin, une *praxéologie forte* met en œuvre dialectiquement les deux composantes *praxis* et *logos* dans des rapports d'action, de formulation et de validation. (*op. cit.* 38-39).

Ce sont bien des praxéologies de modélisation *muettes* qui sont observées et un manque de connaissances mathématiques et didactiques sur les processus de modélisation qui est constaté. Ce texte présente et interroge une stratégie de formation à l'Université de Barcelone dont l'objectif est de fournir aux futurs professeurs d'école primaire les outils conceptuels qui nourriront leurs discours pour expliquer et analyser le processus de modélisation, par exemple :

- identification des variables de description du système, des observables, des données du système ;
- identification dialectique des différents modèles envisageables et des hypothèses qui les fondent ;
- choix d'un modèle sur la base d'une discussion sur le bien-fondé des hypothèses émises et clairement énoncées ;
- discussion de la portée du modèle, c'est-à-dire explicitation de son domaine de validité en évaluant le degré d'approximation de la réponse construite à l'aide du modèle par confrontation à la contingence du système.

Dans la première partie de ce texte, nous construisons un modèle praxéologique de référence pour l'analyse du processus de modélisation (MPR-Boîte du pâtissier) d'un problème dont l'étude a été expérimentée à l'école primaire, au collège et en formation d'enseignants du primaire en France et en Espagne. La nécessité d'élaborer un modèle praxéologique de référence est heuristique : c'est une mise au jour de la grille de lecture des situations par le didacticien qui est implicitement « toujours là ». Il s'élabore sur la base des praxéologies qui pourront vivre dans l'institution dont sont issues les situations qui seront analysées. Dans une seconde partie, nous examinons des productions de professeurs des écoles en formation initiale qui analysent ce problème. Le MPR-Boîte du pâtissier servira de grille d'analyse des praxéologies observées et sera, dans le même mouvement, mis à l'épreuve par cette confrontation à l'empirie. Enfin, dans la troisième partie, nous présentons le dispositif de formation de l'université de Barcelone et interrogeons la stratégie développée en lien avec les besoins praxéologiques des professeurs pour enseigner la modélisation. En particulier, nous revenons sur les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants et les cartes questions-réponses comme outil d'analyse de l'activité de modélisation mise en œuvre.

## ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION « LA BOÎTE DU PATISSIER »

La situation que nous considérons est inspirée d'une expérimentation en fin d'école primaire en France (Chappaz & Michon, 2003) : un pâtissier souhaite fabriquer différentes boîtes pour emballer ses gâteaux. Il envisage d'utiliser un mode de fabrication par pliage (figure 1). Comment peut-il s'assurer qu'avec le procédé choisi, il pourra effectivement emballer ses gâteaux ?

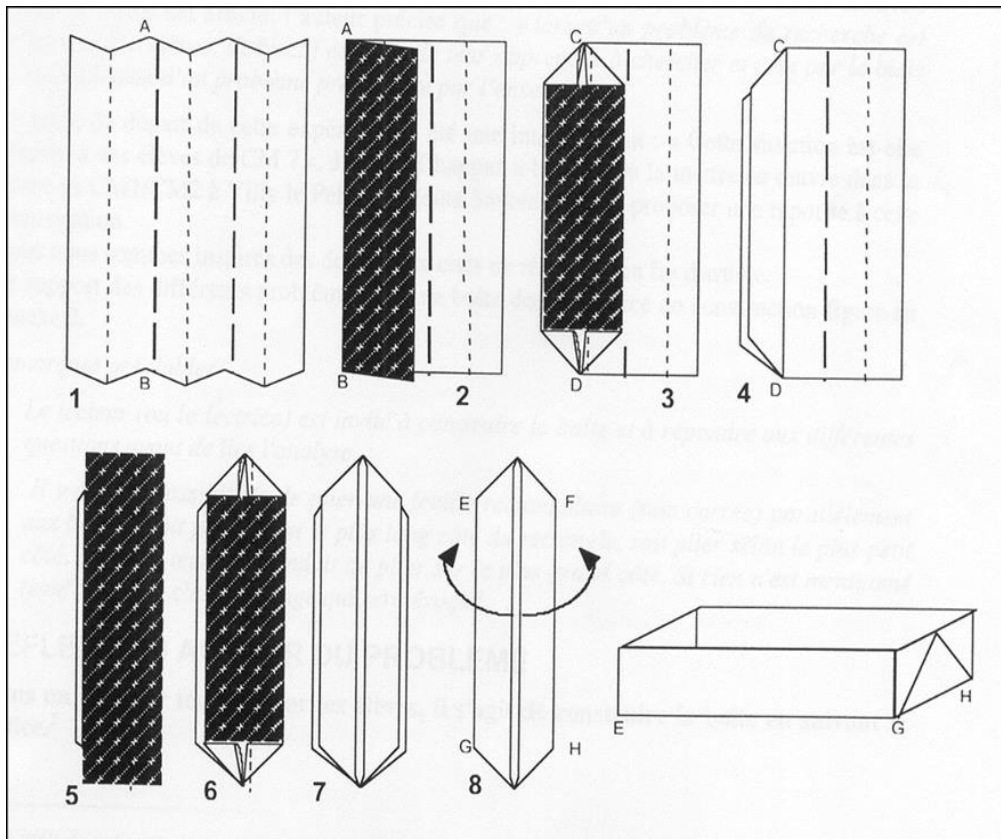
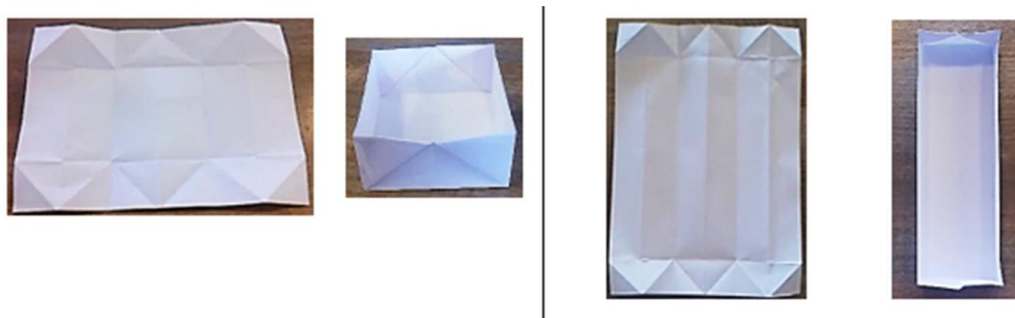


Figure 1. – Notice de pliage de la boîte (Chappaz & Michon, 2003, p. 32).

L'étude de cette situation amène différentes questions comme : peut-on obtenir n'importe quelle boîte ? Quel type de boîtes peut-on obtenir ? Est-ce qu'il y a un lien entre la forme de la boîte et la forme de la feuille ? Faut-il une feuille carrée pour obtenir une boîte carrée ? Que se passe-t-il si on plie la feuille dans le sens de la longueur ou dans le sens de la largeur ? Les réponses à ces questions se fondent sur l'élaboration de modèles et appellent de nouvelles questions. Ce faisant, une succession de modèles se construisent qui intègrent les modèles précédents.

### 1. Un premier modèle empirique-mesure

La construction de boîtes à partir de feuilles rectangulaires non-carrées permet de découvrir qu'on peut fabriquer deux boîtes différentes (figure 2) suivant que l'on plie dans le sens de sa longueur ou de sa largeur, alors qu'avec une feuille carrée, on ne peut fabriquer qu'une seule boîte (puisque largeur et longueur de la feuille se confondent).



**Figure 2.** – Les deux boîtes fabriquées avec une même feuille A4.

Si on mesure les dimensions de la boîte à partir de feuilles de différentes dimensions (voir tableau 1), de nouveaux constats peuvent être faits : avec une feuille carrée, on n’obtient pas une boîte à fond carré ; avec une feuille rectangulaire, on peut obtenir une boîte à fond carré ou rectangulaire. *In fine*, il n’y a pas de lien apparent entre la forme de la feuille et la forme du fond de boîte.

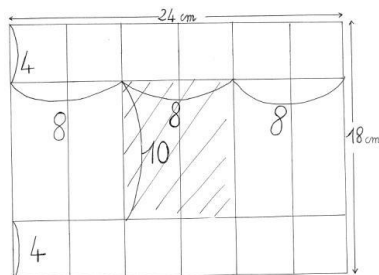
Feuille	Boîte		
	Longueur (cm)	Largeur (cm)	Hauteur (cm)
24 cm × 24 cm	8	16	4
14 cm × 21 cm	7	7	3,5
14 cm × 21 cm	16,3	4,6	2,3
13 cm × 15 cm	8	5	2,5
13 cm × 24 cm	8	5	4

**Tableau 1.** – Mesures des dimensions d’une boîte à partir du pliage d’une feuille.

Les mesures des boîtes à partir de feuilles de dimensions différentes permettent néanmoins de constater que l’on peut obtenir deux boîtes ayant le même fond mais pas la même hauteur. Et, à regarder les données du tableau, il semble que la hauteur soit toujours la moitié d’une des deux dimensions du fond de la boîte. L’étude de cette question conduit à enrichir le système étudié feuille/boîte de ce premier modèle empirique-mesure et, ce faisant, à concevoir un nouveau modèle.

## 2. Un second modèle géométrico-numérique

En dépliant la feuille, une analyse géométrique des plis – dont certains représentent les dimensions de la boîte – devient possible et permet la recherche d’une relation entre leurs différentes longueurs. Ces analyses reposent sur la connaissance de propriétés géométriques élémentaires, notamment celles du carré (par exemple, ses diagonales sont des axes de symétrie), et sur la recherche de relations numériques entre les longueurs (voir figure 3).



**Figure 3.** – Chappaz & Michon (2008, p.27).

Sur la figure 3, le fond de la boîte est hachuré, sa largeur mesure 8 cm et sa longueur 10 cm. Les plis forment 6 bandes verticales constituées de deux carrés et d'un rectangle. La longueur des côtés des 12 carrés présents sur la figure correspond à la largeur d'une bande. Ces observations qui s'appuient sur le procédé de pliage sont validées par les propriétés géométriques des figures ainsi construites. Elles permettent d'établir que la hauteur de la boîte est bien la moitié de sa largeur qui est égale au tiers de la longueur de la feuille tandis que la longueur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux hauteurs. Ces relations ainsi identifiées généralisent ce qui s'observait avec la fabrication des différentes boîtes et leurs mesures, faisant de ce deuxième modèle un enrichissement du premier. L'effort de généralisation se poursuit en considérant deux nouvelles questions : Quelle boîte peut-on fabriquer avec une feuille de dimension donnée ? Quelle feuille doit-on prévoir pour obtenir une boîte de dimensions données ?

### 3. Un modèle algébrique et un modèle fonctionnel

Nous l'avons vu avec la figure 2 : une feuille rectangulaire non-carrée permet de construire deux boîtes différentes selon le sens du pliage. En notant  $l$  et  $L$  respectivement la largeur et la longueur de la feuille ( $L > l$ ),  $x$  et  $y$  les deux dimensions du fond de la boîte et  $h$  sa hauteur, on peut établir les relations algébriques qui lient les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis. Si les plis sont parallèles à la largeur (image de gauche dans la figure 4) :  $x = L/3$ ,  $h = x/2 = L/6$ ,  $y = l - 2h = l - L/3$  ou  $L = 3x = 6h$  et  $l = y + x$ . Si les plis sont parallèles à la longueur de la feuille (image de droite dans la figure 4) :  $x = l/3$ ,  $h = x/2 = l/6$ ,  $y = L - 2h = L - l/3$  ou  $l = 3x = 6h$  et  $L = y + x$ . Notons que dans le premier cas  $2x > y$  et dans le second cas  $2x < y$ .

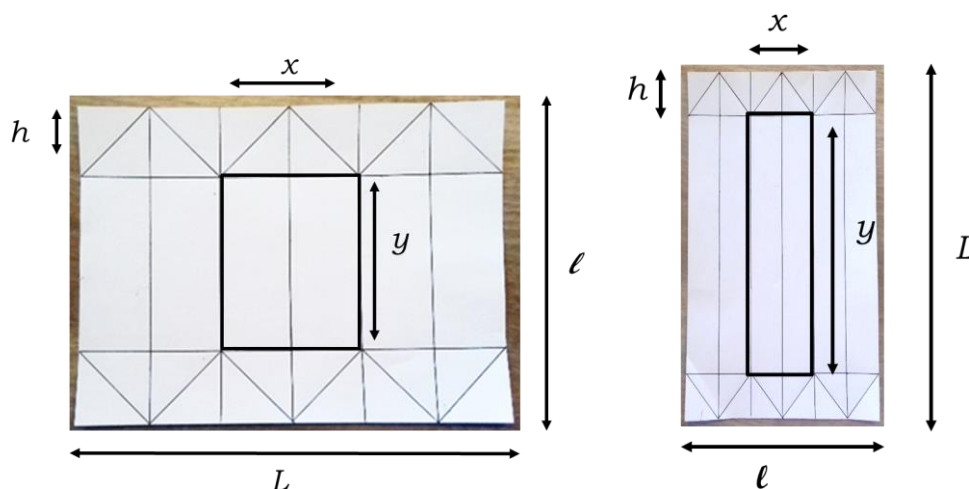


Figure 4. – Les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis.

Lorsque la feuille est carrée, longueur  $L$  et largeur  $l$  sont égales et les dimensions de la boîte sont :  $x = L/3 = l/3$ ,  $h = x/2$  et  $y = 2x$ .

En revanche, pour fabriquer une boîte à fond carrée à partir de ce procédé de pliage (ce qui nécessite d'avoir la relation  $x = y = 2h$ ), il faut une feuille rectangulaire de dimensions  $l = 2x = 2y$  et  $L = 3x = 3y$  et seul le premier cas de pliage est possible.

Poursuivant le travail de généralisation et de développement du modèle algébrique, pour traiter des problèmes de maximisation de volume par exemple, on peut construire un quatrième modèle fonctionnel. Ce faisant, on passe d'une modélisation en  $(L, l)$  à une modélisation plus symétrique en  $(a, b)$ . En considérant le premier sens de pliage, la fonction  $F_1$  associe aux dimensions  $(a, b)$  d'une feuille, les dimensions  $(x, y, h)$  de la boîte qu'on peut fabriquer et, en

sens inverse, la fonction  $F_2$  associe aux dimensions d'une boîte de fond  $(x, y)$ <sup>1</sup>, les dimensions de la feuille nécessaire pour la fabriquer selon ce procédé :

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; F_1(a, b) = (a/3; b - a/3; a/6) ;$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; F_2(x, y) = (3x; x + y).$$

Remarquons que, ces fonctions étant linéaires, on peut aussi les exprimer sous forme matricielle :

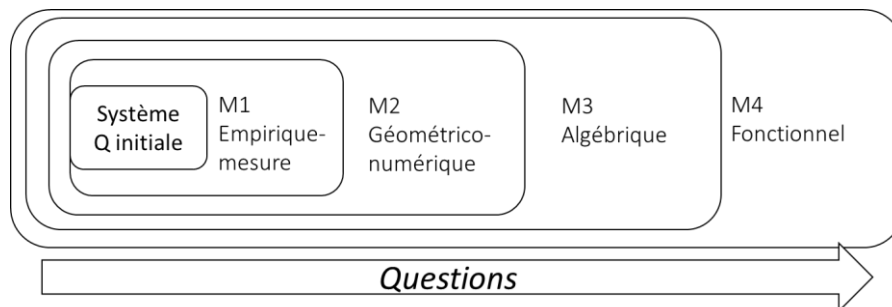
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix} M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et l'on observe que leur composition donne :

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve que ce n'est pas n'importe quelle boîte qui peut être fabriquée par ce procédé, mais seulement des boîtes dont la hauteur est la moitié d'une des dimensions du fond de cette boîte. Le deuxième type de pliage (plis parallèles à la longueur) est représenté par les fonctions  $G_1(a, b) = F_1(b, a)$  et  $G_2(x, y) = (x + y, 3x)$ , ce qui montre bien la symétrie de la construction.

Cette rapide analyse montre comment les organisations mathématiques s'enrichissent et se développent au fur et à mesure que de nouvelles questions émergent. Chaque modèle mathématique est motivé par de nouvelles questions et devient un élément du système sur lequel se construit le modèle mathématique suivant, comme l'illustre la figure 5.



**Figure 5.** – Bilan du processus de modélisation par le développement de modèles successifs.

Ce modèle du processus de modélisation va maintenant servir de modèle praxéologique de référence pour analyser les praxéologies de modélisation pour l'étude de la situation de la boîte du pâtissier. Nous l'appellerons MPR-Boîte du pâtissier dans la suite.

## UN PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION

La situation de la boîte du pâtissier est utilisée en formation initiale des professeurs des écoles à l'Université de Barcelone. Son étude se déroule selon huit séances de 2 heures avec un groupe de 40 étudiants, en troisième année (sur cinq années de formation). Bien que cette activité ait été expérimentée depuis l'année académique 2012-13, dans ce texte, nous nous concentrons sur

<sup>1</sup> Rappelons que la hauteur de la boîte est toujours la moitié d'une des dimensions du fond.

sa mise en œuvre en 2019-20 où la formation s'est développée en anglais (au lieu du catalan qui est la langue courante d'usage). La conception du processus suit les trois premiers modules du dispositif de formation proposé par les parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants (PER-FE) (Barquero, Bosch & Romo, 2018).

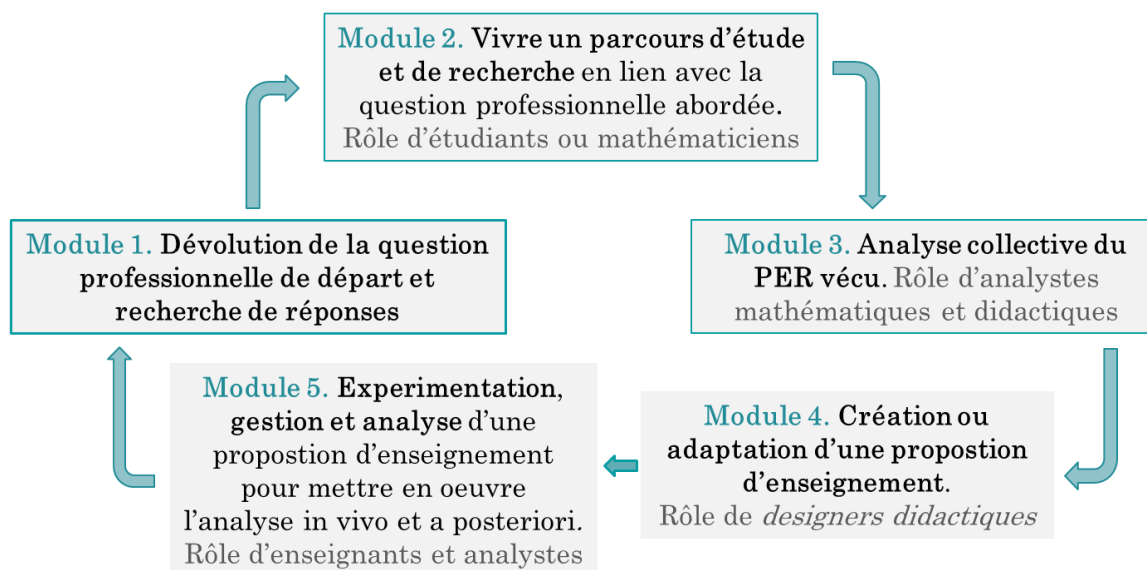


Figure 6. – Structure générale des PER-FE (Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero et al., 2018)

Dans le premier module, les étudiants (enseignants en formation initiale) sont confrontés aux questions suivantes : « Comment enseigner la modélisation à l'école primaire ? À travers quelles activités de modélisation ? ». Nous avons utilisé la situation de la recherche de la taille d'un géant dans un parc d'attractions (Wozniak, 2012) comme introduction, afin de les familiariser avec une activité de modélisation. Cette activité a également servi à établir un lexique commun : système, modèle, hypothèses, variables du système, résultats mathématiques, interprétation, validation du modèle, etc. Certains des principaux résultats décrits dans Wozniak (2012) ont été exposés aux étudiants.

Dans le deuxième module, trois séances ont été consacrées à la mise en œuvre de l'activité de la boîte du pâtissier (décrite dans la section précédente), où les futurs enseignants ont été invités à se mettre en position d'*élève*. L'objectif principal de ce module est de leur faire vivre une activité mathématique peu familière qui pourrait, sous certaines conditions, exister dans une classe ordinaire. Puis, par groupe, les étudiants doivent étudier la situation de modélisation et rédiger un rapport qui décrive les questions qu'ils se sont posées et les réponses qu'ils y ont apportées (voir Annexe 1). Le troisième module s'est étalé sur trois séances, au cours desquelles les étudiants ont analysé le processus de modélisation tel qu'il a été vécu. Des mises en commun des rapports des étudiants ont permis à la formatrice d'institutionnaliser les éléments du processus de modélisation ainsi que leur analyse (limitations des différents types de modèles, questions qu'ils permettent de poser, etc.). Les modules 4 et 5 n'ont pas été implémentés.

Dans la section suivante, nous présentons l'analyse des rapports des étudiants qui nous ont permis d'identifier les modèles qui se construisent successivement, l'évolution du système avec l'avancée du processus et le rôle de modèles préexistants (comme la *règle de trois* ou la *proportionnalité*) dans le milieu des étudiants (voir Annexe 2). Du fait de la réversibilité système/modèle, le modèle de référence que nous avons conçu pour analyser les praxéologies de modélisation peut devenir le système étudié selon une dialectique outil/objet. Ainsi, symétriquement, l'observation de praxéologies effectives joue le rôle de milieu pour mettre à l'épreuve notre modèle de référence. Cette confrontation à l'empirie pourrait alors nous conduire à compléter ou modifier notre MPR-Boîte-Pâtissier et/ou à reconsidérer sa

représentation graphique par emboîtements de modèles successifs si elle apparaissait mal adaptée ou avec des limitations pour décrire les phénomènes didactiques identifiés.

## ANALYSE DE PRAXEOLOGIES DE MODELISATION

Nous considérerons à présent le rapport de deux groupes d'étudiants que nous appellerons *groupe A* et *groupe B* dans la suite. Ces rapports sont élaborés tout au long du module 2 du PER-FE quand les enseignants en formation assument le rôle d'*étudiants* lors de l'activité de modélisation de la boîte du pâtissier. L'annexe 2 inclut un résumé de ces deux rapports. La situation est présentée ainsi :

Nous voulons aider un chef pâtissier qui a besoin d'aide pour emballer ses gâteaux dans des boîtes. Elle veut utiliser le même type de boîtes qu'elle a déjà utilisé. Elle collecte actuellement toutes les tailles des gâteaux et autres produits sucrés qu'elle vend dans sa pâtisserie pour nous en faire part (très bientôt !). Mais, avant d'avoir cette information, nous devons nous familiariser avec le type de boîtes qu'elle utilise pour emballer les gâteaux afin de pouvoir l'aider.

Une fois que les étudiants savent réaliser des boîtes, les questions génératrices de l'étude se posent : Comment construire des boîtes pour aider le pâtissier à emballer la variété de gâteaux qu'il propose ? Quelle relation existe-t-il entre les tailles des gâteaux, les tailles du matériau initial (papier ou carton) que nous utilisons et les tailles des boîtes fabriquées ? À ce moment-là, le système  $S_0$  est fait de feuilles, de boîtes et de la méthode de pliage. L'étude est structurée par trois phases, chacune associée à une question :

- $Q_{01}$  : Quelles sont les dimensions d'une boîte issue d'un papier dont les dimensions sont connues ?
- $Q_{02}$  : Quels sont les formats de papier initiaux dont nous avons besoin pour construire une boîte avec des dimensions spécifiques ?
- $Q_{03}$  : Comment construire les boîtes avec couvercles dont le pâtissier a besoin ?

Notons que le milieu de l'étude de la question  $Q_{03}$  s'enrichit de la donnée par le chef pâtissier des dimensions des boîtes requises pour emballer différents gâteaux de formes différentes, notamment le *Braç de gitano* (gâteau roulé) et le *Torró* (nougat) de forme allongée et un gâteau de forme arrondie. Le rapport, qui explicite comment les réponses se construisent dans chaque phase, doit contenir une lettre à adresser au chef pâtissier (Annexe 1). A l'issue de chaque phase, une mise en commun est réalisée, geste didactique qui permet d'enrichir le milieu des étudiants. Considérant la question  $Q_{01}$ , le *groupe A* fabrique des boîtes avec des feuilles de dimensions différentes et mesure leurs dimensions. La réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est donnée sous la forme d'une liste de 10 mesures de dimensions du fond des boîtes ( $x, y$ ) à partir des dimensions des feuilles ( $l, L$ ), en tenant compte de l'orientation des plis ou de la possibilité matérielle de réaliser concrètement les boîtes. Le système défini par le groupe à cette étape est  $S_{Ph1} = S_0 \cup \{l, L, x, y\}$  et le modèle sur lequel se fonde la réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est le modèle  $M_1$  (empirique-mesure) de notre MPR-Boîte-Pâtissier. En réponse à la question  $Q_{02}$ , ce même groupe cherche une relation entre les dimensions en explorant un modèle proportionnel entre dimensions, finalement rejeté. Le groupe s'intéresse à l'aire du fond de boîte, sans succès, mobilisant un modèle qui complète le modèle  $M_1$  de notre MPR-Boîte-Pâtissier,  $M_1^\#$  empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité. En s'appuyant sur la mesure des feuilles dépliées, le groupe produit une description discursive de la relation entre les dimensions de la boîte ( $y$  compris sa hauteur) et celles de la feuille. Cette réponse  $R_{02}^\heartsuit$  se construit sur un modèle  $M_2^b$  géométrico-empirique, qui peut être vu comme une altération du modèle  $M_2$  géométrico-numérique de notre MPR-Boîte-Pâtissier dans le sens où tous les plis ne sont pas considérés, seulement le fond de boîte et sa hauteur à partir d'une feuille dépliée, ce qu'illustre la comparaison des figures 3 et 7. Le système considéré dans cette phase intègre au système précédent, une nouvelle dimension (la hauteur de la boîte  $h$ ), une nouvelle grandeur (l'aire du fond de boîte  $A$ ), le modèle  $M_1$  mobilisé précédemment :  $S_{Ph2} = S_{Ph1}$

$\cup\{h, A, M_1\}$ . L'étude de la question  $Q_{03}$  amène le groupe à prendre en compte la place nécessaire pour les doigts quand on retire les gâteaux des boîtes (ajout arbitraire de 2 cm aux dimensions données) et à augmenter de 0,3 cm les dimensions du fond de boîte pour constituer le couvercle, comme l'illustre la figure 7 pour un gâteau de diamètre 6 cm.

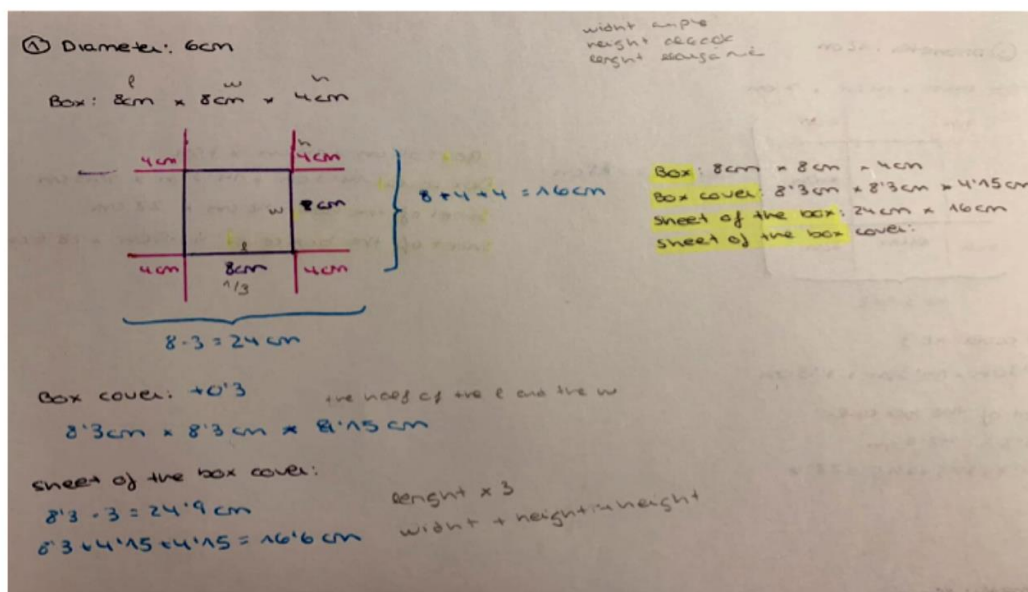


Figure 7. – Extrait du rapport rédigé par le groupe A : calculs des dimensions d'une feuille.

En revanche, le groupe envisage un patron de boîte alternative pour les gâteaux « Braç de gitano » et « Torrò ». Dans cette phase, le système considéré intègre au système précédent les modèles mathématiques conçus au cours de la phase précédente et les dimensions des gâteaux pour lesquels il faut fabriquer des boîtes,  $S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_1^\#, M_2^b, \text{gâteaux}\}$ , tandis que le modèle mathématique sur lequel se construit la réponse reste le modèle  $M_2^b$ . Le rapport se conclut par une lettre au chef pâtissier contenant un tableau qui précise pour chaque catégorie de gâteaux les dimensions de la boîte, de son couvercle et des feuilles nécessaires pour les réaliser.

Considérant la question  $Q_{01}$  le groupe *B* commence par envisager l'effet de l'orientation de la feuille au moment du pliage, puis fabrique et mesure les dimensions pour calculer l'aire du fond de la boîte avec des feuilles A3, A4, A5. Il s'agit alors de rechercher un modèle proportionnel entre les aires du fond des boîtes, d'une part et entre les aires des feuilles et des fonds de boîtes, d'autre part. Leur réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est qu'il y a proportionnalité entre aires en dépit des calculs réalisés du fait d'erreurs de mesure. Le système considéré par le groupe à cette étape est  $S_{Ph1} = S_0 \cup \{\text{feuilles A3-A4-A5}, l, L, x, y, A, \text{orientations } \uparrow \rightarrow\}$  et le modèle sur lequel se fonde la réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est le modèle  $M_1^\#$  empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité. En réponse à la question  $Q_{02}$ , ce groupe utilise la hauteur de la boîte comme variable prépondérante après avoir découvert en fabriquant des boîtes qu'il n'était pas possible de construire avec ce procédé des boîtes de n'importe quelle hauteur. Le cœur de cette phase consiste à chercher les relations algébriques entre cette hauteur et les autres dimensions, en particulier une relation de proportionnalité. Dans cette phase, le système considéré inclut une nouvelle dimension, la hauteur de la boîte  $h$ , les modèles  $M_1$  et  $M_1^\#$  mobilisés précédemment, ainsi que les erreurs de mesure comme argument pour maintenir le modèle de proportionnalité comme référence ( $M_1^\#$ ) en dépit des calculs :  $S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, M_1^\#, \text{erreurs de mesure}\}$ . Un nouveau modèle est mobilisé :  $M_3$  qui intègre le modèle  $M_2$  comme l'illustre la figure 8.

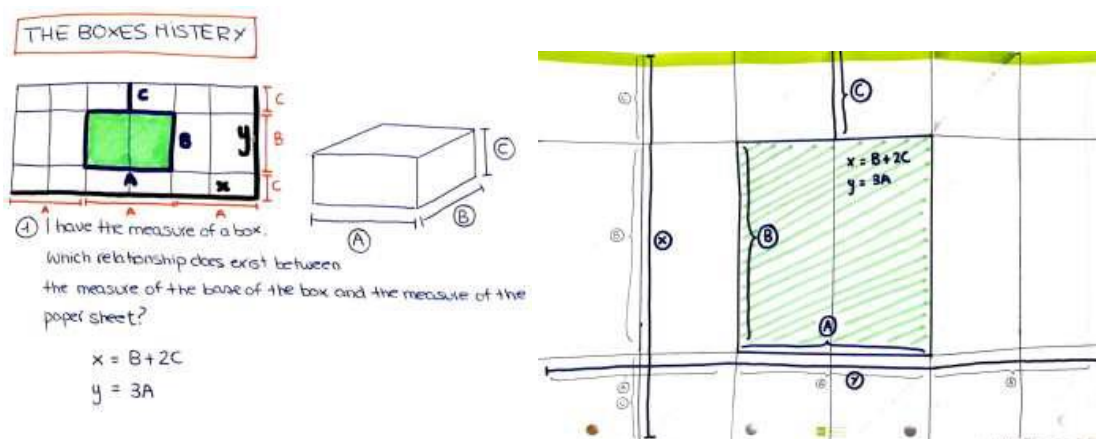


Figure 8. – Extrait du rapport du groupe : relation algébrique entre les dimensions.

L'étude de la question  $Q_{03}$  commence par la prise en compte, comme le groupe précédent, de la place nécessaire pour les doigts pour retirer les gâteaux des boîtes et propose (arbitrairement) différentes valeurs suivant le nombre ou les types de gâteaux. Le travail mathématique ensuite repose sur une étude de la hauteur des boîtes en fonction de la hauteur des gâteaux. Lorsque les dimensions du fond de la boîte sont grandes, la hauteur l'est aussi. Contrairement au groupe précédent qui va chercher de nouveaux pliages, ce groupe propose d'adapter le pliage en modifiant la largeur des bandes qui vont former les bords de la boîte (voir figure 9).

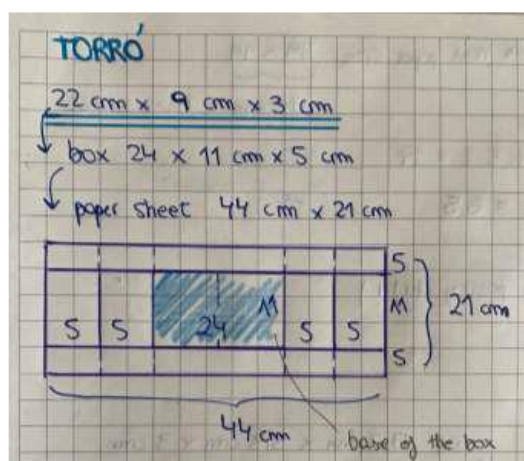


Figure 9. – Extrait du rapport du groupe B : modification du procédé de construction.

Dans cette phase, le système considéré intègre au système précédent les modèles mathématiques conçus au cours de la phase précédente et les dimensions des gâteaux pour lesquels il faut fabriquer des boîtes,  $S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_2, M_3, \text{gâteaux}\}$ , sans mobiliser de nouveaux modèles que ceux déjà conçus.

Cette confrontation à l'empirie par l'observation de praxéologies de modélisation effectives conduit à interroger le modèle de référence MPR-Boîte-Pâtissier élaboré dans la première partie de ce texte qui ne rend pas visibles les différences entre les groupes A et B. Le groupe A ne recourt par à un modèle algébrique mais conçoit des modèles géométriques où la composante empirique est plus développée. Le groupe B de son côté développe tous les modèles jusqu'au modèle algébrique et un travail sur les grandeurs pour délimiter le système et le modéliser. Son rapport à l'empirie se caractérisant par le recourt à un argument sur les erreurs de mesure pour maintenir une hypothèse de proportionnalité en dépit des résultats des calculs. Notons enfin que le procédé de pliage fait partie du système et que les deux groupes choisissent soit de changer

de patron (*groupe A*), soit d'adapter le pliage (*groupe B*) pour mieux répondre aux besoins. La délimitation du système inclut les questions que l'on se pose à son propos.

Dès la première phase, le *groupe A* fabrique et mesure les dimensions de la boîte tandis que le *groupe B* fabrique et mesure les dimensions pour calculer les aires à la recherche d'un modèle proportionnel. Nous proposons donc d'inclure dans  $M_1$  une composante « grandeur », en plus des composantes « empirique » et « mesure » en intégrant le modèle  $M_1^{\#}$  à  $M_1$ . Nous avons constaté aussi l'existence d'un modèle qui n'est plus  $M_1$  mais pas complètement encore le modèle  $M_2$  tel que nous l'avons défini. Par ailleurs, il existe un modèle intermédiaire  $M_2^b$  dont la composante empirique s'exprime par le fait que la feuille n'est pas encore regardée comme une figure géométrique où tous les plis sont mis en relation avec ses dimensions (longueur et largeur). Au-delà des modèles construits, ce qui différencie le parcours des deux groupes, c'est la délimitation et l'évolution des systèmes et comment elle s'articule à l'évolution des modèles à partir des questions qui se posent pour l'étude. Ceci nous conduit à devoir proposer une autre représentation (figure 10) du processus de modélisation, où  $M_1'$ ,  $M_1''$  et  $M_2'$  indiquent de possibles modèles intermédiaires entre  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

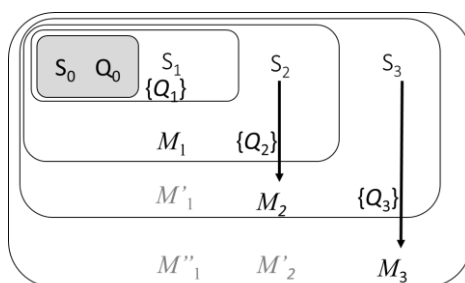


Figure 10. – Représentation du processus de modélisation.

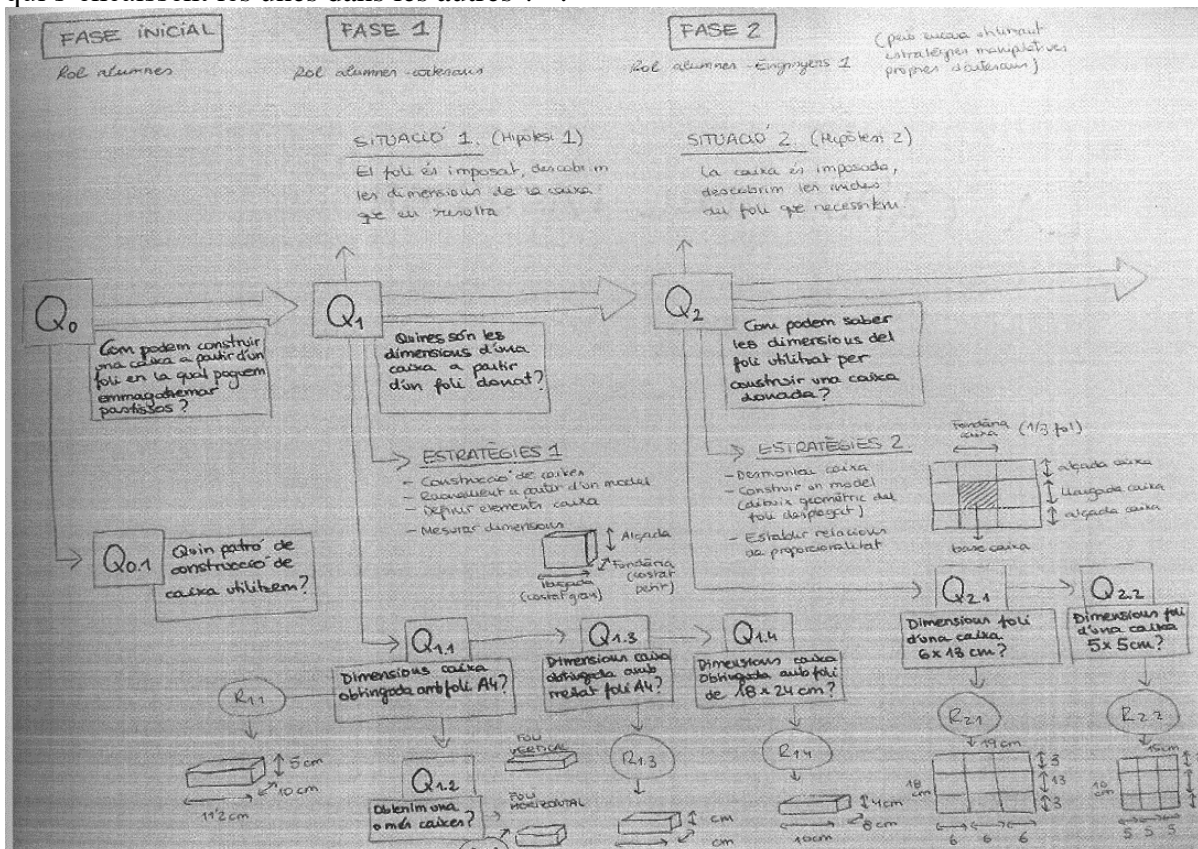
Dans cette analyse de praxéologies de modélisation de deux groupes d'étudiants, nous avons considéré l'évolution conjointe des systèmes et des modèles sans prendre en compte ce qui est le moteur de cette évolution : le jeu de questions-réponses qui alimente le processus de modélisation. Ensuite, nous allons présenter comment le parcours d'étude et de recherche pour la formation dont sont issus ces rapports fait vivre ce jeu de questions-réponses. Ceci permettra de discuter de la façon dont les cartes Q-R peuvent être un appui pour développer les discours technologiques des enseignants, condition de l'évolution de praxéologies de modélisation muettes vers des praxéologies fortes.

## UN OUTIL D'ANALYSE : LES CARTES DE QUESTIONS-REPONSES

Nous constatons que les modèles transitoires et leur évolution, ainsi que les modèles écartés tout au long de l'activité de recherche ont tendance à disparaître dans l'histoire de l'activité de modélisation. Ce qui reste est souvent le modèle considéré comme le plus performant, soumis généralement à une réduction ostensive importante. Nous faisons l'hypothèse que la prise de conscience de l'existence de différents modèles et de leurs corrélations est un aspect important dans l'étude de la modélisation et la formation des futurs enseignants. Une question se pose alors : Quel geste didactique mettre en place pour conserver le parcours d'étude et de recherche vécu ?

Dans le module 2, les enseignants en formation sont invités à analyser l'activité de modélisation qui a été expérimentée. Il leur est demandé d'endosser le rôle d'« analyste mathématique » et « analyste didactique » de l'activité vécue et de sa gestion dans la classe. L'ensemble des rapports remis par chaque groupe, les discussions en groupe-classe, les forums partagés et les présentations de la formatrice constituent un moyen partagé très riche pour recueillir des traces et des preuves empiriques de l'activité vécue.

Dans le rôle d'analystes mathématiques, les étudiants analysent l'activité mathématique réalisée. Pour ne pas réduire une telle analyse à une liste de contenus abordés ou à la simple correction des réponses, l'importance d'analyser la dynamique établie entre les questions abordées, les systèmes, les modèles et les réponses données est discutée collectivement. Cela conduit la formatrice à proposer l'utilisation des *cartes questions-réponses* (Winsløw, Matheron, & Mercier, 2013) comme outil principal d'analyse. Est ainsi présenté un premier schéma de carte avec la structure des phases, les questions les plus caractéristiques de chaque phase et les réponses qui ont été traitées. Il est demandé aux étudiants de le compléter, dans un premier temps, à partir de leurs rapports, puis d'étendre ou d'inclure d'autres questions, réponses, techniques du groupe classe. Des indications sont également données sous la forme de caractéristiques cartographiques de type questions-réponses (Q-R). La figure 11 illustre un exemple de carte de questions-réponses élaborée par l'un des groupes de travail de l'année 2015-16 (enseignement en catalan). Les principales questions abordées sont :  $Q_0$  « Comment peut-on construire une boîte à partir d'une feuille pour y garder des gâteaux ? »,  $Q_1$  « Quelles sont les dimensions d'une boîte à partir d'une feuille donnée ? »,  $Q_2$  « Comment savoir les dimensions de la feuille utilisée pour construire une boîte donnée ? »,  $Q_3$  « Comment savoir les dimensions de la boîte à partir de celles de la feuille ? »,  $Q_4$  « Comment construire des boîtes qui s'encaissent les unes dans les autres ? ».



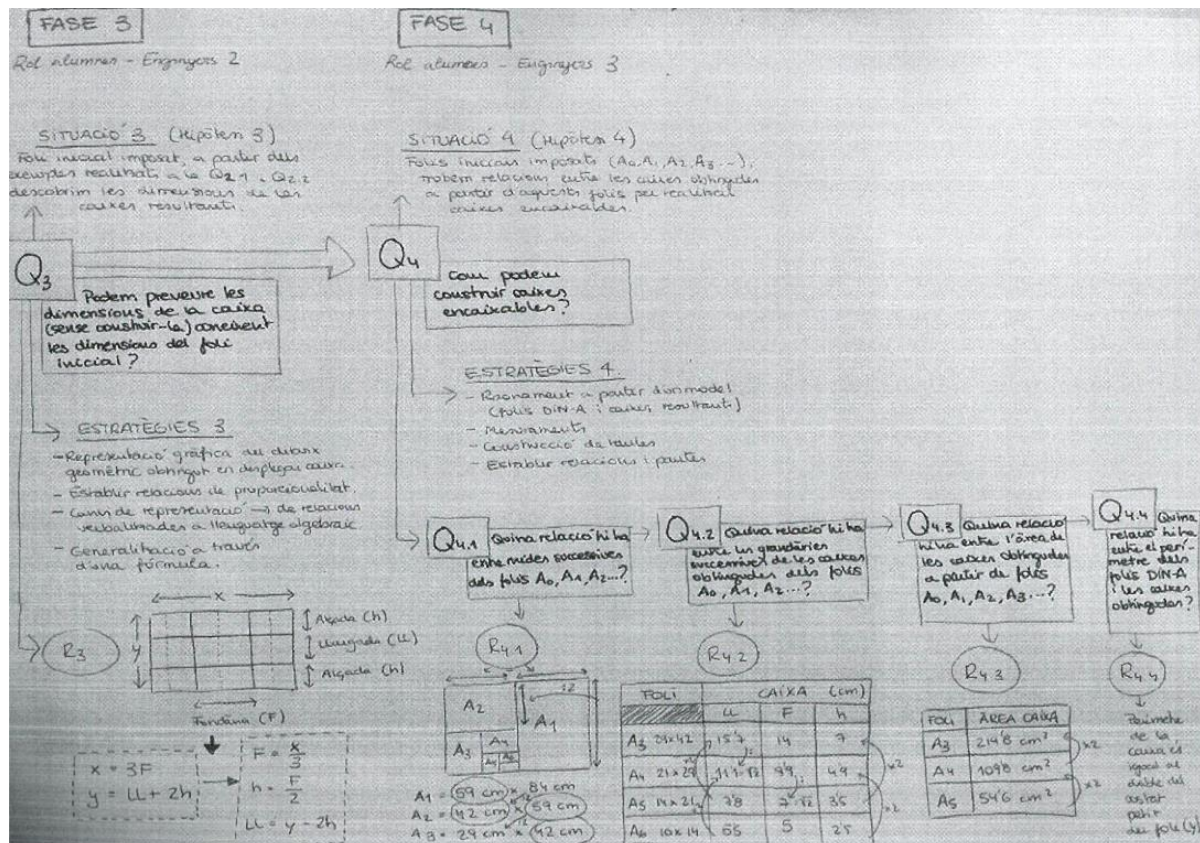


Figure 11. – Exemple d'une carte de questions-réponses (texte en catalan)

On y voit comment les réponses révèlent les modèles construits, même si les systèmes ne sont pas explicités. Une fois la carte Q-R complétée, elle est utilisée comme outil d'analyse dans différentes activités proposées dans la formation, comme l'étude par tous les étudiants d'une même carte produite par un des groupes. Les cartes Q-R explicitant les trajectoires de modélisation suivies par les groupes, permettent de les décrire et de les évaluer. Les discussions sur ces trajectoires permettent aux groupes d'enrichir leurs propres cartes Q-R en incluant de nouvelles questions, réponses et stratégies négligées dans un premier moment et qui leur paraissent importantes à considérer. La figure 12 illustre comment un groupe analyse le travail d'un autre groupe. En vert, les étudiants superposent sur la carte Q-R de leur propre trajectoire de modélisation (figure 11) une autre trajectoire possible.

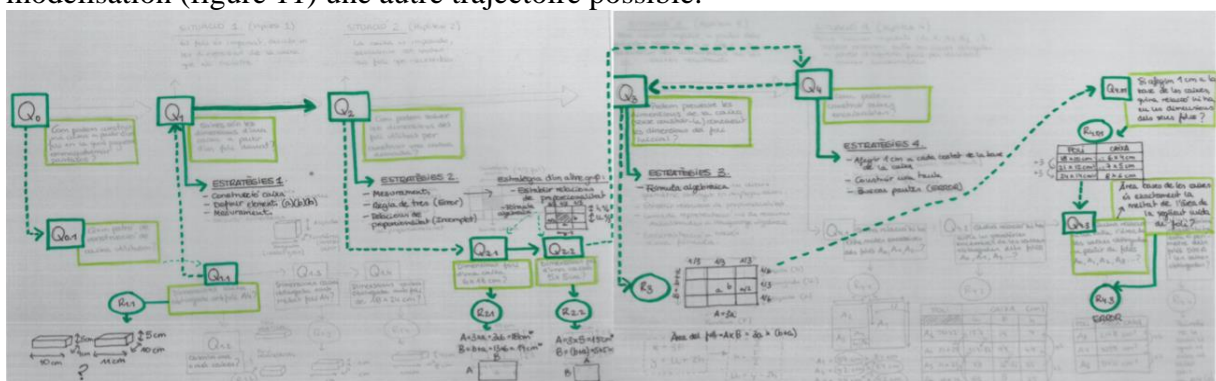


Figure 12. – Utilisation de la carte Q-R pour décrire les parcours de modélisation d'un autre groupe.

Les cartes Q-R produisent une hiérarchisation des questions en rendant compte de la temporalité du processus de modélisation par la restitution de l'ordre des questions traitées et des réponses apportées. Elles matérialisent et laissent une trace de la construction progressive des modèles.

Elles sont un dispositif didactique qui permet l'analyse de la dynamique du processus de modélisation et la conception de nouvelles trajectoires de modélisation. Leur expérimentation en formation a montré qu'il s'agit d'un outil puissant pour alimenter les réflexions autour de la modélisation mathématique des situations d'enseignement.

## CONCLUSION

La modélisation est progressivement entrée dans les curriculums de différents pays en même temps que la démarche d'investigation y devenait un élément structurant sous l'impulsion des évaluations internationales comme TIMSS ou PISA (Barquero et al., 2018). Cette évolution conduit les formateurs d'enseignants à se poser la question : quelle stratégie pour former à l'enseignement de la modélisation ? Or des travaux attestent de la difficulté pour les enseignants, notamment de l'école primaire, de percevoir ce qu'est un processus de modélisation. Difficulté qui s'observe par la mise en œuvre de praxéologies muettes où la solution d'un problème est enseignée plutôt que le processus qui permet de produire cette solution. Ce texte présente donc la réponse apportée par l'Université de Barcelone en considérant les outils didactiques qui peuvent être apportés aux enseignants pour dépasser cette difficulté. Quel dispositif mettre en œuvre qui révèle les spécificités du processus de modélisation et quel outil didactique peut-on doter les (futurs) enseignants pour analyser et produire des situations d'enseignement ?

Le système initial sur lequel se construit cette réponse est fait du modèle des PER-FE (Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero et al., 2018) et du modèle du processus de modélisation proposé par Chevallard (1989). De façon à illustrer l'analyse didactique à conduire lors de l'élaboration d'un tel PER-FE, nous avons présenté dans la première partie la construction a priori d'un modèle praxéologique de référence pour l'étude d'une situation de modélisation largement éprouvée, la boîte du pâtissier. Pour rendre compte de la modélisation comme un processus évolutif, nous l'avons représenté comme un emboîtement de modèles associés à un système qu'il s'agit lui aussi d'explicitier. Or l'élaboration d'un modèle vient enrichir la compréhension d'une part de cette réalité modélisée. Cette nouvelle lecture du réel qu'offre le couple système-modèle peut générer de nouvelles questions. Le modèle initial devient alors un élément constitutif d'un nouveau système sur lequel se construit un nouveau modèle. C'est cette dynamique que nous avons montré dans l'analyse a priori de la situation boîte du pâtissier. Si l'on peut considérer un système comme le milieu sur lequel se construit un modèle, le système n'est qu'une partie du milieu de la situation didactique (au sens de la théorie des situations didactiques). Tout élément du milieu n'est pas nécessairement élément du système qui se définit en considérant les variables supposées déterminantes pour répondre à la question. De ce fait, l'emboîtement des modèles ne peut se confondre avec une structuration du milieu. Sur cette base, un modèle praxéologique de référence du processus de modélisation MPR-boîte-pâtissier est construit dans la première partie de ce texte. Le domaine de validité d'un modèle se mesure à son adéquation avec la réalité qu'il modélise notamment par une confrontation à l'empirie, c'est-à-dire ici, à des praxéologies de modélisation effectives. Cette confrontation, présentée à travers l'étude de deux rapports d'étudiants, a conduit à intégrer de nouveaux éléments dans le MPR-boîte-pâtissier. Nous faisons l'hypothèse qu'un modèle praxéologique d'une modélisation mathématique n'a pas qu'une fonction heuristique pour le chercheur, il est aussi une grille d'analyse didactique pour les enseignants lorsqu'ils observent les praxéologies mises en œuvre par les élèves et permet de produire des connaissances didactiques sur les situations d'enseignement. Cependant la représentation du MPR sous forme de modèles emboîtés masque les questions qui sont le moteur du processus. Aussi est-il complété par les cartes questions-réponses.

L'objectif de cet atelier était de présenter un dispositif de formation pour les enseignants d'école en forme de PER-FE centré sur les processus de modélisation. Les productions des étudiants ayant suivi cette formation ont servi à illustrer les différentes démarches du processus et à apporter quelques matériaux pour son analyse. Celle-ci reste néanmoins en grande partie à produire.

#### RÉFÉRENCES

- BARQUERO, B., BOSCH, M., ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- BARQUERO, B., BOSCH, M., WOZNIAK, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*, Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408705>
- BARQUERO, B., FLORENSA, I., JESSEN, B., LUCAS, C., WOZNIAK, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. *ICMI Studies 24. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities*. University of Tsukuba, Japan. (pp. 189-197).
- CHAPPAZ, J., MICHON, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N* 72, 19-32.
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- FLORENSA, I., BOSCH, M., GASCON, J. (2020). Question-answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-23.
- OLARRIA, A. R. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Thèse de doctorat, Universidad Autónoma de Madrid).
- WINSLØW, C., MATHERON, Y., & MERCIER, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267-284.
- WOZNIAK, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 7-55.

## ANNEXES

*Annexe 1*

Nous présentons ici les questions posées aux étudiants et qui structurent le plan des rapports à présenter. En plus de faire le récit du parcours d'étude et de recherche, le rapport doit contenir la réponse au chef pâtissier. Celle-ci prend souvent la forme d'un tableau de mesures.

## INTRODUCTION

1. What do we have to do?
2. Initial question.
3. Instructions to build the box.

## PHASE 1: Building boxes and measuring their sizes

1. Which particular cases (paper sheets) and questions have you addressed? Which answers have you found out?
2. Which strategies did you follow?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions.

## PHASE 2: But, if what we know is the box we want ...

1. Which questions have you addressed?
2. Which answers have you found out and how?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions after Phase 2.

## PHASE 3: Let us give an answer to the pastry chef!

Specific sizes and patterns of construction.

1. Which questions have you addressed?
2. Which answers have you found out and how have you found them?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions after Phase3.

## Annexe 2

Synthèse des rapports des groupes A et B pour l'étude du problème de la boîte du pâtissier : les systèmes, les questions, les réponses, les modèles.

	<i>Groupe A</i>	<i>Groupe B</i>
<i>Q</i> <sub>01</sub>	<p><math>S_{Ph1} = S_0 \cup \{l, L, x, y\}</math>  <math>M_1</math> empirique-mesure  <math>R_{01}^\heartsuit</math>: liste de 10 mesures de dimensions de fond de boîtes (<math>x, y</math>) pour différentes dimensions de feuille (<math>l, L</math>).</p>	<p><math>S_{Ph1} = \{\text{feuilles A3-A4-A5}, l, L, x, y, A, \text{orientations } \uparrow \rightarrow\}</math>  <math>Q_{1.1}</math>: effet de l'orientation des plis sur la boîte et l'aire des fonds de boîtes ?  <math>\rightarrow R_{1.1}^\heartsuit</math>: pas les mêmes boîtes.  <math>M_1</math>: empirique-mesure  <math>Q_2</math>: Proportionnalité des dimensions boîte/feuille ?  <math>\rightarrow R_{1.2}^\heartsuit</math>: oui, les sommets sont alignés sur une diagonale.  <math>M_1^\#</math> empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité  <math>Q_3</math>: proportionnalité entre les aires des bases ?  <math>\rightarrow R_{1.3}^\heartsuit</math>: proportionnalité malgré les calculs du fait d'erreurs de mesures.  <math>M_1^\#</math>  <math>Q_4</math>: connaissant les dimensions de la feuille, quelle est l'aire de la boîte ?  <math>\rightarrow R_{1.4}^\heartsuit</math>: oui mais il faut une référence  <math>M_1^\#</math></p>
<i>Q</i> <sub>02</sub>	<p><math>S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, A\}</math>  <math>Q_{2.1}</math>: peut-on utiliser une règle de trois ?  <math>\rightarrow R_{2.1}^\heartsuit</math>: Non  <math>M_1^\#</math> empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité  <math>Q_{2.2}</math>: L'aire intervient ?  <math>\rightarrow R_{2.2}^\heartsuit</math>: Non.  <math>M_1^\#</math>  <math>Q_{2.3}</math>: quel lien entre <math>l, L, h</math> ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: [description discursive]  <math>M_2^b</math> géométrico-empirique (mesure sur feuille dépliée)</p>	<p><math>S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, M_1^\#, \text{erreurs de mesure}\}</math>  <math>Q_{2.1}</math>: Peut-on construire n'importe quelle boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.1}^\heartsuit</math>: non, <math>h</math> compte  <math>M_1</math>: empirique-mesure  <math>Q_{2.2}</math>: Relation entre <math>h</math> et (<math>x, y</math>) ?  <math>\rightarrow R_{2.2}^\heartsuit</math>: <math>h = x/2</math>  <math>M_2, M_3</math>  <math>Q_{2.3}</math>: proportionnalité entre la hauteur et les autres mesures ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: <math>h = L/6</math>  <math>M_2, M_3</math>  <math>Q_{2.4}</math>: Différentes feuilles peuvent donner la même boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: Non, <math>h</math> ne sera pas la même  <math>M_3</math> avec validation dans <math>M_1</math>  <math>Q_{2.4}</math>: Règle de trois entre les dimensions feuille/boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.4}^\heartsuit</math>: Non.  <math>M_3</math></p>

<sup>2</sup> Cette question est traitée d'emblée et reprise avec la liste des questions ensuite. Elle est placée ici sans être reprise dans la liste des questions ensuite. La numérotation des questions n'est donc pas la même que dans le rapport mais cela respecte mieux la chronologie du travail des étudiants.

<p><math>Q_{03}</math></p>	<p><math>S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_1^{\#}, M_2^b, \text{gâteaux}\}</math>  <math>Q_{3.1}</math> : Quel espace laisser entre la boîte et les gâteaux ?  <math>\rightarrow R_{3.1}^{\heartsuit}</math> : 2 cm  <math>M_1</math>  <math>Q_{3.2}</math> : Quel rapport entre la boîte et le couvercle ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : ajout de 0,3 cm pour (x,y)  <math>M_2^b</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles boîtes pour les « braç de gitano » ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : Nouveaux patrons sans pliage</p>	<p><math>S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_2, M_3, \text{gâteaux}\}</math>  <math>Q_{3.1}</math> : Quelles dimensions des boîtes en fonction des gâteaux ?  <math>\rightarrow R_{3.1}^{\heartsuit}</math> : ajout de 2 cm, 3 cm ou 4 cm suivant les cas pour toutes les dimensions.  <math>M_1</math>  <math>Q_{3.2}</math> : Quelles dimensions de papier ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : suivant les dimensions du fond, la hauteur de la boîte peut être trop haute pour le gâteau : modification du procédé de construction.  <math>M_2</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles dimensions du couvercle ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : ajout de 0,3 cm pour (x,y) et hauteur égale à la moitié de la hauteur de la boîte (avec nouveau procédé de construction).  <math>M_2</math>  <math>Q_{3.4}</math> : Peut-on augmenter la base et maintenir la hauteur ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : oui avec le nouveau procédé.  <math>M_3</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles boîtes pour les « braç de gitano » et le « torró » ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : Nouveau procédé  <math>M_2</math></p>
----------------------------	---	---